

➤ التمرين الأول (04 نقاط) :

عَيِّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية، مع التبرير:

(1) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل : $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^x + 2$

على المجال $[0; \ln 2]$ ، الدالة f :

(أ) متناقصة تماما ، (ب) متزايدة تماما ، (ج) غير رتيبة

(2) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = \cos x$ ، القيمة المتوسطة m للدالة g على المجال $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$

تساوي : (أ) $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ ، (ب) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ ، (ج) $-\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$

(3) لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها 2 و حدها الأول u_0 ، حيث : $u_0 = 1$

من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = e^{u_0} \times e^{u_1} \times \dots \times e^{u_n}$

S_n يساوي : (أ) $e^{2(n+1)}$ ، (ب) $e^{(n+1)^2}$ ، (ج) e^{n^2+1}

(4) يحتوي وعاء على 6 كريات سوداء و 4 كريات بيضاء ، نسحب منه 5 كريات على التوالي مع الإرجاع احتمال الحدث A : "سحب 3 كريات سوداء و كرتين بيضاوين" ، هو :

(أ) $P(A) = \frac{10}{21}$ ، (ب) $P(A) = \frac{1}{21}$ ، (ج) $P(A) = \frac{216}{625}$

➤ التمرين الثاني (05 نقاط) :

(u_n) متتالية عددية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 بحيث :

$u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$

(1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 3}$

(2) برهن بالتراجع ، انه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 < u_n \leq 0$

(3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أن (u_n) متقاربة

(4) (v_n) متتالية معرفة في المجموعة $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$

أ. بين أن (v_n) متتالية حسابية ، عين أساسها و حدها الأول

ب. عين v_n ثم u_n بدلالة n ، استنتج ثانية أن (u_n) متقاربة

(5) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$ و $T_n = e^{\frac{u_0}{u_0+1}} \times e^{\frac{u_1}{u_1+1}} \times \dots \times e^{\frac{u_n}{u_n+1}}$

عين S_n و T_n بدلالة n ، هل المتتالية (T_n) متقاربة؟ برر إجابتك

➤ التمرين الثالث (04 نقاط) :

(I) نعتبر وعاء U_1 يضم 6 كريات مرقمة كما يلي 1 ، 1 ، 1 ، 1 ، 3 و 4 ، وعاء U_2 يضم 4 كريات مرقمة 1 ، 2 ، 3 و 4

نسحب من علبة تضم 6 بطاقات مرقمة من 1 إلى 6 ، بطاقة واحدة إذا ظهر الرقم 3 أو 5 نسحب كرية واحدة من

الوعاء U_1 أما إذا ظهر رقم آخر فإننا نسحب كرية واحدة من الوعاء U_2

(الكريات متماثلة لا نميز بينها باللمس)

نعتبر الاحداث : A : "اختيار العلبة U_1 " ، B_1 : "سحب كرية تحمل الرقم 1 من العلبة U_1 "

و B_2 : "سحب كرية تحمل الرقم 1 من العلبة U_2 "

(1) أنقل و أكمل شجرة الاحتمالات

(2) أحسب احتمال الحدث B : "سحب كرية تحمل الرقم 1"

(II) نجمع الآن الكريات في وعاء واحد U_3

نسحب عشوائيا من الوعاء U_3 ثلاث كريات في آن واحد

(1) أحسب احتمال الحصول على

N الكريات الثلاث تحمل أرقام فردية

N كرية على الأقل من الكريات الثلاث تحمل رقما فرديا

ج. كرية على الأكثر من الكريات الثلاث تحمل رقما فرديا

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب، عدد الكريات التي تحمل الرقم 1

عين قانون المتغير العشوائي X ، ثم أحسب $E(1900X - 1965)$

➤ **التمرين الرابع (07 نقاط):**

(I) g هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 3 - 2 \ln x$

(1) ادرس تغييرات الدالة g .

(2) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

(II) f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x^2 - 1}{2x}$

نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، فسر النتيجة المحصل عليها هندسيا

(3) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

(4) ليكن (D) المستقيم الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x$

أ. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right]$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب. أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (D)

(5) أ. أنشئ المستقيم (D) والمنحني (C_f) .

ب. أحسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمت التي معادلاتها $x = e$ ، $x = 1$ ، $y = \frac{x}{2}$

(6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ ب: $h(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - x^2}{|x|} - \frac{\ln x^2}{|x|} \right]$ ، نسمي (C_h) المنحني الممثل لها

أ. بين أن h دالة زوجية

ب. اشرح كيفية رسم المنحني (C_h) ، أرسم (C_h) في المعلم السابق .

انتهى

✓ التمرين الأول :

(1) الاقتراح الصحيح هو أ ، لأن :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل x من $\mathbb{R} : f'(x) = e^{2x} - 3e^x$ أي أن $f'(x) = e^x(e^x - 3)$
وبما أن من أجل كل x من $\mathbb{R} : e^x > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة الدالة $e^x - 3$ ، وعليه :

$f'(x) \geq 0$ تكافئ $e^x - 3 \geq 0$ ومنه $f'(x) \geq 0$ تكافئ $e^x \geq 3$ أي أن $f'(x) \geq 0$ تكافئ $x \geq \ln 3$

نستنتج أن $f'(x) < 0$ تكافئ $x < \ln 3$ ، وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty; \ln 3[$ و بما أن $[0; \ln 2]$

محتوى في $]-\infty; \ln 3[$ فإن الدالة f متناقصة تماما على $[0; \ln 2]$

(2) الاقتراح الصحيح هو ج ، لأن :

$$m = \frac{3}{2\pi} \left[\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] \text{ وعليه } m = \frac{3}{2\pi} \left[\sin x \right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \text{ إذن } m = \frac{1}{\frac{2\pi}{3}} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos x \, dx \text{ ومنه } m = \frac{1}{\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} g(x) \, dx$$

$$m = \frac{-3\sqrt{3}}{2\pi}$$

(3) الاقتراح الصحيح هو ب ، لأن :

من أجل كل عدد طبيعي $n : S_n = e^{u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n}$ وبما أن المتتالية (u_n) حسابية فإن

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n+1}{2}(2+2n) \text{ فإن } u_n = 1+2n \text{ و } u_0 = 1 \text{ وبما أن } u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$$

$$S_n = e^{(n+1)^2} \text{ أي أن } u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1)^2 \text{ وبالتالي } S_n = e^{(n+1)^2}$$

(4) الاقتراح الصحيح هو ج ، لأن :

بما أن السحب يتم على التوالي مع الإرجاع فإننا نوظف قوائم و عليه :

• عدد الحالات الممكنة هي 10^5 : عدد الحالات المواتية للحدث A هي $34560 = C_5^3 \times C_2^2 \times (6^3 \times 4^2)$

$$P(A) = \frac{34650}{100000} = \frac{216}{625} \text{ ينتج أن :}$$

✓ التمرين الثاني :

$$(1) \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \text{ و بما أن } u_{n+1} = \frac{a(u_n + 3) + b}{u_n + 3} = \frac{au_n + 3a + b}{u_n + 3}$$

$$\text{فإن } a = 1 \text{ و } 3a + b = -1 \text{ ومنه } a = 1 \text{ و } b = -4 \text{ ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = 1 - \frac{4}{u_n + 3}$$

طريقة ثانية :

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{u_n + 3 - 4}{u_n + 3} \text{ ومنه من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{u_n + 3} - \frac{4}{u_n + 3}$$

$$\text{ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = 1 - \frac{4}{u_n + 3}$$

(2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : -1 < u_n \leq 0$:

أ. من أجل $n = 0$: $-1 < u_0 \leq 0$ محققة لأن $u_0 = 0$

ب. ليكن n عدد طبيعي كفي، لنفرض أن $-1 < u_n \leq 0$ ولنبرهن $-1 < u_{n+1} \leq 0$

بما أن فرضا $-1 < u_n \leq 0$ فإن $2 < u_n + 3 \leq 3$ ومنه $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{u_n + 3} < \frac{1}{2}$ إذن $\frac{4}{3} \leq \frac{4}{u_n + 3} < 2$ ينتج أن

$$-2 < -\frac{4}{u_n + 3} \leq -\frac{1}{3} \text{ وعليه } -1 < 1 - \frac{4}{u_n + 3} \leq -\frac{1}{3} \text{ و بما أن } u_{n+1} = 1 - \frac{4}{u_n + 3} \text{ فإن } -1 < u_{n+1} \leq -\frac{1}{3} \text{ أي أن}$$

$$-1 < u_{n+1} \leq 0 \text{ . من أ. و ب. ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ ؛ } -1 < u_n \leq 0$$

(3) دراسة اتجاه تغير المتتالية العددية (u_n) :

$$\text{ليكن } n \text{ عدد طبيعي، لدينا: } u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{4}{u_n + 3} - u_n \text{ ومنه } u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 - 2u_n - 1}{u_n + 3}$$

$$\text{إذن } u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n + 1)^2}{u_n + 3} \text{ . بما أن } 2 < u_n + 3 \leq 3 \text{ فإن } u_n + 3 > 0 \text{ و } -(u_n + 1)^2 < 0$$

وعليه $u_{n+1} - u_n < 0$ ينتج أن (u_n) متناقصة تماما

• استنتاج أن (u_n) متقاربة: بما أن (u_n) متناقصة تماما و محدودة من أسفل بالعدد -1 فإنها متقاربة

(4) أ. نبين أن (v_n) متتالية حسابية:

$$\text{ليكن } n \text{ عدد طبيعي، لدينا: } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} + 1} - \frac{1}{u_n + 1} \text{ و بما أن } u_{n+1} + 1 = 2 - \frac{4}{u_n + 3} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$$

$$\text{فإن } \frac{1}{u_{n+1} + 1} = \frac{u_n + 3}{2(u_n + 1)} \text{ ومنه } v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3}{2(u_n + 1)} - \frac{1}{u_n + 1} \text{ ينتج أن } v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3}{2(u_n + 1)} - \frac{2}{2(u_n + 1)}$$

$$\text{وعليه } v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 1}{2(u_n + 1)} \text{ أي أن } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}$$

$$\text{ومنه } (v_n) \text{ متتالية حسابية أساسها } r = \frac{1}{2} \text{ و حدها الأول } v_0 = \frac{1}{u_0 + 1} = 1$$

ب. تعيين v_n ثم u_n بدلالة n :

• بما أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0 = 1$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n = 1 + \frac{1}{2}n$

• بما أن $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$ فإن $u_n + 1 = \frac{1}{v_n}$ ومنه $u_n = \frac{1}{v_n} - 1$ و بما أن $v_n = \frac{n+2}{2}$ فإن $u_n = \frac{2}{n+2} - 1 = \frac{-n}{n+2}$

• استنتاج ثانية أن (u_n) متقاربة :

$$\text{بما أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n}{n} = -1 \text{ فإن المتتالية } (u_n) \text{ متقاربة}$$

(5) أ. حساب S_n بدلالة n : لدينا $S_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$.

$$\text{نضع } u_n v_n = \omega_n \text{ ، نجد } S_n = \omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_n$$

$$\text{بما أن } u_n = \frac{1}{v_n} - 1 \text{ فإن } \omega_n = 1 - v_n \text{ ومنه } S_n = 1 - v_0 + 1 - v_1 + \dots + 1 - v_n$$

$$\text{إذن } S_n = (1 + 1 + \dots + 1) - (v_0 + v_1 + \dots + v_n) \text{ ومنه } S_n = (n+1) - S'_n \text{ مع } S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

إن S'_n هو مجموع $n+1$ حد متتابع من المتتالية الحسابية (v_n) وعليه $S'_n = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n)$ ومنه $S'_n = \frac{n+1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}n\right)$

$$S_n = \frac{-n(n+1)}{4} \quad \text{ينتج أن } S_n = (n+1) - \frac{(n+1)(n+4)}{4}$$

ب. حساب T_n بدلالة n :

$$\text{لدينا } \frac{u_n}{u_n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} \quad \text{ومنه } \frac{u_n}{u_n+1} = 1 - \frac{1}{u_{n+1}+1} \quad \text{وبما أن } u_{n+1} + 1 = \frac{1}{v_n} \quad \text{فإن } v_n = \frac{1}{u_n+1}$$

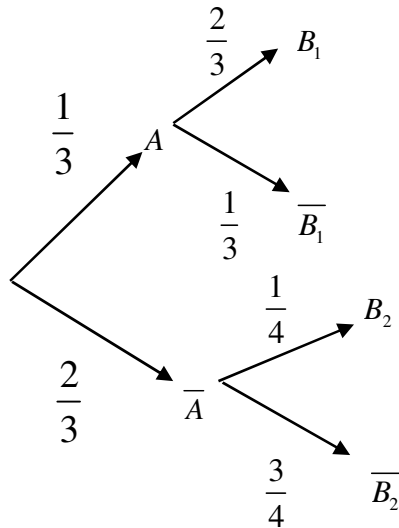
$$\text{ومنه } \frac{u_n}{u_n+1} = 1 - v_n \quad \text{أي أن } \frac{u_n}{u_n+1} = \omega_n \quad \text{عليه } T_n = e^{\omega_0} \times e^{\omega_1} \times \dots \times e^{\omega_n} \quad \text{ومنه } T_n = e^{\omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_n}$$

$$\text{إذن } T_n = e^{S_n} \quad \text{أي أن } T_n = e^{\frac{-n(n+1)}{4}}$$

$$\bullet \quad \text{المتتالية } (T_n) \text{ متقاربة لأن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

✓ **التمرين الثالث: (I)**

(1) نقل و إكمال شجرة الاحتمالات :



(2) حساب $p(B)$ احتمال الحدث B : حسب دستور الاحتمالات الكلية فإن $p(B) = p(A \cap B_1) + p(\bar{A} \cap B_2)$

$$\text{إذن } p(B) = p(A) \times p_A(B_1) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B_2) \quad \text{ومنه } p(B) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{18}$$

(II) بما أن السحب يتم في آن واحد فإننا نوظف توفيقات

عدد السحبات الكلية هو $C_{10}^3 = 120$

$$(1) \text{ أ. عدد الحالات المواتية للحدث } A_1 \text{ هو } C_7^3 = 35 \quad \text{ومنه } p(A_1) = \frac{35}{120} \quad \text{أي أن } p(A_1) = \frac{7}{24}$$

$$\text{ب. عدد الحالات المواتية للحدث } A_2 \text{ هو } C_7^1 \times C_3^2 + (C_7^2 \times C_3^1) + C_7^3 = 119 \quad \text{ومنه } p(A_2) = \frac{119}{120}$$

طريقة ثانية: الحدث A_2 هو الحدث المعاكس للحدث $\bar{A}_2$: الكرات الثلاثة لا تحمل رقما فرديا

$$\text{عدد الحالات المواتية للحدث } \bar{A}_2 \text{ هو } C_3^3 = 1 \quad \text{ومنه } p(\bar{A}_2) = \frac{1}{120} \quad \text{إذن } p(A_2) = 1 - p(\bar{A}_2) = \frac{119}{120}$$

$$\text{ج. عدد الحالات المواتية للحدث } A_3 \text{ هو } C_7^1 \times C_3^2 + C_3^3 = 22 \quad \text{ومنه } p(A_3) = \frac{22}{120} \quad \text{أي أن } p(A_3) = \frac{11}{60}$$

(2) أ. قيم المتغير العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2 و 3

ب. قانون المتغير العشوائي X : $p(X=0) = \frac{1}{120}$ أي أن $p(X=0) = \frac{C_3^3}{120}$

$$p(X=1) = \frac{21}{120} = \frac{7}{40} \text{ أي أن } p(X=1) = \frac{C_7^1 \times C_3^2}{120}$$

$$p(X=2) = \frac{63}{120} = \frac{21}{40} \text{ أي أن } p(X=2) = \frac{C_7^2 \times C_3^1}{120}$$

$$p(X=3) = \frac{35}{120} = \frac{7}{24} \text{ أي أن } p(X=3) = \frac{C_7^3}{120}$$

$(X = x_i)$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{24}$

ج. حساب $E(1900X - 1965)$ لدينا : $E(1900X - 1965) = 1900E(X) - 1965$

لنحسب $E(X)$: لدينا $E(X) = \left(0 \times \frac{1}{120}\right) + \left(1 \times \frac{7}{40}\right) + \left(2 \times \frac{21}{40}\right) + \left(3 \times \frac{7}{24}\right)$ ومنه $E(X) = \frac{21}{10}$

ينتج أن $E(1900X - 1965) = 1900 \times \frac{21}{10} - 1965$ ومنه $E(1900X - 1965) = 2025$

✓ التمرين الرابع:

(I)

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

أ. حساب النهايات على أطراف المجال $]0; +\infty[$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ لأن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 3) = 3$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{x} = +\infty$

ب. دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ومن أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $g'(x) = 2x - \frac{2}{x}$ ومنه $g'(x) = \frac{2(x-1)}{x}$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+

إن إشارة $g'(x)$ من إشارة $x-1$ لأن $x > 0$ و منه إشارة $g'(x)$ تعطى بـ

ومنه الدالة g متزايدة تماماً على المجال $[1; +\infty[$ و متناقصة تماماً على المجال $]0; 1]$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$

جدول التغيرات :

(2) ينتج من دراسة تغيرات الدالة g أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $g(x) \geq g(1)$ وبما أن $g(1) > 0$ فإن من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$

(II)

(1) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ومن أجل كل x من $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{2x^2 + 2}{4x^2} = \frac{6 + 2x^2 - 4 \ln x}{4x^2} \text{ ومنه } f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right) \times x - \ln x + \frac{2x \times 2x - 2(x^2 - 1)}{4x^2}$$

$$f'(x) = \frac{3 + x^2 - 2 \ln x}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2} \text{ أي أن}$$

• استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$:

بما أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $2x^2 > 0$ و $g(x) > 0$ فإن من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) > 0$ و عليه الدالة f متزايدة تماما على $]0; +\infty[$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ لأن : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{2x} = -\infty$$

• التفسير الهندسي : المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x} = +\infty$$

• جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(4) أ. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x\right)$ و تفسيرها بيانيا :

$$\text{لدينا } f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{\ln x}{x} + \frac{x^2 - 1}{2x} - \frac{1}{2}x \text{ و } f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} - \frac{x}{2} \text{ أي أن } f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2x}$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2x}\right) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = 0$ ومنه المستقيم (D) مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$

ب. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) :

لنعين إشارة $f(x) - \frac{1}{2}x$: لدينا $f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{2 \ln x - 1}{2x}$ و بما أن $x > 0$ فإن إشارة $f(x) - \frac{1}{2}x$ من إشارة $(2 \ln x - 1)$

لدينا $2 \ln x - 1 \geq 0$ تكافئ $\ln x \geq \frac{1}{2}$ أي أن $2 \ln x - 1 \geq 0$ تكافئ $x \geq e^{\frac{1}{2}}$ ينتج أن $2 \ln x - 1 < 0$ تكافئ $x < e^{\frac{1}{2}}$

و بالتالي لما $x \in]\sqrt{e}; +\infty[$: المنحني (C_f) يقع أعلى المستقيم (D)

لما $x \in]0; \sqrt{e}[$: المنحني (C_f) يقع أسفل المستقيم (D)

لما $x = \sqrt{e}$: المنحني (C_f) يقطع (D) في النقطة $\omega\left(\sqrt{e}; \frac{\sqrt{e}}{2}\right)$

(5) أ. إنشاء المستقيم (D) و المنحني (C_f) في نهاية حل التمرين

ب. حساب المساحة S : بتوظيف الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المستقيم (D) نجد أن

$$S = \int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x} \right) dx + \int_{\sqrt{e}}^e \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2x} \right) dx \text{ ومنه } S = \int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{2}x - f(x) \right) dx + \int_{\sqrt{e}}^e \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right) dx$$

$$S = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x} dx - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x} \times \ln x dx + \int_{\sqrt{e}}^e \frac{1}{x} \times \ln x dx - \frac{1}{2} \int_{\sqrt{e}}^e \frac{1}{x} dx \text{ إذن}$$

$$\text{ومنه } S = \frac{1}{2} [\ln x]_1^{\sqrt{e}} - \frac{1}{2} [(\ln x)^2]_1^{\sqrt{e}} + \frac{1}{2} [(\ln x)^2]_{\sqrt{e}}^e - \frac{1}{2} [\ln x]_{\sqrt{e}}^e$$

$$S = \frac{1}{8} \text{ (وحدة المساحات)}$$

(6) أ. دراسة شفعية الدالة h :

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ؛ $-x \in \mathbb{R}^*$ و $h(-x) = h(x)$ لأن $|-x| = |x|$ و $(-x)^2 = x^2$ ومنه h دالة زوجية

ب. من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ؛ $|x| = x$ و $\ln x^2 = 2 \ln x$ ومنه $h(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-x^2}{x} - \frac{2 \ln x}{x} \right)$

$$\text{أي أن } h(x) = -h(x) \text{ ؛ } x > 0 \text{ إذا كان } h(x) = -\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{x^2 - 1}{2x} \right) \text{ إذن } h(x) = \frac{1-x^2}{2x} - \frac{\ln x}{x}$$

ينتج من هذا أنه في المجال $]0; +\infty[$ نرسم (C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل ثم نكمل الرسم

إلى المجال $]-\infty; 0[$ بالتناظر بالنسبة إلى حامل محور الترتيب لأن الدالة h دالة زوجية

