



على التلميذ ان يختار احد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الاول

التمرين الأول : 4.5 نقطة

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ الجملة S :

$$S : \begin{cases} a + b + c = 3 + i \\ ia + b - c = \sqrt{3}(1 + i) \\ a - b + c = 1 + 3i \end{cases}$$

حيث a, b, c أعداد مركبة غير معدومة .

2- اكتب كل من a و b على الشكل المثلثي ثم الاسي .

3- برهن أن : $\frac{a \times b}{2\sqrt{2}} = e^{\frac{\pi}{12}i}$ ثم استنتج قيمة $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ثم اثبت ان : $c = (\sqrt{6} - \sqrt{2})e^{\frac{\pi}{12}i}$.

من اجل كل عدد طبيعي n نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حيث :

$$v_0 = 0, \quad u_0 = 1 : \begin{cases} u_{n+1} = u_n - (2 - \sqrt{3})v_n \\ v_{n+1} = (2 - \sqrt{3})u_n + v_n \end{cases}$$

1- من اجل كل عدد طبيعي n برهن بالتراجع ان : $u_n + iv_n = c^n$.

2- من اجل كل عدد طبيعي n استنتج أن : $u_n = \frac{\cos \frac{n\pi}{12}}{(\cos \frac{\pi}{12})^n}$ و $v_n = \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{(\sin \frac{\pi}{12})^n}$.

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

من اجل كل عدد طبيعي n نرمز بـ A_n للنقطة ذات اللاحقة c^n

1- عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها تكون النقط O, A_0, A_n في استقامة واحدة .

2- من اجل كل عدد طبيعي n برهن أن المثلث $OA_n A_{n+1}$ قائم في النقطة A_n .

التمرين الثاني : 5 نقاط

المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بالعلاقة : $f(x) = \frac{2x+4}{x-1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني

1- ادرس اتجاه تغير الدالة f وأنشئ جدول تغيراتها .

2- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) ذي المعادلة : $y = x$.

من اجل كل عدد طبيعي n نعتبر العدد الحقيقي u_n حيث $u_n \neq 1$

ولتكن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بحددها الأول العدد الحقيقي u_0 و بالعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = f(u_n)$

1- ناقش حسب قيم العدد الحقيقي u_n اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و تقاربها .

g دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-5\}$ بالعلاقة $g(x) = (f \circ f)(x)$ ومن اجل كل عدد طبيعي n

نعرف المتتاليتين $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ كما يلي :

$$\begin{cases} A_{n+1} = g(A_n) & A_0 = 2 \\ B_{n+1} = g(B_n) & B_0 = 8 \end{cases}$$

1- من اجل كل عدد طبيعي n برهن ان : $A_0 \leq A_n < 4$ و $4 < B_n \leq B_0$.

2- ادرس اتجاه تغير كل من $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$. هل هما متقاربتان ؟ علل .

من اجل كل عدد طبيعي n نعتبر المتتالية $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $d_n = A_n - B_n$.

3- من اجل كل عدد طبيعي n برهن ان : $d_n \leq 4 \left(\frac{2}{5}\right)^n$. ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n$.

4- برهن ان المتتاليتين $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متجاورتين ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n$.

5- من اجل كل عدد طبيعي n برهن بالتراجع أن : $u_{2n} = A_n$ و $u_{2n+1} = B_n$.

6- استنتج كل من $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1}$ ثم برهن ان $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ يطلب حسابه .

التمرين الثالث : 6.5 نقطة

g دالة معرفة على $D_g = \mathbb{R}$ بالعلاقة : $g(x) = \sqrt{1 + e^{2x}} - 1$

1- احسب ثم $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

2- احسب $g'(x)$ ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g و انشئ جدول تغيراتها . واستنتج على $\mathbb{R}$ اشارة الدالة g .

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $f(x) = (\ln \circ g)(x) = \ln(\sqrt{1 + e^{2x}} - 1)$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني

1- احسب كل من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2- احسب $f'(x)$ ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f و انشئ جدول تغيراتها .

3- عين احداثيي نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل و حامل محور الترتيب .

4- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} d_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

5- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} d_2(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

6- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى كل من المستقيمين $(D_1); y = x$ و $(D_2); y = 2x - \ln 2$.

7- أنشئ كل من (D_1) و (D_2) و المنحنى (C_f) .

(Γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto e^x$ في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

من اجل $n \in \mathbb{N}^*$ و من اجل كل $k \in \{0; 1; 2; \dots, n\}$

نرمز بـ M_k للنقطة من المنحنى (Γ) حيث $M_k(\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n})$

من اجل كل $k \in \{0; 1; 2; \dots, (n-1)\}$

1- اثبت انه يوجد $c_k \in \left] \frac{k}{n}; \frac{k+1}{n} \right[$ بحيث $e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} e^{c_k}$

من اجل كل $k \in \{0; 1; 2; \dots, (n-1)\}$

2- برهن ان $M_k M_{k+1} = \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{2c_k}}$ حيث $M_k M_{k+1}$ هي المسافة بين النقطتين M_k و M_{k+1} .

من اجل كل $k \in \{0; 1; 2; \dots, (n-1)\}$

3- استنتج أن $\frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq M_k M_{k+1} \leq \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

لتكن $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بعدها العام $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}$.

1- تحقق من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أن $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq S_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}$

2- استنتج النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 e^{f(x)} + 1 dx$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

التمرين الرابع : 4 نقاط

نشير في هذا التمرين انه اذا كان p عددا اوليا فرديا و $a \in \mathbb{Z}$ فان $a^p \equiv a[p]$

اكثر من ذلك اذا كان $p \wedge a = 1$ فان $a^{p-1} \equiv 1[p] \dots (*)$

مثال : $3 \wedge 5 = 1$ ومنه $3^{5-1} \equiv 1[5]$ اي $81 \equiv 1[5]$

في مجموعة الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ نعتبر المعادلة (E) $x^2 \equiv 2[p] \dots$ بحيث p عدد اولي فردي
1- برهن ان $2^{p-1} \equiv 1[p]$.

2- استنتج انه اما ($2^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1[p]$) او ($2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1[p]$)
ليكن x حل المعادلة (E)

1- برهن ان x و p اوليان فيما بينهما .

2- استنتج عندئذ ان : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1[p]$.

نشير هنا الى انه من اجل كل $k \in \{1; 2; \dots; (p-1)\}$ ان :

$$kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1} \quad \text{و} \quad C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$$

*1 - برهن ان p يقسم العدد الطبيعي C_p^k .

2- باستخدام دستور موافر احسب $(1+i)^p$ حيث : $i^2 = -1$.

$$(1+i)^p = \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} + i \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k+1}$$

بقبول ان :

$$2^{\frac{p}{2}} \cos(p \frac{\pi}{4}) \equiv 1[p] \quad \text{و} \quad 2^{\frac{p}{2}} \cos(p \frac{\pi}{4}) \in \mathbb{Z}$$

(يمكن استعمال السؤال *1)

4- استنتج انه اذا كان $p \equiv 5[8]$ فان (E) ليس لها حلولا في $\mathbb{Z}$.

الموضوع الثاني

التمرين الاول : 4 نقاط

كيس به 10 كرات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس منها 4 بيضاء و 6 حمراء .

نسحب عشوائيا من الكيس 3 كرات في آن واحد .

1- احسب احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء .

2- احسب احتمال الحصول على الاقل على كرية حمراء .

ليكن المتغير العشوائي X و الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة .

3- عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X واحسب امله الرياضياتي $E(X)$

و تباينه $V(X)$ واستنتج انحرافه المعياري $\sigma(X)$.

نسحب من الكيس في آن واحد 3 كرات خمس مرات على التوالي مع الاعداد (الارجاع)

احسب احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء مرتين بالضبط .

التمرين الثاني : 5 نقاط

$$\begin{cases} \sqrt{2}z_1 - z_2 = -[1 + (1 + \sqrt{2})i] \\ z_1 + iz_2 = \sqrt{2}i \end{cases}$$

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ الجملة :

$$A(z_A = 1 - i) , B(z_B = 1 + \sqrt{2} + i) , C(z_C = 1 + (1 + \sqrt{2})i)$$

2- اكتب العدد المركب z_A على الشكل المثلثي ثم على الشكل الاسي . ثم احسب z_A^{2024} .

ليكن العدد المركب $\overline{z_B}$ مرافق العدد z_B .

$$3- 1- \text{بين ان : } z_A \times z_B = \sqrt{2} \overline{z_B} .$$

$$3- 2- \text{استنتج عندئذ ان : } \arg(z_A) + 2\arg(z_B) \equiv 0 [2\pi] .$$

3- 3- اوجد عمدة العدد المركب z_B ثم اكتبه على الشكل المثلثي ثم الاسي و احسب z_B^{2024} .

4- 1- اثبت ان النقطة B صورة النقطة A بواسطة انسحاب T يطلب تحديد شعاعه $\vec{\omega}$.

4- 2- برهن انه يوجد تحويل نقطي S مركزه O و يحول B الى C يطلب تحديد عبارته وعناصره المميزة .

4- 3- استنتج طبيعة المثلث OBC .

لتكن الدائرة (Γ) التي مركزها $\Omega(x, y)$ و نصف قطرها r و المحيطة بالمثلث OBC .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ x^2 + y^2 + 4 + 2\sqrt{2} - 2((1 + \sqrt{2})x + y) = r^2 \\ x^2 + y^2 + 4 + 2\sqrt{2} - 2((1 + \sqrt{2})y + x) = r^2 \end{cases}$$

5- 1 - برهن ان :

5- 2- استنتج عندئذ z_Ω لاحقة مركز الدائرة (Γ) و اكتب معادلتها و أنشئها في المعلم السابق .

5- 3- حدد من المستوي مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق : $\arg \left[\overline{(iz_C + \sqrt{2})z} \right] \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

التمرين الثالث : 6 نقاط

لتكن الدالة العددية h المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بالعلاقة : $h(x) = \frac{x^2 + 1}{3x^2 - 1}$

وليكن (Γ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- ادرس تغيرات الدالة h و ارسم (Γ) تمثيلها البياني .

2- ادرس تغيرات الدالة $x \mapsto \ln x$ و ارسم تمثيلها البياني .

لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بالعلاقة : $g(x) = \ln(x) - h(x)$

1- ادرس تغيرات الدالة g و انشئ جدول تغيراتها .

2- اثبت انه يوجد عددين حقيقيين x_1, x_2 بحيث : $\begin{cases} 0 < x_1 < 1 < x_2 < 2 \\ g(x_1) = g(x_2) = 0 \end{cases}$

3- ادرس تبعا لقيم العدد الحقيقي x اشارة الدالة g .

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بالعلاقة : $f(x) = \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2}$

4- اكتب عبارة f' الدالة المشتقة الاولى للدالة f . ثم برهن ان : $f'(x) = \frac{(1 - 3x^2)g(x)}{(x^2 + 1)^3}$

5- احسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)}{x}$

6- استنتج عندئذ تغيرات الدالة f .

7- ارسم المنحنى (C) الممثل للدالة f في نفس المعلم السابق .

لتكن الدالة العددية k المعرفة من اجل كل عدد حقيقي x بالعلاقة : $k(x) = \frac{1}{x(x^2 + 1)}$.

$$1- \text{تحقق من ان : } \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}$$

2- استنتج دالة اصلية للدالة k على المجال $]0, +\infty[$.

$$\text{من اجل كل عدد حقيقي } \alpha \text{ من المجال }]0, 1[\text{ نضع : } I(\alpha) = \int_{\alpha}^1 \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2} dx \quad : \alpha \in]0, 1[$$

3- باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب $I(\alpha)$. ثم احسب $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha)$ وفسر النتيجة هندسياً.

التمرين الرابع : 5 نقاط

ليكن العدد الحقيقي a من $\mathbb{R}_+^*$ ولنضع $b = \sqrt[3]{a}$

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة $f(x) = \frac{1}{3} \left(2x + \frac{a}{x^2} \right)$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1- ادرس تغيرات الدالة f و انشئ جدول تغيراتها.

2- حل في المعادلة $f(x) = x$ ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى المستقيم (D) ذي المعادلة $y = x$.

3- استنتج انه اذا كان $x > b$ فان $f(x) < x$.

4- برهن ان كثير الحدود $p(X) = 2X^3 - 3bX^2 + a$ يقبل العدد b كجذر حقيقي له.

5- عين حاصل القسمة الاقليدية لكثير الحدود $p(X)$ على العبارة الجبرية $(X - b)^2$.

لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_+^* - \{b\}$ بالعلاقة : $h(x) = \frac{b(f(x) - b)}{(x - b)^2}$

1- باستعمال السؤال 5 بسط عبارة الدالة h .

2- ادرس استمرارية الدالة h عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = b$ ثم احسب $h(b)$.

3- برهن انه اذا كان $x > b$ فان $h(x) < 1$.

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2u_n + \frac{a}{u_n^2} \right) \end{cases} \text{ من اجل كل عدد طبيعي } n \text{ نعرف المتتالية } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ كما يلي :}$$

1- عين u_0 الحد الذي نبدا به حتى تكون $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية ثابتة هل هي متقاربة عندئذ ؟ علل .

$$\begin{cases} p(n); n \geq 1 : u_n \geq b \\ q(n); n \geq 1 : u_{n+1} \leq u_n \end{cases} \text{ 2- برهن صحة الخاصيتين } p(n) \text{ و } q(n) \text{ الآتيتين :}$$

لتكن المتتالية $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بالعبارة : $d_n = \frac{u_n - b}{b}$

1- من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم برهن ان : $0 \leq d_{n+1} \leq d_n^2$.

2- من اجل كل عدد طبيعي n استنتج ان : $d_{n+1} \leq (d_1)^{2^n}$

$$\text{نضع } a = 3 \text{ و } u_0 = \frac{3}{2}$$

1- برهن ان $b > \frac{7}{5}$ ثم برهن ان $d_1 < \frac{2}{63}$.

2- من اجل كل عدد طبيعي n استنتج ان : $0 \leq u_{n+1} - b \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{63} \right)^{2^n}$.

3- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4- عين قيمة تقديرية للعدد الطبيعي m الذي يحقق : $0 \leq u_5 - \sqrt[3]{3} \leq 10^{-m}$. ماذا تستنتج ؟