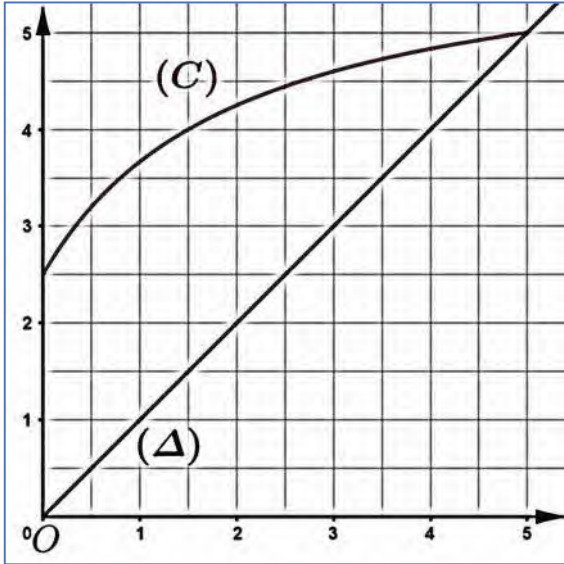


على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الدالة f معرفة على المجال $[0;5]$ بـ: $f(x) = \frac{6x+5}{x+2}$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس أنظر الشكل.



- (1) أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;5]$.
- (ب) أثبت حسابيا أن (C) والمنصف الأول (Δ) ذا المعادلة $y = x$ متقاطعان في نقطة يطلب تعيين فاصلتها α .
- (2) نعرّف المتتالية (u_n) بـ: $u_0 = 0$ ، ومن أجل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = f(u_n)$.
- (أ) أنقل الشكل. ومثل بيانيا الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 دون حسابها، على حامل محور الفواصل مبرزا خطوط الإنشاء.
- (ب) أعط تخمينا فيما يخص اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.
- (3) (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n < 5$.
- (ب) برهن بالتراجع أن (u_n) متزايدة تماما واستنتج أن (u_n) متقاربة.
- (4) نعرّف المتتالية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 5}$.

(أ) اثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 7 وعين حدها الأول، ثم أكتب بدلالة n عبارة الحد v_n ، واحسب نهاية (v_n) .

(ب) عبّر عن الحد u_n بدلالة v_n ، واستنتج نهاية (u_n) .

(ج) احسب بدلالة n المجموعين: $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $L_n = u_0(v_0 - 1) + u_1(v_1 - 1) + \dots + u_n(v_n - 1)$.

التمرين الثاني: (04.5 نقطة)

يحتوي كيس غير شفاف 8 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، موزعة كما يلي: 3 كريات بيضاء مرقمة: α ، β و 3 كريات سوداء مرقمة: $-\alpha$ ، $-\beta$ و اثنتان حمراوان مرقمتان: $-\alpha$ و α . حيث α و β عدنان طبيعيين و $\alpha < \beta$.

نسحب عشوائيا من الكيس كرتين في آن واحد؛ ونعتبر الحوادث التالية: A : "الحصول على كرتين تحملان نفس الرقم"،

B : "الحصول على كرتين مختلفتين في اللون" و C : "الحصول على كرتين مجموع رقميهما موجب تماما".

(1) (أ) أحسب $p(A)$ احتمال الحدث A ثم بيّن أن: $p(B) = \frac{3}{4}$.

(ب) أحسب الاحتمالين $p(C)$ و $p(A \cap C)$.

(2) نعتبر أن الأعداد: $-\alpha$ ، α و β بهذا الترتيب تشكل متتالية حسابية، وليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين المسجلين على الكرتين المسحوبتين.

(أ) برّر أن مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي: $\{-2\alpha; 0; 2\alpha; 4\alpha; 6\alpha\}$.

(ب) عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب بدلالة α أملة الرياضياتي.

التمرين الثالث: (04.5 نقطة)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. النقط A, B, C و D لواحقتها على الترتيب هي:

$$z_D = \overline{z_C} \text{ و } z_C = -1 - i\sqrt{3} \quad , \quad z_B = \overline{z_A} \quad , \quad z_A = \sqrt{3} + i$$

(3) أ) أكتب على الشكل الأسّي كل من الأعداد: z_A ، z_B ، z_C و z_D . واستنتج أنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

(ب) أثبت أنّ $\frac{z_A}{z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج نوع المثلث OAB .

(4) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_A)^n$ حقيقيا سالبا.

(5) أ) عيّن (s) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $z = \sqrt{3} + i + k e^{i\frac{2\pi}{3}}$ مع $k \in \mathbb{R}^+$.

(ب) عيّن (d) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $|z - \sqrt{3} + i| = |z + 1 + i\sqrt{3}|$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعرّف الدالة g على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^3 - x - 2 \ln x + 3$.

(1) أ) أحسب: $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

(2) أ) تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $3x^3 - x - 2 = (x - 1)(3x^2 + 3x + 2)$.

(ب) أدرس اتجاه تغير g وشكل جدول تغيراتها واستنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

(II) الدالة f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$. و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم

متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ؛ ثم بيّن أنّ: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ، وفسر النتيجة بيانيا.

(2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ؛ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

(ب) استنتج اتجاه تغيرات f ، وشكل جدول تغيراتها.

(3) نعرّف الدالة h على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = x - 1 + \ln x$.

(أ) أدرس اتجاه تغير الدالة h ، وشكل جدول تغيراتها. (لا يطلب حساب النهايتين).

(ب) أحسب $h(1)$ واستنتج إشارة $h(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$.

(ج) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ ، ثم حدّد وضعهما النسبي.

(4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(1; 0)$.

(5) أرسم المماس (T) والمستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

(6) ليكن (D_m) مجموعة المستقيمات التي معادلاتها: $y = mx - m$ ، حيث m وسيط حقيقي.

(أ) اثبت أنّ كل المستقيمات (D_m) تمرّ بالنقطة $A(1; 0)$.

(ب) عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة: $f(x) = mx - m$ حلين متميزين.

(7) أ) تحقق أنّ الدالة: $x \mapsto -\frac{1}{x}(1 + \ln x)$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ على المجال $]0; +\infty[$.

(ب) أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين ذوي المعادلتين: $x = \frac{1}{2}$

و $x = 2$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2^n u_n + 2}$$

نعرّف المتتالية (u_n) بـ: $u_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

- (1) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n$.
 ب) برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما واستنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

$$(2) \text{ نعرّف المتتالية } (v_n) \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n, v_n = \frac{1}{2^n u_n}.$$

أ) بيّن أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{2}$ وعيّن حدها الأول.ب) أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n .ج) استنتج بدلالة n عبارة الحد العام u_n واستنتج النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.د) احسب بدلالة n المجموع: $s_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$.

$$(3) \text{ نعرّف المتتالية } (w_n) \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n, w_n = \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right).$$

أ) بيّن أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.ب) هل المتتاليتان (u_n) و (w_n) متجاورتان؟ برّر إجابتك.

التمرين الثاني: (04.5 نقطة)

يتكون فريق عمل من 4 رجال: H_1, H_2, H_3 و H_4 و 3 نساء: F_1, F_2 و F_3 .

نريد اختيار لجنة تضم رئيسا، نائبا وأميناً.

ونعرّف الحوادث التالية:

A : "اللجنة من نفس الجنس "

B : " الرئيس رجل والأمين امرأة "

C : " H_4 رئيس للجنة "D : " اللجنة لا تضم H_4 و F_3 معاً "

(1) بين أنّ عدد اللجان الممكنة هو 210.

(2) أحسب الاحتمالين: $p(A)$ و $p(B)$.(3) أحسب: $p(C)$ و $p(D)$ وأثبت أنّ: $p(C \cap D) = \frac{2}{21}$.(4) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل اختيار عدد النساء خارج اللجنة المشكلة.أ) عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X وعرّف قانون احتماله.

ب) أحسب أمله الرياضياتي وانحرافه المعياري.

التمرين الثالث: (4.5 نقطة)

(1) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 13.ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد A حيث: $A = 7 \times 2025^{1446} + 10 \times 1962^{1954} + 2024^{1954}$ على 13.(2) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية: $(E) : 5x - 2y = 13$.أ) اثبت أنّه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 1[2]$ ثمّ استنتج حلول المعادلة (E) .ب) جد الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق x قاسم للعدد y .(3) عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $13[2024] \equiv n + 1 + 3^n$ و $3[1445] \equiv n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ: $f(x) = x + \frac{1}{2} \times \frac{e^x}{e^x - 1}$ تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{0\}$ ؛ $f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(e^x - 2)(2e^x - 1)}{(e^x - 1)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير f وشكل جدول تغيراتها.

(3) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) .

ج) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \frac{1}{2}$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

د) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم المقارب (Δ') ذي المعادلة: $y = x + \frac{1}{2}$.

(4) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x ؛ $f(x) + f(-x) = \frac{1}{2}$ ، وفسّر النتيجة بيانيا.

(5) أ) أرسم المقاربين (Δ) و (Δ') والمنحنى (C_f) .

ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية:

$$2(m - x)(e^x - 1)e^{-x} = 1$$

(6) ليكن n عددا طبيعيا أكبر تماما من 1.

أحسب بدلالة n المساحة $A(n)$ لحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ') والمستقيمين اللذين معادلتهما:

$$x = \ln(n) \text{ و } x = \ln(n+1)$$

بالتوفيق



انتهى الموضوع الثاني