

◆ التمرين 01: [06 نقاط]

نعتبر كثيري الحدود P و Q

$$P(x) = -2\alpha(x^4 - x^2 - 2) + 2x(x^4 - x^2 - 2) ; \quad Q(x) = 2x^4 - 2x^2 - 4$$

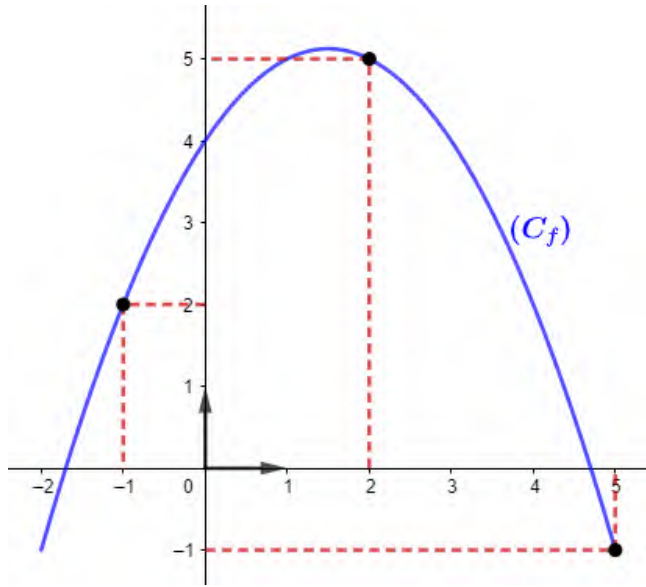
حيث α عدد حقيقي

$$1 \quad [1 \text{ ن}] \quad \text{حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة } Q(x) = 0$$

$$2 \quad [2 \text{ ن}] \quad \text{عَيّن درجة كثير الحدود } P, \text{ ثم بيّن أن } \alpha \text{ جذر لـ } P(x)$$

$$3 \quad [2 \text{ ن}] \quad \text{بيّن أن: } P(x) = (x - \alpha)Q(x), \text{ ثم استنتج حلول المعادلة } P(x) = 0$$

$$4 \quad [1 \text{ ن}] \quad \text{استنتج حلول المعادلة } P(|x| + 1) = 0$$



◆ التمرين 02: [03 نقاط]

 f دالة معرفة على المجال $[-2; 5]$ بتمثيلها البياني (C_f)

(الشكل المقابل)

$$1 \quad [1 \text{ ن}] \quad \text{احسب } (f \circ f \circ f)(2), \text{ ثم استنتج } (f \circ f \circ \dots \circ f)(2) \text{ مرة } 2021$$

$$2 \quad [2 \text{ ن}] \quad \text{أنشئ } (C_g) \text{ و } (C_h) \text{ التمثيل البياني للدالتين } g \text{ و } f, \text{ حيث:}$$

$$g(x) = f(-|-x|)$$

$$h(x) = |-f(-x)|$$

◆ التمرين 03: [11 نقطة]

$$I \quad f \text{ و } g \text{ دالتان عدديتان معرفتان كما يلي: } f(x) = \frac{x}{x-1} \text{ و } g(x) = x$$

$$1 \quad [1 \text{ ن}] \quad \text{عَيّن } D_f \text{ و } D_g \text{ مجموعة تعريف كل من الدالتين } f \text{ و } g \text{ على الترتيب}$$

$$2 \quad [2 \text{ ن}] \quad \text{تحقق أن } (f \circ f)(x) = g(x), \text{ ثم استنتج } (f \circ f \circ f)(2).$$

$$II \quad (C_f) \text{ هو التمثيل البياني للدالة } f \text{ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس } (O; \vec{i}, \vec{j}):$$

$$1 \quad \text{من أجل كل } x \neq 1, \text{ عين العددين الحقيقيين } a \text{ و } b, \text{ بحيث:}$$

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1}$$

$$2 \quad [2 \text{ ن}] \quad \text{فكك الدالة } f \text{ إلى مركب دالتين } u \text{ و } v \text{ بسيطتين, يطلب تعيين عبارتيهما.}$$

$$3 \quad [1 \text{ ن}] \quad \text{باستعمال اتجاه تغير مركب دالتين, بيّن أن الدالة } f \text{ متناقصة تماما على } \mathbb{R}^*$$

$$4 \quad [1 \text{ ن}] \quad \text{من أجل } (2-x) \in \mathbb{R}^*, \text{ تحقق من أن النقطة } \omega(1; 1) \text{ مركز تناظر لـ } (C_f)$$

$$5 \quad [2 \text{ ن}] \quad \text{استنتج أنه يمكن رسم } (C_f) \text{ انطلاقا من دالة مرجعية, ثم أنشئه}$$

يقول أحمد شوقي:

وما أخذ العلم بالتمني

ولكن تؤخذ الدنيا غلابا

◆ التمرين 01: [06 نقاط]

① حل في \mathbb{R} المعادلة $Q(x) = 0$:

لدينا: $2x^4 - 2x^2 - 4 = 0$

نضع: $x^2 = t$ (0.5)

نجد: $2t^2 - 2t - 4 = 0$

باستعمال المميز المختصر لدينا:

$$\begin{aligned}\Delta &= b' - ac \\ &= (-1)^2 - (2)(-4) \\ &= 9\end{aligned}$$

لدينا:

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta}}{a}$$

ومنه:

$$x = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2} = -1 \quad \text{أو} \quad x = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2} = 2$$

لدينا: $x^2 = t$

ومنه: $x^2 = 2$ (مقبول) أو $x^2 = -1$ (مرفوض)

ومنه: $x = -\sqrt{2}$ أو $x = \sqrt{2}$

إذن: $s = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ (0.5)

② تعيين درجة كثير الحدود P :

$$\begin{aligned}P(x) &= -2\alpha(x^4 - x^2 - 2) + 2x(x^4 - x^2 - 2) \\ &= -2\alpha(x^4 - x^2 - 2) + 2x^5 - 2x^3 - 4x\end{aligned}$$

إذن درجة $P(x)$ هي 5 (0.5)• تبين أن α جذر لـ $P(x)$:

$$\begin{aligned}P(\alpha) &= -2\alpha(\alpha^4 - \alpha^2 - 2) + 2\alpha(\alpha^4 - \alpha^2 - 2) \\ &= 0\end{aligned}$$
 (0.5)

③ تبين أن: $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$:لدينا: α جذر لـ $P(x)$ و $P(x)$ من الدرجة 5 ومنه:

$$P(x) = (x - \alpha)(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}P(x) &= -2\alpha(x^4 - x^2 - 2) + 2x(x^4 - x^2 - 2) \\ &= -2\alpha x^4 + 2\alpha x^2 + 4\alpha + 2x^5 - 2x^3 - 4x \\ &= 2x^5 - 2\alpha x^4 - 2x^3 + 2\alpha x^2 - 4x + 4\alpha\end{aligned}$$
 (0.5)

باستعمال التحليل أو المطابقة أو القسمة الاقليدية أو جدول هورنر:

لدينا:

	2	-2α	-2	2α	-4	4α
a	0	2α	0	-2α	0	-4α
	2	0	-2	0	-4	0

نجد: $P(x) = (x - \alpha)(2x^4 - 2x^2 - 4)$ (0.5)

إذن: $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$

• استنتاج حلول المعادلة $P(x) = 0$:

لدينا: $P(x) = 0$

معناه: $(x - \alpha)Q(x) = 0$

ومنه: $x - \alpha = 0$ أو $Q(x) = 0$

إذن: $s = \{\alpha; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ (0.5)

④ استنتاج حلول المعادلة $P(|x| - 1) = 0$

لدينا: $P(|x| + 1) = 0$

معناه:

$$|x| + 1 = \begin{cases} \alpha \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{cases}$$
 (0.5)

ومنه:

$$|x| = \begin{cases} \alpha - 1 \\ -\sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{cases} \quad (\text{مرفوض})$$

ومنه:

$$x = \begin{cases} \alpha - 1 \\ -\alpha + 1 \\ \sqrt{2} - 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$
 (0.5)

إذن: $s = \{(1 - \sqrt{2}); (\sqrt{2} - 1); (\alpha - 1); (1 - \alpha)\}$

◆ التمرين 02: [03 نقاط]

① حساب $(f \circ f \circ f)(2)$:

$$\begin{aligned}(f \circ f \circ f)(2) &= (f \circ f)(f(2)) \\ &= (f \circ f)(5) \\ &= f(f(5)) \\ &= f(-1) \\ &= 2\end{aligned}$$
 (0.5)

• استنتاج $(f \circ f \circ \dots \circ f)(2)$ مرة 2021

لدينا: $2021 = 2 + \frac{673 \times 3}{2019}$

إذن:

$$\left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{مرة 2021}} \right) (2) = \left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{مرة 2019}} \circ \underbrace{f \circ f}_{\text{مرة 2}} \right) (2)$$

$$= (f \circ f)(2)$$

$$= f(f(2))$$

$$= f(5)$$

$$= -1$$
 (0.5)

② إنشاء (C_h) و (C_g) :

$$\text{حيث: } \begin{cases} u(x) = 1 + \frac{1}{x} \\ v(x) = x - 1 \end{cases}$$

3 تبين أن الدالة f متناقصة تماما على \mathbb{R}^*

لدينا:

• الدالة u متناقصة تماما على \mathbb{R}^* لأنها عبارة عن دالة مرجعية

(الدالة مقلوب) زائد 1

• الدالة v متزايدة تماما على \mathbb{R} لأنها دالة تألفية معامل توجيهها

موجب

بما أن الدالة u و v متعاكستين في اتجاه التغير

فإن الدالة f متناقصة تماما على \mathbb{R}^* .

4 التحقق من أن النقطة $\omega(1; 1)$ مركز تناظر لـ (C_f) :

لدينا $(2 - x) \in \mathbb{R}^*$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(2-x) + f(x) &= 1 + \frac{1}{2-x-1} + 1 + \frac{1}{x-1} \\ &= 2 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x-1} \\ &= 2 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

إذن ω مركز تناظر لـ (C_f) .

5 استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من دالة مرجعية:

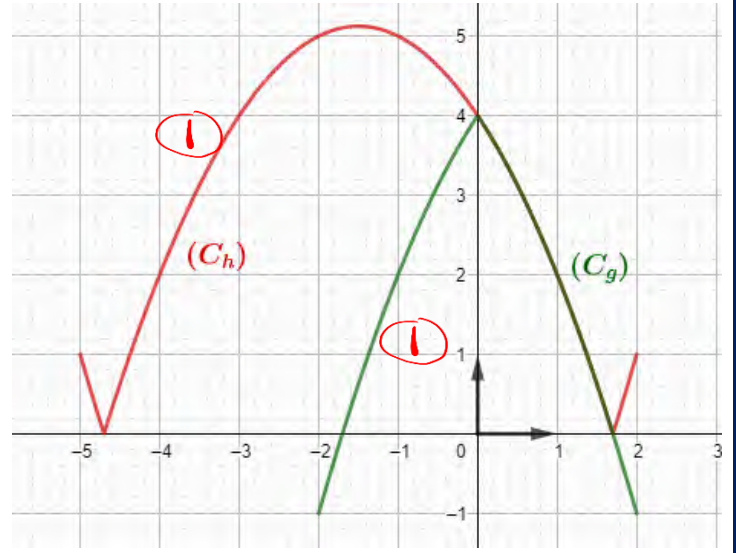
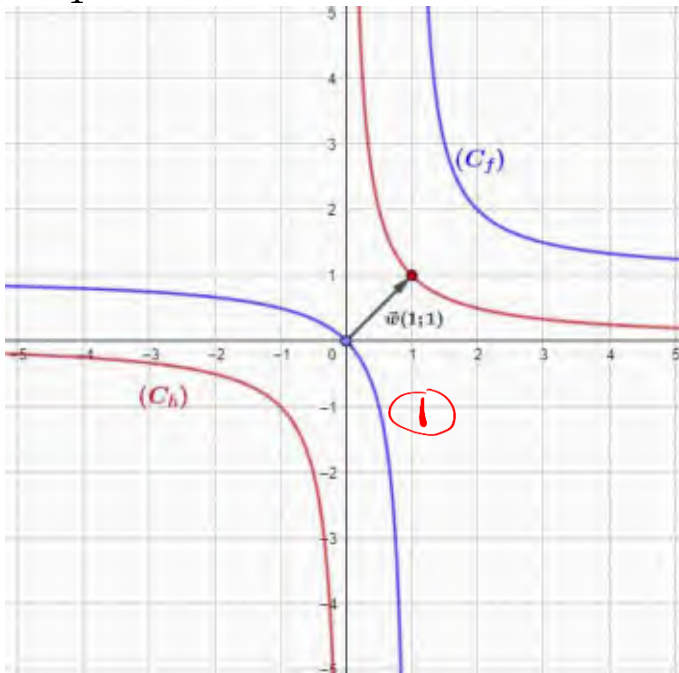
نضع:

$$h(x) = \frac{1}{x}$$

لدينا:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-1} = h(x-1) + 1$$

إذن (C_f) هو صورة منحنى الدالة جذر بانسحاب شعاعه $\vec{w}\left(\frac{1}{1}\right)$



التمرين 03: [11 نقطة]

(I)

1 نعين D_f و D_g :

الدالة f معرفة لما $x - 1 \neq 0$

ومنه $x \neq 1$

إذن: $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ (0.5)

ولدينا الدالة g دالة تألفية

إذن: $D_g = \mathbb{R}$ (0.5)

2 التحقق أن $(f \circ f)(x) = g(x)$:

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= \frac{f(x)}{f(x) - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x - (x-1)}{x-1}} \\ &= \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{x}{x-1} \times \frac{x-1}{1} = x \end{aligned}$$

• استنتج $(f \circ f \circ f)(2)$:

$$\begin{aligned} (f \circ f \circ f)(2) &= (f \circ f)(f(2)) \\ &= g(2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

(II)

1 نعين العددين الحقيقيين a و b :

$$\begin{aligned} f(x) &= a + \frac{b}{x-1} \\ &= \frac{ax - a + b}{x-1} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a = 1 \\ -a + b = 0 \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

إذن: $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$

2 تفكيك الدالة f إلى مركب دالتين u و v :

$$\text{نضع: } f(x) = (u \circ v)(x)$$