اختبار تحضيري للفصل الأول

نموذج ﴿2﴾

التمرين الأول (05 نقاط)

نعتبر كثيري الحدود P و Q المعرّفين على $\mathbb{R}$ بـ: $Q(x)=3x^2-4x+1$ و $P\left(\frac{x}{3}\right)=Q(x)$

❶ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $Q(x)=0$ [00.50 ن]

❷ احسب $P(0)$ و $P(1)$ [01.50 ن]

❸ أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $P(x)=27x^2-12x+1$ [01.50 ن]

❹ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $P(x)=3Q(x)$، ثمّ عيّن إشارة $\frac{P(x)}{3Q(x)}$ [01.50 ن]

التمرين الثاني (09 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^3+3x^2+3x+2$، وليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

❶ أ- ادرس تغيرات الدالة g [01.00 ن]

ب- ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_g) [00.50 ن]

❷ أ- احسب $g(-2)$، ثمّ حل المعادلة $g(x)=0$ [01.50 ن]

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ [01.00 ن]

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\frac{2x^3+7x^2+8x+2}{(x+1)^2}$، (C_f) تمثيلها البياني في المعلم السابق

❶ أ- بيّن أنّه من أجل كل x حقيقي يختلف عن -1 لدينا، $f'(x)=\frac{2g(x)}{(x+1)^3}$ [01.00 ن]

ب- استنتج تغيرات الدالة f، ثمّ شكل جدول تغيراتها [01.00 ن]

❷ أ- a، b، c ثلاث أعداد حقيقية، بيّن أنّ: $f(x)=ax+b+\frac{c}{(x+1)^2}$ [01.00 ن]

ب- ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+3$ [00.50 ن]

ج- أثبت أنّه لا توجد أي مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) [00.50 ن]

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $h(x)=\frac{2x^3-1}{x^2}$

❶ تحقق أنه من أجل كل x حقيقي غير معدوم: $h(x)+1=f(x-1)$ [00.50 ن]

❷ اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) منحنى الدالة h إنطلاقا من (C_f) [00.50 ن]

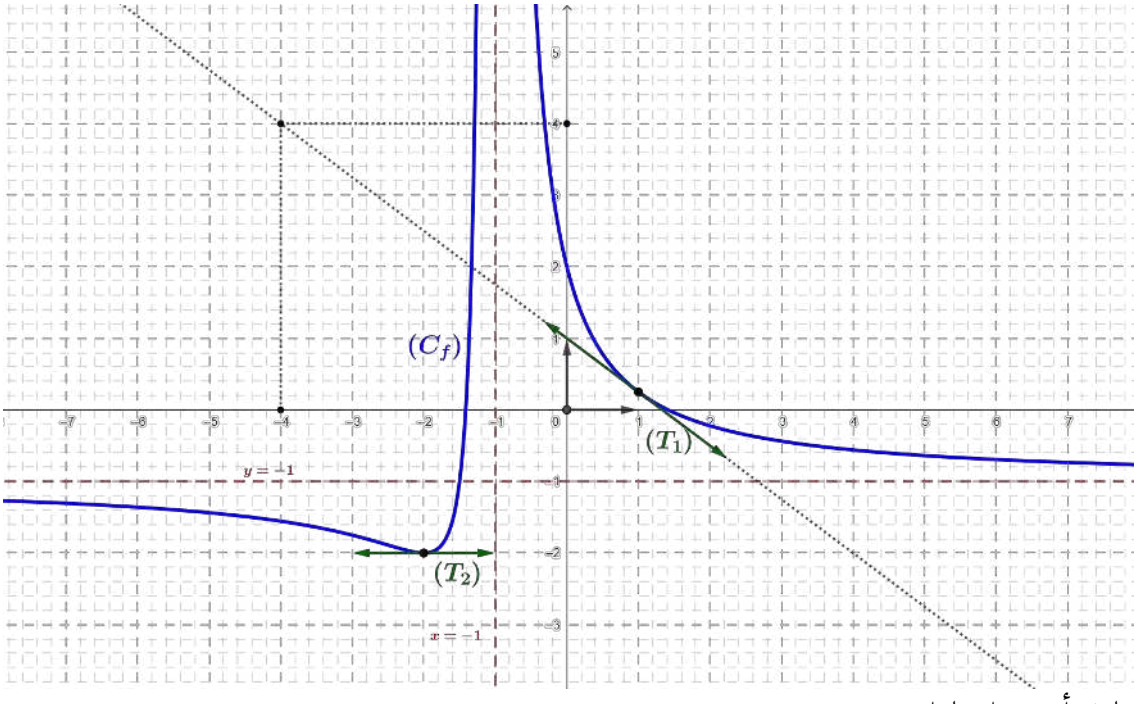
التمرين الثالث (06 نقاط)

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{(x+1)^2}$ ، حيث a، b و c أعداد حقيقية. و(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

(T_1) و(T_2) مماسين للمنحنى (C_f) في النقطتين $A\left(1;\frac{1}{4}\right)$ و $B(-2;-2)$.

كما هو مبين في الشكل الآتي:

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري



بقراءة بيانية، أجب على ما يلي:

❶ عيّن حلول المعادلة $f'(x)=0$

❷ شكّل جدول إشارة الدالة المشتقة f' ثمّ استنتج جدول تغيرات الدالة f [ن 00.50]

❸ عيّن: $f(0)$، $f(-2)$ ، $f'(-2)$ و $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}\right)$ [ن 00.75]

❹ m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m$ [ن 01.75]

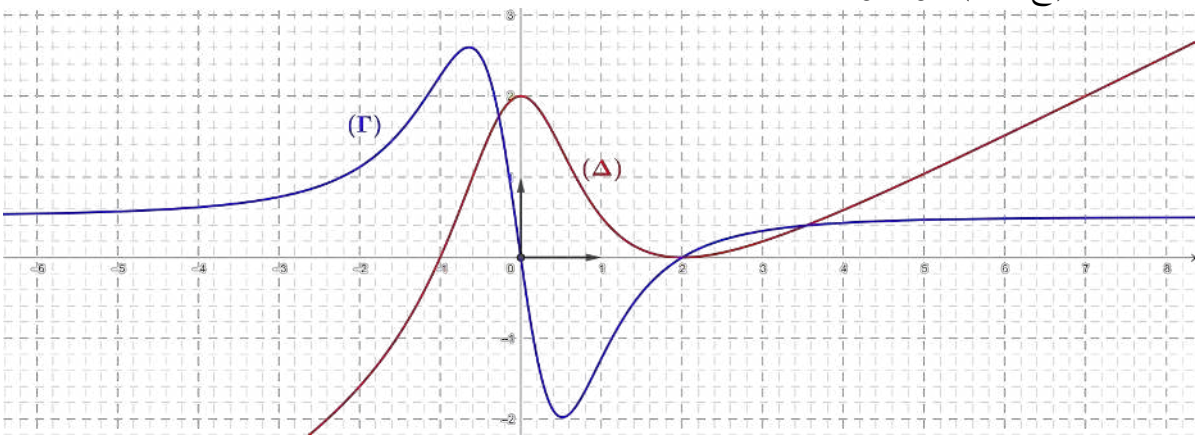
❺ مما سبق، عيّن عبارة (T_1) ، (T_2) و$f(x)$ [ن 01.00]

[ن 02.00]

تمرين إضافي: (+01 نقطة)

إليك التمثيلان البيانيان (Δ) و (Γ) أحدهما خاص بالدالة الـ f والآخر لمشتقتها f'

- أنسب (مع التبرير) كل تمثيل لدالته [ن 01.00]



حِكمة: مهما كان العلم متعبًا، فلن يكون أشد إرهاقًا من الجهل

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

التمرين 1:

1) حل $Q(x)=0$

$\Delta = (-4)^2 - 4(3)(1)$

$= 16 - 12 = 4 > 0$

اذن يوجد جذران لـ $Q(x)$:

$x = \frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2(3)} = 1$ و $x = \frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2(3)} = \frac{1}{3}$

اذن $S = \{1, \frac{1}{3}\}$

2)

$P(0) = P\left(\frac{0}{3}\right) = Q(0) = 1$

$P(1) = P\left(\frac{3}{3}\right) = Q(3) = 16$

3)

لدينا: $P\left(\frac{n}{3}\right) = Q(n)$

نضع $\frac{n}{3} = t$ ومنه: $n = 3t$

$P(t) = Q(3t)$: ومنه

$P(t) = 3(3t)^2 - 4(3t) + 1$

$= 3(9t^2) - 12t + 1$

$P(t) = 27t^2 - 12t + 1$

: ومنه

$\boxed{P(x) = 27x^2 - 12x + 1}$

$P(x) = 3Q(x)$: لدينا

$27x^2 - 12x + 1 = 3(3x^2 - 4x + 1)$: أي

$27x^2 - 12x + 1 = 9x^2 - 12x + 3$

$18x^2 = 2$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{1}{9}}$

$|x| = \frac{1}{3}$

$x = -\frac{1}{3}$ أو $x = \frac{1}{3}$ إذن

$S = \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

ملاحظة: $P(x)$ و $3Q(x)$

لدينا: $P(x) = Q(3x)$

التكافئ:
$$\begin{cases} 3x = 1 \\ \text{أو} \\ 3x = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{و منه} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ \text{أو} \\ x = \frac{1}{9} \end{cases}$$

أذن $S_{P(x)=0} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right\}$

وعليه: (370)

x	$-\infty$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$-Q(x)$		$+$		$+$		$-$		$+$	
$\frac{P(x)}{3Q(x)}$		$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$+$	

التمرين 2:

1/ ① تبيان g

لدينا g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = 3x^2 + 6x + 3$$

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

$\Delta = 6^2 - 4(3)(3) = 0$ لدينا:

ومنه $g'(x)=0$ يعني $x = \frac{-6}{2(3)} = -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$

إذن الدالة g متزايدة على $\mathbb{R}$.

ب/ الاستنتاج:

لدينا: $g'(x)$ تنعدم عند -1 ولا تغير إشارتها ومنه (C_g) يقبل نقطة انعطاف عند الفاصلة -1

2) آ- حساب $g(-2)$:

$g(-2) = -8 + 12 - 6 + 2 = 0$

$\Leftarrow$ حل المعادلة $g(x)=0$.

لدينا: $g(x) = (x+2)(ax^2+bx+c)$

	1	3	3	2
-2	0	-2	-2	-2
	1	1	1	0

$g(x) = (x+2)(x^2+2x+1)$ إذن

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

لدينا: $g(x)=0$

معناه

$$\begin{cases} x+2=0 \\ \text{أو} \\ x^2+x+1=0 \quad ....(Q(x)) \end{cases}$$

لدينا: $x+2=0$ معناه $x=-2$

ولدينا: $Q(x)=0$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ لأن $\Delta=-3<0$

إذن $S_{g(x)=0}=\{-2\}$

بما أن g متزايدة على $\mathbb{R}$ و $g(-2)=0$

فإن

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

لدينا f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$

$$f'(x)=\frac{(6x^2+14x+8)(x+1)^2-(2)(x+1)(2x^3+7x^2+8x+2)}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{(x+1)\left[(6x^2+14x+8)(x+1)-2(2x^3+7x^2+8x+2)\right]}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{6x^3+14x^2+8x+6x^2+14x+8-4x^3-14x^2-16x-4)}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{2(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^3}=\frac{2g(x)}{(x+1)^3}$$

DZPEN.COM | صفحة القلم الجزائري

ب/ تغيرات f:

لدينا: $f'(x) = \frac{2g(x)}{(x+1)^3}$

لدينا $(x+1)^3 = (x+1)^2(x+1)$

لدينا: $x+1 \neq 0$ معناه $x \neq -1$

وعليه:

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0 $+$		$+$
$(x+1)^2$	$+$	$+$	$\|$	$+$
$f'(x)$	$+$	0 $-$	$\|$	$+$

وعليه f: متزايدة تماما على $]-\infty, -2]$

و $[-2, +\infty[- \{-1\}$ متناقصة تماما على $]-1, -2]$

- جدول تغيرات f

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f(x)$		-2	$\|$	$+\infty$
	$-\infty$		$\|$	1

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

② إيجاد a، b، c:

من أجل كل x حقيقي يختلف عن -1، لدينا:

$$ax+b+\frac{c}{(x+1)^2}=\frac{(ax+b)(x+1)^2+c}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(ax+b)(x^2+2x+1)+c}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{ax^3+2ax^2+ax+bx^2+2bx+b+c}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{ax^3+x^2(2a+b)+x(a+2b)+(b+c)}{(x+1)^2}$$

بالمطابقة مع $f(x)$، نجد:

$$\begin{cases} a=2 \\ 2a+b=7 \\ a+2b=8 \\ b+c=2 \end{cases}$$

DZREN.COM

ومنه: $a=2$ و $b=3$ و $c=-1$

أي أن: $f(x)=2x+3-\frac{1}{(x+1)^2}$

ب) الوضع النسبي:

ندرس حسب قيم x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ لدينا:

$$f(x)-(2x+3)=-\frac{1}{(x+1)^2}<0$$

ومنه:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)-(2x+3)$		$-$	$\|$	$-$	
الوضع النسبي	(C_f) تحت (D)		$\|$	(C_f) تحت (D)	

ج) تفسير وجود مماس (C_f) يوازي (D)

وفاصل إلى تناقص

لدينا:

أي:

$$f'(x)=2$$

$$\frac{2g(x)}{(x+1)^3}=2$$

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

ومنه: $\frac{2(\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+2)}{(\alpha+1)^3} = 2$

ومنه: $\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+2=(\alpha+1)^3$

ومنه $\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+2=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1$

ومنه: $2=1$

وهذا صت حيل

أ) أثبت أن α يوجد أي مماس لـ (C_f) يوازي (Δ)

III /

① نثبت أن $f(x-1)=h(x)+1$

من أجل كل $x \neq 0$ لدينا:

$$f(x-1) = \frac{2(x-1)^3+7(x-1)^2+8(x-1)+2}{(x-1+1)^2}$$

$$= \frac{2(x^3-3x^2+3x-1)+7(x^2-2x+1)+8x-8+2}{x^2}$$

$$= \frac{2x^3-6x^2+6x-2+7x^2-14x+7+8x-6}{x^2}$$

$$= \frac{2x^3+x^2-1}{x^2} = \frac{2x^3-1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2} = h(x)+1$$

$$f(x-1)=h(x)+1$$ إذن

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري

لدينا: $h(x)+1 = f(x-1)$

ومنه: $h(x) = f(x-1) - 1$

ومنه (C_h) صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

التمرين 3:

$S_{f'(x)=0} = \{-2\}$ ①

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$		↘	-2	↗	$\|\|$	↘	

②

- $f(0) = 2$
- $f(-2) = -2$

③

• $f'(-2) = 0$

• $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\right) = f''(1)$

$$= \frac{4 - \frac{1}{4}}{-4 - 1} = \frac{\frac{15}{4}}{-5} = -\frac{3}{4}$$

(4) حلول المعادلة $f(x) = m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y = m$

• اذا: $m < -2$ لا يوجد حلول.

• اذا: $m = -2$ للمعادلة حل وحيد سالب تماما

• اذا: $-2 < m < 1$ للمعادلة حلان سالبان تماما

• اذا $m = 1$ حل واحد سالب تماما

DZPEN.COM | منصة القلم الجزائري