الهندسة الفضائية

1- التمثيلات الوسيطية

أ- التمثيل الوسيطي لمستقيم:

$\vec{u}(a;b;c)$ شعاع توجيه لمستقيم (D) يشمل نقطة معلومة $A(x_A;y_A;z_A)$ و $M(x;y;z)$ نقطة كيفية منه، فإن:

$$(D):\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} /t \in \mathbb{R}$$

ب- التمثيل الوسيطي لمستو:

$\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ شعاعان مستقلان خطيا من مستو (P) يشمل نقطة معلومة $A(x_A;y_A;z_A)$ و $M(x;y;z)$ نقطة كيفية منه، فإن:

$$(P):\begin{cases} x = x_A + at + a'\lambda \\ y = y_A + bt + b'\lambda \\ z = z_A + ct + c'\lambda \end{cases} /t,\lambda \in \mathbb{R}$$

2- الجداء السلمي في الفضاء

أ- العبارة التحليلية للجداء السلمي:

$\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ شعاعان من الفضاء، فإن:

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = aa' + bb' + cc'$$

ب- تعامد شعاعين:

$\vec{u} \perp \vec{v}$ يكافئ $aa' + bb' + cc' = 0$

ج- ملاحظة:

من تعريف الجداء السلمي لدينا:

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,.\,\|\vec{u}\|}$$

3- المعادلات الديكارتية

أ- المعادلة الديكارتية لمستو:

$\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي لمستو (P) يشمل نقطة معلومة $A(x_A;y_A;z_A)$ و $M(x;y;z)$ نقطة كيفية منه، فإن: $\vec{n} \perp \overrightarrow{AM}$ أي: $\vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0$ ومنه:

$$(P): ax + by + cz + d = 0$$

* يمكن وضع هذه المعادلة مباشرة دون حساب الجداء السلمي حيث a, b, c هي إحداثيات الشعاع الناظمي وللحصول على قيمة d نعوض x, y, z بإحداثيات النقطة A

ب- المعادلة الديكارتية لسطح كرة:

(S) سطح كرة مركزها $\Omega(x_0;y_0;z_0)$ ونصف قطرها r $(r \in \mathbb{R}_+^*)$ و $M(x;y;z)$ نقطة كيفية من (S) فإن:

$$(S): (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$$

بعد النشر والتبسيط، تصبح هذه المعادلة من الشكل التالي:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

ج- المعادلة الديكارتية لمستو مماس لسطح كرة:

(P) مستوي مماس لسطح كرة (S) مركزها $\Omega(x_0;y_0;z_0)$ في نقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ و $M(x;y;z)$ نقطة كيفية من (P) فإن: $\overrightarrow{A\Omega} \perp \overrightarrow{AM}$ أي: $\overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM} = 0$ ومنه:

$$(x_0 - x_A)(x - x_A) + (y_0 - y_A)(y - y_A) + (z_0 - z_A)(z - z_A) = 0$$

بعد النشر والتبسيط، نحصل على معادلة كما في 3-أ أعلاه.

* يمكن وضع هذه المعادلة مباشرة كما في 3-أ أعلاه كذلك، حيث يعتبر $\overrightarrow{A\Omega}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

د- ملاحظة:

ينتج المستقيم في الفضاء عن تقاطع مستويين. لذلك ليست له معادلة ديكارتية واحدة وإنما له جملة معادلتين ديكارتيين لهما. انطلاقا من هذه الجملة نحصل على تمثيل وسيطي للمستقيم.

4- المسافات

أ- المسافة بين نقطتين:

$A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ نقطتان من الفضاء، فإن:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

ب- المسافة بين نقطة ومستو:

$A(x_A;y_A;z_A)$ و $(P): ax + by + cz + d = 0$

لدينا:

$$d(A;(P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ج- المسافة بين نقطة ومستقيم:

لا توجد علاقة تسمح مباشرة بحساب المسافة بين نقطة ومستقيم، لكن يمكن أن نستعين ببعض الحالات التالية:

الحالة 1:

H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) فإن:

$$d(A;(D)) = AH$$

الحالة 2:

$(P_1) \cap (P_2) = (D)$ و $(P_1) \perp (P_2)$

بعد حساب $d(A;(P_1))$ و $d(A;(P_2))$ وتطبيق مبرهنة فيثاغورس نجد:

$$d(A;(D)) = \sqrt{[d(A;(P_1))]^2 + [d(A;(P_2))]^2}$$

الحالة 3:

$(D) \cap (P) = \{B\}$ و $(D) \perp (P)$ و $A \in (P)$

$$d(A;(D)) = AB$$

5- تذكير: المستوي المحوري - حجم رباعي وجوه

* المستوي المحوري لقطعة مستقيمة هو مستو يشمل منتصفها ويعامد حاملها.
* حجم رباعي وجوه $= \frac{1}{3}$ مساحة القاعدة في الارتفاع.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM