نهاية بعض الدوال

$\pm\infty$

مثـــــال

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x^3-3x^2-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x^3\right)=+\infty$$

نهاية دالة ناطقة هي نهاية أكبر حد في البسط على أكبر حد في المقام بجوار $\pm\infty$.

مثـــــال

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3-3x^2-1}{x^3-3x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3}{x^3}\right)=2$$

نهاية مركب دالتين

$f(x)=goh(x)$ دالة مركبة من الدالتين g و h. $a;b;c$ أعداد حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$

إذا كانت: $\lim_{x\to a}h(x)=b$ و $\lim_{x\to b}g(x)=c$ فان : $\lim_{x\to a}f(x)=c$

مثـــــال

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)$$

لاحظ أن : $f(x)=goh(x)$ $g(x)=1+\sqrt{x}$ $h(x)=\frac{x-1}{x}$ $f(x)=1+\sqrt{\frac{x-1}{x}}$

$\lim_{x\to+\infty}h(x)=1$ و $\lim_{x\to1}g(x)=2$ ومنه : $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)=2$

- هناك حالات لايمكن حساب فيها النهاية مباشرة تسمى هذه الحالات بحالة عدم التعيين وهي اربع:

$$\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty};0\times\infty;+\infty-\infty$$

$\frac{0}{\infty}=0$; $\frac{\infty}{0}=\infty$; $(+\infty)\times(-\infty)=-\infty$ ليست حالات عدم التعيين

- ولازالة حالات عدم التعيين نتبع احدى الطرق التالية : التحليل والاختزال او الضرب في المرافق أو الحصر العدد المشتق او العامل مشترك نتطرق لكل حالة في التمارين

النهايات والمستقيمات المقاربة

المستقيم المقارب الموازى لمحور الفواصل

$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=b$ $y=b$

المستقيم المقارب الموازى لمحور التراتيب

$\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty$ $x=a$

المستقيم المقارب المائل

- (Δ) $y=ax+b$ (Δ)

$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ $\pm\infty$ (C_f)

- $\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=0$ $f(x)=ax+b+g(x)$ f

$\pm\infty$ (C_f) $y=ax+b$ (Δ)

الوضع النسبي

- $(\Delta):y=ax+b$ g (C_g)

$g(x)-(ax+b)$

اذا كانت : $g(x)-(ax+b)>0$ (C_g) (Δ)

اذا كانت : $g(x)-(ax+b)<0$ (C_g) (Δ)

النهاية بالمقارنة

- f g h l $\lim_{x\to+\infty}g(x)=l$ $\lim_{x\to+\infty}h(x)=l$

$g(x)\le f(x)\le h(x)$ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$

التمرين 01

احسب النهايات التالية ثم فسر النتائج هندسيا (بيانيا):

1) $\lim_{x\to -1}\left(2x^3-3x^2+x+1\right)$ ، 2) $\lim_{x\to -\infty}\left(2x^3-3x^2+x+1\right)$ ؛ $\lim_{x\to +\infty}\left(2x^3-3x^2+x+1\right)$ (3

4) $\lim_{x\to -1}\left(-2x^3-3x^2+x\right)$ 5) $\lim_{x\to -\infty}\left(-2x^3-3x^2+x+1\right)$ ؛ $\lim_{x\to +\infty}\left(-2x^3-3x^2+x\right)$ (6

8) $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2-x+2}{x^2+1}$ ، 9) $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2-x+2}{x^2+1}$ ، 10) $\lim_{x\xrightarrow{<}1}\frac{x^2-x+3}{x-1}$ ، 11) $\lim_{x\xrightarrow{>}1}\frac{x^2-x+3}{x-1}$

12) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x+1}{x^2-x-2}$ ، 13) $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+2}$ ، 14) $\lim_{x\to +\infty}-\sqrt{x^2-x+2}$ ،

15) $\lim_{x\to -1^+}\sqrt{\frac{1-2x}{x+1}}$ ، 16) $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{x^2-2x}{x+3}}$ ، 17) $\lim_{x\to +\infty}\left(-x^3+2x^2\right)(1-x)$

التمرين 02

1) $f(x)=\frac{-3x+2}{-x+1}$ ، $D_f=-\{1\}$.

2) $f(x)=\frac{-3x^2+2x+4}{x+3}$ ، $D_f=-\{-3\}$

3) $f(x)=\frac{2x+7}{(x-2)^4}$ ، $D_f=-\{2\}$

4) $f(x)=\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x-3}$ ، $D_f=-\{-3;1\}$

5) $f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ، $D_f=$

1) $f(x)=4x+2-\frac{3}{x}$ ، $D_f=-\{0\}$

التمرين 03

باستعمال الاختزال أحسب النهايات التالية:

$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-3x+2}\right)$ ؛ $\lim_{x\to -1}\left(\frac{2x^2-4x-6}{x^2-4x-5}\right)$.

باستعمال المرافق أحسب النهايات التالية:

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ؛ $\lim_{x\to -\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ ؛ $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)$

باستعمال تعريف العدد المشتق أحسب النهايات التالية:

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ؛ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-1}{x}\right)$ ؛ $\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}\right)$

باستعمال الحصر أحسب النهايات التالية:

$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{2+\sin x}\right)$ ؛ $\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{\cos x}{x^2}\right)$

التمرين 04

نعتبر الدالة f المعرفة على $-\{-1\}$ بـ : $f(x)=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;i;j)$

1) أحسب $\lim_{x\xrightarrow{<}-1}f(x)$ ؛ $\lim_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)$ فسر النتائج هندسيا.

2) عين الاعداد الحقيقية a;b;c;d بحيث من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x+1)^2}$

3) أحسب $\lim_{x\to +\infty}f(x)$ ؛ $\lim_{x\to -\infty}f(x)$ فسر النتائج هندسيا.

4) بين أن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ يطلب تعيين معادلة له

5) حدّد وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى Δ .

التمرين 05

نعتبر الدالة f المعرفة على $-\{-1;1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;i;j)$

1) أحسب: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$ ثم فسر النتائج هندسيا.

2) عين الاعداد الحقيقية a;b;c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=ax+b+\dfrac{cx}{x^2-1}$

3) أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$; $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$ ثم فسر النتائج هندسيا.

4) ادر وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى $(\Delta): y=x+1$.

التمرين 06

نعتبر الدالة f المعرفة على بـ: $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;i;j)$

1) x $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

2) أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ماذا تستنتج.

3) أحسب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.خمن وجود مستقيم مقارب مائل.

4) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $(\Delta): y=-2x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C).

5) بين أن $u(x)+2x>0$ ادرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

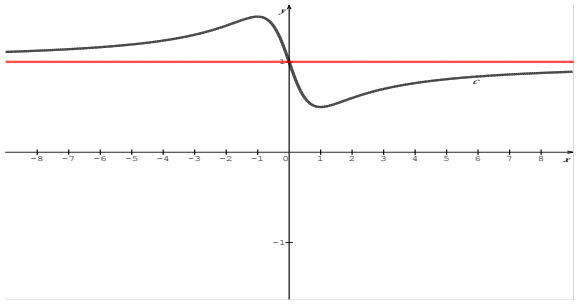
نعتبر الدالة g المعرفة على بـ: $g(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

2) حل في المعادلة: $f(x)=g(x)$ ماذا تستنتج.

التمرين 07

نعتبر الدالة f المعرفة على بـ: $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;i;j)$. (Δ) مستقيم معادلته : $y=1$.



بقراءة بيانية :

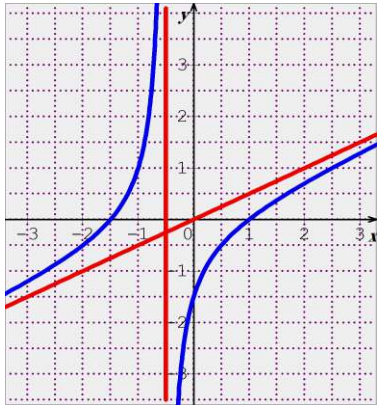
1) شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) حدد وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ).

3) عين اشارة الدالة f .

4) اثبت ان النقطة $A(0;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C) .

التمرين 08



$\mathcal{C}_f$ f $(O;i;j)$

بقراءة بيانية:

1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f.

2) عين اشارة الدالة f'

3) عين اشارة الدالة f

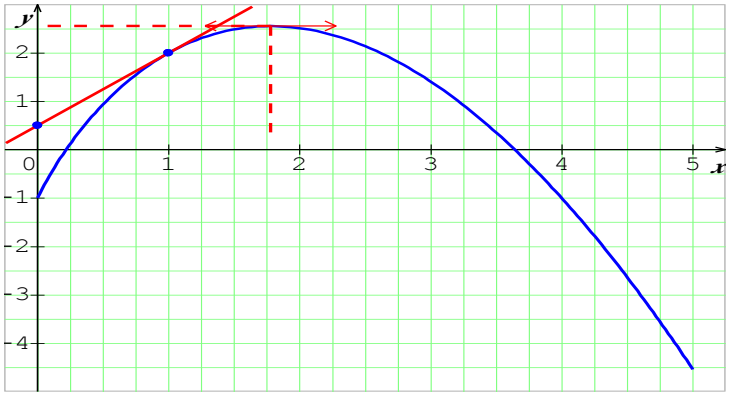
4) عين وصعية $\mathcal{C}_f$ بالنسبة للمستقيم القارب المائل.

5) شكل جدول تغيرات الدالة f

6) حل في المعادلة $f(x)=0$

التمرين 09

الشكل الموالي هو التمثيل البياني لدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$



المستقيمان المرسومان في الشكل هما المماسان للمنحني عند النقطتين اللتين فاصلتاهما 1 و $\frac{16}{9}$.

1) بقراءة بيانية عين $f(1)$ و $f'(1)$ و $f(0)$.
2) بقراءة بيانية عين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3) شكل جدول تغيرات الدالة f.
4) حل بيانيا في المجال $[0;+\infty[$ المتراجحات التالية (القيم المقروءة في التمثيل تعطى بالتقريب إلى 10^{-1})
أ) $f(x)\geq 0$ ، ب) $f'(x)\leq 0$،
5) نعتبر من اجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x)=a+bx\left(2-\sqrt{x}\right)$ مع: a و b عددان حقيقيان.
أ - بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$: $f'(x)=b\left(2-\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$
ب- باستعمال قيم $f(1)$ و $f'(1)$ المحصل عليها في السؤال1 عيّن a و b .

التمرين 10

f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$. جدول تغيراتها كما يلي :

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{5}{2}$	↗	$+\infty$

نفرض أنه من أجل كل $x>1$ ، $f(x)$ تكتب على الشكل $f(x)=ax+\frac{b}{x-c}$ ، a ، b و c أعداد حقيقية نريد تعيينها . نسمي (C_f) منحنى f في معلم متعامد ومتجانس $(O;i;j)$.

1) عين نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة التعريف .
2) أثبت أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب .ثم استنتج قيمة c .
3) انطلاقا من عبارة $f(x)$ ، بين أن لدينا العلاقة $6a+b=5$.
4) انطلاقا من عبارة $f'(x)$ بين أن لدينا $4a-b=0$
5) استنتج عبارة $f(x)$ وبرهن أن المستقيم (D) ذي المعادلة $x-2y=0$ مقارب للمنحني (C_f) .
6) أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (D) .
7) أرسم (C_f) ومستقيميه المقاربين .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM