المادة : الرياضيات	السنة الدراسية : 2015/2014

الموضوع : ملخص بسيط لدروس الجبر لطلاب البكالوريا

المتتاليات

	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
التعريف	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n \times r$
عبارة الحد العام	$u_n = u_\alpha + (n-\alpha)\times r$ $\forall \alpha \in \Re$	$u_n = u_\alpha \times r^{n-\alpha}$ $\forall \alpha \in \Re$
المجموع	$S = \frac{n-\alpha+1}{2}(u_\alpha + u_n)$	$S = u_\alpha \times \frac{r^{n-\alpha+1}-1}{r-1}$
الوسيط	$2B = A + C$ حيث A ، B ، C ثلاثة حدود متتالية لمتتالية	$B^2 = A \times C$ حيث A ، B ، C ثلاثة حدود متتابعة
النهايات	$r > 0;\ \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ $r < 0;\ \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ $r = 0;\ \lim_{n\to+\infty} u_n = u_\alpha$	$r > 0, u_\alpha > 0;\ \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ $r < 0, u_\alpha < 0;\ \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ $-1 < r < 1;\ \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

البرهان بالتراجع

المرحلة الأولى : حساب S(0) ، S(1) ، ...

المرحلة الثانية : إثبات صحة الإستلزام : $S(n) \Rightarrow S(n+1)$

نفرض صحة S(n) و نبرهن على صحة S(n + 1).

الأعداد المركبة

1 - الشكل الجبري العدد المركب z : هو $z = x + y\,i$

x يسمى الجزء الحقيقي لـ z، أما y يسمى الجزء التخيلي لـ z.

2 - المرافق :

يسمى $\overline{z}$ مرافق z حيث : $\overline{z} = x - y\,i$

خواص :

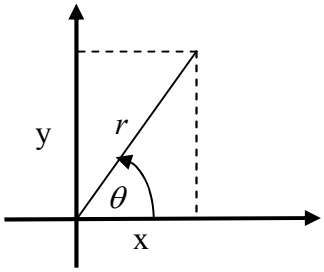
$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2};\ \overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2};\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}};\ \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \frac{1}{\overline{z_2}};\ \overline{z_1^n} = \left(\overline{z_1}\right)^n$$

3 - الطويلة : $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

خواص :

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|;\ |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|;\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|};\ |z_1^n| = |z_1|^n;\ z \times \overline{z} = |z|^2$$

4 - الشكل المثلثي : لدينا $z = x + y\,i$



و منه الشكل المثلثي للعدد المركب z هو :

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{y}{r} \\ \cos\theta = \frac{x}{r} \end{cases}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta]$$

خواص : لدينا $z_1 = [r_1, \theta_1]$ و $z_2 = [r_{21}, \theta_2]$

$$z^n = [r^n, n\theta];\ z_1 \times z_2 = [r_1 \times r_2, \theta_1 + \theta_2];\ \frac{z_1}{z_2} = \left[\frac{r_1}{r_2}, \theta_1 - \theta_2\right]$$

5 - الجذور (الحلول) التربيعية للعدد z :

الطريقة الجبرية : نضع $l = \alpha + \beta\,i$

نفرض $\delta = x + y\,i$ / $\delta^2 = l$ نجد :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\ (1) \\ x^2 - y^2 = \alpha\ \ (2) \\ 2xy = \beta\ (3) \end{cases}$$

نجمع (1) و (2) لكي نحصل على x ، ثم نعوض x في (3) لكي نحصل على y .

الطريقة المثلثية : نضع $l = [r, \theta]$ نفرض $\delta = [\alpha, \rho]$ / $\delta^2 = l$ نجد :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{r} \\ \alpha = \frac{\theta}{2} + \pi k / k \in \{0,1\} \end{cases}$$

6 - الجذور النونية : نستعمل الطريقة المثلثية لأنها الأسهل.

نضع $l = [r, \theta]$ نفرض $\delta = [\alpha, \rho]$

$$\delta^n = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + 2\pi k \end{cases}$$

$$k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$$

7 - المعادلات من الدرجة II :

$az^2 + bz + c = 0$ نحسب المميز Δ.

نحسب جذري Δ $\Delta = b^2 - 4ac$ ، باستعمال طريقة الجذور التربيعية. ثم نحسب الجذرين z_1 و z_2.

$$z_1 = \frac{-b - \delta_0}{2a};\ z_2 = \frac{-b - \delta_1}{2a}$$

8 - المعادلات من الدرجة III :

نتبع ما يلي : $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$

- تحديد الحل الخاص z_0 .
- نكتب المعادلة على الشكل :

$$(z - z_0)(\alpha z^2 + \beta z + \delta) = 0$$

- بعد نشر المعادلة، نطابق المعادلتين و نحسب α و β و δ.
- و منه تصبح المعادلة :

$$\begin{cases} z - z_0 = 0 \\ \alpha z^2 + \beta z + \delta = 0 \end{cases}$$

و الحلول المحصل عليها تكتب كالتالي :

$$S = \{z_0, z_1, z_2\}$$

بالتوفيـــق	أخوكـــم : غ – عباس

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

المادة : الرياضيات	السنة الدراسية : 2015/2014

الموضوع : ملخص دروس الجبر لطلاب البكالوريا

التحليل التوفيقي

1 - القائمة : هو عدد التشكيلات المتكونة من p عنصر مأخوذة من n عنصر بترتيب و إعادة (n^p).

➢ تطبق في الحالات التالية :

- الأعداد التي أرقامها غير مختلفة.
- الهيئات المرتبة.
- عمليات السحب واحدة بواحدة مع الإرجاع.
- الكلمات التي حروفها غير مختلفة.

2 - الترتيبة : هو عدد التشكيلات المتكونة من p عنصر مأخوذة من n عنصر بترتيب و بدون إعادة :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \qquad n \geq p$$

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ (n عاملي)

➢ تطبق في الحالات التالية :

- الأعداد التي أرقامها مختلفة.
- عمليات السحب واحدة بواحدة مع عدم الإرجاع.
- اللجان المنصبة (الرئيس، النائب، ...).
- الهيئات المرتبة ذات العناصر المختلفة
- الكلمات التي حروفها مختلفة.

3 - التوفيقة : هو عدد التشكيلات المتكونة من p عنصر مأخوذة من n عنصر بدون ترتيب و بدون إعادة :

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)! \times p!} \qquad n \geq p$$

➢ تطبق في الحالات التالية :

- المجموعات الجزئية.
- اللجان متساوية الأعضاء.
- السحب دفعة واحدة.
- الحرف (أو) ترافقه (+) الحرف (و) ترافقه (×).

الإحتمالات

$$P(F) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

المتغير العشوائي : رمزه x تحدد حسب المسألة المطروحة.

الأمل الرياضي : $A(x) = x_1P_1 + x_2P_2 + \cdots + x_nP_n$

قانون الإحتمال : هو جدول يتم فيه وضع القيم.

k	0	1	2	...	n
x_k	x_0	x_1	x_2	...	x_n
P_k	P_0	P_1	P_3	...	P_n

لا بد من تحقق شرط $\sum_{i=1}^{n} P\,k = 1$

القواسم و المضاعفات

- نرمز للقاسم المشترك الأكبر بـ p. $(a \wedge b)$
- نرمز للمضاعف المشترك الأصغر بـ m.

بعض الخواص : $a = p\,a'\,;\, m\,p = a\,b$

القسمة الإقليدية : هو جدول نعين به القاسم المشترك الأكبر بين عددين طبيعيين.

	q_1	q_2				
a	B	x_1	x_2	...	-	
x_1	x_2				x_n	0

القاسم المشترك الأكبر $P = x_n$

نظرية بيزو : $\begin{cases} a/b \times c \\ \wedge \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow a/c$

نظرية غوس : x, y, α, β أعداد صحيحة حيث : $\alpha x + \beta y = 1$ فإن x و y أوليان فيما بينهما.

العدد الأولي : هو كل عدد له قاسمان فقط هما الواحد (1) و العدد نفسه.

حل المعادلات في Z^2 : $a x + b y = c$ و $a \wedge b$ لا يقسم c.

- نحدد حلا خاص (x_0, y_0) أي : $a x_0 + b y_0 = c$
- نطرح المعادلتين : $a(x - x_0) + y(y - y_0) = 0$

$$a(x - x_0) = y(y_0 - y)$$

- نقسم على p : $a'(x - x_0) = y'(y_0 - y)$
- نطبق نظرية بيزو :

$$\begin{cases} a'/b'(y_0 - y) \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases} \Rightarrow a'/y_0 - y$$

و منه : $y = -a'k + y_0$ و بالتعويض نجد : $x = b'k + x_0$

الموافقات

نقول عن x أنه يوافق y بتردد إذا كان الفرق $(x - y)$ يقبل القسمة على n أي : $x - y = k\,n$ و رمزه $x \equiv y[n]$.

خواص:

$$x + x' \equiv y + y'[n]; x\,x' \equiv y\,y'[n]; \lambda\,x \equiv \lambda\,y[n]$$

$$x \div \alpha \equiv y \div \alpha [n \div \alpha]; x^i \equiv y^i [n]$$

بواقي القسمة بالتردد :

$$a^0 \equiv 1[b]\ ;\ n = i\,k \Rightarrow a^n \equiv 1[b]$$

$$a^1 \equiv a[b]\ ;\ n = i\,k + 1 \Rightarrow a^n \equiv a[b]$$

$$\vdots$$

$$a^i \equiv 1[b]$$

يسمى i دور بواقي القسمة a^n على b .

بالتوفيـــق	قلم الجزائر WWW.DZPEN.COM	أخوكـــــم : غ - عباس

المادة : الرياضيات	السنة الدراسية : 2015/2014

الموضوع : مراجعة في التحليل (تلخيص مبسط لطلاب البكالوريا)

الـــدوال

I- دراسة تغيرات الدالة :

1 - مجموعة التعريف للدالة :

- كثير الحدود : $D_F =]-\infty . +\infty[$
- الجذرية : $D_F = [0 ; +\infty[$
- الناطقة : المقام لا يساوي الصفر.
- اللوغارتمية : $D_F =]0 ; +\infty[$
- الأسية : $D_F =]-\infty . +\infty[$

2 - النهايات :

على العموم : $\lim [f(x)+g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x)$

- نهايات الدالة اللوغارتمية :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \; ; \; \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \; ; \; \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0} x \ln x = 0 \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

- نهايات الدالة الأسية :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \; ; \; \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \; ; \; \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} x e^x = -\infty \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

3 - الإشتقاق :

على العموم : $[f(x) . g(x)] = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

- إشتقاق دالة كثير الحدود : $[f(x)] = n x^{n-1} + i$
- إشتقاق دالة جذرية : $\left(\sqrt{f(x)}\right) = \frac{f'(x)}{2\times\sqrt{f(x)}}$
- إشتقاق الدالة اللوغارتمية : $[In\, f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$
- إشتقاق الدالة الأسية : $[e^{f(x)}] = f'(x).e^{f(x)}$

3 - جدول التغيرات : يكون حسب ما درس سابقا.

4 - المستقيمات المقاربة و الفروع اللانهائية :

-إذا كان $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ فإن المنحني يقبل مستقيم مقارب و موازي (xx') معادلته : $y = a$

- إذا كان $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$ فإن المنحني يقبل مستقيم مقارب و موازي (yy') معادلته : $x = b$

إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ فإنه يجب حساب :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 0 & \text{له فرع من قطع مكافئ باتجاه } (xx') \\ \infty & \text{له فرع من قطع مكافئ باتجاه } (yy') \\ a & \text{نقوم بحساب :} \end{cases}$$

إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ فإنه يجب حساب :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 0 & \text{له فرع من قطع مكافئ باتجاه } (xx') \\ \infty & \text{له فرع من قطع مكافئ باتجاه } (yy') \\ a & \text{نقوم بحساب :} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - a x = \begin{cases} 0 & \text{له فرع من قطع مكافئ باتجاه } y = a x \\ \infty & \text{له مستقيم مقارب مائل معادلته : } y = a x \\ b & \text{له مستقيم مقارب مائل معادلته : } y = a x + b \end{cases}$$

6 - معادلة المماس : $y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$

7 – مساحة الحيز :

$$\int_a^b f(x)\, dx = [g(x)]_a^b = f(b) - f(a)$$

حيث $g(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x)$.

الدالة الأصلية هي الدالة التي عندما تشتق تعطي لنا الدالة الأولى $(g'(x) = f(x))$.

بعض الإضافات الهامة :

الدالة الزوجية : $\forall (x,-x) \in D_F : F(-x) = F(x)$

بيانها يقبل المحور (yy') كمحور تناظر.

$\forall (x , 2\alpha - x) \in D_f : f(2\alpha - x) = f(x)$

حيث : $x = \alpha$ محور تناظر.

الدالة الفردية : $\forall (x,-x) \in D_F : F(-x) = -F(x)$

بيانها يقبل (o) كمركز تناظر.

$\forall (x , 2\alpha - x) \in D_f : f(2\alpha - x) = f(x) = 2\beta$

حيث : $\omega(\alpha , \beta)$ مركز تناظر.

نظرية القيم المتوسطة :أن تكون الدالة :

- مستمرة على المجال $[a ; b]$.
- $f(a) . f(b) < 0$

فإنه توجد نقطة $\lambda \in]a , b[$ يكون $f(\lambda) = 0$.

إذا كانت الدالة رتيبة تماما فهي نقطة وحيدة.

الدالة العكسية $f^{-1}(x)$: أن تكون الدالة :

- مستمرة.
- رتيبة تماما.

} فهي تقابل و تقبل دالة عكسية f^{-1}.

متزايدة

الدالة $f^{-1}(x)$	
$f^{-1\prime}(x)$	+
$f^{-1}(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

الدالة $f(x)$	
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

متناقصة

الدالة $f^{-1}(x)$	
$f^{-1\prime}(x)$	-
$f^{-1}(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

الدالة $f(x)$	
$f'(x)$	-
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

بالتوفيـــق	قلم الجزائر	أخوكـــم : غ - عباس

WWW.DZPEN.COM

المادة : الرياضيات	السنة الدراسية : 2015/2014

الموضوع : ملخص بسيط لدروس الجبر و الهندسة و التحليل لطلاب البكالوريا

المعادلات التفاضلية

$y' = f(x)$ حلها هو : $g \ / \ y = g(x)$ دالة أصلية f.

$y'' = f(x)$ حلها $y = k(x) + \alpha x + \beta \ / \ k''(x) = f(x)$.

$a \in \Re^* / y' - ay = 0$ حلها $\alpha \in \Re / y = \alpha\, e^{ax}$

$a \in \Re / y'' + ay = 0$

- إذا كان $a\rangle 0$ نحولها للشكل $y'' + \omega^2 y = 0 / \omega^2 = a$ حلها $(\alpha, \beta) \in \Re^2 \ / \ y = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$

- إذا كان $a\langle 0$ نحولها للشكل $y'' - \omega^2 y = 0 / \omega^2 = a$ حلها $(\lambda, \delta) \in \Re^2 \ / \ y = \lambda \cos \omega x + \delta \sin \omega x$

$(a,b) \in \Re^2 / y'' + ay' + by = 0$ نرفقها بالمعادلة :

$\Delta = a^2 - 4b \ / g^2 + ag + b = 0$ نميز الحالات :

- $\Delta = 0$ لها حل مضاعف و حل المعادلة التفاضلية :

$(\lambda, \delta) \in \Re^2 \ / \ y = (\lambda x + \delta) e^{gx}$

- $\Delta\rangle 0$ لها حلان متمايزان g_1 و g_2. و حل المعادلة التفاضلية : $(\lambda, \delta) \in \Re^2 \ / \ y = \lambda\, e^{g_1 x} + \delta\, e^{g_2 x}$

- $\Delta\langle 0$ لها حلان مركبان $g_1 = \alpha + \beta i$ و $g_2 = \alpha - \beta i$.

و حل المعادلة التفاضلية :

$(\lambda, \delta) \in \Re^2 \ / \ y = (\lambda \cos \beta x + \delta \sin \beta x) e^{\alpha x}$

التحويلات النقطية

إسم التحويل	الصيغة المركبة	
	عبارة الصيغة	عناصر التحويل
الإنسحاب	$z' = az + b$ $a = 1$	- شعاع توجيه : $\vec{u}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ حيث : $b = \alpha + \beta i$
التحاكي	$z' = az + b$ $a \in \Re^* - \{1\}$	- نقطة صامدة : z_0 $z_0 = \dfrac{b}{1-a}$ - نسبته a
الدوران	$z' = az + b$ $a \in C^* - \{1\}$ $\lvert a \rvert = 1$	- نقطة صامدة z_0. - زاويته θ عمدة (a). $[\arg(z)]$
التشابه المباشر	$z' = az + b$ $a \in C^* - \{1\}$ $\lvert a \rvert \neq 1$	- نقطة صامدة z_0. - نسبته a - زاويته θ عمدة (a)

التكاملات

لدينا f مستمرة على المجال D_f ، g الدالة الأصلية للدالة f :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [g(x)]_a^b = g(b) - g(a)$$

خواص التكامل :

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

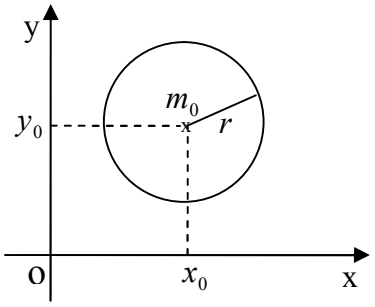
$$\int_a^b \alpha\, f(x)\,dx = \alpha \int_a^b \alpha\, f(x)\,dx$$

التكامل بالتجزئة :

$$\int_a^b f'(x) \times g(x)\,dx = [f(x) \times g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x) \times f(x)\,dx$$

معادلة الدائرة : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r$

$$m_0(x_0, y_0) = m_0\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right); r = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 4\delta}}{2}$$



المرجح: $\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = 0$

- تسمى G مرجح الجملة و مركز المسافات المتناسبة.
- إذا كان $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$ يسمى G مركز المسافات المتساوية.
- مركز المسافات المتساوية لثلاثة نقاط A، B، C هو مركز ثقل المثلث ABC.

إحداثيات النقطة G : $G(x_G, y_G)$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \\ y_G = \dfrac{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \end{cases}$$

مجموعة النقاط S:

$$\alpha_1 \overrightarrow{MA_1^2} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2^2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n^2} = k$$

$$\alpha_1 \left\|\overrightarrow{MA_1}\right\|^2 + \alpha_2 \left\|\overrightarrow{MA_2}\right\|^2 + \cdots + \alpha_n \left\|\overrightarrow{MA_n}\right\|^2 = k$$

لتحديد مجموعة النقاط نميز حالتين :

- إذا كان $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0$ إما أن يكون (S مستقيما) أو $(S = \phi)$ أو $(S = \pi)$.
- إذا كان $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$ إما أن يكون (S دائرة) أو $(S = \phi)$.

بالتوفيـــق	أخوكـــــــــم : غ - عباس

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM