المعاصر

محمد قداري

سلسلة الرياضيات بالفيديو

هذا الكتاب مرفق بقرص تعليمي

المغني في الرياضيات

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

السنة الثالثة ثانوي علوم تجريبية

- أنشطة وتطبيقات محلولة بالفيديو .
- ملخصات هامة للدروس .
- 412 تمرين ومسألة محلولة .
- وضعيات إدماجية متنوعة و هادفة .
- تمارين ومسائل من بكالوريات أجنبية .
- الحلول المفصلة لمواضيع البكالوريا (المنهاج الجديد) .

BAC

وفق - البرنامج الجديد لوزارة التربية الوطنية
- التوزيع السنوي المعتمد وطنيا

المعاصرة

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تم تحميل الكتاب من موقع الدراسة الجزائري

www.eddirasa.com



المحور الأول

النهايات

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

حقوق النسخ محفوظة لـ صَافِيْ الرُوْحْ

ما يجب أن يعرف

تتمات على النهايات

1. نهايات بعض الدوال المرجعية:

* n عدد طبيعي غير معدوم ، $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty & ;n \text{ زوجي} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty & ;n \text{ فردي} \end{cases}$$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ * $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ * $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \frac{1}{x} = +\infty$ * $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} \frac{1}{x} = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

2. العمليات على النهايات:

f و g دالتان . a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$. نقبل دون برهان المبرهنات التالية:

نهاية مجموع دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

نهاية جداء دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\times g(x)]$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

نهاية حاصل قسمة دالتين:

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات عدم التعيين "ح ع ت"

3- نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$:

قواعد إجرائية:

- النهاية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ ($-\infty$).
- النهاية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ ($-\infty$).

نهاية دالة مركبة

مبرهنة: a، b و c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. u، v و f دوال حيث $f = v\,ou$.

إذا كانت $\lim_{x\to a} u(x) = b$ وإذا كانت $\lim_{X\to b} v(X) = c$ فإن $\lim_{x\to a} f(x) = c$

النهايات بالمقارنة

مبرهنة1 (مبرهنة الحصر): f، g و h دوال و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} g(x) = l$ و $\lim_{x\to+\infty} h(x) = l$ وإذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $g(x) \le f(x) \le h(x)$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.

مبرهنة2: f، g دالتان. إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ وإذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \ge g(x)$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

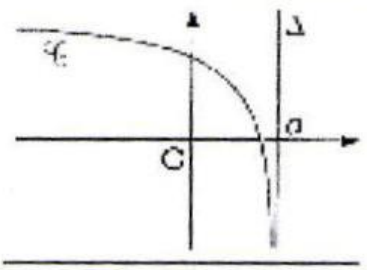
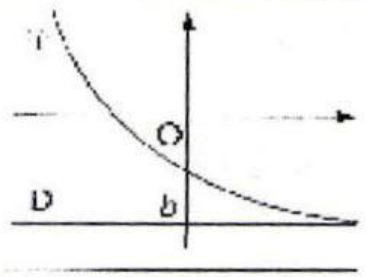
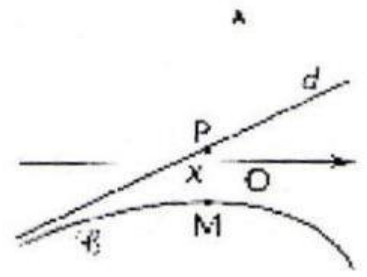
مبرهنة3: f، g دالتان. إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ وإذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \le g(x)$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

ملاحظة: تمدد هذه المبرهنات إلى حالتي النهاية عند $-\infty$ وعند عدد حقيقي.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

المستقيمات المقاربة

1 . تذكير: a و b عددان حقيقيان. f دالة معرفة على مجال I و $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

النهاية	المستقيم المقارب	التمثيل البياني
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$	المستقيم Δ ذو المعادلة $x=a$ و الموازي لمحور التراتيب مستقيم مقارب للمنحني $(\mathscr{C})$.	
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$	المستقيم D ذو المعادلة $y=b$ و الموازي لمحور الفواصل مستقيم مقارب للمنحني $(\mathscr{C})$ عند $+\infty$ أو عند $-\infty$.	
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$	المستقيم d ذو المعادلة $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني $(\mathscr{C})$ عند $+\infty$ أو عند $-\infty$.	

ملاحظة: إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=ax+b+\varphi(x)$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$ فمن الواضح أن المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $+\infty$ $(-\infty)$.

2 . الوضع النسبي لمنحنى والمستقيم المقارب المائل:

لدراسة وضعية المنحني (C) الممثل لدالة f بالنسبة إلى مستقيم مقارب له معادلته $y=ax+b$ نقوم بدراسة إشارة الفرق $\left[f(x)-(ax+b)\right]$.

- إذا كان $f(x)-(ax+b)<0$ تكون وضعية (C) تحت المستقيم المقارب المائل.
- إذا كان $f(x)-(ax+b)>0$ تكون وضعية (C) فوق المستقيم المقارب المائل.
- إذا قبلت المعادلة $f(x)-(ax+b)=0$ حلولا على مجموعة تعريف الدالة f، فإن المستقيم المقارب المائل يقطع المنحنى (C) في نقط فواصلها هي حلول المعادلة.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تمارين محلولة

تمرين 01

أدرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية الدالة f المعرفة على D_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

1. $f(x) = -x^3 + 2x - 2$ ، $D_f = \bullet$
2. $f(x) = 3x^2 + x - 3$ ، $D_f = \bullet$
3. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{2 - x}$ ، $D_f = \bullet - \{2\}$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

الحل

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3) = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3x^2) = +\infty$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2}{-x} \right) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{-x} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$.

تمرين 02

لتكن f الدالة المعرفة على $\bullet - \{-2;1\}$ بـ: $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 + x - 2}$

1. حدد حسب قيم x إشارة $x^2 + x - 2$.
2. أدرس النهايات من اليمين و من اليسار عند كل من -2 و 1.
3. أدرس نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

الحل

1. تكثير الحدود $x^2 + x - 2$ جذران هما -2 و 1. وبتطبيق القاعدة المحددة لإشارة ثلاثي حدود من الدرجة 2 نجد:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x^2 + x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -2\\ >}} \frac{2x+3}{x^2+x-2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{2x+3}{x^2+x-2} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{2x+3}{x^2+x-2} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

3. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2x}{x^2}\right) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = 0$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2x}{x^2}\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = 0$$

تمرين 03

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{(x-1)^2}$

أدرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.مبينا المستقيمات المقاربة لـ (C) المنحني الممثل للدالة f في معلم.

الحل

لدينا: $\mathbb{R}-\{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ و $f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x^2-2x+1}$. ومنه:

* $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2+3x-1}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$

* $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2+3x-1}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y=2$ مقارب لـ (C) عند $-\infty$ و $+\infty$.

* $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2x^2+3x-1}{(x-1)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب لـ (C) بجوار $+\infty$.

تمرين 04

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = 2x+3+\frac{1}{x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

1. بين أن المستقيم $(D): y=2x+3$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).

الحل

1. لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

ومنه المستقيم $(D): y=2x+3$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

ملاحظة: يمكن أن نعبر عن النهايتين السابقتين معا كما يلي :

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

2. لدينا: $\left[f(x)-(2x+3)\right]=\frac{1}{x}$ ومنه:

- من أجل كل x من $]0;+\infty[$ يكون $\left[f(x)-(2x+3)\right]>0$، لأن $\frac{1}{x}>0$.

إذن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم المقارب (D) في المجال $]0;+\infty[$.

- من أجل كل x من $]-\infty;0[$ يكون $\left[f(x)-(2x+3)\right]<0$. لأن $\frac{1}{x}<0$.

إذن المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب (D) في المجال $]-\infty;0[$.

تمرين 05

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=-x+2+\frac{3}{x^2}$. وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

1. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+2$ مستقيم مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

2. أدرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل (Δ).

الحل

1. لدينا: $f(x)-(-x+2)=\frac{3}{x^2}$ وبما أن $\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3}{x^2}=0$ فإن (Δ) مستقيم مقارب لـ (C) عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2. لدينا: $f(x)-(-x+2)=\frac{3}{x^2}$ وبما أن $\frac{3}{x^2}>0$ فإن المنحني (C) يقع فوق المستقيم المقارب (Δ) على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تمرين 06

لتكن f الدالة المعرفة على $\bullet$ بـ: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2|x|}{x} & ;x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$.

أدرس نهاية الدالة f عند 0.

الحل

لدينا: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2|x|}{x}=\dfrac{2x}{x}=2 & ;x>0 \\ f(x)=\dfrac{2|x|}{x}=\dfrac{2(-x)}{x}=-2 & ;x<0 \\ f(0)=2 \end{cases}$

لكون: $\begin{cases} |x|=x & ;x>0 \\ |x|=-x & ;x<0 \end{cases}$.

ومنه: $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)=2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x)=-2$.

بما أن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)\neq \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x)$ ، فإن الدالة f ليست لها نهاية عند 0.

تمرين 07

أحسب النهايتين التاليتين:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

الحل

بتطبيق قاعدة حساب نهاية دالة مركبة نجد:

1. لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$.

إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$.

2. لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi x}{2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi x}{2x}=\dfrac{\pi}{2}$ و $\lim\limits_{X\to\frac{\pi}{2}}\sin X=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$.

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)=1$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تمرين 08

نعتبر الدالة f المعرفة على $\bullet$ بـ: $f(x)=x+\sin x$.

أحسب النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

الحل

نعلم أنه من أجل كل x من $\bullet$ ، $-1\le \sin x\le 1$ ومنه فإن:

من أجل كل x من $\bullet$ لدينا: $x-1\le x+\sin x\le x+1$.

* بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

* بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

تمرين 09

أحسب النهاية التالية: $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to0}} \sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;1[$ كما يلي: $f(x)=\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

(يهمنا x بجوار 0 و $x>0$)

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;1[$ فإن: $-1\le \sin\left(\frac{1}{x}\right)\le 1$

بضرب طرفي المتباينة الأخيرة في العدد الموجب تماما $\sqrt{x}$ نجد: $-\sqrt{x}\le \sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le \sqrt{x}$

أي $-\sqrt{x}\le f(x)\le \sqrt{x}$ ، وبما أن $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to0}}\left(-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{\substack{>\\ x\to0}}\sqrt{x}=0$. فإن $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to0}} f(x)=0$

إذن: $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to0}} \sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

تمرين 10 (إزالة حالة عدم تعيين)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;1\}$ $\bullet$ بـ: $f(x)=\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+x-2}$

أحسب نهاية الدالة f عند -2 .

الحل

لدينا: $\lim\limits_{x\to-2}(x^3+2x^2+x+2)=(-2)^3+2(-2)^2+(-2)+2=0$

و: $\lim\limits_{x\to-2}(x^2+x-2)=(-2)^2+(-2)-2=0$ ، إذن حالة عدم تعين من الشكل: $\left(\frac{0}{0}\right)$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

إزالة حالة عدم التعيين:

نستشف مما سبق أن العدد -2 جذر لكثيري الحدود x^3+2x^2+x+2 و x^2+x-2.

إذن كل من x^3+2x^2+x+2 و x^2+x-2 يقبل القسمة على $x+2$.

بإجراء القسمة الإقليدية نجد هكذا :

x^3+2x^2+x+2	$x+2$
$-x^3-2x^2$	x^2+1
$x+2$	
0	

x^2+x-2	$x+2$
$-x^2-2x$	$x-1$
$-x-2$	
0	

ومنه: $x^3+2x^2+x+2=(x+2)(x^2+1)$ و $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$.

إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;1\}$:

ومنه: $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+x-2}=\dfrac{\cancel{(x+2)}(x^2+1)}{\cancel{(x+2)}(x-1)}=\dfrac{x^2+1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to-2}f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\dfrac{(-2)^2+1}{(-2)-1}=-\dfrac{5}{3}$ ، إذن: $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=-\dfrac{5}{3}$.

تمرين 11 (إزالة حالة عدم تعيين)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $f(x)=-x+\dfrac{x^3+x+1}{x-2}$.

أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

الحل

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

إذن حالة عدم تعيين من الشكل: $(+\infty-\infty)$.

إزالة حالة عدم التعيين:

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{2\}$:

$$-x+\frac{x^3+x+1}{x-2}=\frac{(-x)(x-2)}{x-2}+\frac{x^3+x+1}{x-2}=\frac{-x^2+2x+x^3+x+1}{x-2}$$
$$=\frac{x^3-x^2+3x+1}{x-2}$$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x^2+3x+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تمرين 12 (إزالة حالة عدم تعيين)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.

أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

الحل

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty$ إذ أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$.

وبالتالي حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$.

إزالة حالة عدم التعيين:

لدينا من أجل $x\geq 0$، باستعمال $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ مرافق $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ نجد:

$$f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\times\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=+\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$. إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

تمرين 13 (إزالة حالة عدم تعيين)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $f(x)=2x+1-\sqrt{x^2+x-2}$.

أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

الحل

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x-2}=+\infty$ إذ أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x-2)=+\infty$.

وبالتالي حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$.

إزالة حالة عدم التعيين:

لدينا من أجل $x\geq 1$:

$$f(x)=2x+1-\sqrt{x^2+x-2}=2x+1-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$=2x+1-\sqrt{x^2}\times\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=2x+1-|x|\times\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$=2x+1-x\times\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=x\left(2+\frac{1}{x}-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)$$

لأن $|x|=x$ من أجل $x\geq 1$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2$ ، $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=1$ إذ أن $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)=1$

ومنه: $\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)=2-1=1$

و بالتالي: $\lim_{x\to+\infty}x\left(2+\frac{1}{x}-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)=+\infty$. إذن: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ملاحظة: يمكن حساب هذه النهاية باستعمال طريقة استخدام المرافق.

تمرين 14 (إزالة حالة عدم تعيين)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\frac{\sin(3x)}{x}$

أحسب نهاية الدالة f عند 0 .

الحل

نعلم النهاية الشهيرة التالية: $\lim_{u\to0}\frac{\sin u}{u}=1$. سنستعمل طريقة تبديل المتغير ،

نضع: $u=3x$ ، ومنه: $x=\frac{u}{3}$. ولدينا: $x\to0$ يكافئ $u\to0$.

وبالتالي: $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{u\to0}\frac{\sin u}{\frac{u}{3}}=\lim_{u\to0}3\frac{\sin u}{u}=3\lim_{u\to0}\frac{\sin u}{u}=3\times1=3$.

إذن: $\lim_{x\to0}f(x)=3$.

تمرين 15 (إزالة حالة عدم تعيين)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\frac{\cos x-1}{x}$

أحسب نهاية الدالة f عند 0 .

الحل

1) لدينا: $\frac{\cos(x)-1}{x}=\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0}$ ، إذن نستعمل الدالة $g:x\mapsto\cos(x)$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g'(x)=-\sin(x)$. ومنه:

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0}=g'(0)=-\sin(0)=0$$

إذن: $\lim_{x\to0}f(x)=0$

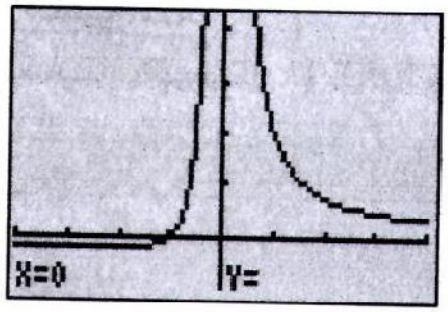
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تمرين 16

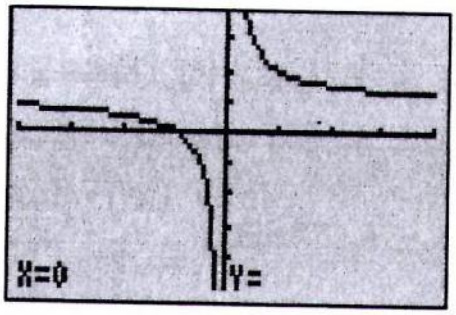
علما أن: أ) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. ب) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$

جـ) $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} h(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} h(x) = +\infty$

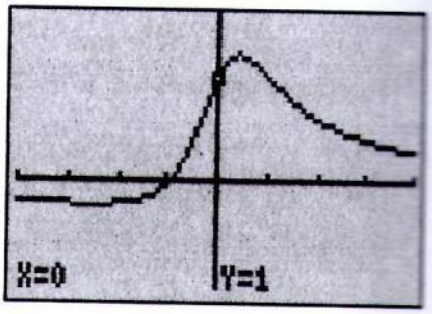
أرفق كل دالة من الدوال f، g و h بتمثيلها البياني من بين التمثيلات التالية:



(3)



(2)



(1)

الحل

- المنحنى (1) يمثل الدالة g . (بالفعل $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$)
- المنحنى (2) يمثل الدالة h . (بالفعل $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} h(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} h(x) = +\infty$)
- المنحنى (3) يمثل الدالة f . (بالفعل $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$)

تمرين 17

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة مما يلي:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]2;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 7x - 11}{x-2}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عبارة أخرى لـ $f(x)$ هي: $f(x) = -2x + 3 - \dfrac{5}{x-2}$.
2. يقبل المنحنى (C) مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته: $x = 2$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
4. المستقيم ذو المعادلة $y = -2x + 3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

الحل

1. صحيح، لأن: من أجل كل x من المجال $]2;+\infty[$ لدينا:

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$-2x+3-\frac{5}{x-2}=\frac{(-2x+3)(x-2)}{x-2}-\frac{5}{x-2}=\frac{-2x^2+4x+3x-6-5}{x-2}$$

$$=\frac{-2x^2+7x-11}{x-2}=f(x)$$

* **طريقة أخرى**: يمكنك إجراء القسمة الإقليدية لـ $-2x^2+7x-11$ على $x-2$.

2. **صحيح**، لأن:

عند حساب النهاية $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 2}} f(x)$ نجد هكذا:

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 2}} f(x)=\lim_{\substack{>\\ x\to 2}}\frac{-2x^2+7x-11}{x-2}=\frac{-5}{0^+}=-\infty .$$

3. **خطأ**، لأن:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+7x-11}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}(-2x)=-\infty .$$

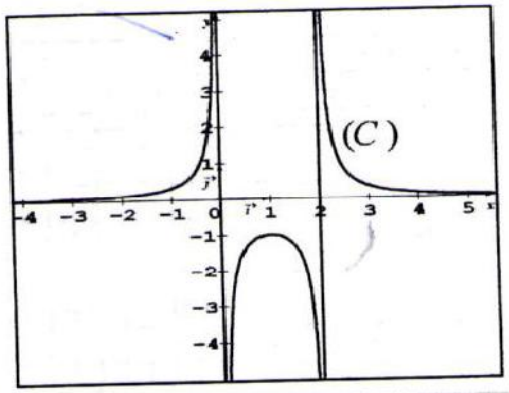
4. **صحيح**، لأن:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-2x+3)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x-2}=0 .$$

(استعملنا العبارة $f(x)=-2x+3-\frac{5}{x-2}$)

تمرين 18

f دالة و (C) تمثيلها البياني المبين في الشكل المقابل. بقراءة بيانية:



1. عين D مجموعة تعريف الدالة f.
2. عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.
3. عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C).

الحل

بقراءة بيانية نجد:

1. $D=\mathbb{R}-\{0;2\}=]-\infty;0[\cup]0;2[\cup]2;+\infty[$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{\substack{<\\ x\to 0}} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{<\\ x\to 2}} f(x)=-\infty$ ،

$\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 2}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

3. المستقيمات المقاربة لـ (C) :

* المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ (محور الفواصل) عند $-\infty$ و $+\infty$ لأن:

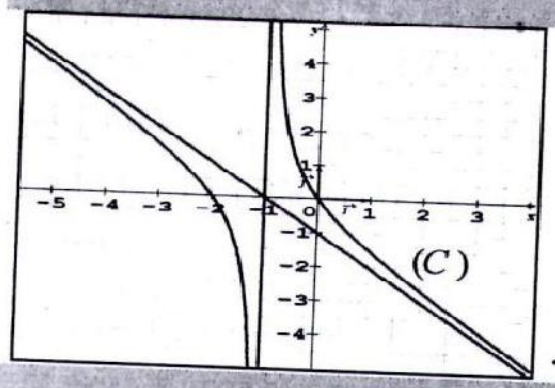
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

* المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (محور التراتيب) بجوار $+\infty$ و $-\infty$ لأن:

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ و $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$.

* المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$ لأن: $\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$ و $\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$.

تمرين 19 1ر



f دالة و (C) تمثيلها البياني المبين في الشكل المقابل. بقراءة بيانية:

1. عين D مجموعة تعريف الدالة f.
2. عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.
3. عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C).
4. استعمل البيان السابق لتحديد إشارة: $f(x) + x + 1$.

الحل

1. $D = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.

2. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

3. المستقيمات المقاربة لـ (C) :

* المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$ لأن: $\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$.

* المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) ، لنعين معادلة له.

إن (Δ) يمر من النقطتين $A(-1;0)$ ، $B(0;-1)$ ومعادلته المختصرة من الشكل $y = ax + b$.

تعيين a: لدينا $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-0}{0-(-1)} = -1$ ، إذن $a = -1$.

تعيين b: لدينا $(\Delta): y = -x + b$ و $A(-1;0)$ مثلا نقطة من (Δ) إذن: $0 = -(-1) + b$

أي $b = -1$. إذن: $(\Delta): y = -x - 1$.

4. تحديد إشارة: $f(x) + x + 1$

لدينا: $f(x) + x + 1 = f(x) - (-x - 1)$ ، إذن نستغل الوضع النسبي لـ (C) و (Δ).

بقراءة بيانية نجد هكذا:

• على المجال $]-\infty; -1[$: (C) يقع تحت (Δ) وبالتالي: $f(x) + x + 1 < 0$.

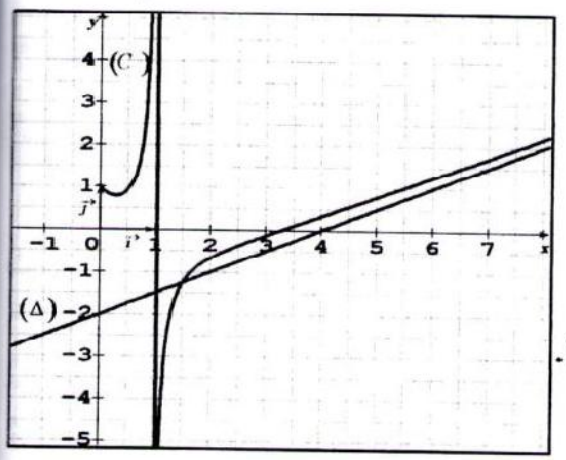
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

• على المجال $]-1;+\infty[$ (C) يقع فوق (Δ) وبالتالي: $f(x)+x+1>0$.

تمرين 20

في الشكل أدناه لدينا الرسم البياني (C) لدالة f معرفة على $]1;+\infty[\cup[0;1[=D$.

كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+3x-2}{2(x^2-1)}$



و المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=\dfrac{1}{2}x-2$.

اختر الإجابة الصحيحة مع التبرير في كل حالة:

1. بقراءة بيانية:

ج 1) المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب لـ (C)

ج 2) المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب لـ (C)

ج 3) (C) لا يقبل مستقيما مقاربا أفقيا و لا عموديا.

2. بالحساب:

من أجل كل x من $]1;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+a+\dfrac{bx+c}{2(x^2-1)}$

ج 1) $a=-2$ ، $b=4$ ، $c=-6$.

ج 2) $a=2$ ، $b=-2$ ، $c=-3$.

ج 3) $a=1$ ، $b=2$ ، $c=3$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

3. بالحساب:

(C) يقبل مستقيما مقاربا عند $+\infty$ معادلته:

ج 1) $y=\dfrac{1}{2}x+1$. ج 2) $y=\dfrac{1}{2}x+2$. ج 3) $y=\dfrac{1}{2}x-2$.

الحل

1. الجواب ج 2) لأن: بقراءة بيانية نلاحظ أن: $\lim\limits_{\substack{<\\ x\to 1}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 1}} f(x)=-\infty$.

2. الجواب ج 1) لأن بالحساب نجد هكذا:

$$\frac{1}{2}x+a+\frac{bx+c}{2(x^2-1)}=\frac{\left(\frac{1}{2}x+a\right)\left(2(x^2-1)\right)}{2(x^2-1)}+\frac{bx+c}{2(x^2-1)}$$

$$=\frac{x^3-x+2ax^2-2a}{2(x^2-1)}+\frac{bx+c}{2(x^2-1)}$$

$$=\frac{x^3+2ax^2-x+bx-2a+c}{2(x^2-1)}$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= \frac{x^3 + 2ax^2 + (b-1)x - 2a + c}{2\left(x^2 - 1\right)}$$

وبما أن: $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 3x - 2}{2\left(x^2 - 1\right)}$

نجد: $\dfrac{x^3 + 2ax^2 + (b-1)x - 2a + c}{2\left(x^2 - 1\right)} = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 3x - 2}{2\left(x^2 - 1\right)}$

أي: $x^3 + 2ax^2 + (b-1)x - 2a + c = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$ ، فبالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 2a = -4 \\ b - 1 = 3 \\ -2a + c = -2 \end{cases} \text{ ومنه: } \begin{cases} 1 = 1 \\ a = -2 \\ b = 4 \\ -2(-2) + c = -2 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 1 = 1 \\ a = -2 \\ b = 4 \\ c = -6 \end{cases}$$

3. الجواب ج 3):

لدينا $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 2 + \dfrac{4x - 6}{2\left(x^2 - 1\right)} = \dfrac{1}{2}x - 2 + \dfrac{2x - 3}{x^2 - 1}$ من السؤال 2.

ومنه: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x - 2 \right) \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 3}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

تمرين 21

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{2;3\}$ بجدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$	
	2	↗		↘		↘	5
				$-\infty$			

عين المستقيمات المقاربة لـ (C) منحنى الدالة f ثم استنتج الوضع النسبي لهذه المستقيمات مع (C).

الحل

- بما أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$، فإن المستقيم (D_1) ذا المعادلة $y = 2$ مقارب أفقي لـ (C) عند $-\infty$

وبما أن من أجل كل x من المجال $]-\infty;2[$ لدينا: $f(x) > 2$، فإن (C) يقع فوق (D_1).

- بما أن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$، فإن المستقيم (D_2) ذا المعادلة $x = 2$ مقارب عمودي لـ (C)

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

بجوار $+\infty$. وإذا كان $x < 2$ ، فإن (C) يقع على يسار (D_2). وإذا كان $x > 2$ ، فإن (C) يقع على يمين (D_2).

• بما أن $\lim\limits_{\substack{<\\ x\to 3}} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 3}} f(x) = +\infty$ ،فإن المستقيم (D_3) ذا المعادلة $x = 3$ مقارب عمودي لـ (C) بجوار $-\infty$ و $+\infty$. وإذا كان $x < 3$ ، فإن (C) يقع على يسار (D_3). وإذا كان $x > 3$ ، فإن (C) يقع على يمين (D_3).

• بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$ ،فإن المستقيم (D_4) ذا المعادلة $y = 5$ مقارب أفقي لـ (C) عند $+\infty$ وبما أن من أجل كل x من المجال $]3;+\infty[$ $f(x) > 5$ ،فإن (C) يقع فوق (D_4).

تمرين 22

أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها D في كل حالة :

1) $f(x) = 3x^2 - x + 5$. 2) $f(x) = -2x^2 + x - 4$. 3) $f(x) = 2x^3 + x + 1$.

4) $f(x) = -3x^3 - 4x + 5$. 5) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$. 6) $f(x) = \dfrac{3x+1}{-x+2}$.

7) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 1}{x - 1}$. 8) $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^2+1}$. 9) $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{1}{x}$.

10) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - x}$.

الحل

1) $D = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$. ومنه:

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(3x^2 - x + 5\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} (3x^2) = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(3x^2 - x + 5\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2) = +\infty$

2) $D = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$. ومنه:

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-2x^2 + x - 4\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-2x^2) = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-2x^2 + x - 4\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-2x^2) = -\infty$

3) $D = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$. ومنه:

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(2x^3 + x + 1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3) = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x^3 + x + 1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2x^3) = +\infty$

4) $D = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$. ومنه:

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3-4x+5\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^3) = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^3-4x+5\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^3) = -\infty$

5) $D = \mathbb{R}-\{3\} =]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$. ومنه:



* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x} = 2$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x} = 2$

* $\lim\limits_{\substack{>\\x\to3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{>\\x\to3}}\dfrac{2x-1}{x-3} = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$ و $\lim\limits_{\substack{<\\x\to3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{<\\x\to3}}\dfrac{2x-1}{x-3} = \dfrac{5}{0^-} = -\infty$

لأن إشارة المقام $x-3$ هي كما في الجدول :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x-3$	$-$	0	$+$

6) $D = \mathbb{R}-\{2\} =]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$. ومنه:

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+1}{-x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{-x} = -3$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{-x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{-x} = -3$

* $\lim\limits_{\substack{>\\x\to2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{>\\x\to2}}\dfrac{3x+1}{-x+2} = \dfrac{7}{0^-} = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{<\\x\to2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{<\\x\to2}}\dfrac{3x+1}{-x+2} = \dfrac{7}{0^+} = +\infty$

لأن إشارة المقام $-x+2$ هي كما في الجدول :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x+2$	$+$	0	$-$

7) $D = \mathbb{R}-\{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$. ومنه:

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-3x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-3x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

* $\lim\limits_{\substack{<\\x\to1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{<\\x\to1}}\dfrac{x^3-3x+1}{x-1} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$

* $\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{>\\x\to1}}\dfrac{x^3-3x+1}{x-1} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

لأن إشارة المقام $x-1$ هي كما في الجدول :

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

8) $D=\mathbb{R}$ لأن $x^2+1>0$ من أجل كل عدد حقيقي x ومنه:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+1}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3 \quad *$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3 \quad *$$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

9) $D=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$. ومنه:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+3+\frac{1}{x}\right)=-\infty \quad *$$

لأن $\lim_{x\to-\infty}(2x+3)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x+3+\frac{1}{x}\right)=+\infty \quad *$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}(2x+3)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

$$\lim_{\substack{<\\x\to0}} f(x)=\lim_{\substack{<\\x\to0}}\left(2x+3+\frac{1}{x}\right)=-\infty \quad *$$

لأن $\lim_{\substack{<\\x\to0}}(2x+3)=3$ و $\lim_{\substack{<\\x\to0}}\frac{1}{x}=-\infty$.

$$\lim_{\substack{>\\x\to0}} f(x)=\lim_{\substack{>\\x\to0}}\left(2x+3+\frac{1}{x}\right)=+\infty \quad *$$

لأن $\lim_{\substack{>\\x\to0}}(2x+3)=3$ و $\lim_{\substack{>\\x\to0}}\frac{1}{x}=+\infty$.

10) $D=\mathbb{R}-\{0;1\}=]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$.

لأن المقام $x^2-x=x(x-1)$ ينعدم عند 0 و 1 ومنه:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x^2-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \quad *$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \quad *$$

ـ لحساب النهايات $\lim_{\substack{<\\x\to0}} f(x)$ ، $\lim_{\substack{>\\x\to0}} f(x)$ ، $\lim_{\substack{>\\x\to1}} f(x)$ ، $\lim_{\substack{<\\x\to1}} f(x)$ نستعين بإشارة المقام x^2-x الموضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\lim_{\substack{<\\x\to0}} f(x)=\lim_{\substack{<\\x\to0}}\frac{x+3}{x^2-x}=\frac{3}{0^+}=+\infty \quad *$$

$$\lim_{\substack{>\\x\to0}} f(x)=\lim_{\substack{>\\x\to0}}\frac{x+3}{x^2-x}=\frac{3}{0^-}=-\infty \quad *$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{x+3}{x^2-x}=\dfrac{4}{0^-}=-\infty$ *

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \dfrac{x+3}{x^2-x}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty$ *

تمرين 23

أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها D (يطلب تعيينها) في كل حالة :

1) $f(x)=2+\sqrt{x}$ 2) $f(x)=(1-x)\left(1+\sqrt{x}\right)$ 3) $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$.

4) $f(x)=\sqrt{2x^2-x+3}$ 5) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ 6) $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-2}$.

الحل

1) $D=[0;+\infty[$.ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2+\sqrt{x})=+\infty$. لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$.

2) $D=[0;+\infty[$.ومنه:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\sqrt{x})=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

3) $D=[0;+\infty[$.لأن $x\geq 0$ و $x+1\geq 0$ تعني $x\geq 0$ و $x\geq -1$ أي $x\geq 0$.ومنه:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1})=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

4) $D=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$.لأن $2x^2-x+3>0$ إذ أن مميز كثير الحدود $2x^2-x+3$ هو $\Delta=-5<0$ ومعامل x^2 هو $2>0$ ومنه:

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2-x+3)=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}(\sqrt{X})=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-x+3}=+\infty$

إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2-x+3)=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}(\sqrt{X})=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-x+3}=+\infty$ إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

5) $D=]-\infty;-1]\cup]1;+\infty[$ لأن f معرفة معناه: $\dfrac{x+1}{x-1}\geq 0$ و $x-1\neq 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

إذن سندرس النهايات $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{\substack{>\\ x\to 1}} f(x)$. لدينا:

* $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$ و $\lim_{X\to 1} \sqrt{X} = 1$ ومنه: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

* $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$ و $\lim_{X\to 1} \sqrt{X} = 1$ ومنه: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

* $\lim_{\substack{>\\ x\to 1}} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$ و $\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ ومنه: $\lim_{\substack{>\\ x\to 1}} f(x) = +\infty$.

6) $D = [0;4[\cup]4;+\infty[$. لأن f معرفة بمعناه: $x \geq 0$ و $\sqrt{x} - 2 \neq 0$

أي: $x \geq 0$ و $\sqrt{x} \neq 2$ أي: $x \geq 0$ و $x \neq 4$ وعليه $D = [0;4[\cup]4;+\infty[$.

إذن سندرس النهايات: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{\substack{<\\ x\to 4}} f(x)$ ، $\lim_{\substack{>\\ x\to 4}} f(x)$. لدينا:

* $\lim_{\substack{<\\ x\to 4}} (x-2) = 2 > 0$ و $\lim_{\substack{<\\ x\to 4}} (\sqrt{x}-2) = 0$ و $\sqrt{x} < 2$ من أجل $x < 4$.

إذن: $\lim_{\substack{<\\ x\to 4}} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$.

* $\lim_{\substack{>\\ x\to 4}} (x-2) = 2 > 0$ و $\lim_{\substack{>\\ x\to 4}} (\sqrt{x}-2) = 0$ و $\sqrt{x} > 2$ من أجل $x > 4$.

إذن: $\lim_{\substack{>\\ x\to 4}} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$.

* $\lim_{x\to+\infty} (x-2) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x}-2) = +\infty$. ومنه: حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$

إزالة حالة عدم التعيين:

لدينا من أجل كل x من D:

$$\frac{x-2}{\sqrt{x}-2} = \frac{x-2}{\sqrt{x}-2} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{(x-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2-2^2} = \frac{x\sqrt{x}+2x-2\sqrt{x}-4}{x-4}$$

$$= \frac{(x-2)\sqrt{x}+2x-4}{x-4} = \left(\frac{x-2}{x-4}\right)\sqrt{x} + \frac{2x-4}{x-4}$$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-2}{x-4}\right) = 1$ و $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x-4}{x-4}\right) = 2$

ومنه: $\lim_{x\to+\infty} \left(\left(\frac{x-2}{x-4}\right)\sqrt{x} + \frac{2x-4}{x-4}\right) = +\infty$، إذن: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تمرين 24

باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايتين :

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

الحل

1) لدينا: $\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}$ ، إذن نستعمل الدالة: الجذر التربيعي $f:x\mapsto\sqrt{x}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ومنه: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\dfrac{1}{4}$ ،

إذن: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\dfrac{1}{4}$

2) لدينا: $\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{0+1}}{x-0}$ ، إذن نستعمل الدالة $g:x\mapsto\sqrt{x+1}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ ولدينا: $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

***تذكير:**

مشتقة الدالة: $x\mapsto\sqrt{ax+b}$ على المجال $\left]-\dfrac{b}{a};+\infty\right[$ هي الدالة:

$x\mapsto\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$ حيث $a\neq 0$ ومنه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{0+1}}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=\frac{1}{2\sqrt{0+1}}=\frac{1}{2}$$

إذن: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$

تمرين 25

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x+1}}$

1) بين أنه إذا كان $x>1$ فإن: $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}>\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$

2) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الحل

1) لدينا: $x > 1$ ومن أجل كل x فإن: $x \geq x$، بجمع المتباينتين طرفا بطرف نجد:

$x + x > x + 1$ أي $2x > x + 1$، ولكون العددان $2x$ و $x + 1$ موجبان فبالمرور إلى الجذر التربيعي نجد $\sqrt{2x} > \sqrt{x+1}$ ثم إلى المقلوب نجد: $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

2) لدينا: $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$ وبضرب طرفي هذه المتباينة في العدد الموجب $2x$ نجد:

$\frac{2x}{\sqrt{x+1}} > \frac{2x}{\sqrt{2x}}$، أي $f(x) > \frac{2x}{\sqrt{2x}}$، لكن:



$\frac{2x}{\sqrt{2x}} = \frac{2x}{\sqrt{2x}} \times \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} = \frac{2x\sqrt{2x}}{2x} = \sqrt{2x}$

إذن $f(x) > \sqrt{2x}$، وبما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x} = +\infty$ فحسب مبرهنة النهايات بالمقارنة نستنتج أن:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

تمرين 26

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$ فإن: $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$.

2) استنتج النهايتين التاليتين: أ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$ ، ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$

الحل

1) نقارن بين $\frac{x}{x+1}$ و 1 ثم بين $\frac{x}{x+1}$ و $\frac{1}{2}$ من أجل $x \geq 1$.

لدينا: $\frac{x}{x+1} - 1 = \frac{x-(x+1)}{x+1} = \frac{-1}{x+1}$، وبما أن $x + 1 > 0$ نستنتج أن: $\frac{x}{x+1} - 1 \leq 0$

أي: $\frac{x}{x+1} \leq 1$.

ولدينا من جهة: $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} = \frac{2x-(x+1)}{2(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$، وبما أن $x + 1 > 0$ و $x - 1 \geq 0$

نستنتج أن: $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \geq 0$، أي: $\frac{x}{x+1} \geq \frac{1}{2}$.

خلاصة ما سبق: من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$ لدينا: $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2) استنتاج النهايتين : أ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x+1}$ ، ب) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$

أ) من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 1$ لدينا: $\frac{1}{2}\leq\frac{x}{x+1}\leq 1$ ، بضرب طرفي المتباينة المضاعفة الأخيرة في العدد الموجب تماما $\sqrt{x}$ نجد: $\frac{1}{2}\sqrt{x}\leq\frac{x\sqrt{x}}{x+1}\leq\sqrt{x}$ ، وبما أن:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\sqrt{x}=+\infty$ نستنتج حسب مبرهنة النهايات بالمقارنة أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x+1}=+\infty$.

ب) لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 1$: $\frac{1}{2}\leq\frac{x}{x+1}\leq 1$ ،بضرب طرفي المتباينة المضاعفة الأخيرة في العدد الموجب تماما $\frac{1}{\sqrt{x}}$ نجد: $\frac{1}{2\sqrt{x}}\leq\frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}\leq\frac{1}{\sqrt{x}}$ ، وبما أن:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ ، نستنتج حسب مبرهنة الحصر أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}=0$.

تمرين 27

احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها D في كل حالة.

1) $f(x)=\frac{|x-1|}{x^2-1}$ 2) $f(x)=\frac{x^2+3}{|x-1|}$ 3) $f(x)=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

الحل

1) $D=\mathbb{R}-\{-1;1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ ،

لأن $x^2-1\neq 0$ تعني $x\neq 1$ و $x\neq -1$. سنكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة على D.

لدينا: $|x-1|=\begin{cases}x-1 & ;x-1>0\\ -(x-1) & ;x-1<0\end{cases}$ ، أي: $|x-1|=\begin{cases}x-1 & ;x>1\\ -x+1 & ;x<1\end{cases}$ ، ومنه:

إذن: $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x^2-1} & ;x\in]1;+\infty[\\ \frac{-x+1}{x^2-1} & ;x\in]-\infty;-1[\cup]-1;1[\end{cases}$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

• $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}=0$ ، إذن: $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ ، إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

لحساب النهايات: $\lim\limits_{\substack{<\\x\to-1}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{>\\x\to-1}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{<\\x\to1}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}} f(x)$ نستعمل عبارة f المناسبة كما عمدنا في حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وإشارة المقام x^2-1 الموضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

لدينا:

* $\lim\limits_{\substack{<\\x\to-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{<\\x\to-1}}\dfrac{|x-1|}{x^2-1}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{>\\x\to-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{>\\x\to-1}}\dfrac{|x-1|}{x^2-1}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty$.

* $\lim\limits_{\substack{<\\x\to1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{<\\x\to1}}\dfrac{-x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{\substack{<\\x\to1}}\dfrac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{\substack{<\\x\to1}}\dfrac{-1}{(x+1)}=-\dfrac{1}{2}$.

* $\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}}\dfrac{1}{(x+1)}=\dfrac{1}{2}$.

2) $D=\mathbb{R}-\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

لأن f معرفة تعني $|x-1|\neq0$ أي $x-1\neq0$ أي $x\neq1$.

لدينا: $|x-1|=\begin{cases}x-1 & ;x-1>0\\ -(x-1) & ;x-1<0\end{cases}$ ،أي: $|x-1|=\begin{cases}x-1 & ;x>1\\ -x+1 & ;x<1\end{cases}$ ، ومنه:

إذن: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3}{x-1} & ;x>1\\ \dfrac{x^2+3}{-x+1} & ;x<1\end{cases}$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3}{-x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ ، إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ ، إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

* $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+3}{|x-1|}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty$. لأن $|x-1|>0$ من أجل كل $x\neq1$.

إذن: $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$

3) $D=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ لأن f معرفة تعني $x+1\neq0$ أي $x\neq-1$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

إذن سندرس النهايات $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{<\\ x\to-1}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to-1}} f(x)$.

لدينا باستعمال نهاية دالة مركبة، وباستعمال إشارة $x+1$ الموضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1$ و $\lim\limits_{X\to1}|X|=1$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1$ و $\lim\limits_{X\to1}|X|=1$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

* $\lim\limits_{\substack{<\\ x\to-1}}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{-2}{0^-}=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}|X|=+\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{\substack{<\\ x\to-1}} f(x)=+\infty$.

* $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to-1}}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty$ و $\lim\limits_{X\to-\infty}|X|=+\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to-1}} f(x)=+\infty$.

تمرين 28

لتكن الدالة f حيث: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+d}$ و (C) تمثيلها البياني في معلم.

عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c و d بحيث: (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=1$ و مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=2x+3$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ويشمل النقطة $A(0;4)$.

الحل

f معرفة معناه $x+d\neq0$ أي $x\neq-d$ والمستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب لـ (C)،

إذن: $-d=1$ ، أي $d=-1$.

لدينا: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{c}{x+d}=0=\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]$ ، أي المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$ وعند $+\infty$. وبما أن المستقيم ذو المعادلة $y=2x+3$ مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$ وعند $+\infty$. نستنتج أن: $ax+b=2x+3$ ،

بالمطابقة نجد: $a=2$ ، $b=3$.

لدينا إذن: $f(x)=2x+3+\dfrac{c}{x-1}$ ، وبما أن (C) يشمل النقطة $A(0;4)$ ،

فإن: $f(0)=4$ ومنه: $4=2\times0+3+\dfrac{c}{0-1}$ ، أي $-c=1$ ، إذن: $c=-1$.

إذن: $a=2$ ، $b=3$ ، $c=-1$ و $d=-1$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تمرين 29

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$.

1) عين العددين الحقيقيين a و b، بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x \neq -2$ يكون $f(x)=a+\dfrac{b}{x+2}$.

2) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها D.

3) استنتج المستقيمات المقاربة لـ (C) المنحنى الممثل للدالة f.

4) عين مركز تناظر المنحنى (C).

الحل

1) لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x \neq -2$:

$$a+\frac{b}{x+2}=\frac{a(x+2)}{x+2}+\frac{b}{x+2}=\frac{ax+2a+b}{x+2}=f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$$

إذن: $\dfrac{ax+2a+b}{x+2}=\dfrac{2x+3}{x+2}$، ومنه: $ax+2a+b=2x+3$، بالمطابقة نجد:

$a=2$ و $2a+b=3$ أي $2\times 2+b=3$ أي $b=-1$، إذن: $f(x)=2-\dfrac{1}{x+2}$.

2) لدينا: $D=\mathbb{R}-\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$. ومنه:

* $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x+2}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$.

* $\lim\limits_{\substack{<\\ x\to-2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{<\\ x\to-2}}\dfrac{2x+3}{x+2}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to-2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{>\\ x\to-2}}\dfrac{2x+3}{x+2}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$

لأن إشارة المقام $x+2$ هي كما في الجدول التالي:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	

ملاحظة: يمكن استعمال العبارة $f(x)=2-\dfrac{1}{x+2}$ لحساب النهايات السابقة.

3) المستقيمات المقاربة لـ (C):

* لدينا: $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=2$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مقارب لـ (C)

- موازي لمحور الفواصل- عند $+\infty$ و $-\infty$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

* لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x) = -\infty$، ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = -2$ مقارب لـ (C) ـ موازي لمحور التراتيب ـ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

4) مركز تناظر المنحنى (C) هو النقطة $A(-2;3)$، نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين.

تمرين 30

لتكن f الدالة المعرفة من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 4$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 10}{x - 4}$.

1) بين أنه توجد ثلاثة أعداد حقيقية a، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 4$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-4}.$$

2) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = ax + b$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ للمستوي عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

3) أدرس الوضع النسبي لـ (C) بالنسبة إلى (D).

الحل

1) لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 4$:

$$ax + b + \frac{c}{x-4} = \frac{ax^2 - 4ax + bx - 4b + c}{x-4} = \frac{ax^2 + (b-4a)x - 4b + c}{x-4} = \frac{x^2 - x - 10}{x-4}$$

ومنه: $ax^2 + (-4a+b)x - 4b + c = x^2 - x - 10$ وحسب تساوي كثيري حدود،

نجد هكذا: $\begin{cases} a = 1 \\ -4a + b = -1 \\ -4b + c = -10 \end{cases}$ وهذا يعني أن: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 4a - 1 = 3 \\ c = 4b - 10 = 2 \end{cases}$، إذن: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases}$

نستخلص أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 4$: $f(x) = x + 3 + \dfrac{2}{x-4}$.

2) لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-4) = +\infty$، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x-4} = 0$

وهذا يعني أنه لدينا: $f(x) = x + 3 + h(x)$ حيث $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ (مع $h(x) = \dfrac{2}{x-4}$)

إذن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + 3$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $+\infty$.

وبالمثل، ولكون $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x-4} = 0$ نستنتج أن المستقيم (D) هو مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$.

3) لدراسة الوضع النسبي لـ (C) بالنسبة إلى (D)، ندرس إشارة الفرق $f(x) - (x+3)$، أي

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

إشارة $h(x)=\frac{2}{x-4}$ ، لدينا:

- على المجال $]-\infty;4[$ أي $x<4$ ، لدينا $x-4<0$ ومنه $h(x)<0$ ، وبالتالي (C) يقع تحت (D).
- على المجال $]4;+\infty[$ أي $x>4$ ، لدينا $x-4>0$ ومنه $h(x)>0$ ، وبالتالي (C) يقع فوق (D).

تمرين 31

نعتبر الدالة f المعرفة على $D=\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$.

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم:

1) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها مبينا المستقيم المقارب لـ (C).

2) أ • عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c و d بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x\neq -1$ يكون

$f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x+1)^2}$.

ب • استنتج أن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $-\infty$ وعند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

جـ • أدرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ).

الحل

1) $D=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$. ولدينا:

$f(x)=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{x^2+2x+1}$. ومنه:

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+3x^2+6x+3}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x^2+6x+3}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

* $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$. ومنه المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$.

2) أ • لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x\neq -1$:

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

$$ax+b+\frac{cx+d}{(x+1)^2}=\frac{(ax+b)(x+1)^2}{(x+1)^2}+\frac{cx+d}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(ax+b)(x^2+2x+1)}{(x+1)^2}+\frac{cx+d}{(x+1)^2}=\frac{(ax^3+2ax^2+ax+bx^2+2bx+b)+cx+d}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{ax^3+(2a+b)x^2+(a+2b+c)x+b+d}{(x+1)^2}=f(x)=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$$

ومنه: $$\frac{ax^3+(2a+b)x^2+(a+2b+c)x+b+d}{(x+1)^2}=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$$

ومنه: $$ax^3+(2a+b)x^2+(a+2b+c)x+b+d=x^3+3x^2+6x+3$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=1\\2a+b=3\\a+2b+c=6\\b+d=3\end{cases}$ وهذا يعني أن: $\begin{cases}a=1\\b=3-2a=1\\c=6-a-2b=3\\d=3-b=2\end{cases}$ ، ومنه: $\begin{cases}a=1\\b=1\\c=3\\d=2\end{cases}$

إذن من أجل كل عدد حقيقي $x\neq -1$ لدينا: $f(x)=x+1+\frac{3x+2}{(x+1)^2}$.

ب• لدينا: $f(x)-(x+1)=\frac{3x+2}{(x+1)^2}$ ومنه:

* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$

إذن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta): y=x+1$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

جـ• ندرس إشارة الفرق $f(x)-(x+1)$ أي إشارة $\frac{3x+2}{(x+1)^2}$.

إن إشارة $\frac{3x+2}{(x+1)^2}$ هي من إشارة البسط $3x+2$ لأن المقام $(x+1)^2>0$ من أجل $x\neq -1$.

إشارة البسط $3x+2$ هي كما في الجدول التالي:

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

x	$-\infty$		-1		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x+2$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

ومنه: * (C) يقع تحت (Δ) على كل من المجالين $]-\infty;-1[$ و $]-1;-\frac{2}{3}[$.

* (C) يقع فوق (Δ) على المجال $]-\frac{2}{3};+\infty[$.

* (Δ) يقطع (C) في النقطة ذات الفاصلة $-\frac{2}{3}$ ، للحصول على ترتيبها نعوض في معادلة (Δ) نجد: $-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}$. (كذلك يكون ترتيبها $f\left(-\frac{2}{3}\right)$)

إذن : (Δ) يقطع (C) في النقطة ذات الاحداثيين: $\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

تمرين 32 داثيين

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$، وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم للمستوي.

1) أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2) حدد النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x$.

3) استنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') يطلب تعيين معادلتيهما.

4) أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ').

الحل

1) باستعمال قاعدة حساب نهاية دالة مركبة نجد:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x+1=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ ،

وبما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2) • لدينا في حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$ حالة عدم تعيين ، نستعمل عبارة مختصرة للعبارة $\sqrt{x^2+x+1}-x$.

لدينا من أجل كل $x>0$:

$$\sqrt{x^2+x+1}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= \frac{\left(x^2+x+1\right)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

ولدينا من جهة :

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1$ وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} = 1$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1 = 2$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = \frac{1}{2}$.

• وبالمثل لدينا: $f(x)+x = \frac{\left(x^2+x+1\right)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$

من أجل $x<0$: $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ ومنه:

$$f(x)+x = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x} = \frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}$$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

وبالتالي حسب مبرهنة نهاية دالة مركبة و مبرهنات العمليات نجد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x = -\frac{1}{2}$

3) نستنتج من السؤال 2 و حسب مبرهنات العمليات أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x-\frac{1}{2} = 0$

وأن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x+\frac{1}{2} = 0$. وهذا يعني أن المستقيم (Δ) الذي معادلة له: $y = x+\frac{1}{2}$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $+\infty$.

وأن المستقيم (Δ') الذي معادلة له: $y = -x-\frac{1}{2}$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$.

4) • وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) :

لدينا من أجل $x>0$: $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}} = \frac{x^2+x+1-\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}$$

بما أن $x > 0$ فإن $\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}} > 0$، أي $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right) > 0$.

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

وبالتالي (C) يقع فوق (Δ) من أجل $x > 0$.

* وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ'):

لدينا ،من أجل $x < 0$: $f(x)-\left(-x-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)$

بإمكاننا تحديد إشارة العبارة: $\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)$ دون اللجوء إلى مرافقها.

لدينا:من أجل $x < 0$: $x^2+x+1 > x^2+x+\frac{1}{4}$ ، أي $x^2+x+1 > \left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ ،

ومنه: $\sqrt{x^2+x+1} > \left|x+\frac{1}{2}\right|$ ، أي $\sqrt{x^2+x+1} > -\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ، لأن:

$\left|x+\frac{1}{2}\right| = \begin{cases} x+\frac{1}{2} & ;x \geq -\frac{1}{2} \\ -\left(x+\frac{1}{2}\right) & ;x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$ ، ومنه: $\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right) > 0$.

ومنه: $f(x)+\left(x+\frac{1}{2}\right) > 0$. وبالتالي (C) يقع فوق (Δ') من أجل $x < 0$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM