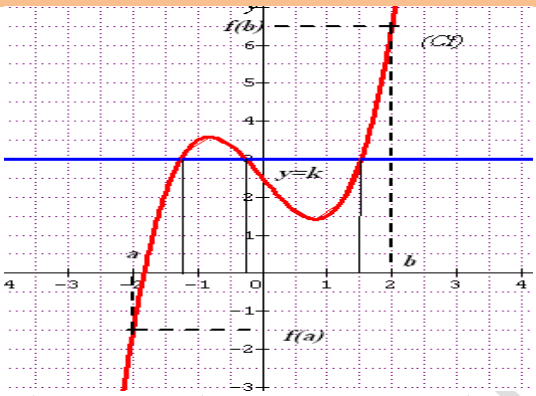
Le Théorème des Valeurs Intermédiaires مبرهنة القيم المتوسطة

1- القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=k$: (تقبل بدون برهان)

f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a,b]$.

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث : $f(c)=k$.

التفسير الهندسي :



f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a,b]$.وليكن (c_f) منحناها البياني في معلم (O,i,j).

من اجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=k$ يقطع على الأقل مرة واحدة المنحنى (c_f) في نقطة فاصلتها c محصور بين a و b.

بالنسبة للشكل (Δ) يقطع (c_f) في ثلاث نقط فواصلها على الترتيب : c_1,c_2,c_3 .

مثال :

لتكن f الدالة المعرفة على : R ب: $f(x)=x^3-x-1$

بين أن المعادلة $f(x)=3$ تقبل على الأقل حل على المجال لى : R ب: $[1;2]$

الحل لدينا 1- f دالة كثير حدود معرفة ومستمرة على المجال Rوبتالى مستمرة على$[1;2]$.

2- $f(1)=-1$ و $f(2)=5$ العدد 3 محصور بين $f(1)$ و $f(2)$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة للمعادلة $f(x)=3$ على الأقل حلا c محصور بين 1 و 0 و الذى يحقق $f(c)=3$

حالة خاصة :

إذا كانت f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a,b]$ وكان $f(a)f(b)\prec 0$. (0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$) يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث : $f(c)=0$. أي أن f تنعدم مرة على الأقل على المجال $[a,b]$.

التفسير الهندسي المنحنى (c_f) يقطع محور الفواصل $(x'x)$ في نقط إحداثياتها $(c;0)$.

ملاحظة :

مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد وجود حلا على الأقل اما تعيين الحلول اوالقيم المقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة.

مثال : لتكن f الدالة المعرفة على : R ب: $f(x)=x^3+x-1$

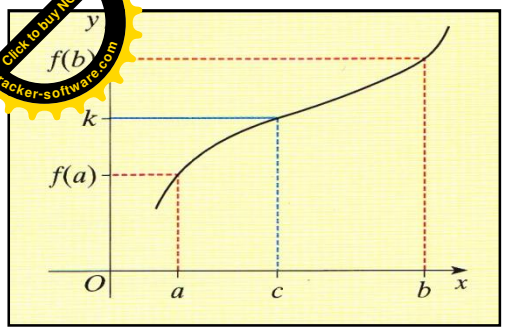
بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حل على المجال لى: $[0;1]$

الحل 1- f دالة كثير حدود معرفة ومستمرة على المجال R.

2- $f(0)=-1$ و $f(1)=1$ العدد 0 محصور بين $f(0)$ و $f(1)$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة للمعادلة $f(x)=0$ على الأقل حلا c محصور بين 1 و 0 .

سئل الاسكندر : لِمَ تُكرم معلمك فوق كرامة أبيك فقال إن أبي سبب علمي سبب حياتي الباقية
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

إعداد السيد حجاج براهيم



مبرهنة القيم المتوسطة والرتيبة تماما على المجال $[a,b]$ و وحدانية الحل

f دالة معرفة ومستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a,b]$

و $f(a)<k<f(b)$ ومنه المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا c

في المجال $[a,b]$ و الذي يحقق $f(c)=k$.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-4;3]$ بـ: $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$

1. **بين أن المعادلة** $f(x)=8$ **تقبل حلا وحيدا في المجال** $[-2;1]$.

الحل f دالة مستمرة متناقصة تماما على $[-2;1]$. و لدينا $f(-2)=21$ ، $f(1)=-6$ ومنه $-6\le 8\le 21$.

إذن المعادلة $f(x)=8$ تقبل حل وحيد c في المجال $[-2;1]$

حالة خاصة :

إذا كانت f دالة معرفة ومستمرة ورتيبة على المجال $[a,b]$ وكان $f(a).f(b)<0$ (0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$) فإن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حل وحيد وحيدا c في المجال $[a;b]$. أي f تنعدم مرة واحدةعلى $[a,b]$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال بـ $f(x)=-x^3-2x+5$

1. برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α . تحقق أن $1<\alpha<2$ ثم عين حصرا للعدد α سعته 10^{-1} .

2.عين حسب قيم x إشارة الدالة f.

الحل الدالة f قابلة للاشتقاق على R و لدينا $f'(x)=-(3x^2+2)$ و بالتالي لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)<0$.إذن الدالة f متناقصة تماما على R .

لدينا كذلك $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$. كما أن الدالة f مستمرة على R لأنها كثير حدود.

نستنتج مما سبق أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $3.1<\alpha<3.2$ على R .

2 -**بمأن** $f(1)=2$ و $f(2)=-9$ إذن فإن $1<\alpha<2$

إيجاد حصر لـ α **بتقريب** 10^{-1}

a	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
F(a)	1	1.46	0.86	0.20	-0.54	-1.37

ومنه **حصر** لقيمة α هو $1.3<\alpha<1.4$

إشارة $f(x)$

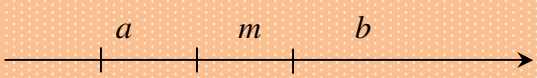
x	$-\infty$	α	$+\infty$
F(x)	+	-	

ايجاد حصر لحل المعادلة بطريقة التنصيف Obtenir un Encadrement par Dichotomie

المبدأ: بصفة عامة إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$ بحيث $f(a)\times f(b)<0$

فإن، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[a;b]$.

نعلم أن $m=\frac{a+b}{2}$ هو مركز المجال $[a;b]$.



1. إذا كان $f(a)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ فإن $a<\alpha<\frac{a+b}{2}$.

2. إذا كان $f(b)\times f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ فإن $\frac{a+b}{2}<\alpha<b$.

نواصل بنفس الطريقة من خلال تعويض a أو b بـ m و ذلك إلى غاية الحصول على الحصر المرغوب فيه.

تمرين4

لتكن $f(x)=x^3-3x^2-1$ ب R : الدالة المعرفة على

أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها

بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α ثم تحقق أن $3<\alpha<3.5$

اعطي حصرا α ببقريب 10^{-1}

بأستعمال طريقة التنصيف اعطي حصرا α ببقريب 10^{-2}

الحل

جدول تغيرات الدالة

X	$-\infty$		0		2		$+\infty$
F(x)		+	0	-	0	+	
F(x)	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

f الدالة المعرفة على : R حيث

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

دالتها المشتقة هي $f'(x)=3x^2-6x$

$f'(x)=0$ يعني $3x^2-6x=0$ ومنه

x=0 أو x=2

بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α

لدينا على المجال $]-\infty;2]$ لدينا $f(x)<0$ و منه المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حلول في هذا المجال.....(1)

لدينا على المجال $[2;+\infty[$ لدالة f مستمرة ورتيبة تماما و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $f(2)=-5$ و $0\in]-5;+\infty[$ ومنه فإن

المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α في المجال $[2;+\infty[$.....(2)

من (1)و (2)ينتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على R

التحقق أن $3<\alpha<3.5$

لدينا $f(3.5)=5.13$ $f(3)=-1$ ومن جهة $f(3)\times f(3.5)<0$

وبما أن α وحيد فان $\alpha\in]3,3.5[$

حصر للقيمة α

a	3	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5
F(a)	-1	-0.04	1.07	2.27	3.62	5.13

ومنه **حصر** لقيمة α هو $3.1<\alpha<3.2$

باستعمال طريقة التنصيف نتبع الخطوات التالية

الحطوة	$f(\frac{a+b}{2})$	F(b)	F(a)	$\frac{a+b}{2}$	b	a
0.5	1.64	5.13	-1	3.25	3.5	3
0.25	0.27	1.64	-1	3.13	3.25	3
0.13	-0.34	0.27	-1	3.07	3.13	3
0.06	-0.04	0.27	-0.34	3.10	3.13	3.07
0.03	0.17	0.27	-0.04	3.12	3.13	3.10
0.01	0.06	0.17	-0.04	3.11	3.12	3.10

ومنه **حصر** لقيمة α هو $3.11<$

كلما ازددت ع ة معرفتي بجهلي
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

PDF-XCHANGE Click to buy NOW! www.tracker-software.com

تمرين تطبيقي لتكن f دالة مستمرة على المجال $]-3;+\infty[$ و جدول تغيراتها هو الآتي:

x	-3		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	4	↘	2

-بين أن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين يطلب إعطاء حصرا لفاصلتيهما.

الحل لدينا على المجال $]-3,0]$ لدالة f مستمرة ورتيبة تماما و $\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$ و $f(0) = -2$ و $0 \in]-2;+\infty[$ ومنه فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد x_2 في المجال $]-3,0]$ حيث $-3 < x_2 < 0$ .....(1)

على المجال $[0,2]$ لدالة f مستمرة ورتيبة تماما و $f(2) = 4$ و $f(0) = -2$ و $0 \in]-2;4[$ ومنه فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد x_2 في المجال $]0,2[$ حيث $0 < x_2 < 2$ .....(1)

على المجال $[2,+\infty[$ لدالة f مستمرة ومتناقصة تماما و $f(2) = 4$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ و $0 \notin]2;4[$ ومنه فإن المعادلة $f(x) = 0$ لا تقبل حل المجال $[2,+\infty[$ .....(1)

تمارين على مبرهنة القيم المتوسطة

تمرين01

لتكن f الدالة المعرفة على R ب: $f(x) = 2x^3 - 3x + 4$

- بين أن المعادلة $f(x) = 3$ تقبل على الأقل حلا على C المجال $[0,1]$
- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا C على المجال $[-2;1]$ ثم عين حصرا لـ C بتقريب 10^{-1}

تمرين10 bac liban 2004

أجب ب نعم أو لا على الأقتراحات الأتية

1. اذا كان عدد a حقيقي كيفي ودالة f معرفة و مستمرة تماما على المجال $]a,+\infty[$ اذن فان $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
2. لتكن f و g دالتين معرفتين على $[0,+\infty[$ و لاتنعدمان اذاكان $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ قان $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$
3. اذا كانت دالة f معرفة على المجال $[0,+\infty[$ بحيث $0 \le f(x) \le \sqrt{x}$ فإن $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$
4. نعتبر المعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$

إذا كانت دالة f معرفة على R^* فان المستقيم الذي معادلته $x = 0$ هو مستقيم مقارب عمودي للمحني الممثل لدالة

تمرين03

لتكن g الدالة المعرفة على R ب: $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2$

أدرس تغيرات الدالة g

بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0,1]$

أعطي حصرا لـ α بتقريب 10^{-1}

حدد اشارة $g(x)$

لتكن f الدالة المعرفة على $R - \{1\}$ ب: $f(x) = \frac{x^3+2}{x+1}$

بين أن $f(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ثم استنتج تغيرات الدالة f

استنتج تغيرات الدالة f

بين أن $f(\alpha) = \frac{3\alpha^2-4}{2(\alpha+1)}$

تمرين 04

لتكن f الدالة المعرفة على R ب: $f(x) = x^3 + 3x + 4$

- بين أن المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا وحيد C على المجال $[-1,0]$

عين حصرا لـ C بتقريب 10^{-2}

يسخر من الجروح كل من لا يعرف الألم ..

إعدا السيد حجاج براهيم

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM