# النهايات

## ✠ نهايات الدوال المرجعية

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\star \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty.$ | $\star \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ | $\star \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ | $\star \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty.$ |
| $\star \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ | $\star \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty.$ | $\star \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ | $\star \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ |
| | $\star \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$ | $\star \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty.$ | $\star \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ |

## ✠ العمليات على النهايات : $f$ و $g$ دالتان $a$, عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$ نقبل بدون برهان المبرهنات التالية :

### [1] ♦ نهاية مجموع دالتين :

| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $l \in \mathbb{R}$ | $l \in \mathbb{R}$ | $l \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $l' \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ | $l+l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ح ع ت | $-\infty$ |

### [2] ♦ نهاية جداء دالتين :

| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $l \in \mathbb{R}$ | $l>0$ | $l>0$ | $l<0$ | $l<0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $l' \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ | $l \times l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ح ع ت | ح ع ت |

### [2] ♦ نهاية حاصل قسمة دالتين :

| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $l \in \mathbb{R}$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $l' \in \mathbb{R}^*$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $l'>0$ | $l'<0$ | $l'>0$ | $l'<0$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f(x)}{g(x)})$ | $\frac{l}{l'}$ | $0$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ع ت | ع ت | ع ت | ع ت | ع ت |

## ✠ نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $+\infty$ او عند $-\infty$:

★ النهاية عند $+\infty$ و $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة.
★ النهاية عند $+\infty$ و $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة.

## ✠ المستقيمات المقاربة : $a$ و $b$ عددان حقيقيان $f$ دالة معرفة على مجال $I$ و $C_f$ تمثيلها البياني في معلم $(o;\vec{i};\vec{j})$

• المستقيم ذو المعادلة $x=a$ و الموازي لمحور التراتيب مستقيم مقارب للمنحنى $(C_f)$. $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty\end{cases}$

• المستقيم ذو المعادلة $y=b$ و الموازي لمحور الفواصل مستقيم مقارب للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$ و $-\infty$. $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b\end{cases}$

• المستقيم $(\triangle)$ ذو المعادلة $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$ و $-\infty$. $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0\end{cases}$


قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

✠ دراسة الوضع النسبي بين المنحنى $(C_f)$ و المستقيم المقارب المائل $(\triangle)$:

♠ نقوم بدراسة إشارة الفرق $[f(x)-(ax+b)]$ و نميز الحالات التالية :
♠ اذا كان $f(x)-(ax+b)<0$ فإن المنحنى $(C_f)$ يقع تحت المستقيم $(\triangle)$
♠ اذا كان $f(x)-(ax+b)>0$ فإن المنحنى $(C_f)$ يقع فوق المستقيم $(\triangle)$
♠ اذا كان $f(x)-(ax+b)=0$ فإن المنحنى $(C_f)$ يقطع المستقيم $(\triangle)$ في النقطة $A(x_0;f(x_0))$

✠ ملاحظة: اذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-g(x))=0$ فإن المنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$ متقاربين عند المالانهاية .

✠ النهايات والحصر أو المقارنة: $h,g,f$ دوال و $l$ عدد حقيقي

♠ اذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=l$ واذا كان من أجل $x$ كبير بالقدر الكافي $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$
♠ اذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ واذا كان من أجل $x$ كبير بالقدر الكافي $f(x)\geqslant g(x)$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$
♠ اذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ واذا كان من أجل $x$ كبير بالقدر الكافي $f(x)\leqslant g(x)$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

✠ نهاية دالة مركبة:

♠ $a,b$ و $c$ تمثل أعداد حقيقية أو $+\infty$ و $-\infty$. $f,g$ و $h$ دوال حيث $h=g\circ f$
♠ اذا كانت $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ واذا كانت $\lim\limits_{x\to b}g(x)=c$ فإن $\lim\limits_{x\to a}h(x)=c$

✠ تذكير حول بعض المفاهيم:

♠[1] الدالة $f$ زوجية معناه: $f(-x)=f(x)$ متناظر بالنسبة لمحور التراتيب
♠[2] الدالة $f$ فردية معناه: $f(-x)=-f(x)$ متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم
♠[3] $w(\alpha;\beta)$ مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$ معناه :
♦ من اجل كل $x$ من $D_f$ فإن : $(2\alpha-x)\in D_f$ و $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$
♠[4] $x=\alpha$ محور تناظر للمنحنى $(C_f)$ معناه :
♦ من اجل كل $x$ من $D_f$ فإن : $(2\alpha-x)\in D_f$ و $f(2\alpha-x)=f(x)$ أو $f(\alpha-x)=f(\alpha+x)$

## ✠ سلسلة التمارين ✠

### ✓ التمرين 01 ◄

♠ عين نهايات الدالة $f$ عند $+\infty$ و $-\infty$. في كل حالة من الحالات التالية :

♦ [1] $f(x)=2x^3+5x+7$
♦ [2] $f(x)=-5x^3+x^2-3$
♦ [3] $f(x)=(-x^3+x-1)(1-x)$
♦ [4] $f(x)=(x^2-1)^3(2-x^3)^2$
♦ [5] $f(x)=-x^4+x^2-6$
♦ [6] $f(x)=(-2x^2+3)(1-x^2)$

### ✓ التمرين 02 ◄

#### إزالة حالات عدم التعيين

♠ باستعمال الإختزال احسب النهايات التالية :

♦ [1] $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^2-4x-6}{x^2-x-2}$
♦ [2] $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-3x+2}$
♦ [3] $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4}$

♠ باستعمال المرافق احسب النهايات التالية :

♦ [1] $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ♦ [2] $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ ♦ [3] $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-2}}{x(x-2)}$ ♦ [4] $\lim\limits_{x\to-\infty}x+\sqrt{x^2-1}$

♠ باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايات التالية :

♦ [1] $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
♦ [2] $\lim\limits_{x\to0}\frac{cos\,x-1}{x}$
♦ [3] $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

♠ باستعمال نهاية مركب دالتين احسب النهايات التالية :

♦ [1] $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x-1}{x-1}}$ ♦ [2] $\lim\limits_{x\to+\infty}sin(\frac{\pi x+1}{2x+3})$ ♦ [3] $\lim\limits_{x\to+\infty}cos(\frac{\pi x+1}{x-2})$

♠ باستعمال الحصر و المقارنة احسب النهايات التالية :

✓ نعتبر الدالة $f$ المعرفة من أجل كل عدد حقيقي $x>1$ بـ : $f(x)=\frac{sin\ x}{x-1}$

♦ [1] بين أنه إذا كان $x>1$ فأن : $-\frac{1}{x-1}\le\frac{sin\ x}{x-1}\le\frac{1}{x-1}$

♦ [2] استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

## ✓ التمرين 03 ◄

♠ عين النهايات التالية:

♦ [1] $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$ ♦ [6] $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}$ ♦ [11] $\lim\limits_{|x|\to+\infty}x^3-x$

♦ [2] $\lim\limits_{|x|\to+\infty}1+\frac{cos\ x}{x^2}$ ♦ [7] $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^3+3x+1}{(x-1)^2}$ ♦ [12] $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}(x^2+3\sqrt{x})$

♦ [3] $\lim\limits_{x\to+\infty}x+2-\sqrt{x}$ ♦ [8] $\lim\limits_{\substack{>\\x\to4}}\frac{\sqrt{x^2+16}}{x-4}$ ♦ [13] $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{sin\ x}{x}$

♦ [4] $\lim\limits_{x\to-\infty}x+2-\sqrt{x^2+x}$ ♦ [9] $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sqrt{3x^2-2x+3}$ ♦ [14] $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}$

♦ [5] $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ ♦ [10] $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}+\frac{sin\ x}{x}$ ♦ [15] $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sqrt{x^2+2x}-x$

## ✓ التمرين 04 ◄

♠ الدالة العددية $f$ معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2-x-1}{x+1}$.

يرمز $(C_f)$ إلى المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

♦ [1] عيّن الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ ، $c$ بحيث يكون من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{-1\}$ : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$.

♦ [2] احسب نهايات الدالة عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها .

♦ [3] بيّن أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب يطلب تعيين معادلة له .

♦ [4] بين أن المستقيم $(\triangle)$ ذو المعادلة $y=x-2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$.

♦ [5] ادرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\triangle)$.

## ✓ التمرين 05 ◄

♠ لتكن الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{2x^2-3x+3}{x-1}$.

يرمز $(C_f)$ إلى المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

♦ [1] أحسب $\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}}f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

♦ [2] عيّن الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ ، $c$ بحيث يكون من أجل كل $x$ من $]1;+\infty[$ : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$.

♦ [3] احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-1)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

♦ [4] ادرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\triangle)$ الذي معادلته $y=2x-1$

## ✓ التمرين 06 ◄

♠ الدالة العددية $f$ معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^3-4x^2+6x-5}{(x-1)^2}$.

يرمز $(C_f)$ إلى المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

♦ [1] احسب نهايات الدالة عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها .

♦ [2] بيّن أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب يطلب تعيين معادلة له .

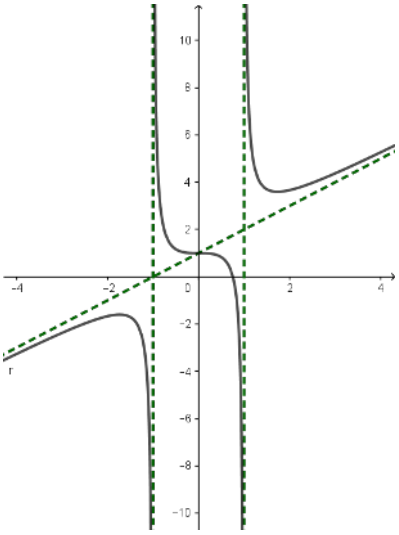
♦ [3] عيّن الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ ، $c$ ، $d$ بحيث يكون من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{1\}$ : $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x-1)^2}$.

♦ [4] بين أن المستقيم $(\triangle)$ ذو المعادلة $y=x-2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$.

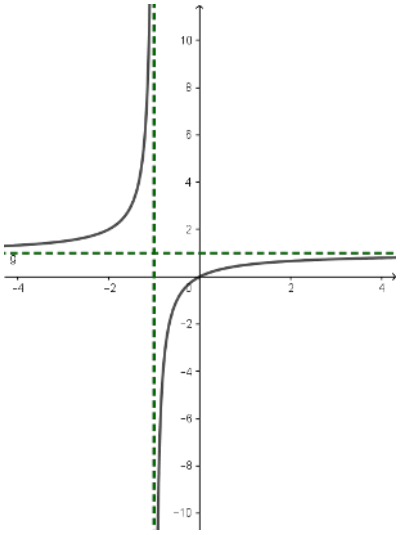
♦ [5] ادرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\triangle)$.

## ✓ التمرين 07 ◄

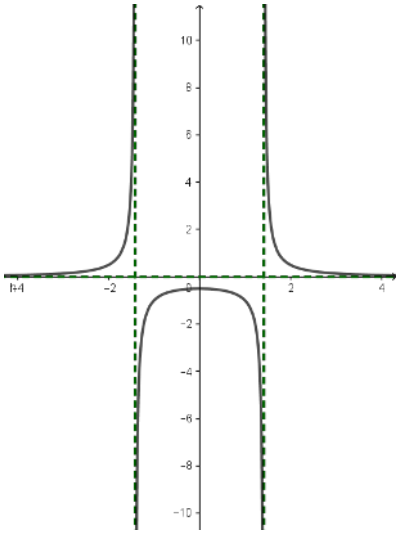
المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ و $(C)$ التمثيل البياني للدالة $f$.
بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية :



الحالة 1



الحالة 2



الحالة 3

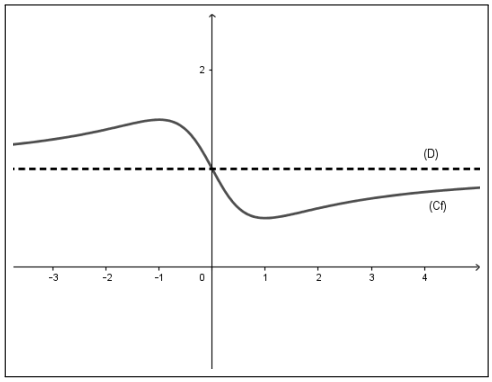
## ✓ التمرين 08 ◄

♠ $f$ دالة عددية معرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ و جدول تغيراتها معطى كما يلي :

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $-2$ | ↘ $+\infty$ | $+\infty$ ↘ | $2$ ↗ $+\infty$ |

♠ تكتب عبارة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$ حيث $a$ ، $b$ و $c$ أعداد حقيقية .
[1] ♦ احسب $f'(x)$ بدلالة $a$ و $c$ .
[2] ♦ اعتمادا على جدول تغيرات الدالة $f$ :
• عيّن الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ .
★ احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ ، ثم فسر بيانيا النتيجتين.
♠ نأخذ فيما يلي : $a=1$ ، $b=1$ و $c=1$. و $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .
[1] ♦ بين أن المستقيم $(\triangle)$ ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$.
[2] ♦ أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\triangle)$ .

## ✓ التمرين 09 ◄




♠ نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=1-\frac{x}{x^2+1}$.
و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .
$(D)$ المستقيم ذو المعادلة $y=1$
[1] ♦ بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة $f$
[2] ♦ بقراءة بيانية حدد وضعية المنحني $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(D)$
[3] ♦ أدرس وضعية المنحني $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(D)$.
[4] ♦ أثبت أن النقطة $w(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحني $(C_f)$.

## ✓ التمرين 10 ◄

♠ $f$ و $g$ دالتين معرفتين على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ ، $(C_f)$ و $(C_g)$ التمثيلين البيانيين للدالتين $f$ و $g$ على الترتيب في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، وجدول تغيراتهما معطى كما يلي :

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\nearrow$ $+\infty$ | $\|\|$ | $+\infty$ $\searrow$ | |
| | | | $2$ | | $-\infty$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $\nearrow$ $+\infty$ | $\|\|$ | $+\infty$ $\searrow$ | |
| | | | $3$ | | $-4$ |

[1] ♦ عيّن معادلات المستقيمات المقاربة لكل من $(C_f)$ و $(C_g)$ .
[2] ♦ عين المجال الذي تنتمي إليه نقاط تقاطع كل من $(C_f)$ و $(C_g)$ مع محور الفواصل .
[3] ♦ احسب نهايات الدالة $g\circ f$ على المجال $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ .

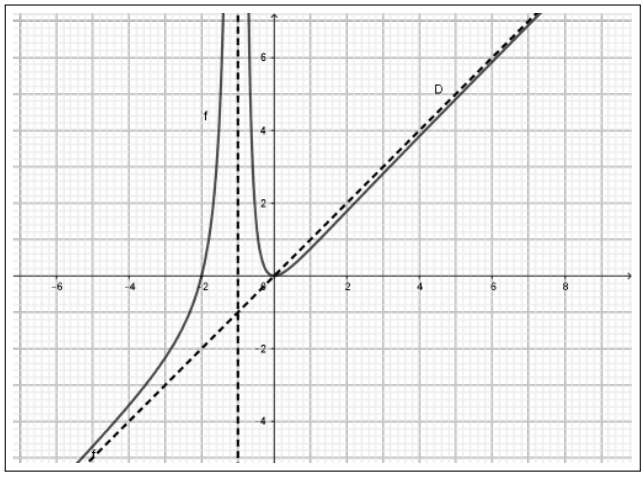
## ✓ التمرين 11 ◄

♠ $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ، و جدول تغيراتها معطى كمايلي :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ $\|\|$ $\searrow$ | $2$ | $\searrow$ | $1$ |

[1] ♦ عيّن اشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$ .
[2] ♦ عيّن اشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ .
♠ $g$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ .
كما يلي : $g(x)=\frac{1}{f(x)}$
[3] ♦ عيّن النهايات للدالة $g$ عند حدود مجموعة تعريفها .
[4] ♦ احسب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم إستنتج اشارة $g'(x)$
[5] ♦ شكل جدول تغيرات الدالة $g$ .

## ✓ التمرين 12 ◄




♠ نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي:
$f(x)=x-\frac{x}{(x+1)^2}$ . و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي
المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .
$(D)$ المستقيم ذو المعادلة $y=x$
[1] ♦ بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة $f$
[2] ♦ بقراءة بيانية عيّن اشارة $f'(x)$ .
[3] ♦ بقراءة بيانية عيّن اشارة $f(x)$ .
[4] ♦ بقراءة بيانية حدد وضعية المنحني $(C_f)$ بالنسبة إلى حامل محور الفواصل
[5] ♦ بقراءة بيانية حدد وضعية المنحني $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(D)$
[6] ♦ أدرس وضعية المنحني $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(D)$.

# تمارين للتعمق

## ✓ التمرين 01 ◄

♠ عين النهايات التالية:

♦ [1] $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$ ♦ [2] $\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$ ♦ [3] $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{1-3x}-2}{x+1}$

♦ [4] $\lim\limits_{x\to -\infty}5x^3-3x^2+9$ ♦ [5] $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{-3x^3+7x^2-5}{1+x+x^2}$ ♦ [6] $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+\sin x}{2x+1}$

♦ [7] $\lim\limits_{|x|\to +\infty}(\sqrt{9x^2+x+1}-2x)$ ♦ [8] $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{16x^2+6x+1}-4x)$ ♦ [9] $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{-x}+2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

## ✓ التمرين 02 ◄

♠ احسب النهايات التالية:

♦ [1] $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{3-x}-3}{x+1}$ ♦ [2] $\lim\limits_{|x|\to +\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+x-1}}{x^2-\sqrt{x^4-1}}$ ♦ [3] $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$

♦ [4] $\lim\limits_{x\to +\infty}2x-\sqrt{-1+5x^3}$ ♦ [5] $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{1-2x^3}-\sqrt{-x^3+x+1})$ ♦ [6] $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

♦ [7] $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$ ♦ [8] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$ ♦ [9] $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$

## ✓ التمرين 03 ◄

♠ احسب النهايات التالية:

♦ [1] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2}$ ♦ [2] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x.\tan x}$ ♦ [3] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(9x)}{\tan(7x)}$

♦ [4] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{7x}$ ♦ [5] $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{x-\frac{\pi}{6}}$ ♦ [6] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin(2x)}{x^3}$

♦ [7] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}$ ♦ [8] $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ ♦ [9] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

## ✓ التمرين 04 ◄

♠ نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $[0;+\infty[$ حيث : $f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x+1}}$

♦ [1] اثبت انه من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب تماما فأن :

$x^2\le x^2+x+1\le (x+1)^2$ و $x\le\sqrt{x^2+x+1}\le x+1$

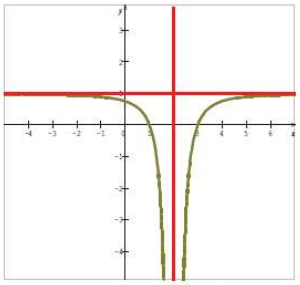
♦ [2] استنتج انه من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب تماما لدينا : $1-\frac{1}{x+1}\le f(x)\le 1+\frac{1}{\sqrt{x}}$

♦ [3] أحسب $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ و استنتج $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$

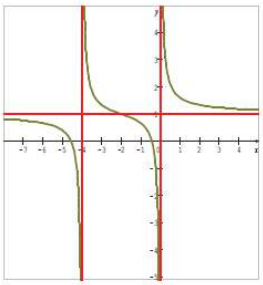
## ✓ التمرين 05 ◄

♠ شكل جدول تغيرات في كل حالة :

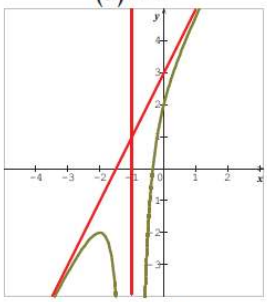
الحالة(1)



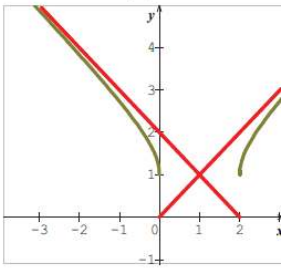
الحالة(2)



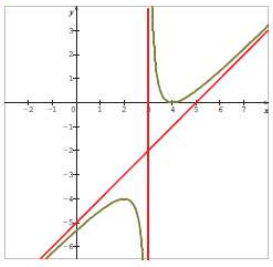
الحالة(3)



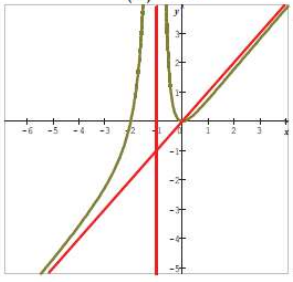
الحالة(4)



الحالة(5)



الحالة(6)



# تمارين للتعمق

## ✓ التمرين 06 ◄

♠ $f$ دالة بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$ حيث :

$$|f(x)-3| \leq \frac{1}{x^2+1}$$

♦ [1] هل تقبل الدالة $f$ نهاية عند $+\infty$ ؟

## ✓ التمرين 07 ◄

♦ [1] بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$ : $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$

♦ [2] استنتج النهايتين التاليتين :

أ ) ♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$ ب ) ♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$

## ✓ التمرين 08 ◄

♠ باستعمال نهاية حصر دالتين ، عين النهايتين التاليتين :

♦ [1] $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2+4(-1)^x}{x}$ ♦ [2] $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+\cos x}{\sqrt{x}(x-1)}$

## ✓ التمرين 09 ◄

♦ [1] من أجل $x>0$ ، قارن $\sqrt{4x^2+5}$ و $2x$

♦ [2] استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+5}-x$

## ✓ التمرين 10 ◄

♦ [1] من أجل $x>1$ ، قارن $\sqrt{2x^2-1}$ و $2x$

♦ [2] استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-1}-3x$

## ✓ التمرين 11 ◄

♦ [1] من أجل $x>0$ ، قارن $\sqrt{2x^2+x+1}$ و $x\sqrt{2}$

♦ [2] استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2+x+1}-x$

## ✓ التمرين 12 ◄

✓ نعتبر الدالة $f$ المعرفة كما يلي : $f(x)=\frac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}$

♦ [1] بين انه من أجل كل عدد حقيقي $x$ :

$$\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}} < -2x$$

♦ [2] استنتج انه من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب تماما لدينا : $f(x) \leq -4x^2$

♦ [3] أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

## حالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$f(x)$ تتضمن جذرًا $\sqrt{\ }$

نستعمل طريقة التحليل :
وضع الحد الأكبر درجة كعامل مشترك .

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = |x|\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}$$

$$\sqrt{\alpha x+\beta} = |x|\sqrt{\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x^2}}$$

$f(x)$ تتضمن كثيرات حدود فقط

تطبيق القاعدة التالية :
عند اللانهاية: كثير الحدود له نفس نهاية الحد الأكبر درجة.

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

## حالة عدم التعيين $+\infty - \infty$

$f(x)$ تتضمن جذرًا $\sqrt{\ }$

$f(x) = \sqrt{ax+b}+\alpha x+\beta$

$f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$

$f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta$

$a = \alpha$ | $a \neq \alpha$

$\sqrt{a} = |\alpha|$ | $\sqrt{a} \neq |\alpha|$

نستعمل طريقة المرافق

نضع $x$ كعامل مشترك

## حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$

$f(x)$ تتضمن كثيرات حدود

نستعمل طريقة الإختزال :

❶ نحلّل البسط والمقام.

❷ ثم نختزل على $(x-a)$

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-a)}(\cdots\cdots)}{\cancel{(x-a)}(\cdots\cdots)}$$

$f(x)$ تتضمن جذرًا $\sqrt{\ }$

نستعمل طريقة المرافق :

❶ نضرب : $f(x)\times\frac{\text{المرافق}}{\text{المرافق}}$

❷ ثم نختزل على : $(x-a)$

المقام من الشكل $(\alpha x+\beta)$

نستعمل طريقة العدد المشتق :

❶ إظهار العبارة : $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

$$\frac{\cdots\cdots}{\alpha x+\beta} = \frac{1}{\alpha}\times\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

❷ $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$

$f(x)$ تتضمن $\sin x$ و $\cos x$

نظهر إحدى النهايات الشهيرة التالية :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**مثال 01**

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2-3}}{x+2}$ تكافئ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ : $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{2-3/x}}{x(1+2/x)}$ تكافئ :

$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{2}}{x}=-\sqrt{2}$

**مثال 02**

$f(x)=\sqrt{4x^2-3}+2x-2$ من الشكل $(\sqrt{\alpha}=|a|)$ ومنه

$\lim_{x\to-\infty}f(x)$ تكافئ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-3}+(2x-2)\right)\left(\sqrt{4x^2-3}-(2x-2)\right)}{\left(\sqrt{4x^2-3}-(2x-2)\right)}$$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+1}{\left(\sqrt{4x^2-3}-(2x-2)\right)}$ تكافئ ومنه

$\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+1}{-2x\left(\sqrt{1}+1\right)}$ تكافئ $\lim_{x\to-\infty}\frac{8x}{-4x}=-2$

**مثال 03**

$f(x)=\sqrt{4x^2-3}+x-2$ من الشكل $(\sqrt{\alpha}\neq|a|)$ ومنه

$\lim_{x\to-\infty}f(x)$ تكافئ $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-3}+x-2$ تكافئ

$$\lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}+x-2$$

$\lim_{x\to-\infty}-3x=+\infty$ تكافئ $\lim_{x\to-\infty}-x\left[\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}+1-\frac{2}{x}\right]$ تكافئ

**مثال 04**

$f(x)=\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{4x^2-2}$ ومنه $(+\infty-\infty\,,\ a=\alpha)$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)$ تكافئ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{4x^2-2}\right)\left(\sqrt{4x^2-3}+\sqrt{4x^2-2}\right)}{\left(\sqrt{4x^2-3}+\sqrt{4x^2-2}\right)}$$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2x}=0$ تكافئ $\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt{4x^2-3}+\sqrt{4x^2-2}\right)}$ تكافئ

**مثال 05**

$f(x)=\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{9x^2-2}$ $(+\infty-\infty\,,\ a\neq\alpha)$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)$ تكافئ $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{9x^2-2}$ تكافئ

$\lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{4-3/x^2}-x\sqrt{9-2/x^2}$ تكافئ $\lim_{x\to-\infty}-x[2-3]$

ومنه $\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$

**مثال 06**

$f(x)=\sqrt{2x-3}-3x+2$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)$ تكافئ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x-3}-3x+2$

تكافئ $\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}-3x+2$ تكافئ $\lim_{x\to+\infty}x[\sqrt{2}-3]$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

**مثال 07**

$f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ ومنه $\lim_{x\overset{>}{\to}1}f(x)$ ، $(0/0)$

تكافئ $\lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ تكافئ $\lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

ومنه $\lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$ تكافئ $\lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

ومنه $\lim_{x\overset{>}{\to}1}f(x)=\frac{1}{4}$

**مثال 08**

$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ ومنه $\lim_{x\overset{>}{\to}1}f(x)$ تكافئ $\lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}$

تكافئ $\lim_{x\overset{>}{\to}1}(x+1)$ ومنه $\lim_{x\overset{>}{\to}1}f(x)=2$

**مثال 09**

$f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

لحساب $\lim_{x\overset{>}{\to}1}f(x)$ يجب أن تكون $\lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ تكافئ

$\lim_{x\to x_0}f(x)=g'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$

ومنه بوضع $g(x)=\sqrt{x+3}$ نجد $g(1)=2$ و $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$

ومنه $\lim_{x\overset{>}{\to}1}f(x)=\frac{1}{4}$ ومنه $g'(1)=\frac{1}{4}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM