

التحضير الجيد للبكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

مسائل شاملة

مرفقة بالحلول

في الدوال:

- العددية x
- الأسية e^x
- اللوغارتمية $\ln x$

◄ الإصدار الأول ►

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 01 / 01

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

فهرس المحتويات

① أسئلة متنوعة شائعة

في دراسة الدوال والإجابات عليها

- السلوك التقاربي \ المقاربات \ الوضعية النسبية
- عناصر تناظر منحنى \ شفعية دالة
- إشارة دالة \ مبرهنة القيم المتوسطة
- العدد المشتق وتفسيره الهندسي
- المماســـــات
- إيجاد عبارة $f(x)$ بثوابت مجهولة a, b
- رسم منحنى (C_g) إنطلاقا من المنحنى (C_f)

② قواعد أساسية في دراسة الدوال العددية

النهايات

- بعض نهايات الدوال المرجعية
- نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $\pm\infty$
- حالات عدم التعيـــين
- طرق إزالة حالات عدم التعيـــين
- نهاية دالة مركبة
- النهايات بالمقارنة
- المستقيمات المقاربة

③ الدوال العددية:

المسائل الشاملة والحلول

انقر على المسألة أو الحل

- المسألة الشاملة رقم 01
- المسألة الشاملة رقم 02
- المسألة الشاملة رقم 03
- حل المسألة الشاملة رقم 01
- حل المسألة الشاملة رقم 02
- حل المسألة الشاملة رقم 03

الخليل للرياضيات

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

- المسألة الشاملة رقم 04
- المسألة الشاملة رقم 05
- المسألة الشاملة رقم 06
- المسألة الشاملة رقم 07
- المسألة الشاملة رقم 08
- المسألة الشاملة رقم 09
- المسألة الشاملة رقم 10

- حل المسألة الشاملة رقم 04
- حل المسألة الشاملة رقم 05
- حل المسألة الشاملة رقم 06
- حل المسألة الشاملة رقم 07
- حل المسألة الشاملة رقم 08
- حل المسألة الشاملة رقم 09
- حل المسألة الشاملة رقم 10

الدوال الأسية:

المسائل الشاملة والحلول

④

انقر على المسألة أو الحل

- المسألة الشاملة رقم 01
- المسألة الشاملة رقم 02
- المسألة الشاملة رقم 03
- المسألة الشاملة رقم 04
- المسألة الشاملة رقم 05
- المسألة الشاملة رقم 06
- المسألة الشاملة رقم 07
- المسألة الشاملة رقم 08
- المسألة الشاملة رقم 09
- المسألة الشاملة رقم 10
- المسألة الشاملة رقم 11
- المسألة الشاملة رقم 12

- حل المسألة الشاملة رقم 01
- حل المسألة الشاملة رقم 02
- حل المسألة الشاملة رقم 03
- حل المسألة الشاملة رقم 04
- حل المسألة الشاملة رقم 05
- حل المسألة الشاملة رقم 06
- حل المسألة الشاملة رقم 07
- حل المسألة الشاملة رقم 08
- حل المسألة الشاملة رقم 09
- حل المسألة الشاملة رقم 10
- حل المسألة الشاملة رقم 11
- حل المسألة الشاملة رقم 12

الدوال اللوغارتمية:

المسائل الشاملة والحلول

⑤

انقر على المسألة أو الحل

- المسألة الشاملة رقم 01

- حل المسألة الشاملة رقم 01

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

- المسألة الشاملة رقم 02
- المسألة الشاملة رقم 03
- المسألة الشاملة رقم 04
- المسألة الشاملة رقم 05
- المسألة الشاملة رقم 06
- المسألة الشاملة رقم 07
- المسألة الشاملة رقم 08
- المسألة الشاملة رقم 09
- المسألة الشاملة رقم 10
- المسألة الشاملة رقم 11
- حل المسألة الشاملة رقم 02
- حل المسألة الشاملة رقم 03
- حل المسألة الشاملة رقم 04
- حل المسألة الشاملة رقم 05
- حل المسألة الشاملة رقم 06
- حل المسألة الشاملة رقم 07
- حل المسألة الشاملة رقم 08
- حل المسألة الشاملة رقم 09
- حل المسألة الشاملة رقم 10
- حل المسألة الشاملة رقم 11

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

①

أسئلة متنوعة شائعة

في دراسة الدوال والإجابات عليها

الخليل للرياضيات

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

السؤال	الإجابة
فسر بيانيا: $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$	(C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور التراتيب، معادلته: $x = a$
فسر بيانيا: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$	(C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا محور الفواصل معادلته: $y = b$
فسر بيانيا: $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$	(C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته: $y = ax + b$ عند $\pm\infty$
بين أن المستقيم $(\Delta): y = ax + b$ مقارب مائل لـ (C_f)	نبرهن: $\lim_{x\to\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$
بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلته ملاحظة: (*) خاص بشعبتي: رياضيات + تقني رياضي	• إذا كان: $f(x) = ax + b + g(x)$ نبرهن $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ ومعادلة المستقيم: $y = ax + b$ • إذا لم يكن ذلك(*): نحسب العددين a وb من $\mathbb{R}$ كما يلي: $a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ $b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax]$
ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $(\Delta): y = ax + b$ نطبق نفس الإجابة على السؤال: ادرس وضعية المنحنيين (C_f) و(C_g)، بوضع: $d(x) = f(x) - g(x)$	ندرس إشارة الفرق: $d(x) = f(x) - y$ • (C_f) يقع فوق $(\Delta) \Leftrightarrow d(x) > 0$ • (C_f) يقطع $(\Delta) \Leftrightarrow d(x) = 0$ • (C_f) يقع تحت $(\Delta) \Leftrightarrow d(x) < 0$
فسر بيانيا: $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0$	(C_f) و(C_g) متقاربان عند $\pm\infty$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

D_f هي مجموعة تعريف الدالة f

السؤال	الإجابة
بيّن أنّ النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر (C_f)	نبين أنّ: $\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$
بيّن أنّ $f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أنّ: (C_f) متناظر بالنسبة إلى النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$
بيّن أنّ المستقيم $d: x = \alpha$ محور تناظر (C_f)	نبين أنّ: $\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) = f(x) \end{cases}$
بيّن أنّ $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أنّ: (C_f) متناظر بالنسبة إلى المستقيم $(d): x = \alpha$
بيّن أنّ الدالة f فردية	نبين أنّ: $\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$
بيّن أنّ الدالة f زوجية	نبين أنّ: $\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$
بين أنّ: $f(-x) + f(x) = 0$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أنّ: f فردية، ومبدا المعلم مركز تناظر (C_f)
بين أنّ: $f(-x) - f(x) = 0$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أنّ: f زوجية، و(C_f) متناظر بالنسبة إلى حامل محور التراتيب (yy')
بين أنّ: $f(\alpha - x) + f(x) = \beta$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أنّ: (C_f) متناظر بالنسبة إلى النقطة $\Omega\left(\frac{\alpha}{2};\frac{\beta}{2}\right)$
بين أنّ: $f(\alpha - x) - f(x) = 0$ ماذا تستنتج؟	نستنتج أنّ: (C_f) متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة: $x = \frac{\alpha}{2}$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

السؤال	الإجابة
يعطى لك المنحنى (C_f) مرسوما في معلم م م، • عين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل. • استنتج إشارة $f(x)$	• نحل بيانيا المعادلة: $f(x)=0$ • ثم نحدد المجالات التي يكون عليها (C_f) إما فوق محور الفواصل وإما أسفله وأخيرا نحدد إشارة $f(x)$
• أحسب $f(\alpha)$ واستنتج إشارة $f(x)$	نجد $f(\alpha)=0$ ثم نحدد المجالات حيث: $f(x)$ إما موجبة أو سالبة
• بين أن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حل وحيد α حيث: $a<\alpha<b$ أو بصيغة أخرى: بين أنّ (C_f) يقطع المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=k$ في نقطة وحيدة فاصلتها α	• نبين أنّ: f مستمرة ورتيبة تماما على $[a;b]$ • ونحسب: $f(a)$ وَ $f(b)$ ونبين أنّ k محصور بين $f(a)$ وَ $f(b)$ فينتج وجود α وحيد من $[a;b]$ حيث: $f(\alpha)=k$
• بين أنّ المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $a<\alpha<b$ أو بصيغة أخرى: بين أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α	• نبين أنّ f مستمرة و رتيبة تماما على $[a;b]$ • ونحسب: $f(a)$ وَ $f(b)$ ونجد: $f(a)\times f(b)<0$ وينتج وجود α وحيد من $[a;b]$ حيث: $f(\alpha)=0$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

السؤال	الإجابة
فسّر: $\lim_{h\to 0}\frac{f(h+a)-f(a)}{h}=l$ أو: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$	• f تقبل الاشتقاق عند a و $f'(x)=l$ • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$ مماسا معامل توجيهه l
فسّر: $\lim_{h\to 0}\frac{f(h+a)-f(a)}{h}=0$	• f تقبل الاشتقاق عند a و $f'(x)=0$ • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$ مماسا يوازي حامل محور الفواصل معادلته $y=f(a)$
فسّر: $\lim_{\substack{<\\ h\to 0\\ >}}\frac{f(h+a)-f(a)}{h}=\pm\infty$	• f لا تقبل الاشتقاق عند a و (C_f) يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$ مماسا (أو نصف مماس) يوازي حامل محور التراتيب معادلته $x=a$
فسّر: $\lim_{\substack{>\\ h\to 0}}\frac{f(h+a)-f(a)}{h}=l_1$ وَ $\lim_{\substack{>\\ h\to 0}}\frac{f(h+a)-f(a)}{h}=l_2$ حيث: $l_1\neq l_2$	• f لا تقبل الاشتقاق عند a. • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$ نصفي مماسين معاملي توجيههما على الترتيب l_1 و l_2 وتسمى النقطة $A(a;f(a))$ نقطة زاوية.

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

⑤ المماســـــات

السؤال	الإجابة
عين معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة x_0	نكتب المعادلة $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ثم نحسب $f(x_0)$ و $f'(x_0)$ و نعوض في المعادلة أعلاه
عين معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة ذات الترتيبة y_0	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f(x_0) = y_0$ ثم نكتب معادلة المماس عند x_0
عين بيانيا العدد المشتق $f'(x_0)$ ملاحظة: معامل توجيه المماس$= f'(x_0)$	معامل التوجيه $= f'(x) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ حيث A وB من المماس
هل توجد مماسات لـ (C_f) معامل توجيهها يساوي a ؟	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f'(x_0) = a$ عدد الحلول يمثل عدد المماسات
هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ ؟	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f'(x_0) = a$ عدد الحلول يمثل عدد المماسات
هل توجد مماسات لـ (C_f) تشمل النقطة $A(a; b)$ ؟	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $b = f'(x_0)(a - x_0) + f(x_0)$ عدد الحلول يمثل عدد المماسات
هل توجد مماسات لـ (C_f) تعامد المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ ؟ (في معلم متعامد ومتجانس)	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f'(x_0) = -\frac{1}{a}$ عدد الحلول يمثل عدد المماسات

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

⑥ إيجاد عبارة $f(x)$ بثوابت مجهولة a, b

المعطيات	ترجمتها إلى معادلات لتعيين الثوابت: a, b, c
(C_f) يقبل في النقطة $A(x_0; y_0)$ مماسا يوازي محور الفواصل. أو: (C_f) يقبل ذروة في النقطة $A(x_0; y_0)$	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}$
(C_f) يقبل في النقطة ذات الفاصلة x_0 مماسا يوازي المستقيم ذو المعادلة: $y = mx + k$	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_0) = mx_0 + k \\ f'(x_0) = m \end{cases}$
(C_f) يقبل في النقطة $A(x_A; y_A)$ مماسا يشمل النقطة $B(x_B; y_B)$	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_A) = y_A \\ f'(x_0) = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \end{cases}$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

⑦ رسم منحنى (C_g) إنطلاقا من المنحنى (C_f)

الدوال	شرط الوجود	التحويل
$g(x)=f(x)+b$	$x \in D$	(C_g) هو صورة (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه $(b\vec{j})$
$g(x)=f(x+a)$	$x+b \in D$	(C_g) هو صورة (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه $(-a\vec{i})$
$g(x)=f(x+a)+b$	$x+b \in D$	(C_g) هو صورة (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه $(-a\vec{i}+b\vec{j})$
$g(x)=-f(x)$	$x \in D$	(C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx')
$g(x)=\|f(x)\|$	$x \in D$	لما $f(x) \geq 0$: (C_g) ينطبق على (C_f) لما $f(x) \leq 0$: (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx')
$g(x)=f(\|x\|)$	$\|x\| \in D$	لما $x \geq 0$: (C_g) ينطبق على (C_f) إذا $x \leq 0$: (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور التراتيب (yy')

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2

قواعد أساسية في دراسة الدوال العددية

النهايات

الخليل للرياضيات

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

بعض نهايات الدوال المرجعية

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^{>}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to0^{<}} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $\pm\infty$:

- النهاية عند $\pm\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $\pm\infty$.

مثال: $\lim_{x\to-\infty} (2x^2 + x + 3) = \lim_{x\to-\infty} (2x^3) = +\infty$

- النهاية عند $\pm\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $\pm\infty$.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x^2}{x^2}\right) = 3$$

حالات عدم التعيـــين:

① $\infty - \infty$ ② $0 \times \infty$ ③ $\frac{\infty}{\infty}$ ④ $\frac{0}{0}$

طرق إزالة حالات عدم التعيـــين:

1) التحليل والإختزال:

نستعمل هذه الطريقة عند حساب $\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ حيث: $f(x_0) = g(x_0) = 0$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

في هذه الحالة نقوم بتحليل العبارتين f و g وكتابتهما على الشكل: $(x-x_0)Q(x)$ ثم نختزل الكسر

ونحسب النهاية من جديد:

مثال 1: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{4x^2+3x-7}{x^2+2x-3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{(x-1)(4x+7)}{(x-1)(x+3)}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{4x+7}{x+3}\right)=\dfrac{11}{4}$

مثال 2: $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x^3+8}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)}\right)=\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}\right)=-3$

ملاحظة: توجد ثلاث طرق لإيجاد عبارة $Q(x)$:

ط1: المطابقة:

مثال: كتابة العبارة $4x^2+3x-7$ على الشكل: $(x-1)Q(x)$:

بما أن $Q(x)$ من الدرجة الأولى فهو يكتب على شكل $ax+b$ ومنه:

$$(x-1)Q(x)=(x-1)(ax+b)=ax^1+(b-x)x-b$$

$$\begin{cases} a=4 \\ b-a=3 \\ -b=-4 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=4 \\ b=7 \end{cases}\Rightarrow 4x^2+3x-7=(x-1)(4x+7)$$

ط2: القسمة الإقليدية:

مثال:

x^3+8	$x+2$
$\underline{-x^3-2x^2}$	x^2-2x+4
$-2x^2+8$	
$\underline{+2x^2+4x}$	
$+4x+8$	
$\underline{-4x-8}$	
0	

ط3: خوارزمية هورنر:

وهي أسهل الطرق، خاصة لما يكون كثير الحدود من الدرجة الثالثة فما فوق:

مثال: $p(x)=4x^2+3x-7$، $x_0=1$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

معاملات $p(x)$	$c=-7$	$b=3$	$a=4$	
الجذر x_0			↓	$x_0=1$
معاملات $Q(x)$	$c'=0$	$b'=7$	$a'=4$	

$$\begin{cases} a'=a=4 \\ b'=aa'+b=1(4)+3=7 \\ c'=x_0b'+c=1(7)-7=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4x^2+3x-7=(x-1)(4x+7)$$

2) استعمال المرافق (خاصة بالجذور التربيعية):

مثال1

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}\right)=\frac{1}{2}$$

مثال2:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x+8}-3}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\left(\sqrt{5-x}-2\right)\left(\sqrt{5-x}+2\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{5-x}+2\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(1-x)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3}\right)=-\frac{3}{2}$$

ملاحظة: لما يؤول x إلى $\pm\infty$، إما نستعمل المرافق في حالة تساوي معاملات x داخل الجذر وخارجه (المثال3)

أو نستعمل التحليل في حالة عدم تساوي المعاملات (المثال4)

مثال3:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2+x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(x+1-\sqrt{x^2+x-2}\right)\left(x+1+\sqrt{x^2+x-2}\right)}{\left(x+1+\sqrt{x^2+x-2}\right)}\right)$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x+1)^2-(x^2+x-2)}{x+1+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x+1+|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)}\right) \quad (x\to+\infty \Rightarrow |x|=x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}\right)=\frac{1}{2}$$

مثال4:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+1+\sqrt{x^2+x-2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+1+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(2x+1+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(2x+1-x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right) \Rightarrow (x\to-\infty \Rightarrow |x|=-x)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(x\left(\underbrace{2+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}_{\to 1}\right)\right)=-\infty$$

2) استعمال العدد المشتق:

لاستعمال هذه الطريقة لا بد أن تكون النهاية من الشكل:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

وهذه النهاية تساوي العدد المشتق $f'(x_0)$

مثال 1:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)=f'(2)=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\sqrt{x-1};f(2)=1;f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

مثال 2:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=f'(0)=1$$

$$f(x)=\sin(x)\,;f(0)=0;f'(x)=\cos(x)$$

نهاية دالة مركبة:

$$f=v\circ u:\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}u(x)=b\\ \lim\limits_{x\to v}v(x)=c\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=c$$

مثال:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\sqrt{\frac{4x^2-2x-1}{x^2-5x+3}}}_{f(x)}\right);\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2}\left(\underbrace{\frac{4x^2-2x-1}{x^2-5x+3}}_{u(x)}\right)=4\\ \lim\limits_{x\to 4}\left(\underbrace{\sqrt{x}}_{u(x)}\right)=2\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$$

النهايات بالمقارنة:

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الحالة ①:

$$\begin{cases} g(x) \le f(x) \le h(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

مثال:

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+\cos(x)}{x+1}\right)$

$$-1 \le \cos(x) \le 1$$
$$\Rightarrow 2x-1 \le 2x+\cos(x) \le 2x+1$$
$$\Rightarrow \frac{2x+1}{x+1} \le \frac{2x+\cos(x)}{x+1} \le \frac{2x+1}{x+1}$$

ملاحظة: المتراجحة لم تتغير لأنه لما $(x \to +\infty)$ فإن: $(x+1>0)$

أما إذا كان $(x \to -\infty)$ فإن: $(x+1<0)$، منه تتغير المتراجحة عند القسمة على $(x+1)$

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+1} \le \dfrac{2x+\cos(x)}{x+1} \le \dfrac{2x+1}{x+1} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{2x+\cos(x)}{x+1} = 2$$

الحالة ②:

$$\begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

مثال:

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{2-\sin(x)}\right)$

$$-1 \le \sin(x) \le 1$$
$$\Rightarrow -1 \le -\sin(x) \le 1$$
$$\Rightarrow 1 \le 2-\sin(x) \le 3$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3} \le \frac{1}{2-\sin(x)} \le 1$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$\Rightarrow \frac{x}{3} \leq \frac{1}{2-\sin(x)} \leq x$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2-\sin(x)} \geq \dfrac{x}{3} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{3}\right) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2-\sin(x)}\right) = +\infty$$

الحالة ③:

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

مثال:

احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^2 + x\cos(x))$

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow x \leq x\cos(x) \leq -x$$

$$\Rightarrow -2x^2 + x \leq -2x^2 + \cos(x) \leq -2x^2 - x$$

$$\begin{cases} -2x^2 + \cos(x) - 2x^2 - x \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^2 - x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}(-2x^2 + \cos(x)) = -\infty$$

ملاحظة:

غالبا ما نستعمل المقارنة لحساب نهايات الدوال المثلثية $(\sin(x)\,;\cos(x))$ لما x يؤول $\pm\infty$.

حيث أن هذه الدوال لا تقبل نهاية عند $\pm\infty$.

ولحصر $f(x)$ دائما ننطلق من حصر الدالة المثلثية $(\sin(x)\,;\cos(x))$ بين (-1) و $(+1)$.

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

المستقيمات المقاربة:

المستقيم $x = a$ مستقيم مقارب عمودي

① $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ $\Rightarrow$ (يوازي محور التراتيب)

المستقيم $y = b$ مستقيم مقارب أفقي

② $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ $\Rightarrow$ (يوازي محور الفواصل)

③ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0$ $\Rightarrow$ المستقيم $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

③

الدوال العددية

المسائل الشاملة

الخليل للرياضيات

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

01 المسـألة الشامـــلة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسر ذلك هندسيا.

ب-ادرس اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ-عين الأعداد الحقيقة a, b, c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$:

$$f(x)=ax+b+\frac{cx+b}{(x-1)^2}$$

ب-ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) والمستقيم (d) الذي معادلته $y=x-2$؟ برر.

ج-حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (d)، ولتكن A نقطة تقاطعهما.

3) بين انه يوجد مماس (T) لـ (C_f) موازٍ للمستقيم (d).

4) بين أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty;1[$، استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد α.

5) مثل بيانيا المستقيم (d) والمماس (T) والمنحنى (C_f).

6) استنتج بيانيا حلول المعادلة $f(x)=x+m$ حيث m وسيط حقيقي.

7) أ-نريد إيجاد نتيجة السؤال (5) باستعمال الحساب، بين أن فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y=x+m$ هي حلول المعادلة (E) حيث:

$$(E):(m+2)x^2-(2m+7)x+m+4=0$$

ب-جد حسب قيم m حلول المعادلة (E).

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

المسألة الشاملة رقم: 02

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 6x + 12$$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g.

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث: $\alpha \in]-1.48; 1.47[$

ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

3) أ- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x أن:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$$

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

4) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f).

ب- ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لـ (Δ).

5) بين أن:

$$f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$$

ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

6) مثل بيانيا المستقيم (Δ) والمنحني (C_f).

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

03 المسـألة الشامـــلة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{3x-7}{2-x}$$

ونسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1) أ- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسر ذلك هندسيا.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن النقطة $A(2;-3)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

3) بين أنه توجد نقطتان من (C_f) يكون المماس عند كل منهما موازيا للمستقيم ذو المعادلة:

$y=-x+4$، يطلب تعيين معادلة كل منهما.

4) اوجد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات.

5) مثل بيانيا المنحنى (C_f).

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM



لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1; 3\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3}$$

ونسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسر ذلك هندسيا.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أوجد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات.

4) أ- بين أنه إذا كان $x \in D_f$ فإن $(4 - x) \in D_f$.

ب- بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f).

5) مثل بيانيا المنحنى (C_f).

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM



لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 3}$$

ونسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية: c, b, a بحيث كل x من D_f:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3}$$

2) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

-حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

3) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) جد إحداثي النقطة ω تقاطع المستقيمين المقاربين، وأثبت أنها مركز تناظر للمنحني (C_f).

5) أنشئ المنحني (C_f).

6) استنتج رسم المنحني (C_h) الممثل للدالة h المعرفة بـ:

$$h(x) = \frac{(x - 4)^2}{|x - 3|}$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

المسألة الشاملة رقم: 06

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 3$

1) ادرس تغيرات الدالة g.

2) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0.4 < \alpha < -0.3$

ب- حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x - 4}{x - 1}$$

ونسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1) بين من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 أن :

$$f(x) = x^2 - 2x - 1 - \frac{5}{x - 1}$$

2) أ- احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف.

ب- ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) احسب: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x^2 - 2x - 1)]$

وماتفسيرك الهندسي للنتيجة.

4) ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) و المنحني (C_p) الممثل للدالة:

$$p(x) = x^2 - 2x - 1$$

5) بين أن:

$$f(\alpha) = \frac{15}{2(1 - \alpha)} - 2$$

واستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

6) أنشئ بيانيا كل من (C_p) و (C_f).

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

المسألة الشاملة رقم: 07

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة f المعرفة بالعبارة:

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2-3x+2}$$

1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f، ثم بين أنه من أجل كل x من D_f فإن:

$$f(x)=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-2}$$

حيث a, b, c أعداد حقيقية يُطلب تعيينها.

2) أ/ ادرس تغيرات الدالة f.

ب/ أوجد المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f.

ج/ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمقارب الأفقي (Δ):

3) عين تقريب تآلفي للدالة f عند 0.

4) أنشئ بيانيا المنحنى (C_f).

(II) نعرف الدالة h كما يلي:

$$h(x)=\frac{x^2+2|x|+1}{x^2-3|x|+2}$$

1) عين مجموعة تعريف الدالة h.

2) اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

3) أدرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة h عند 0 .

4) ادرس شفعية الدالة h.

5) استنتج التمثيل البياني (C_h) للدالة h انطلاقا من (C_f)

6) ناقشا بيانيا حسب الوسيط الحقيقي m وجود وعدد حلول المعادلة:

$$(m-1)x^2-(3m+2)x+2m-1=0$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

المسألة الشاملة رقم: 08

مشاهدة الحل

لتكن F دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، حيث: $F(0) = 0$، ومن أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$F'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

نقبل أن الدالة F موجودة ولا نريد إيجاد عبارتها $F(x)$.

(I) G الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$G(x) = F(x) + F(-x)$$

1) برر أن G تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ واحسب $G'(x)$ من أجل كل x حقيقي.

2) احسب $G(0)$ واستنتج أن الدالة F فردية.

(II) H الدالة المعرفة على المجال $I =]0; +\infty[$ بـ:

$$H(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$$

1) برر أنّ H تقبل الاشتقاق على I وأحسب $H'(x)$ من كل x من I.

2) برهن أنه من أجل كل $x \in I$ ، $H(x) = 2F(1)$

3) استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[F(x)] = 2F(1)$ ، ماذا ينتج عن المنحنى (C) ؟

(III) T الدالة المعرفة على $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ بِـ:

$$T(x) = F(\tan x) - x$$

1) أحسب $T'(x)$، ماذا ينتج عن الدالة T ؟

2) أحسب $F(1)$.

(IV)

1) انجز جدول تغيرات الدالة F على $\mathbb{R}$.

2) أرسم المنحنى (C) ، ومستقيماته المقاربة ومماساته عند النقط ذات الفواصل -1، 0 و1.

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

المسألة الشاملة رقم: 09

مشاهدة الحل

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$$

1) أ/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ/ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]2; +\infty[$.

ب/ أعط حصرا سعته 0.1 للعدد α.

جـ/ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2}$$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) عيّن نهايات الدالة f عند أطرف مجموعة تعريفها واعط تفسيرا هندسيا للنتائج.

2) أكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$ ، مع تحديد الأعداد الحقيقية a, b, c.

3) أ- بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (d) يطلب إعطاء معادلة ديكارتية له.

ب- ادرس الوضع النسبي للمستقيم (d) والمنحني (C_f).

4) أ- شكل جدول تغيرات الدالة f.

ب- بين أنّ (C_f) يقطع مرة وحيدة محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة β حيث $-1 < \beta < 0$.

ج- بين أن $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5) أحسب $f(0)$ ثم ارسم المستقيمين المقاربين و المنحني (C_f).

6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1,1\}$ بـ:

$$h(x) = f(|x|)$$

أ- بين أن h زوجية .

ب- أشرح كيف تنشئ (C_h) ثم أنشئه.

ج- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلتين:

$$f(x) = m \quad \text{و} \quad f(x) = x + m$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

المسألة الشاملة رقم: 10

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}$$

1) ادرس تجاه تغير الدالة g على مجال تعريفها.

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيينه.

3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - x$$

1) أ- احسب نهاية الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب- برهن أنه من أجل كل x حقيقي:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f.

2) احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+3x]$ وفسر النتيجة هندسيا.

3) أ- ليكن (d') المستقيم ذو المعادلة $y = x$ ، بين أن (d') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيمين (d) و (d').

4) انشئ بيانيا كلا من المستقيمين (d) و (d') و المنحنى (C_f).

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM



الدوال العددية

حُلول المسائل الشاملة

الخليل للرياضيات

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

01 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

1) أ- حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

لدينا الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ معناه الدالة f معرفة على المجال: $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

-حساب النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]$
$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x^3}{x^2}\right]$
$=\lim\limits_{x\to-\infty}[x]$
$=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3}{x^2}\right]$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}[x]$
$=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{<\\x\to1}}[f(x)]=\lim\limits_{\substack{<\\x\to1}}\left[\dfrac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]$
$=\dfrac{1}{0^+}$
$=+\infty$

- تفسير النتائج هندسيا:

- $x=1$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) موازٍ لحامل محور التراتيب بجوار $+\infty$

ب- دراسة إتجاه تغير الدالة f:

لدينا الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على المجال: $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

- دراسة $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(3x^2-8x+8)(x-1)^2-2(x-1)(x^3-4x^2+8x-4)}{(x-1)^4}$$
$$=\frac{(3x^2-8x+8)(x-1)-2(x^3-4x^2+8x-4)}{(x-1)^3}$$
$$=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
x^2	$+$		0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$	$-$			$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^3$	$-$			$-$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$	$+$		0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↗	$f(0)$	↗ $+\infty$	‖ $+\infty$	↘	$f(3)$	↗	$+\infty$

2) أ- تعيين الأعداد a, b, c: من أجل كل $x \neq 0$ لدينا:

$$f(x) = ax + b + \frac{cx+b}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{(ax+b)(x-1)^2 + cx + b}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{(ax+b)(x-1)^2 + cx + b}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{ax^3 + (2a+b)x^2 + (a-2b)x + 2b}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = -4 \\ a - 2b + c = 8 \\ 2b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

ب- استنتاج المستقيم المقارب المائل:

لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - [x-2]) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x - 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2} - [x-2]\right)$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x-2}{(x-1)^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3}{x}\right) = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل بجوار $\pm\infty$.

ج- وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (d):

دراسة إشارة الفرق: $f(x) - y$:

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$f(x)-y=x-2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}-x+2$$
$$=\frac{3x-2}{(x-1)^2}$$

لدينا: $(x-1)^2>0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1	$+\infty$
$3x-2$	$-$	0	$+$		$+$	

- الوضعية:
  - (C_f) تحت (d) لما: $x\in\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[$.
  - (C_f) يقطع (d) في النقطة $A\left(\frac{2}{3};\frac{-4}{3}\right)$
  - (C_f) فوق (d) لما: $x\in\left]\frac{2}{3};1\right[\cup\,]1;+\infty[$

3) إيجاد معادلة المماس (T):

المماس (T) يوازي المستقيم (d) معناه: يوجد a حيث: $f'(a)=1$

$$f'(a)=1\Rightarrow\frac{a^2(a-3)}{(a-1)^3}=1$$
$$\Rightarrow a^2(a-3)=(a-1)^3$$
$$\Rightarrow 3a-1=0$$
$$\Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

ومنه معادلة المماس (T) هي: $(T):f'(a)(x-a)+f(a)$

$$\boxed{(T):y=x-\frac{1}{3}-\frac{47}{12}}$$

1) تبيين أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty;1[$:

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $]-\infty;1[$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$

ولدينا: $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\right)\times\left(\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty\right)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty;1[$:

- استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد α:

α	$-\infty$	$\cdots$	0.68	0.69	0.70	0.71	0.72	$\cdots$	0.98	0.99	1
$f(\alpha)$	$+\infty$	$\cdots$	-0.92	-0.58	-0.18	0.25	0.76	$\cdots$	2348.97	9698.98	$+\infty$

من الجدول نلاحظ أن: $0.70<\alpha<0.71$

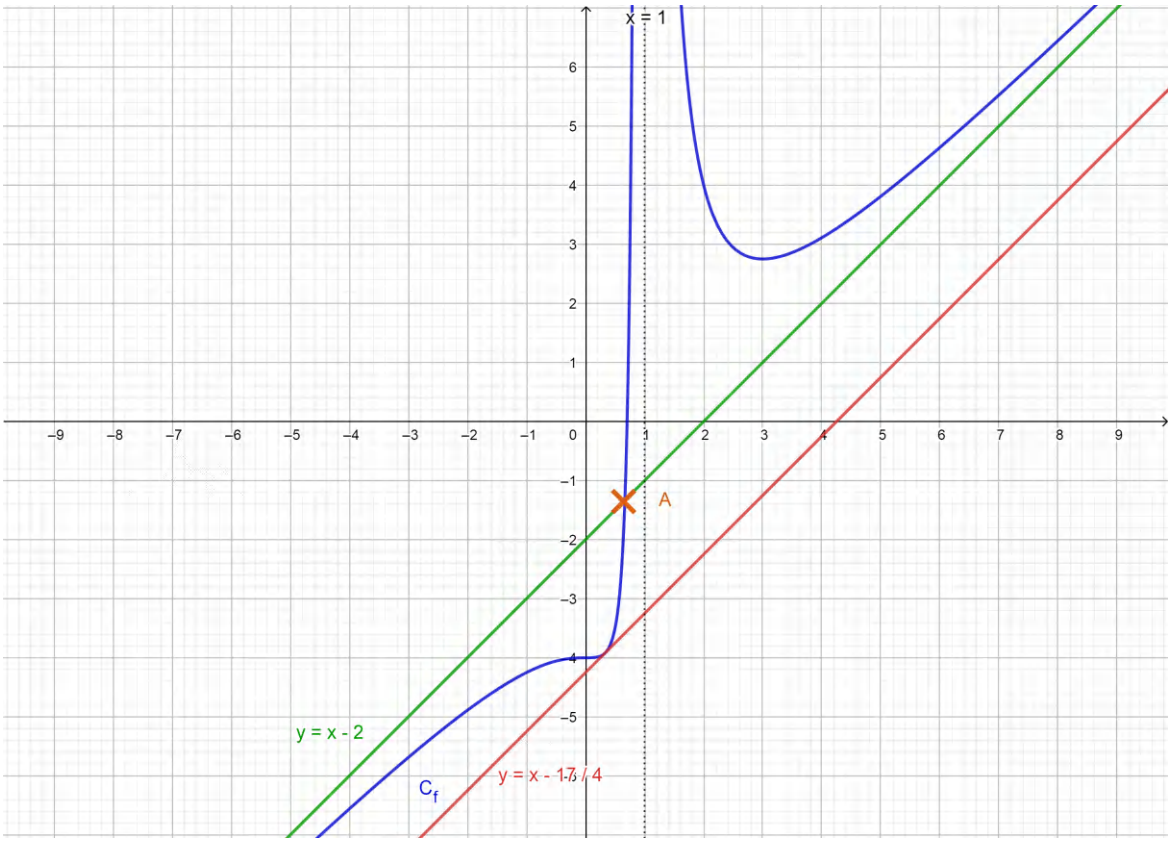
1) التمثيل البياني للمستقيم (d) والمماس (T) والمنحنى (C_f):

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x=1$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM
الخليل للرياضيات

- نرسم المستقيم المقارب المائل (d) ذو المعادلة $y = x - 2$
- نرسم معادلة المماس (T) ذو المعادلة $y = x - \frac{17}{4}$
- نعين A نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع (d)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



2) استنتاج بيانيا حلول المعادلة $f(x) = x + m$:

لما	$m < \frac{-17}{4}$	المعادلة لا تقبل حلول
لما	$m = \frac{-17}{4}$	المعادلة تقبل حلا مضاعفا
لما	$\frac{-17}{4} < m < -2$	المعادلة تقبل حلان
لما	$m = -2$	المعادلة تقبل حل وحيد $x = \frac{2}{3}$
لما	$m > -2$	المعادلة تقبل حلان

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

02 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) دراسة اتجاه تغير الدالة g:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه: $g'(x) = 3x^2 + 6$

ولدينا $3x^2 + 6 > 0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2) تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α :

بما أن الدالة g مستمرة ومتزادية تماما على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g(-1.48) = -0.12$ و $g(-1.47) = 0.0035$

ولدينا $g(-1.48) \times g(-1.47) < 0$

فإنه حسب مبرهة القيم المتوسطة، $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيد α.

- استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(II)

1) أ- حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x^3-6}{x^2+2}\right]$
$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x^3}{x^2}\right]$
$= \lim\limits_{x\to-\infty}[x]$
$= -\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3-6}{x^2+2}\right]$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3}{x^2}\right]$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}[x]$
$= +\infty$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ب- حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x^2+2) - (2x)(x^3-6)}{(x^2+2)^2}$$
$$= \frac{x(x^3+6x+12)}{(x^2+2)^2}$$
$$= \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$$

- جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
x	$-$	$\|$	$-$		0		$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		0		$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	-3	↗	$+\infty$

2) أ- تبيين أن المستقيم (Δ) مقارب مائل:

لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3-6}{x^2+2} - x\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3-6-x^3-2x}{x^2+2}\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-6-2x}{x^2+2}\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-2x}{x^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-2}{x}\right] = 0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$.

ب- دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لـ (Δ):

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$ على $\mathbb{R}$:

$$f(x) - y = \frac{-2x-6}{x^2+2}$$

لدينا: $(x^2+2) > 0$ ومنه الإشارة من $(-2x-6)$:

$$-2x-6 = 0 \Rightarrow -2x = 6$$
$$\Rightarrow x = -3$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ومنه إشارة $f(x)-y$:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) على المجال: $]-\infty;-3[$
- (C_f) يقطع (Δ) عند النقطة $A(-3;-3)$
- (C_f) تحت (Δ) على المجال: $]-3;+\infty[$

3) تبين أن: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$:

يكفي أن نبرهن أن $f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=0$:

$$\begin{aligned} f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha &= \frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2}-\frac{3}{2}\alpha \\ &= \frac{2\alpha^3-12-3\alpha^3-6\alpha}{\alpha^2+2} \\ &= \frac{-(\alpha^3+6\alpha+12)}{\alpha^2+2} \\ &= -\frac{g(\alpha)}{\alpha^2+2} \end{aligned}$$

ولدينا سابقا: $g(\alpha)=0$ ومنه:

$$f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=-\frac{0}{\alpha^2+2}=0$$

إذن: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$

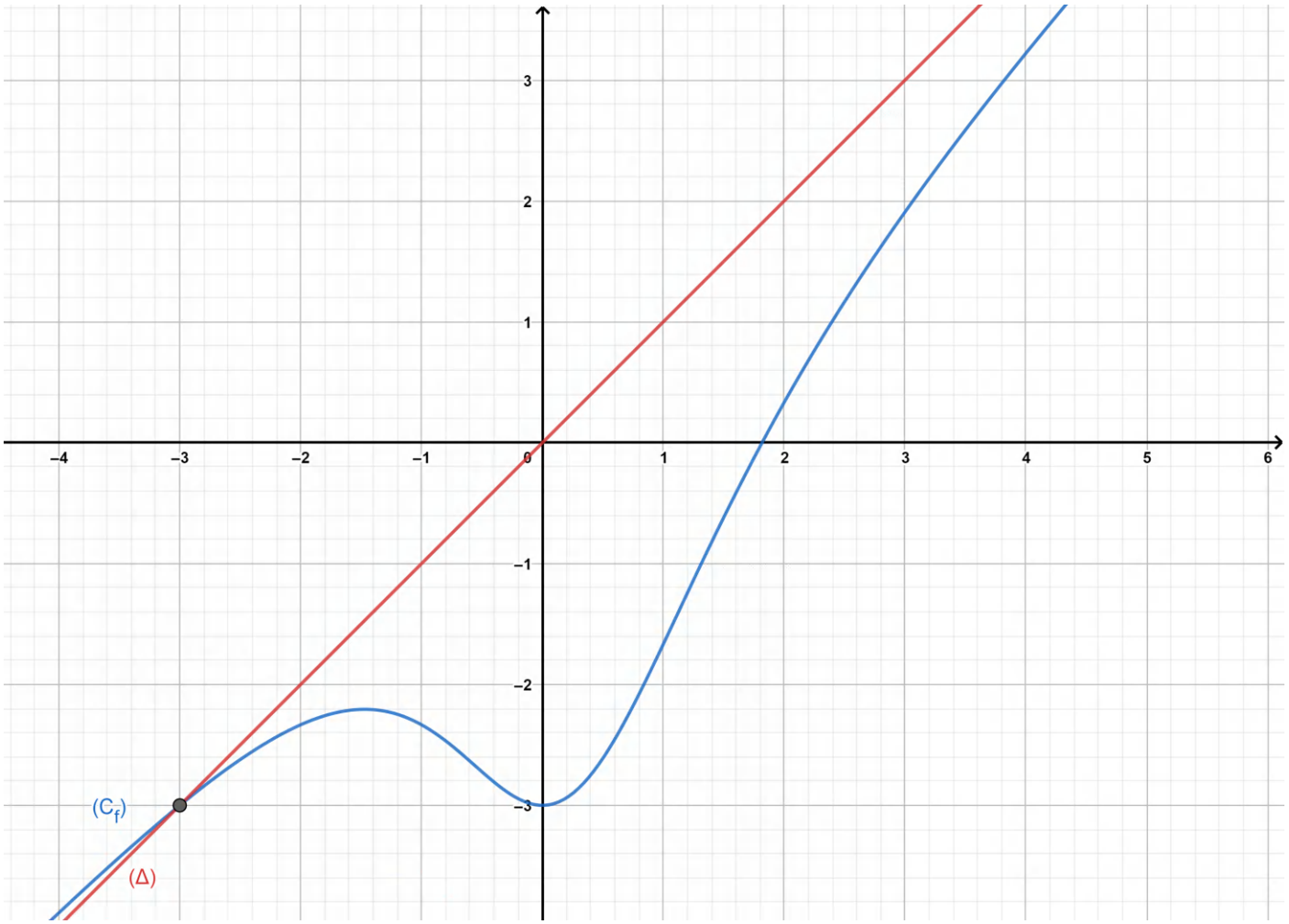
- حصر $f(\alpha)$:

لدينا: $-1.48<\alpha<-1.47$ ولدينا: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$

$$\frac{3}{2}(-1.48)<\frac{3}{2}\alpha<\frac{3}{2}(-1.47)$$
$$-2.22<f(\alpha)<-2.21$$

4) إنشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f):

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM



قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

03 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

4) أ- حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{3x-7}{2-x}\right]$
$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{3x}{-x}\right]$
$= -3$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x-7}{2-x}\right]$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x}{-x}\right]$
$= -3$
- $\lim\limits_{\substack{<\\x\to2}}[f(x)] = \lim\limits_{\substack{<\\x\to2}}\left[\dfrac{3x-7}{2-x}\right]$
$= \dfrac{-1}{0^+}$
$= -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{>\\x\to2}}[f(x)] = \lim\limits_{\substack{>\\x\to2}}\left[\dfrac{3x-7}{2-x}\right]$
$= \dfrac{-1}{0^-}$
$= +\infty$

- تفسير النتائج هندسيا:

- $y = -3$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) موازٍ لحامل محور الفواصل بجوار $\pm\infty$
- $x = 2$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) موازٍ لحامل محور التراتيب بجوار $\pm\infty$

ب- دراسة إتجاه تغير الدالة f:

لدينا الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على مجال تعريفها

أولا نحسب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{3(2-x)-(3x-7)}{(2-x)^2}$$
$$= \frac{-1}{(2-x)^2} < 0$$

لدينا $f'(x) < 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما:

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	
$f'(x)$	-3 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ -3	

5) تبيين أن النقطة A هي مركز تناظر لـ (C_f):



نقول أن النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$ أو $$\begin{cases} (\alpha + x) \in D_f \\ (\alpha - x) \in D_f \\ f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta \end{cases}$$

- نثبت أنّ $(2(2) - x) \in D_f$

لدينا $x \in D_f$ معناه: $x \in]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

$x \in]-\infty;2[$ أو $x \in]2;+\infty[\Leftarrow$ $x < 2$ أو $x > 2 \Leftarrow$ $-x > -2$ أو $-x < -2 \Leftarrow$

$(4-x) < 2$ أو $(4-x) > 2 \Leftarrow$ $(4-x) \in]-\infty;2[$ أو $(4-x) \in]2;+\infty[\Leftarrow$

إذن: $(4-x) \in]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

- نثبت أنّ $f(2(4) - x) + f(x) = 2(-3)$:

لدينا:

$$\begin{aligned} f(4-x) + f(x) &= \frac{3(4-x)-7}{2-(4-x)} + \frac{3x-7}{2-x} \\ &= \frac{5-3x}{-2+x} + \frac{7-3x}{x-2} \\ &= \frac{12-6x}{-2+x} \\ &= \frac{-6(-2+x)}{-2+x} \\ &= -6 \end{aligned}$$

إذن النقطة $A(2;-3)$ هي مركز تناظر لـ (C_f).

6) إيجاد نقطتان من (C_f) يكون المماس عند كل منهما موازيا للمستقيم ذو المعادلة: $y = -x + 4$:

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

◄ المماس لـ (C_f) عن النقطة ذات الفاصلة a يعطى بالمعادلة التالية: $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ ►

لدينا المماس موازٍ للمستقيم ذو المعادلة $y=-x+4$ $\Leftarrow$ $f'(a)=-1$

$\Leftarrow$ $-\frac{1}{(2-a)^2}=-1$ $\Leftarrow$ $a^2-4a+3=0$

لدينا: $\Delta=(-4)^2-4(1)(3)=4>0$ إذن:

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{4-2}{2}=1 \\ a_2=\dfrac{4+2}{2}=3 \end{cases}$$

إذن يوجد مماسان لـ (C_f) موازيان للمستقيم ذو المعادلة: $y=-x+4$، معادلتيهما:

$$\begin{aligned} y_1 &= f'(a_1)(x-a_1)+f(a_1) \\ &= f'(1)(x-1)+f(1) \\ &= -1(x-1)+(-4) \\ &= -x-3 \\ y_2 &= f'(a_2)(x-a_2)+f(a_2) \\ &= -1(x-3)+(-2) \\ &= -x+1 \end{aligned}$$

إذن:

$$\begin{cases} y_1=-x-3 \\ y_2=-x+1 \end{cases}$$

7) إيجاد نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات:

- مع محور التراتيب:

◄ لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور التراتيب نحسب $f(0)$ ►

$$f(0)=\frac{3(0)-7}{2-(0)}=-\frac{7}{2}$$

ومنه:

$$(C_f)\cap(yy')=\left\{\left(0;-\frac{7}{2}\right)\right\}$$

- مع محور الفواصل:

◄ لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x)=0$ ►

$$f(x)=0\Rightarrow\frac{3x-7}{2-x}\Rightarrow\begin{cases}3x-7=0\\ \text{و}\\ 2-x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7}{3}\\ \text{و}\\ x\neq 2\end{cases}$$

ومنه:

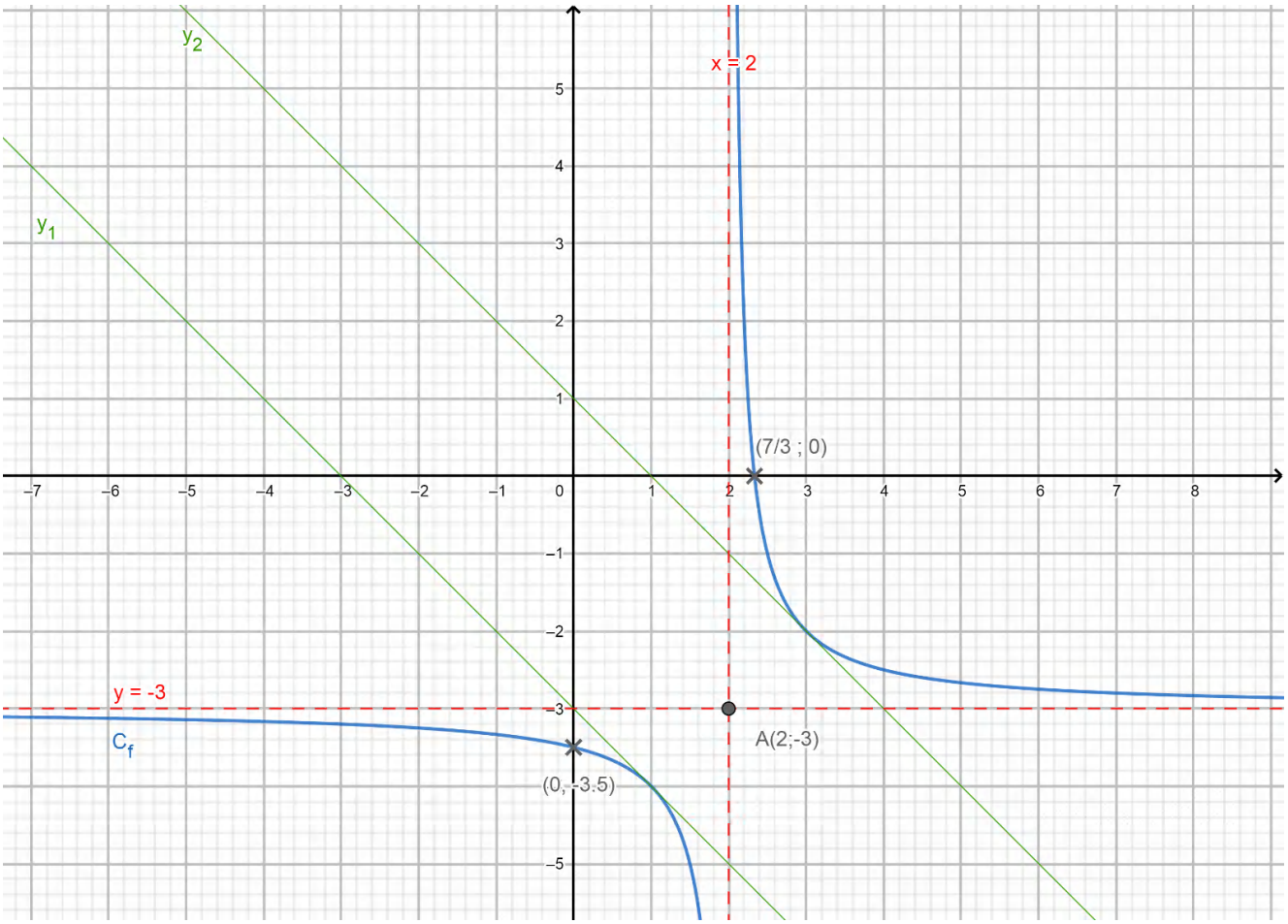
$$(C_f)\cap(xx')=\left\{\left(\frac{7}{3};0\right)\right\}$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

8) التمثيل البياني لـ المنحنى (C_f):

خطوات إنشاء المنحنى (C_f) على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $y = -3$ و $x = 2$
- نرسم معادلات المماس: $\begin{cases} y_1 = -x - 3 \\ y_2 = -x + 1 \end{cases}$
- نعين النقطة $A(2; -3)$ مركز تناظر لـ (C_f).
- نعين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات (xx') و (yy')
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

04 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

لدينا الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{1; 3\}$ معناه الدالة f معرفة على المجال: $]-\infty; 1[\cup]1; 3[\cup]3; +\infty[$

لدينا إشارة المقام كالآتي:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$(x^2 - 4x + 3)$	$+$	0		$-$	0	$+$	

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \to -\infty} [f(x)] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3}\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{3x^2}{x^2}\right]$$

$$= 3$$

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} [f(x)] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{3x^2}{x^2}\right]$$

$$= 3$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} [f(x)] = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left[\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3}\right]$$

$$= \frac{1}{0^+}$$

$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} [f(x)] = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left[\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3}\right]$$

$$= \frac{1}{0^-}$$

$$= -\infty$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$\bullet \lim_{\substack{x\to 3\\ <}} [f(x)] = \lim_{\substack{x\to 3\\ <}} \left[\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right]$$
$$= \frac{1}{0^+}$$
$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{x\to 3\\ >}} [f(x)] = \lim_{\substack{x\to 3\\ >}} \left[\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right]$$
$$= \frac{1}{0^+}$$
$$= +\infty$$

- تفسير النتائج هندسيا:

- $y = 3$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) موازٍ لحامل محور الفواصل بجوار $\pm\infty$
- $x = 1$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) موازٍ لحامل محور التراتيب بجوار $\pm\infty$
- $x = 3$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) موازٍ لحامل محور التراتيب بجوار $\pm\infty$

2) دراسة إتجاه تغير الدالة f:

لدينا الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال تعريفها

أولا: نحسب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(3x-12)(x^2-4x+3)-(2x-4)(3x^2-12x+10)}{(x^2-4x+3)^2}$$
$$= \frac{-2x+4}{(x^2-4x+3)^2}$$

ثانيا: ندرس إشارة $f'(x)$

لدينا $(x^2-4x+3)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(-2x+4)$

لدينا: $-2x+4=0$ ومنه $-2x=-4$ ومنه $x=2$

ثالثا: جدول التغيرات:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3

3) إيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات:

مع محور التراتيب:

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

◄ لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور التراتيب نحسب $f(0)$ ►

$$f(0)=\frac{3(0)^2-12(0)+10}{(0)^2-4(0)+3}$$
$$=\frac{10}{3}$$

ومنه:

$$(C_f)\cap(yy')=\left\{\left(0;\frac{10}{3}\right)\right\}$$

مع محور الفواصل:

◄ لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x)=0$ ►

$$f(x)=0\Rightarrow\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}=0\Rightarrow\begin{cases}3x^2-12x+10\ldots(1)\\ \text{و}\\ x^2-4x+3\neq0\end{cases}$$

نحل (1) نجد:

$$\Delta=(-12)^2-4(3)(10)=24$$
$$\begin{cases}x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{12-\sqrt{24}}{6}\\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{12+\sqrt{24}}{6}\end{cases}$$

ومنه:

$$(C_f)\cap(xx')=\left\{\left(\frac{12-\sqrt{24}}{6};0\right),\left(\frac{12+\sqrt{24}}{6};0\right)\right\}$$

4) أ- تبيين أنه إذا كان $x\in D_f$ فإن $(4-x)\in D_f$:

لدينا $x\in D_f$ ومنه: $x\in\,]-\infty;1[\cup]1;3[\cup]3;+\infty[$

ومنه: $x\in\,]3;+\infty[$	أو	$x\in\,]1;3[$	أو	$x\in\,]-\infty;1[$
ومنه: $x>3$	أو	$1<x<3$	أو	$x<1$
ومنه: $-x<-3$	أو	$-3<-x<-1$	أو	$-x>-1$
ومنه: $4-x<1$	أو	$1<4-x<3$	أو	$4-x>3$
ومنه: $(4-x)\in\,]-\infty;1[$	أو	$(4-x)\in\,]1;3[$	أو	$(4-x)\in\,]3;+\infty[$

إذن: $(4-x)\in\,]-\infty;1[\cup]1;3[\cup]3;+\infty[$

ب- تبين أن المستقيم ذو المعادلة $x=2$ محور تناظر لـ (C_f):

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM



لإثبات أن المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تناظر لـ (C_f) نبين ما يلي:

$$\begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

أولا نثبت أنّ $(2(2) - x) \in D_f$

من السؤال السابق لدينا: $(4 - x) \in D_f$

ثانيا نثبت أنّ $f(2(4) - x) = f(x)$:

$$\begin{aligned} f(4-x) &= \frac{3(4-x)^2 - 12(4-x) + 10}{(4-x)^2 - 4(4-x) + 3} \\ &= \frac{3(4^2 - 2(4)(x) + x^2) - 48 + 12x + 10}{4^2 - 2(4)(x) + x^2 - 16 + 4x + 3} \\ &= \frac{3(16 - 8x + x^2) - 38 + 12x}{x^2 - 4x + 3} \\ &= \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

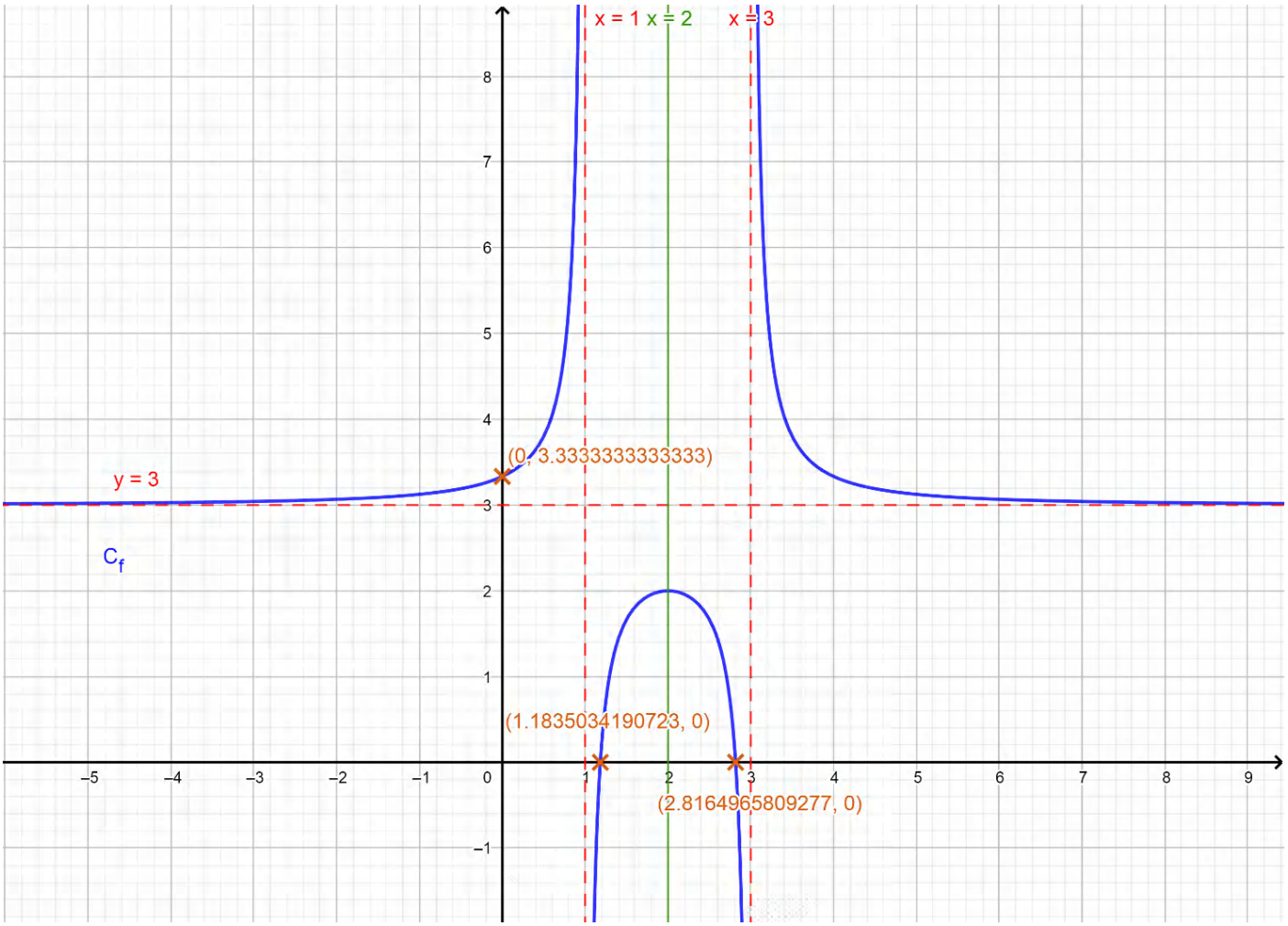
اذن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f).

5) التمثيل البياني للمنحني (C_f):

خطوات إنشاء المنحنى (C_f) على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $y = 3$ و $x = 1$ و $x = 3$
- نرسم المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f)
- نعين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات (xx') و (yy')
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM



قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

05 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

1) إيجاد الأعداد a, b, c:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$$
$$= \frac{ax^2 - 3ax + bx - 3b + c}{x-3}$$
$$= \frac{ax^2 + (b-3a)x - 3b + c}{x-3}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = -8 \\ -3b + c = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 1 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = x - 5 + \frac{1}{x-3}$$

2) استنتاج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ):

لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (x-5)] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x - 5 + \frac{1}{x-3} - (x-5)\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{x-3}\right]$$
$$= 0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x - 5$ مقارب مائل بجوار $\pm\infty$

- تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$:

$$f(x) - y = \frac{1}{x-3}$$

لدينا: $1 > 0$ ، إذن الإشارة من إشارة المقام: $(x-3)$:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$\frac{1}{x-3}$	$-$	‖	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	‖	(C_f) فوق (Δ)

3) دراسة تغيرات الدالة f:

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{\substack{x\to 3\\ <}} [f(x)] = \lim_{\substack{x\to 3\\ <}} \left[x - 5 + \frac{1}{x-3}\right]$$
$$= -\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{x\to 3\\ <}} [f(x)] = \lim_{\substack{x\to 3\\ >}} \left[x - 5 + \frac{1}{x-3}\right]$$
$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to -\infty} [f(x)] = \lim_{x\to -\infty} \left[\frac{x^2 - 8x + 16}{x-3}\right]$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \left[\frac{x^2}{x}\right]$$
$$= \lim_{x\to -\infty} [x]$$
$$= -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to +\infty} [f(x)] = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{x^2 - 8x + 16}{x-3}\right]$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{x^2}{x}\right]$$
$$= \lim_{x\to +\infty} [x]$$
$$= +\infty$$

التفسير الهندسي:

- المستقيم $x = 3$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$.

- حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-3)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}$$

لدينا: $(x-3)^2 > 0$ ومنه الإشارة من $(x^2 - 6x + 8)$:

$$\Delta = 36 - 4(1)(8)$$
$$= 4 > 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6-2}{2} = 2 \\ x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6+2}{2} = 4 \end{cases}$$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		2		3		4	$+\infty$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-4	↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

4) إيجاد إحداثي النقطة ω:

$$\begin{cases} y = x - 5 \dots (1) \\ x = 3 \dots (2) \end{cases}$$

نعوض (2) في (1) نجد: $y = 3 - 5 = -2$ ومنه : $\omega(3;-2)$

- اثبات أنّ ω مركز تناظر للمنحنى (C_f):

أولا نثبت أنّ $(2(3) - x) \in D_f$

لدينا $x \in D_f$ معناه: $x \in]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

$\Leftarrow x \in]-\infty;3[$ أو $x \in]3;+\infty[$ $\Leftarrow x > 3$ أو $x < 3$ $\Leftarrow -x > -3$ أو $-x < -3$

$\Leftarrow 6 - x < 3$ أو $(6-x) > 3$ $\Leftarrow (6-x) \in]-\infty;3[$ أو $(6-x) \in]3;+\infty[$

إذن: $(6-x) \in]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

ثانيا نثبت أنّ $f(2(3) - x) + f(x) = 2(-2)$:

لدينا:

$$\begin{aligned} f(6-x) + f(x) &= 6 - x - 5 + \frac{1}{6-x-3} + x - 5 + \frac{1}{x-3} \\ &= \frac{1}{3-x} + \frac{1}{x-3} - 4 \\ &= \frac{1}{3-x} - \frac{1}{3-x} - 4 \\ &= -4 \end{aligned}$$

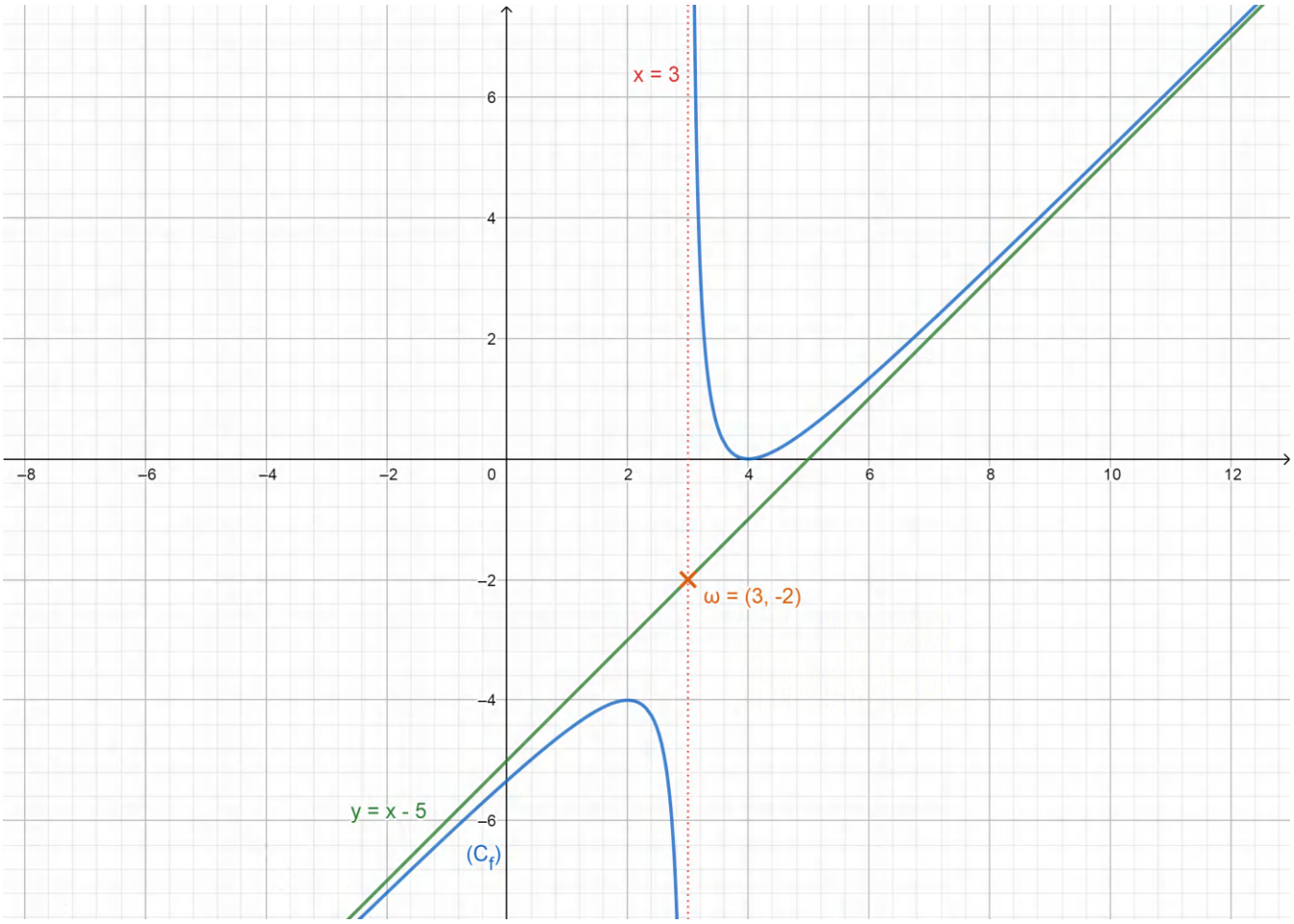
إذن النقطة $\omega(3;-2)$ هي مركز تناظر لـ (C_f).

5) التمثيل البياني:

خطوات إنشاء المنحنى (C_f) على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 3$
- نرسم المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة $y = x - 5$.
- نعين ω مركز تناظر المنحنى (C_f)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

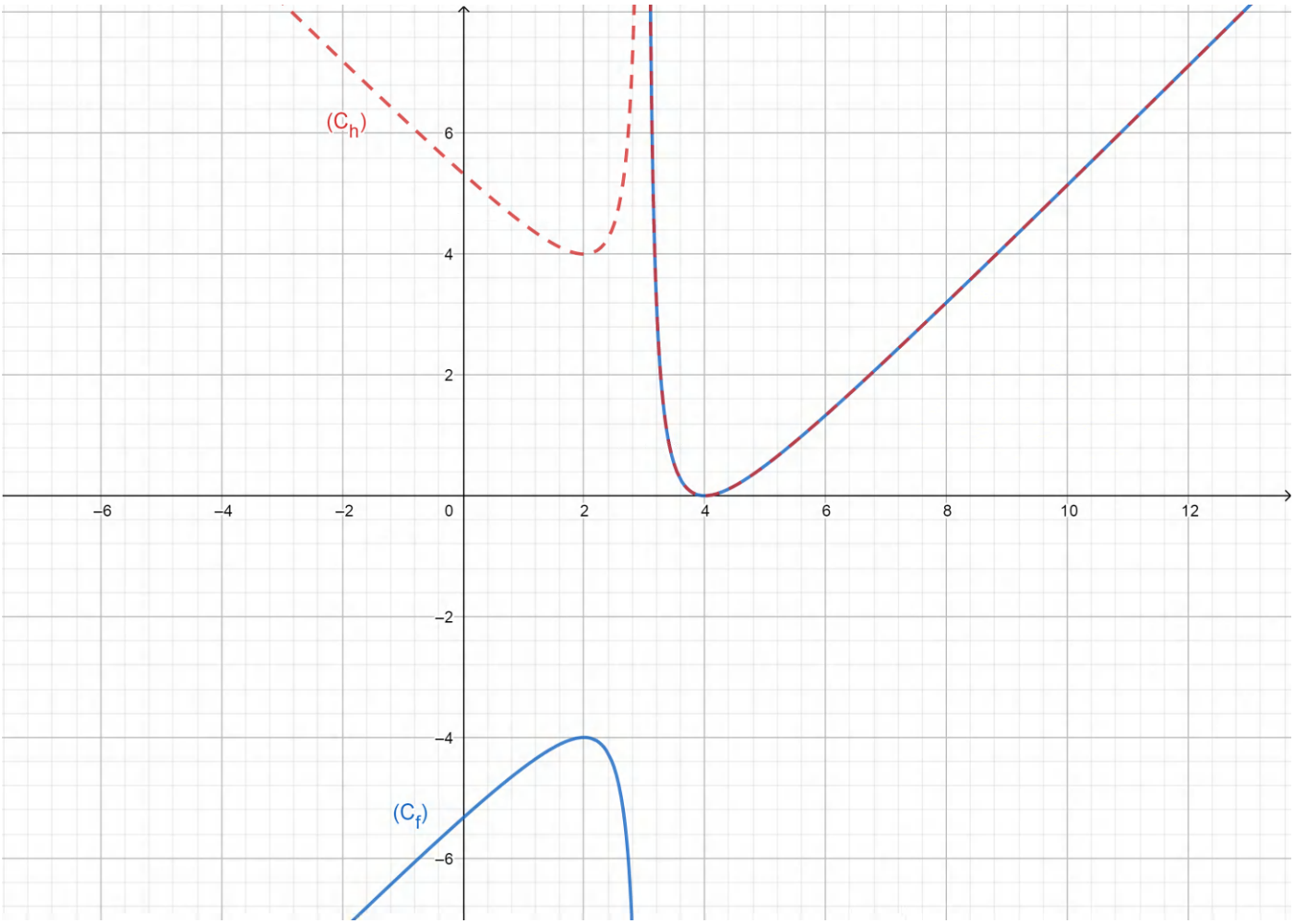


6) استنتاج رسم المنحني (C_h) :

(C_h) ينطبق على (C_f) إذا كان $f(x) \geq 0$

(C_h) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx') إذا كان $f(x) \leq 0$.

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM



قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

06 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g:

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim_{x\to-\infty}[2x^3-6x^2+6x+3]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(2-\frac{6}{x}+\frac{6}{x^1}+\frac{3}{x^3}\right)\right]$$
$$= -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim_{x\to+\infty}[2x^3-6x^2+6x+3]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x^3\left(2-\frac{6}{x}+\frac{6}{x^1}+\frac{3}{x^3}\right)\right]$$
$$= +\infty$$

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 6x^2-12x+6$$
$$= 6(x-1)^2 \geq 0$$

- تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	3	↗	$+\infty$

2) أ- تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

لدينا الدلة g رتيبة ومستمرة على مجال تعريفها

ولدينا: $g(-0.4) = -4.88$ و $g(-0.3) = 0.606$

ولدينا: $g(-0.3)\times g(-0.4) < 0$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

ب- تحديد حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(II)

1) تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 أن $f(x) = x^2-2x-1-\frac{5}{x-1}$:

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$x^2-2x-1-\frac{5}{x-1}=\frac{(x^2-2x-1)(x-1)-5}{x-1}$$
$$=\frac{(x^2-2x-1)(x-1)-5}{x-1}$$
$$=\frac{x^3-3x^2+x-4}{x-1}$$
$$=f(x)$$

2) أ- حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-3x^2+x-4}{x-1}\right]$
$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x}\right]$
$=\lim\limits_{x\to-\infty}[x^2]$
$=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3-3x^2+x-4}{x-1}\right]$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x}\right]$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2]$
$=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{<\\x\to1}}[f(x)]=\lim\limits_{\substack{<\\x\to x\to1}}\left[x^2-2x-1-\frac{5}{x-1}\right]$
$=\lim\limits_{\substack{<\\x\to1}}\left[-2-\frac{5}{0^-}\right]$
$=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}}[f(x)]=\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}}\left[x^2-2x-1-\frac{5}{x-1}\right]$
$=\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}}\left[-2-\frac{5}{0^+}\right]$
$=-\infty$

نلاحظ أن المستقيم $(x=1)$ مقارب لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

ب- دراسة تغيرات الدالة f:

أولا: حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=2x-2+\frac{5}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{2(x-1)^3+5}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{2x^3-6x^2+6x+3}{(x-1)^2}$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= \frac{g(x)}{(x-1)^2}$$

لدينا $(x-1)^2 \geq 0$ ومنه الإشارة من إشارة $g(x)$.

ثانيا: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$ / $-\infty$	↗ $+\infty$

3) حساب: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x^2-2x-1)]$:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x^2-2x-1)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[-\frac{5}{x-1}\right] = 0$

المنحني (C_p) الممثل للدالة: (x^2-2x-1) هو منحني تقارب للدالة f بجوار $\pm\infty$

4) دراسة الوضع النسبي بين (C_p) والمنحني (C_f):

دراسة إشارة الفرق: $[f(x)-p(x)]$

لدينا:

$$f(x)-p(x) = -\frac{5}{x-1}$$
$$= \frac{5}{1-x}$$

لدينا: $5 > 0$ إذن الإشارة من المقام

$$1-x=0 \Rightarrow x=1$$

ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-p(x)$	$+$	$-$	
الوضعية	(C_p) فوق (C_f)	(C_p) تحت (C_f)	

5) تبيين أن $\left[f(\alpha) = \frac{15}{2(1-\alpha)} - 2\right]$:

يكفي أن نثبت أن: $\left(f(\alpha) - \frac{15}{2(1-\alpha)} + 2 = 0\right)$

لدينا: $g(\alpha)=0$ ، ولدينا:

$$f(\alpha) - \frac{15}{2(1-\alpha)} + 2 = \alpha^2 - 2\alpha - 1 - \frac{5}{\alpha-1} - \frac{15}{2(1-\alpha)} + 2$$
$$= \frac{2(\alpha-1)(\alpha^2-2\alpha-1) - 2(5) + 15 + 2\big(2(\alpha-1)\big)}{2(\alpha-1)}$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= \frac{2\alpha^3 - 6\alpha^2 + 6\alpha + 3}{2(\alpha - 1)}$$
$$= \frac{g(\alpha)}{2(\alpha - 1)} = \frac{0}{2(\alpha - 1)}$$
$$= 0$$

-حصرا $f(\alpha)$:

لدينا:

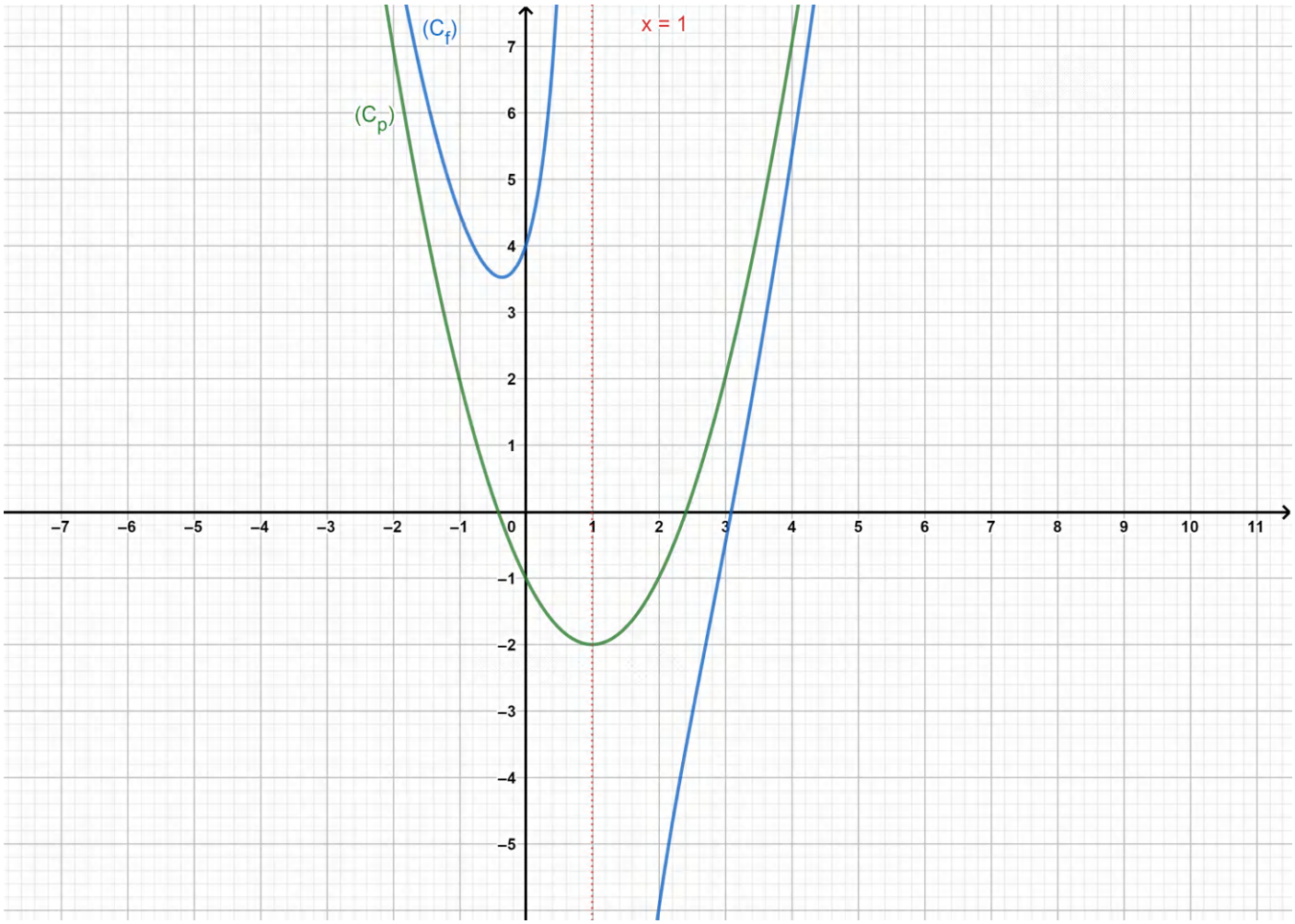
$$0.4 < \alpha < -0.3$$
$$0.3 < -\alpha < 0.4$$
$$1.3 < 1 - \alpha < 1.4$$
$$2.6 < 2(1 - \alpha) < 2.8$$
$$\frac{1}{2.8} < \frac{1}{2(1 - \alpha)} < \frac{1}{2.6}$$
$$\frac{15}{2.8} - 2 < \frac{15}{2(1 - \alpha)} - 2 < \frac{15}{2.6} - 2$$
$$3.36 < f(\alpha) < 3.77$$

7) التمثيل البياني لكل من (C_p) و (C_f):

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب: $x = 1$
- نرسم المنحني المقارب ذو المعادلة $(x^2 - 2x - 1)$.
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM



قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

07 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

(I) لتكن الدالة f المعرفة بالعبارة:

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2-3x+2}$$

1) تعيين D_f مجموعة تعريف الدالة f:

لكي تكون الدالة f معرفة يجب أن يكون:

$$x^2-3x+2\neq 0$$
$$(x-1)(x-2)\neq 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x-1\neq 0 \\ \text{و} \\ x-2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ \text{و} \\ x\neq 2 \end{cases}$$

ومنه: $D_f=\mathbb{R}-\{1;2\}$

- تبين أنه من أجل كل x من D_f فإن: $f(x)=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-2}$:

$$f(x)=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-2}$$
$$=\frac{a(x-1)(x-2)+b(x-2)+c(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$
$$=\frac{ax^3+(-3a+b+c)x+(2a-2b-c)}{x^2-3x+2}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a=1 \\ -3a+b+c=2 \\ 2a-2b-c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b+c=5 \\ 2b+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5-c \\ c=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=9 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x)=1-\frac{4}{x-1}+\frac{9}{x-2}$$

2) أ/ دراسة تغيرات الدالة f:

أولا: حساب النهايات:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[1-\frac{4}{x-1}+\frac{9}{x-2}\right]$
$=1$

- $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)]=\lim\limits_{x\to 1}\left[1-\frac{4}{x-1}+\frac{9}{x-2}\right]$
$=\lim\limits_{x\to 1}\left[-8-\frac{4}{0}\right]$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to 2}[f(x)] = \lim_{x\to 2}\left[1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2}\right]$$
$$= \lim_{x\to 2}\left[-3 + \frac{9}{0}\right]$$
$$= +\infty$$

ثانيا: حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{9}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{4(x-2)^2 - 9(x-1)^2}{(x^2-3x+2)^2}$$
$$= \frac{4(x-2)^2 - 9(x-1)^2}{(x^2-3x+2)^2}$$
$$= \frac{-5x^2+2x+7}{(x^2-3x+2)^2}$$
$$= \frac{(x+1)\left(x-\frac{7}{5}\right)}{(x^2-3x+2)^2}$$

لدينا: المقام $(x^2-3x+2)^2 \geq 0$ ومنه الإشارة من البسط:

$$(x+1)\left(x-\frac{7}{5}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \text{و} \\ x-\frac{7}{5}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \text{و} \\ x=\frac{7}{5} \end{cases}$$

ثالثا: جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{7}{5}$		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		0	$+$	$+$		0	$-$	$-$		
$f(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$	↗	-24	↘	$+\infty$	↘	1
					$-\infty$						

ب/ المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f):

- $y = 1$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$
- $x = 1$ مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$
- $x = 2$ مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$

ج/ دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمقارب الأفقي (Δ):

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = 1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2} - 1$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= -\frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2}$$
$$= \frac{-4(x-2)+9(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$
$$= \frac{5x-1}{(x-1)(x-2)}$$

إشارة الكسر من إشارة البسط × إشارة المقام

دراسة إشارة البسط:

$$5x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{5}$$

دراسة إشارة المقام:

$$(x-1)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \text{و} \\ x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{و} \\ x=2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		1		2	$+\infty$
$5x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-3x+2	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)-y$	$-$	0	$-$		$-$		$+$	
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في $x=\frac{1}{5}$		(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

3) تعيين تقريب تآلفي للدالة f عند 0.

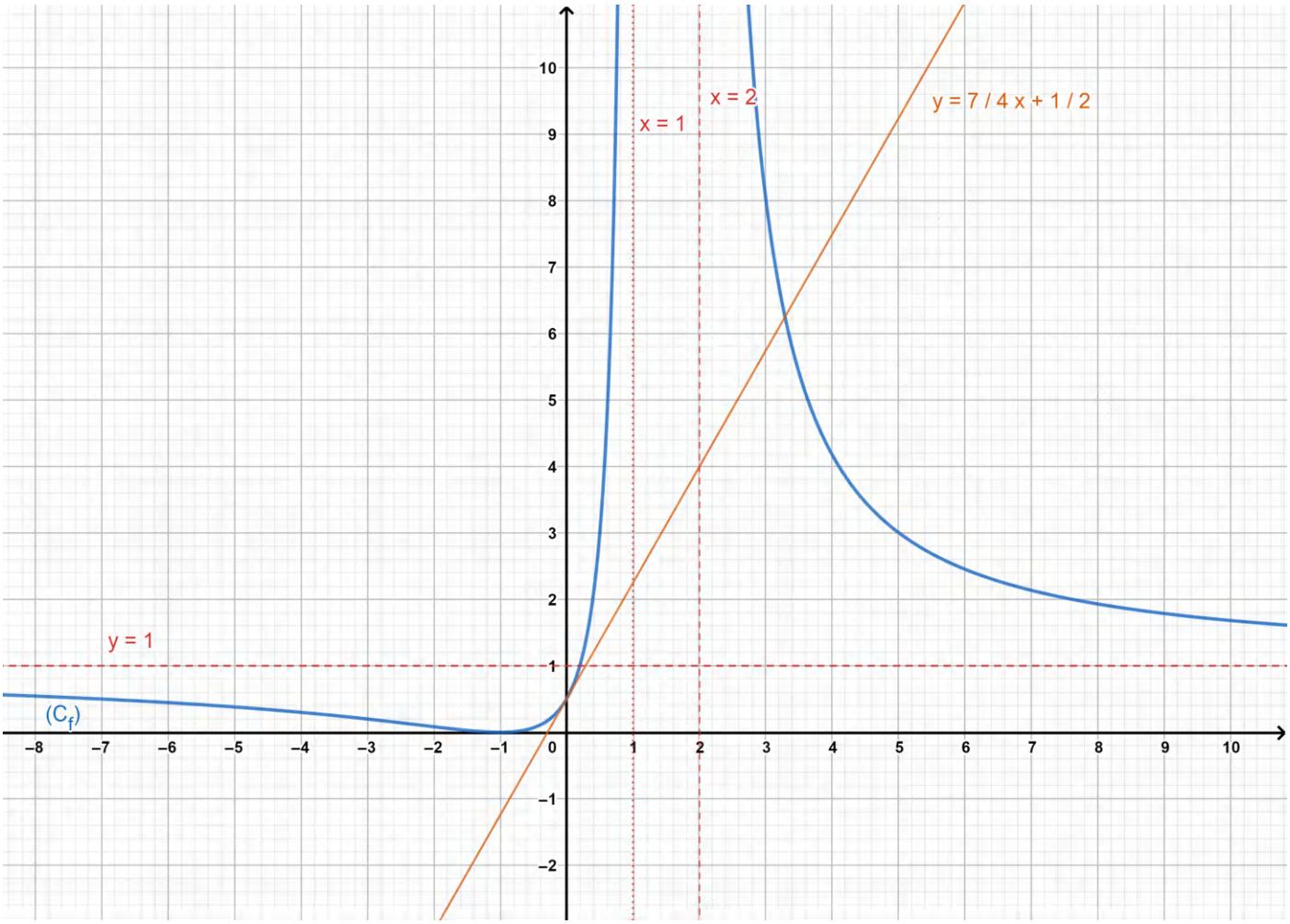
$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$$

4) التمثيل البياني:

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x=3$
- نعين المماس ذو المعادلة $y=\frac{7}{4}x+\frac{1}{2}$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM



(II) نعرف الدالة h كما يلي:

$$h(x)=\frac{x^2+2|x|+1}{x^2-3|x|+2}$$

1) تعيين مجموعة تعريف الدالة h:

لتكون الدالة h معرفة يجب أن يكون:

$$x^2-3|x|+2\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-3x+2\neq 0, x\geq 0 \\ x^2+3x+2\neq 0, x<0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} (x-2)(x-1)\neq 0 \\ (x+2)(x+1)\neq 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq 1 \\ x\neq -2 \\ x\neq -1 \end{cases}$$

ومنه: $D_h=\mathbb{R}-\{-2;-1;1;2\}$

2) كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-3x+2}, x\geq 0 \\ \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2}, x<0 \end{cases}$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لاحظ أنه لما $x \geq 0$ فإنه $h(x) = f(x)$

3) دراسة استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة h عند 0 :

◄ عندما تتساوى النهايتان من اليمين واليسار عند a وكلا النهايتان تساوي $f(a)$، نقول أن الدالة مستمرة عند ذلك العدد ►

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2}\right] = \left[\dfrac{0^2-2(0)+1}{0^2+3(0)+2}\right] = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \left[\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2}\right] = \left[\dfrac{0^2-2(0)+1}{0^2+3(0)+2}\right] = \dfrac{1}{2}$

بما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}[h(x)] = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}[h(x)] = \frac{1}{2}$ فإن: الدالة h مستمرة عند 0.

- قابلية الاشتقاق:

$$\bullet \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\right] = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[\frac{\dfrac{x^2+2|x|+1}{x^2-3|x|+2} - \dfrac{1}{2}}{x}\right]$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[\frac{2x^2+4|x|+2-x^2+3|x|-2}{2x(x^2-3|x|+2)}\right]$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[\frac{x^2+7x}{2x(x^2-3|x|+2)}\right]$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[\frac{x+7}{2(x^2-3|x|+2)}\right]$$
$$= \frac{7}{4}$$

$$\bullet \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \left[\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\right] = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \left[\frac{\dfrac{x^2+2|x|+1}{x^2-3|x|+2} - \dfrac{1}{2}}{x}\right]$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \left[\frac{x^2+7|x|}{2x(x^2-3|x|+2)}\right]$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[\frac{x-7}{2(x^2-3|x|+2)}\right]$$
$$= -\frac{7}{4}$$

بما أن النهايتين غير متساويتين نقول أن: الدالة h غير قابلة للاشتقاق عند 0.

ومنه المنحنى (C_h) يقبل نصفي مماسيين معامل توجيه كل منهما: $\frac{7}{4}$ و $-\frac{7}{4}$

4) دراسة شفعية الدالة h:

◄ شاهد هذا التذكير ►

دراسة شفعية دالة (زوجية / فردية)

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$h(-x) = \frac{(-x)^2 + 2|-x| + 1}{(-x)^2 - 3|-x| + 2}$$
$$= \frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 - 3|x| + 2}$$
$$= h(x)$$

5) استنتاج التمثيل البياني (C_h) للدالة h انطلاقا من (C_f):

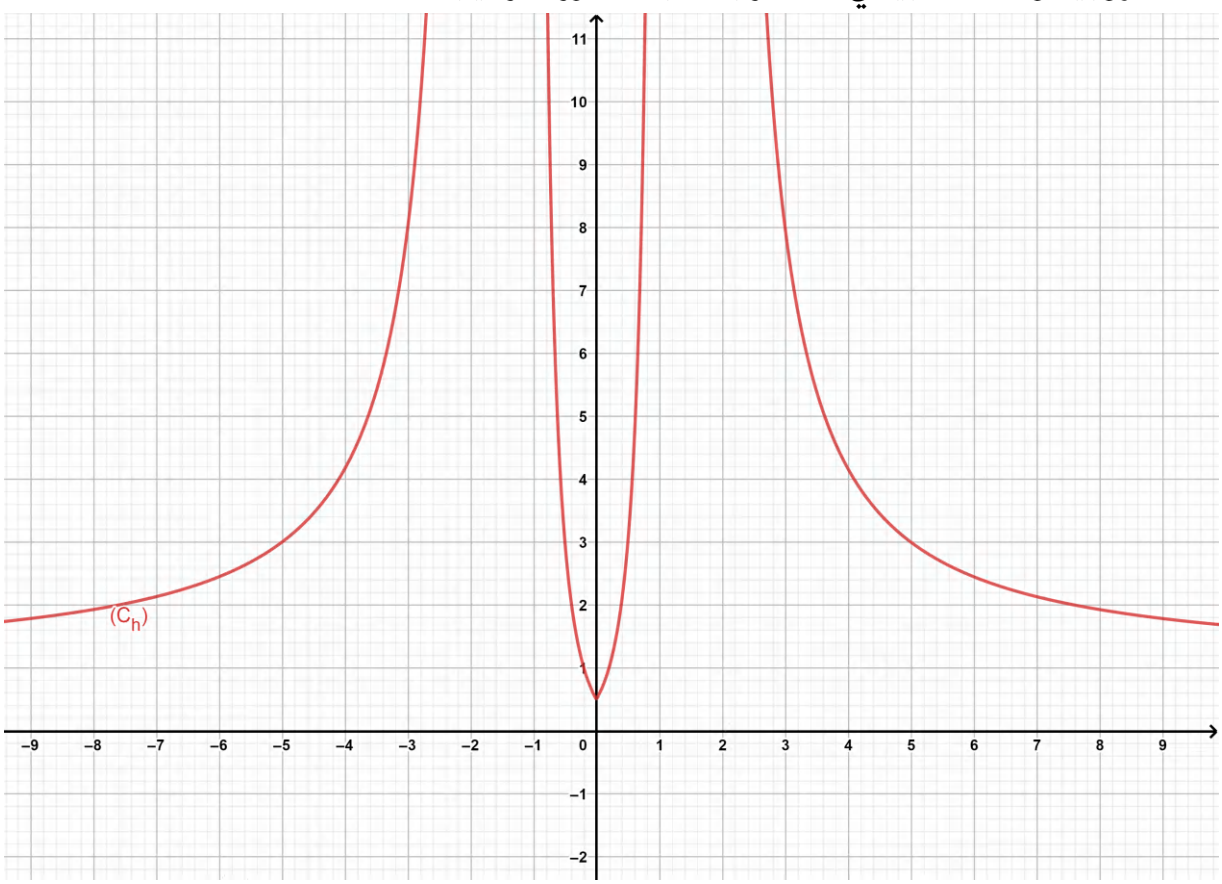
لدينا:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}, x \geq 0 \\ \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}, x < 0 \end{cases}$$

ومنه منحني الدالة h ينطبق على منحني الدالة f لما $x \geq 0$

ولدينا: $h(-x) = h(x)$

ومنه الدالة h زوجية ومنحاها البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب



6) المنافشية البيانية:

لدينا:

$$(m-1)x^2 - (3m+2)x + 2m - 1 = 0$$
$$\Rightarrow mx^2 - x^2 - 3mx - 2x + 2m - 1 = 0$$
$$\Rightarrow m(x^2 - 3x + 2) = x^2 + 2x + 1$$
$$\Rightarrow m = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$\Rightarrow m = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

ومنه: $m = h(x)$ لما: $x \geq 0$

إذن المناقشة كالآتي:

لما:	$m < \frac{1}{5}$	المعادلة لا تقبل حلول
لما:	$m = \frac{1}{5}$	المعادلة تقبل حلا مضاعفا
لما:	$1 \geq m > \frac{1}{5}$	المعادلة تقبل حلا وحيدا
لما:	$m > 1$	المعادلة تقبل حلان

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

08 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

1) برهان أن G تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$:

G مجموع دالتين قابلتين للاتشقاق على $\mathbb{R}$ إذن G قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

- حساب $G'(x)$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(x) - F'(-x) \\ &= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(-x)^2+1} \\ &= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه الدالة G ثابتة.

2)

- حساب $G(0)$:

$$G(0) = F(0) - F(-0) = 0$$

- استنتاج أن G فردية:

بما أن الدالة G ثابتة، اذن من كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$F(x) + F(-x) = 0 \Leftrightarrow F(-x) = -F(x)$$

ومنه الدالة F فردية

(III)

1)

تبرير أنّ H تقبل الاشتقاق على I وحساب $H'(x)$:

H مجموع دالتين قابلتين للاتشقاق على $\mathbb{R}_+^*$ إذن H قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} H'(x) &= F'(x) + \left[F\left(\frac{1}{x}\right)\right]' \\ &= F'(x) - \frac{1}{x^2}F'(x) \\ &= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1} \\ &= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \end{aligned}$$

ومنه الدالة H ثابتة.

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2) برهان أنه من أجل كل $x \in I$ ، $H(x) = 2F(1)$:

$$H(1) = F(1) + F\left(\frac{1}{1}\right) = 2F(1)$$

وبما أن الدالة H ثابتة فإنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}_+^*$ فإنه:

$$H(x) = 2F(1)$$

3) استنتاج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[F(x)] = 2F(1)$:

لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}[H(x)] &= \lim_{x\to+\infty}\left[F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty}[F(x)] + F(0)\\ &= \lim_{x\to+\infty}[F(x)]\end{aligned}$$

ومنه:

$$2F(1) = \lim_{x\to+\infty}[F(x)]$$

الاستنتاج: (C_f) يقبل مقارب بجوار $+\infty$ معادلته: $y = 2F(1)$

وبما أن F فردية فإن (C_f) يقبل مقارب بجوار $-\infty$ معادلته: $y = 2F(1)$

(IV) T الدالة المعرفة على $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ بِـ: $T(x) = F(\tan x) - x$

1) حساب $T'(x)$:

$$\begin{aligned}T'(x) &= [F(\tan x) - x]'\\ &= (\tan x)'F'(\tan x) - 1\\ &= (1+\tan^2 x)\left(\frac{1}{\tan^2 x + 1}\right) - 1\\ &= 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

ومنه T دالة ثابتة.

2) حساب $F(1)$:

لدينا: $0 \in]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ ومنه $0 \in D_T$ أي:

$$\begin{aligned}T(0) &= F(\tan 0) - 0\\ &= F(0) - 0\\ &= 0 - 0 = 0\end{aligned}$$

وبما أن T ثابتة فإنه من أجل كل $x \in D_T$ فإنه $T(x) = 0$

إذن

$$\begin{aligned}F(\tan x) &= T(x) + x\\ &= 0 + x\\ &= x\end{aligned}$$

ولدينا من جهة أخرى: $F(\tan x) = F(1)$ أي $\tan x = 1$

وهذا يكافئ: $x = \frac{\pi}{4}$ لأن: $x \in]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

إذن :

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$F(1) = F\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

(V)

1) انجاز جدول تغيرات الدالة F على $\mathbb{R}$:

لدينا الدالة F' موجبة تماما ومنه الدالة F متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[F(x)] = 2F(1)$ و $F(1) = \frac{\pi}{4}$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}[F(x)] = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

وبما أن الدالة F فردية فإن:

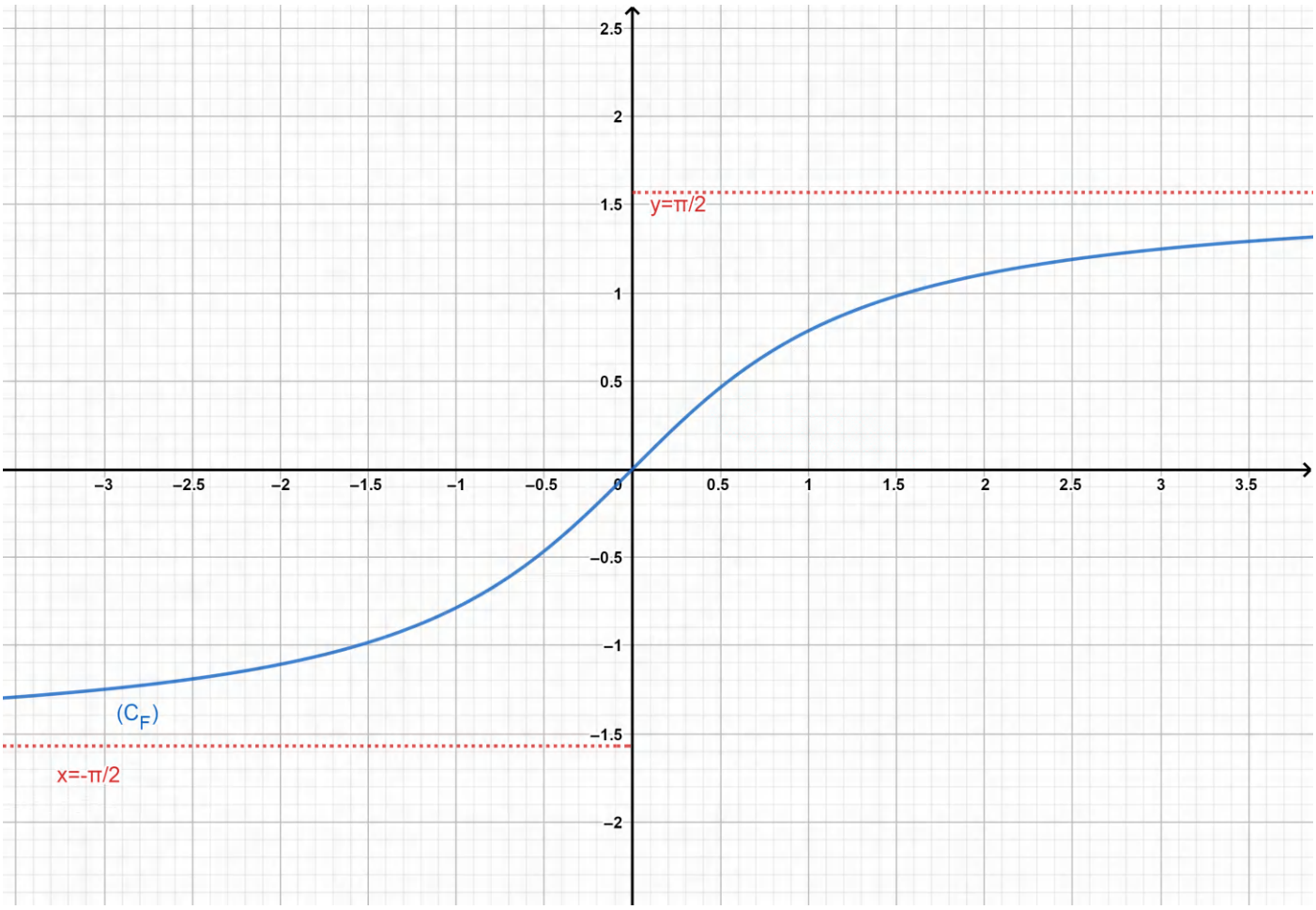
$$\lim_{x\to-\infty}[F(x)] = -\frac{\pi}{2}$$

ومنه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$F'(x)$		$+$	
$F(x)$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

2) رسم المنحنى (C_f) والمستقيمات المقاربة:

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM



قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

09 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) أ/ حساب النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[x^3-3x^2+3x-5]$
$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)\right]$
$= -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}[x^3-3x^2+3x-5]$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)\right]$
$= -\infty$

ب/ دراسة تغيرات الدالة g:

أولا: حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 3x^2-6x+3$$

معادلة من الدرجة الثانية لحلها نستعمل المميز Δ

$$\Delta = (-6)^2-4(3)(3)$$
$$= 0$$

ومنه المعادلة لها حل مضاعف هو:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{6} = 1$$

ومنه:

$$g'(x) = 3x^2-6x+3$$
$$= 3(x-1)^2$$

لدينا $g'(x) \geq 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما.

ولدينا $g'(1) = 0$ ، ومنه الدالة g تنعدم ولا تغير اشارتها.

ثانيا: جدول التغيرات:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

2) أ/ تبيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α:

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة على مجال تعريفها ،

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)]=+\infty$ و $g(2)=-3$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)]\times g(2)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]2;+\infty[$.

ب/ حصر العدد α:

α	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.7	2.8	...	$+\infty$
$g(\alpha)$	-3	-2.6	-2.2	-1.8	-1.2	-0.6	0.1	1.8	...	$+\infty$

من الجدول نلاحظ أن: $2.5<\alpha<2.7$

ج/ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1) تعيين نهايات الدالة f:

$$\bullet\ \lim_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-3x^2+3x+1}{(x-1)^2}\right]$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right]$$
$$=\lim_{x\to-\infty}[x]$$
$$=-\infty$$

$$\bullet\ \lim_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3-3x^2+3x+1}{(x-1)^2}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}[x]$$
$$=+\infty$$

$$\bullet\ \lim_{x\to1}[f(x)]=\lim_{x\to1}\left[\frac{x^3-3x^2+3x+1}{(x-1)^2}\right]$$
$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{2}{0^+}\right]$$
$$=+\infty$$

2) تحديد الأعداد الحقيقية a,b,c:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{(ax+b)(x-1)^2+c}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{ax^3+x^2(-2a+b)+x(a-2b)+b+c}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد:

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$\begin{cases} a=1 \\ -2a+b=-3 \\ a-2b=3 \\ b+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x)=x-1+\frac{2}{(x-1)^2}$$

3) أ- تبيين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (d):

ليكن: $y=x-1$

لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-y] &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[x-1+\frac{2}{(x-1)^2}-(x-1)\right] \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2}{(x-1)^2}\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

ومنه المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

ب- دراسة الوضع النسبي للمستقيم (d) والمنحني (C_f):

دراسة إشارة الفرق: $f(x)-y$:

$$f(x)-y=\frac{2}{(x-1)^2}>0$$

ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$		$+$
الوضعية	(d) فوق (C_f)		(d) فوق (C_f)

4) أ- دراسة تغيرات الدالة f:

أولا: حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1-\frac{4}{(x-1)^3} \\ &= \frac{(x-1)^3-4}{(x-1)^3} \\ &= \frac{g(x)}{(x-1)^3}\end{aligned}$$

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط في المقام

ثانيا: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	α	$-\infty$
$g(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)^3$	$-$	$+$		$+$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$f'(x)$	$+$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	$+\infty$ ↘ $f(\alpha)$		↗ $+\infty$

ب- تبيين أنّ (C_f) يقطع مرة وحيدة محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة β :

لدينا: $f(-1) = -1.5$ و $f(0) = 1$

ولدينا $f(-1) \times f(0) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث: $-1 \leq \beta \leq 0$

ج- تبيين أن $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$:

يكفي أن نثبت أن: $f(\alpha) - \frac{6}{(\alpha-1)^2} = 0$:

لدينا سابقا: $g(\alpha) = 0$ ، إذن:

$$\begin{aligned} f(\alpha) - \frac{6}{(\alpha-1)^2} &= \alpha - 1 + \frac{2}{(\alpha-1)^2} - \frac{6}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{(\alpha-1)(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2} + \frac{2}{(\alpha-1)^2} - \frac{6}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 5}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{g(\alpha)}{(\alpha-1)^2} = \frac{0}{(\alpha-1)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$\begin{gathered} 2.5 < \alpha < 2.7 \\ 1.5 < \alpha - 1 < 1.7 \\ 2.25 < (\alpha-1)^2 < 2.89 \\ \frac{1}{2.89} < \frac{1}{(\alpha-1)^2} < \frac{1}{2.25} \\ \frac{6}{2.89} < \frac{6}{(\alpha-1)^2} < \frac{6}{2.25} \\ 2.07 < f(\alpha) < 2.66 \end{gathered}$$

5) إنشاء (C_f):

حساب $f(0)$:

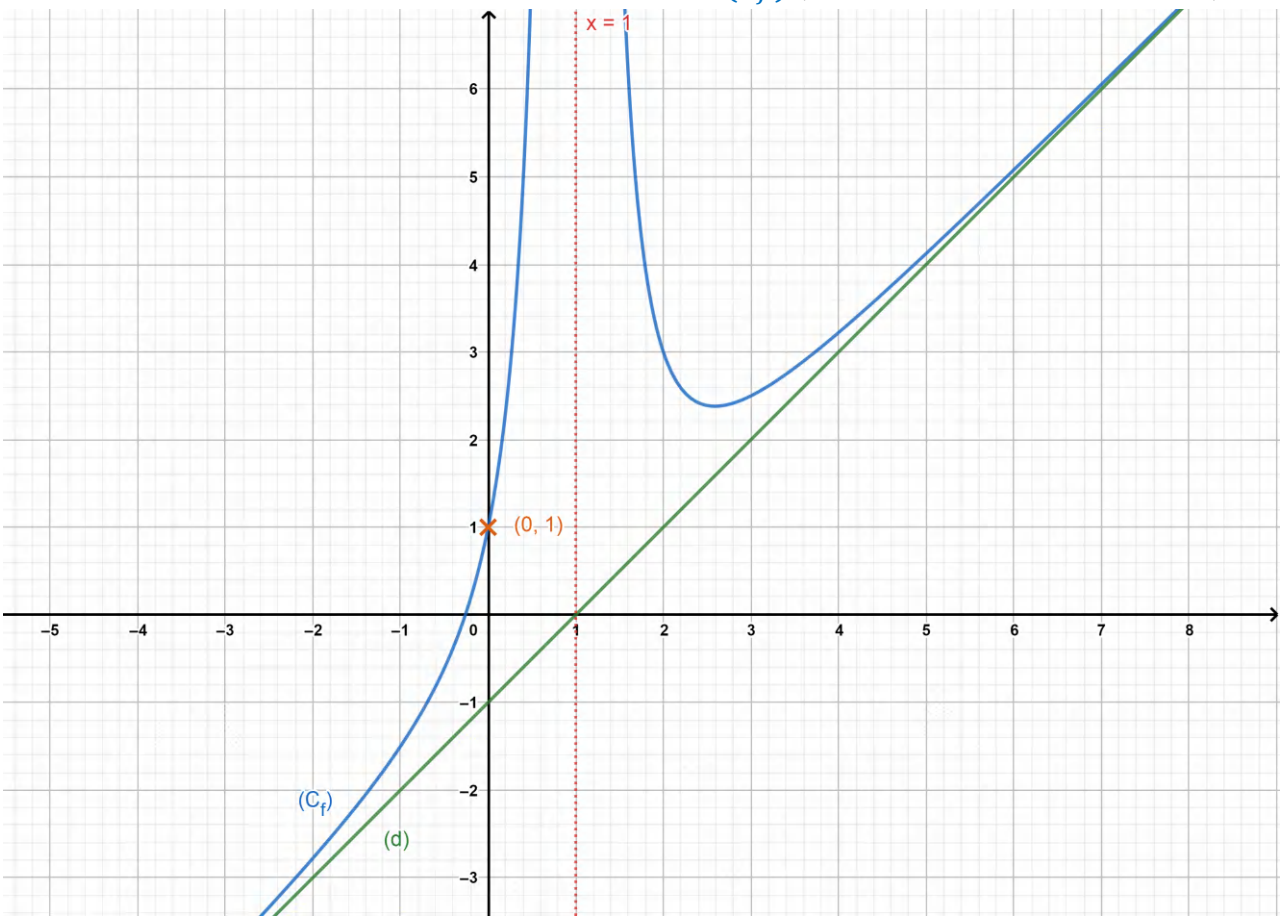
$$f(0) = 0 - 1 + \frac{2}{(0-1)^2} = 1$$

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 1$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

- نرسم المستقيم المقارب المائل (d) ذو المعادلة $y = x - 1$
- نعين نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع (yy')
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



6) أ- تبين أن h زوجية:

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(|-x|) \\ &= f(|x|) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

ومنه الدالة h زوجية.

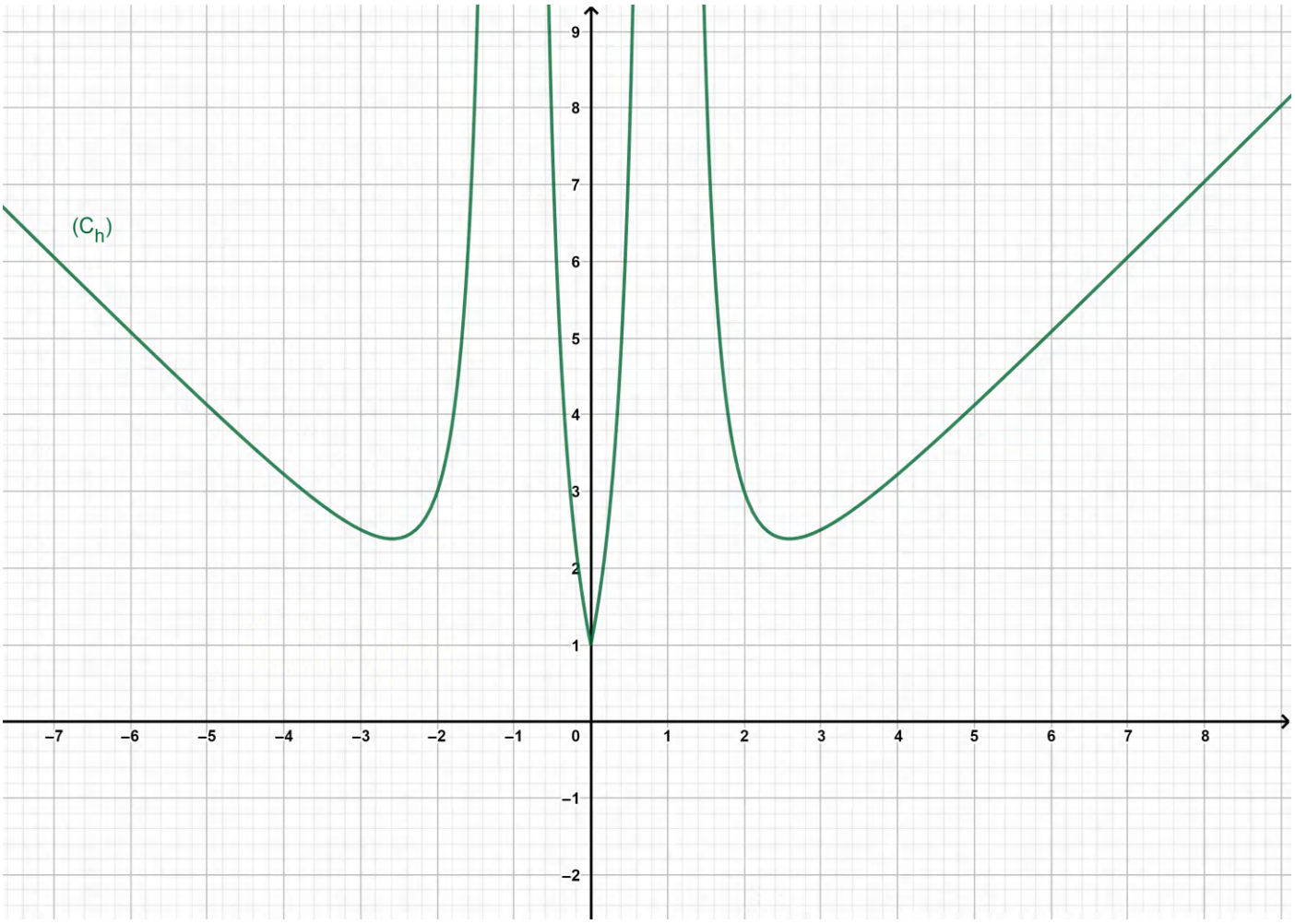
ب/ انشاء (C_h):

لدينا: $f(|x|) = h(x)$

ومنه لما $x \geq 0$، يكون (C_h) منطبقا على (C_f)

ولما: $x \leq 0$، يكون (C_h) متناظر مع (C_f) بالنسبة إلى محور التراتيب (yy')

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM



ج- المناقشة البيانية:

أولا: $f(x) = m$:

لما $m < 1$ المعادلة تقبل حل وحيد سالب

لما $m = 1$ المعادلة تقبل حل وحيد معدوم

لما $1 < m < f(\alpha)$ المعادلة تقبل حل وحيد موجب

لما $m = f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين موجبين أحدهما: $x = \alpha$

لما $m > f(\alpha)$ المعادلة تقبل ثلاث حلول موجبة

ثانيا: $f(x) = x + m$:

لما $m \leq -1$ المعادلة لا تقبل حلول

لما $-1 < m < 1$ المعادلة تقبل حلان مختلفان في الإشارة

لما $m = 1$ المعادلة تقبل حلان هما: $x = 2$، $x = 0$

لما $m > 1$ المعادلة تقبل حلان موجبان متمايزان

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

10 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g:

- أولا: حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[2x-\sqrt{1+x^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[2x-\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[2x+x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[x\left(2+\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right)\right]$$
$$= -\infty$$

بنفس الطريقة نجد أن:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[g(x)] = +\infty$$

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 2-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$
$$= \frac{2\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}}$$

لدينا: $\sqrt{1+x^2} \geq 0$ ومنه الإشارة من إشارة البسط:

لما: $x \geq 0$: لدينا:

$$2\sqrt{1+x^2}-x = \frac{\left(2\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(2\sqrt{1+x^2}+x\right)}{2\sqrt{1+x^2}+x}$$
$$= \frac{4(1+x^2)-x^2}{2\sqrt{1+x^2}+x}$$
$$= \frac{3x^2+1}{2\sqrt{1+x^2}+x} > 0$$

لما: $x \leq 0$: واضح أن $2\sqrt{1+x^2}-x > 0$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ومنه $g'(x) > 0$ أي أن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2) تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α:

بما أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)] = -\infty$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] \times \lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)] < 0$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

- تعيين α:

لدينا: $g(x) = 0$ أي:

$$\begin{aligned} 2x - \sqrt{1+x^2} = 0 &\Rightarrow 2x = \sqrt{1+x^2} \\ &\Rightarrow 4x^2 = 1 + x^2 \\ &\Rightarrow 3x^2 = 1 \\ &\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \dots (\text{مرفوض}) \end{cases}$$

x_2 مرفوض لأن $x \geq 0$.

ومنه $\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$

3) استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1) أ- حساب نهايات الدالة f:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[2\sqrt{1+x^2} - x\right]$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[2\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} - x\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-2x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} - x\right]$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-x\left(2\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}+1\right)\right] = +\infty$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{1+x^2}-x\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}-x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[2x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}-x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(2\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}-1\right)\right] = +\infty$$

ب- حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = 2\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - 1$$

$$= \frac{2x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

لدينا: $\sqrt{1+x^2} \geq 0$ ومنه إشارة المشتقة من إشارة $g(x)$.

ج- جدول تغيرات الدالة f:

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة الدالة $g(x)$ ومنه:

x	$-\infty$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$	↗ $+\infty$

2) حساب: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+3x]$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+3x] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[2\sqrt{1+x^2}-x+3x\right]$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[2\sqrt{1+x^2}+2x\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\left(2\sqrt{1+x^2}+2x\right)\left(2\sqrt{1+x^2}-2x\right)}{2\sqrt{1+x^2}-2x}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{4(x^2+1)-4x^2}{2\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{4}{2\sqrt{1+x^2}-x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}-x}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-x}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-x}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{-x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right)}\right]=0$$

ومنه المستقيم (d) ذو المعادلة $y=-3x$ مقارب مائل بجوار $-\infty$

3) أ- تبيين أن (d') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{1+x^2}-x-x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{1+x^2}-2x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(2\sqrt{1+x^2}-2x\right)\left(2\sqrt{1+x^2}+2x\right)}{2\sqrt{1+x^2}+2x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4(x^2+1)-4x^2}{2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4}{2\sqrt{1+x^2}+x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}+x}\right]$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+x}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right)}\right] = 0$$

ومنه المستقيم (d') ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$

ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) :

بما أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = -3x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

ندرس إشارة الفرق $f(x) - (-3x)$ لما $x < 0$

$$f(x) - (-3x) = 2\sqrt{1+x^2} - x + 3x$$
$$= \frac{2}{-x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right)}$$

لما $x < 0$:

لدينا: $\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right) > 0$ و $(-x) > 0$

ومنه: إشارة الفرق موجبة

اذن: المنحني (C_f) فوق (d).

- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (d') :

بما أن المستقيم (d') ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$ لما $x > 0$

$$f(x) - (-3x) = 2\sqrt{1+x^2} - x - x$$
$$= \frac{2}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right)}$$

لما $x > 0$:

لدينا: $\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right) > 0$ و $x > 0$

ومنه: إشارة الفرق موجبة

اذن: المنحني (C_f) فوق (d').

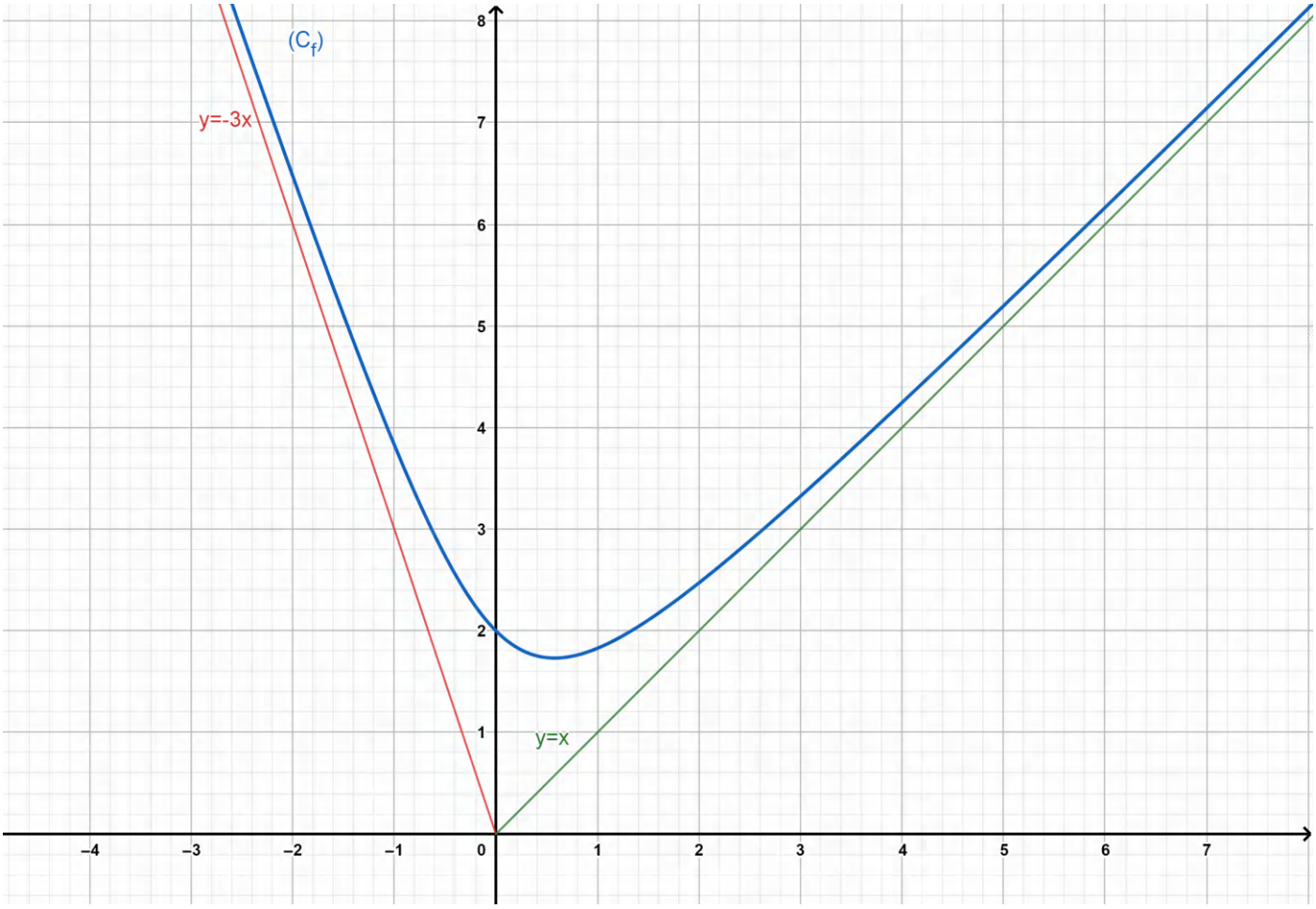
4) إنشاء المنحني (C_f):

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة المائلة: (d) و (d')

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4

الدوال الأسية

المسائل الشاملة

الخليل للرياضيات

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

01 المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x - e^{-x}$$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) أ/ بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث: $0.5 < \alpha < 0.6$.

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x+1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$.

2) أ/ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب/ عيّن دون حساب: $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$ فسر النتيجة هندسيا.

3) شكل جدول تغيرات الدالة f.

4) بين أن $f(x) = x$ إذا وفقط إذا كان $g(x) = 0$ ، ثم استنتج قيمة $f(\alpha)$.

5) مثل بيانيا (C_f) .

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = |f(x)|$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1) اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

2) انطلاقا من (C_f) ، مثل بيانيا (C_h)

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

02 المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

(I) نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x)]$ و $\lim\limits_{x \to -\infty}[f(x)]$.

2) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$$

3) أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ عيّن $f''(\ln 3)$ دون حساب عبارة $f''(x)$ – برر اجابتك.

4) أ/ بيّن أنّ المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$.

ب/ بيّن أنّ المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

5) ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .

6) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

7) بيّن أن النقطة $A(\ln 3\,;\, \ln 3)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .

8) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-2; -1[$ ، ثم عين حصرا للعدد α سعته 10^{-2} .

9) مثّل بيانيا كلا من: (Δ_1) ، (Δ_1) ،

10) ناقش بيانيا حسب القيم الوسيط الحقيقي غير المعدوم m المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية:

$$f(-|x|) = \ln(|m|)x + 2$$

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = f(3x - 2)$$

(عبارة $g(x)$ غير مطلوبة).

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) تحقق من أنّ:

$$g\left(\frac{\alpha + 2}{3}\right) = 0$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ثم بيّن أنّ:

$$g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)=3f'(\alpha)$$

3) استنتج معادلة المماس (d) لمنحني الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{3}$.

4) تحقق من أن معادلة المستقيم (d) تعطى بـ:

$$y=\frac{3\alpha^2}{4}x-\frac{\alpha^2(\alpha+2)}{4}$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

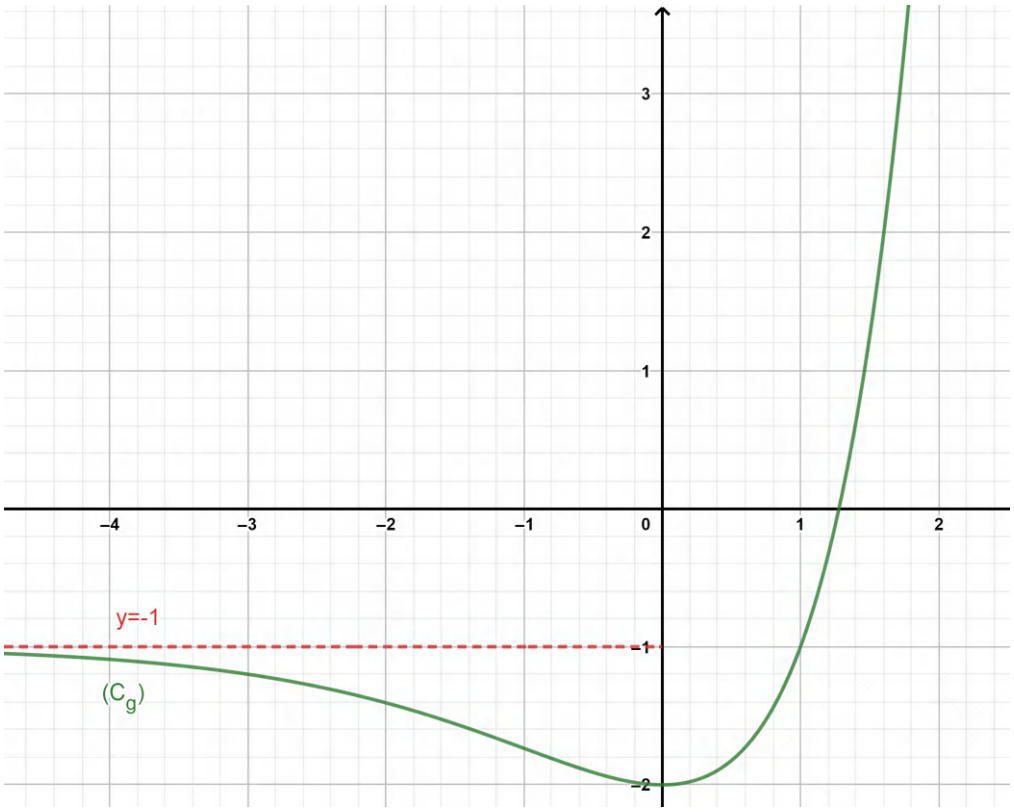
03 المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

(I) a ، b و c أعداد حقيقة، نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = (ax + b)e^x + c$$

ونسمي (C_g) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$. كما في الشكل أدناه:



1) بقراءة بيانية، أوجد ما يلي:

أ/ $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)]$.

ب/ $g(0)$ و $g'(0)$.

2) مما سبق أوجد a ، b و c.

3) نضع: $g(x) = (x-1)e^x - 1$.

أ/ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق من أن: $1.2 < \alpha < 1.3$.

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستو السابق.

1) أ/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$ ثم فسّر النتيجة هندسيا .

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$.

2) أ/ بيّن أنّه من اجل كل x حقيقي:

$$f'(x)=-\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3) عيّن دون حساب:

$$\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$$

ثم فسّر النتيجة هندسيا.

4) بيّن أنّ المنحني (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يمر من المبدأ، يُطلب كتابة معادلة له.

5) بيّن أنّ $f(\alpha)=\alpha-1$ ، ثم اوجد حصرا لـ $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-2} .

6) أ/ بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

7) مثّل بيانيا المماس (T) والمستقيم (Δ) ثم المنحني (C_f) .

8) m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

04 المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ/ بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

ب/ ادرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) برهن أنّ النقطة $A(0; 1)$ مركز تناظر المنحني (C_f) .

3) أ/ بيّن أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x]$ ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

4) بيّن أنّ المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث:

$-2.77 < \alpha < -2.76$.

5) مثّل بيانيا (C_f) .

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = f(4x + 1)$$

(عبارة g غير مطلوبة).

1) ما هو اتجاه تغير الدالة g .

2) تحقق من أنّ:

$$g\left(\frac{\alpha - 1}{4}\right) = 0$$

ثم بيّن أن:

$$g'\left(\frac{\alpha - 1}{4}\right) = 4f'(\alpha)$$

3) استنتج معادلة المماس (T) لمنحني الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha - 1}{4}$.

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4) تحقق من أن معادلة المماس (T) تعطى بـ:

$$y = (1+\alpha)^2 x - \frac{(1+\alpha)(\alpha^2-1)}{4}$$

(III) نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$k(x) = f(|x|)$$

ونسمي (C_k) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$

1) بيّن أن الدالة k زوجية .

2) أ/ بيّن كيف تمثيل (C_k) انطلاقا من (C_f) .

ب/ انطلاقا من (C_f) ، مثل بيانيا (C_k) .

(IV) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = x + \frac{4}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) تحقق من أنه كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) + 1$.

2) أ/ استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه.

ب/ انطلاقا من (C_f) ، مثل بيانيا (C_h)

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

05 المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x + 2 - e^x$$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلان α و β حيث: $1.14 < \alpha < 1.15$ و $-1.9 < \beta < -1.8$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x)]$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)]$. ثم فسر ذلك هندسيا.

2) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$$

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4) عيّن دون حساب كل من : $\lim\limits_{x \to \alpha} \left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$ وَ $\lim\limits_{x \to \beta} \left[\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\right]$

ثم فسّر النتيجتين هندسيا.

5) بيّن أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$ ، ثم أوجد حصرا لـ $f(\alpha)$ سعته 10^{-1} .

6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = e^x - xe^x - 1$$

- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) \leq 0$.

7) نضع من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$p(x) = (x^2 + 1)e^{2x} + xe^x - 2e^x + 1$$

- تحقق من أنّ: $p(0) = 0$.

8) أ/ بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 5$.

ب/ اكتب معادلة للمماس (T) .

ج/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T) ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

9) نأخذ: $f(\beta) \cong -1.195$.

مثّل بيانيا المستقيم (T) والمنحني (C_f) .

10) m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية:

$$e^x(1 - mx^2) + mx - 1 = 0$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

06 المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1) ادرس تغيرات الدالة f' .

2) احسب $f'(1)$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

3) ادرس تغيرات الدالة f .

4) أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

5) أ/ بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيين إحداثييها.

ب/ بين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β حيث:

$1.9 < \alpha < 2$ و $-0.5 < \beta < -0.6$.

6) مثل بيانيا: (Δ) ، (T) و المنحني (C_f) .

7) نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي x والوسيط الحقيقي الموجب تماما m التالية:

$$f(x) = 2x + \ln m \ldots (E)$$

- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) .

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

07 المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = (2x+1)e^x - 1$$

1) ادرس تغيرات الدالة g' :

2) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = x(e^x - 1)^2$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحي (C_f) عند $-\infty$.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) .

3) أ/ بيّن أنه يوجد من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f'(x) = (e^x - 1)g(x)$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4) اكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C_f) عند المبدأ.

5) مثّل بيانيا كلا من (T) ، (Δ) و (C_f) .

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x :

$$(E): f(x) = mx$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

08 المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

نعرف الدالة f على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ/ بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$$

ب/ استنتج أن الدالة f فردية.

2) احسب نهايات الدالة f عند أطرف مجموعة تعريفها.

3) أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

ثم ادرس إشارة $f'(x)$.

ب/ ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) أ/ بين أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) + \frac{1}{2}x - 1\right] 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) + \frac{1}{2}x + 1\right]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

5) ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (d) ذو المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

6) مثل بيانيا (C_f) .

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

09 المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

نعتبر الدالة f المعرفة $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = -\infty$.

2) أ/ بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + \frac{5}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

ب/ حل المعادلة : $e^{x-2} - 4 = 0$ ، ثم بيّن أنّ المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty; 2 + \ln 4]$ وتحته على المجال $[2 + \ln 4 ; +\infty[$

3) أ/ بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$$

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) احسب $f''(x)$ ، ثم بين أن $A(2; 2)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f) .

5) اثبت أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$.

6) مثّل بيانيا (Δ) والمنحني (C_f) .

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

المسألة الشاملة رقم: 10

مشاهـــدة الحـــل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = e^x + x + 2$$

1) ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) أ/ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ـ ثم تحقق أن $-2.2 < \alpha < -2.1$

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{1 - xe^x}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ/ احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{e^{-x} - x}{e^{-x} + 1}$$

ثم احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)]$.

2) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{-g(x)e^x}{(e^x + 1)^2}$$

3) ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4) أ/ بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (C_f) .

ب/ ادرس الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f) .

5) أ/ بيّن أن: $f(\alpha) = -(\alpha + 1)$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

ب/ بيّن أنّ المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث: $0.5 < \beta < 0.6$.

6) مثّل بيانيا المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) .

7) ليكن m عدد حقيقي موجب تماما، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد واشارة حلول المعادلة:

$$1 - (x + \ln x)e^x - \ln m = 0$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

المسألة الشاملة رقم: 11

مشاهـــدة الحـــل

(I) لتكن g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ وتحقق العلاقة:

$$g(x) - 2g(1-x) = e^x - 2e^{1-x} - 3x + 3$$

1) أوجد عبارة $g(x)$ بدلالة x . (ارشاد: ضع $t = x$ تارة و $t = 1 - x$ تارة أخرى)

2) نضع: $g(x) = e^x - x - 1$ حيث: $D_g = \mathbb{R}$

أ/ احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) استنتج اتجاه تغير الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$h(x) = 1 - g(-x)$$

4) اثبت أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث:

$$-1.15 < \alpha < -1.14 \quad \text{وَ} \quad 1.84 < \beta < 1.85$$

5) استنتج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x .

(II) لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x + g(x)}{1 + g(x)}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) أ/ اثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن:

$$f'(x) = \frac{e^x h(x)}{\left(1 + g(x)\right)^2}$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) مثل بيانيا (C_f) .

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

المسألة الشاملة رقم: 12

مشاهـــدة الحـــل

لتكن الدالة f بـ:

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين مجوعة تعريف الدالة f .

2) أ/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$. ثم فسر النتيجة هندسيا .

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x)=\frac{1}{e^{-x}+1}$$

ج/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[x]$. ثم فسر النتيجة هندسيا .

3) اثبت أن الدالة f متزايدة تماما على مجال تعريفها .

4) بين أن النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر المنحني (C_f)

5) عين معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة A .

6) نعتبر الدالة g المعرفة على D_f كما يلي:

$$g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)$$

أ/ حلل العبارة: $e^{2x}-2e^x+1$.

ب/ احسب $g'(x)$ و $g(0)$ ثم ادرس تغيرات الدالة g

ج/ استنتج الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (T) .

7) مثل بيانيا (T) و (C_f) .

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4

الدوال الأسية

حُلول المسائل الشاملة

الخليل للرياضيات

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

01 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[x-e^{-x}] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^{-x}\left(\frac{x}{e^{-x}}-1\right)\right] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}[x-e^{-x}] = +\infty$

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 1 + e^{-x}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه:

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2) أ- تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث: $0.5 < \alpha < 0.6$:

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة على $\mathbb{R}$

ولدينا $g(0.6) = 0.05$ و $g(0.5) = -0.1$ ولدينا $g(0.6) \times g(0.5) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α

ب- استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1) حساب النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x+1}{e^x+1}\right] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x+1}{e^x+1}\right]$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}\right]$$
$$= 0$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right] = 0$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 0$

2) أ- حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{e^x + 1 - e^x(x+1)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x + 1 - xe^x - e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x + 1 - xe^x - e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-e^x\,(-e^{-x} + x)}{(e^x+1)^2}$$
$$\frac{-e^x\, g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب- تعيين دون حساب قيمة $\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$:

لدينا مما سبق $g(\alpha) = 0$ ومنه :

$$\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right] = f'(\alpha)$$
$$= \frac{-e^\alpha g(\alpha)}{(e^\alpha+1)^2}$$
$$= 0$$

- تفسير الهندسي:

منحني الدالة f يقبل مماس في النقطة ذات الفاصلة α موازٍ لحامل محور الفواصل معادلته هي:

$$y = f(\alpha)$$

3) جدول تغيرات الدالة f :

لدينا:

$$f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$$

لدينا المقام موجب تماما ومنه الإشارة من إشارة البسط

- جدول التغيرات:

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لدينا $f(-1)=0$ ومنه:

x	$-\infty$	-1	α	$+\infty$
$-e^x$	$-$	$-$	$-$	
$g(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$f(\alpha)$ ↘	0

4) تبيين أن المعادلة $f(x)=x$ إذا وفقط إذا كان $g(x)=0$:

لتبيين أن $f(x)=x$

يكفي أن نثبت أن: $f(x)-x=0$

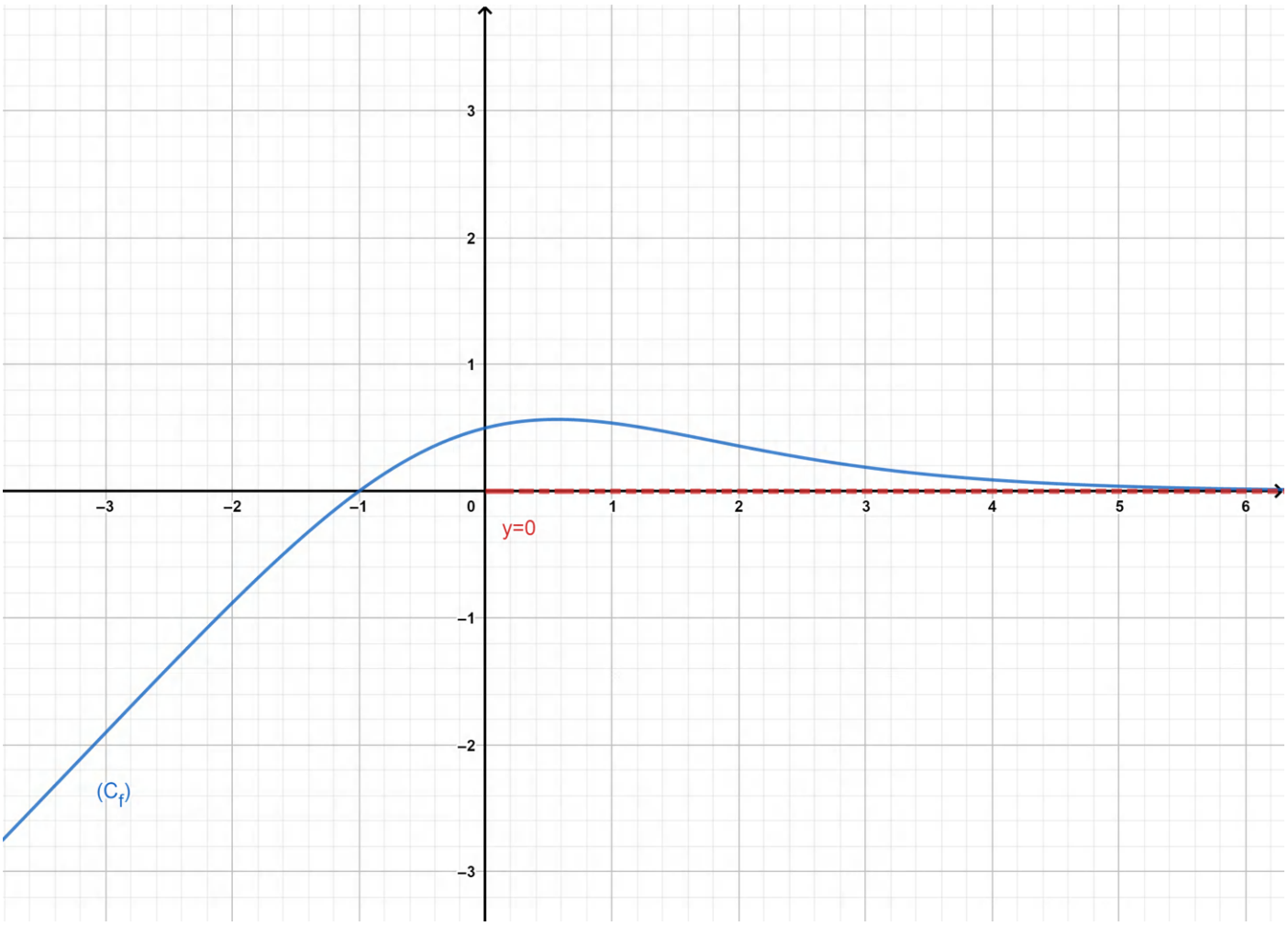
$$\begin{aligned} f(x)-x &= \frac{x+1}{e^x+1}-x \\ &= \frac{x+1-xe^x-x}{e^x+1} \\ &= \frac{1-xe^x}{e^x+1} \\ &= \frac{e^x(e^{-x}-x)}{e^x+1} \\ &= \frac{-e^x(x-e^{-x})}{e^x+1} \\ &= \frac{-e^x g(x)}{e^x+1} \\ &= \frac{0}{e^x+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

استنتاج قيمة $f(\alpha)$:

لدينا $f(x)=x$ ومنه $f(\alpha)=\alpha$

5) التمثيل البياني:

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM



(III)

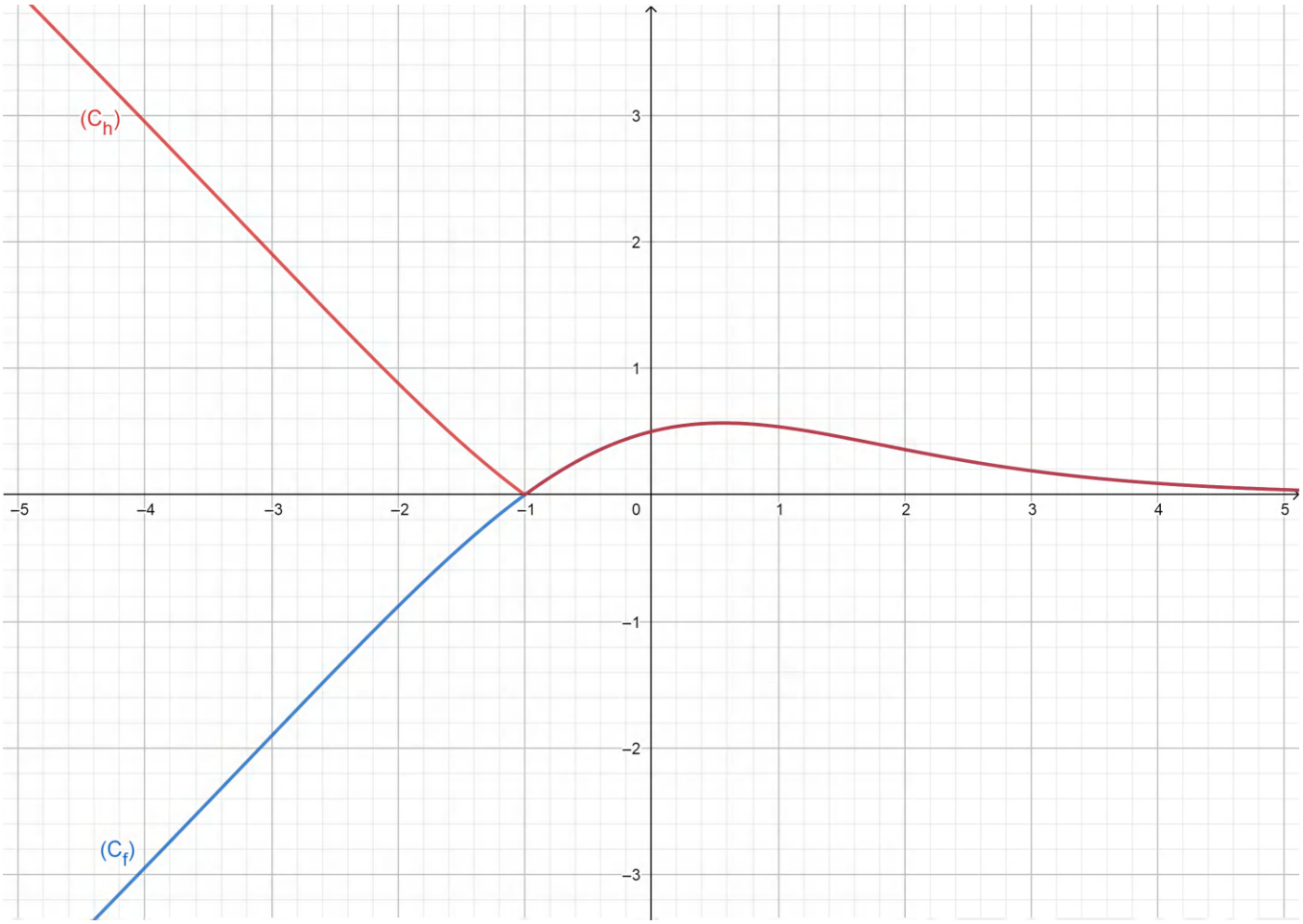
1) كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$h(x) = |f(x)|$$
$$= \left|\frac{x+1}{e^x+1}\right|$$
$$= \frac{|x+1|}{e^x+1}$$
$$= \begin{cases} \frac{x+1}{e^x+1}; x \geq -1 \\ \frac{-x-1}{e^x+1}; x \leq -1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f(x); x \geq -1 \\ -f(x); x \leq -1 \end{cases}$$

2) تمثيل (C_h) :

(C_h) ينطبق على (C_f) لما $f(x) \geq 0$ ويناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx') إذا كان $f(x) \leq 0$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM



قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

02 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) حساب النهايات :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}\right] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{xe^x-2e^x+3x+6}{e^x+3}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x\left(x-2+\frac{3x+6}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{3}{e^x}\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-2+\frac{3x+6}{e^x}}{1+\frac{3}{e^x}}\right] = +\infty$$

2) تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x) = \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$:

$$f'(x) = 1-\frac{4e^x(e^x+3)-e^x(4e^x)}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{(e^x+3)^2+12e^x}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}-6e^x+9}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}-6e^x+9}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{(e^x-3)^2}{(e^x+3)^2}$$

$$= \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$$

3) أ/ دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا $f'(x) \geq 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ولدينا

$$e^x - 3 = 0 \Rightarrow e^x = 3$$
$$\Rightarrow x = \ln 3$$

ومنه $f'(x)$ تنعدم عند $\ln 3$ ولا تغير اشارتها

ومنه

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\ln 3$	↗ $+\infty$

ب/ تعيين $f''(\ln 3)$ دون حساب عبارة $f''(x)$:

عندما تنعدم المشتقة الاولى ولا تغير من اشارتها فإنه توجد نقطة انعطاف وعندها تنعدم المشتقة الثانية

ومنه $f''(\ln 3) = 0$

4) أ/ تبين أن المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y_1 = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - y_1] = \lim_{x\to-\infty}\left[x - 2 - \frac{4e^x}{e^x+3} - x + 2\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{4e^x}{e^x+3}\right]$$
$$= 0$$

ومنه المستقيم (Δ_1) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$

ب/ تبين أن المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y_2 = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y_2] = \lim_{x\to+\infty}\left[x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+3} - x + 2\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[4 - \frac{4e^x}{e^x+3}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{12}{e^x+3}\right]$$
$$= 0$$

ومنه المستقيم (Δ_2) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$

5) دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) :

- الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ_1) :

ندرس إشارة الفرق $[f(x) - y_1]$: لدينا:

$$f(x) - y_1 = \frac{-4e^x}{e^x+3}$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لدينا المقام موجب ومنه الإشارة من إشارة $(-4e^x)$

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)-y_1$	$-$
الوضعية	(Δ) تحت (C_f)

- الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ_2) :

ندرس إشارة الفرق $[f(x)-y_2]$: لدينا:

$$f(x)-y_2 = 4-\frac{4e^x}{e^x+3} = \frac{12}{e^x+3} > 0$$

ومنه

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)-y$	$+$
الوضعية	(Δ) فوق (C_f)

6) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$$(T): y = f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$= \left(\frac{e^0-3}{e^0+3}\right)^2 (x)+0+2-\frac{4e^0}{e^0+3}$$
$$= \frac{1}{4}x+1$$

7) تبيين أن النقطة $A(\ln 3\,;\ln 3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

- نبين أن $(\ln 3+x)\in D_f$ و $(\ln 3-x)\in D_f$:

لدينا: $x\in D_f$ معناه $x\in\,]-\infty;+\infty[$

ومنه $(\ln 3+x)\in\,]-\infty;+\infty[$ و $(\ln 3-x)\in\,]-\infty;+\infty[$

- نبين أن $f(\ln 3+x)+f(\ln 3-x)=2\ln 3$

$$f(\ln 3+x)+f(\ln 3-x) = \left(\ln 3+x+2-\frac{4e^{\ln 3+x}}{e^{\ln 3+x}+3}\right)+\left(\ln 3-x+2-\frac{4e^{\ln 3-x}}{e^{\ln 3-x}+3}\right)$$
$$= 2\ln 3+4-\left(\frac{4e^{\ln 3+x}}{e^{\ln 3+x}+3}+\frac{4e^{\ln 3-x}}{e^{\ln 3-x}+3}\right)$$
$$= 2\ln 3+4-\left(\frac{12e^x}{3e^x+3}+\frac{12e^{-x}}{3e^{-x}+3}\right)$$
$$= 2\ln 3+4-\left(\frac{4e^x}{e^x+1}+\frac{4e^{-x}}{e^{-x}+1}\right)$$
$$= 2\ln 3+4-\left(\frac{4+4e^x+4+4e^{-x}}{1+e^x+e^{-x}+1}\right)$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= 2\ln 3 + 4 - \left(\frac{8}{2}\right)$$
$$= 2\ln 3$$

8) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $f(-1) = 0.56$ و $f(-2) = -0.17$ ولدينا $f(-1) \times f(-2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]-2;-1[$

- حصر α :

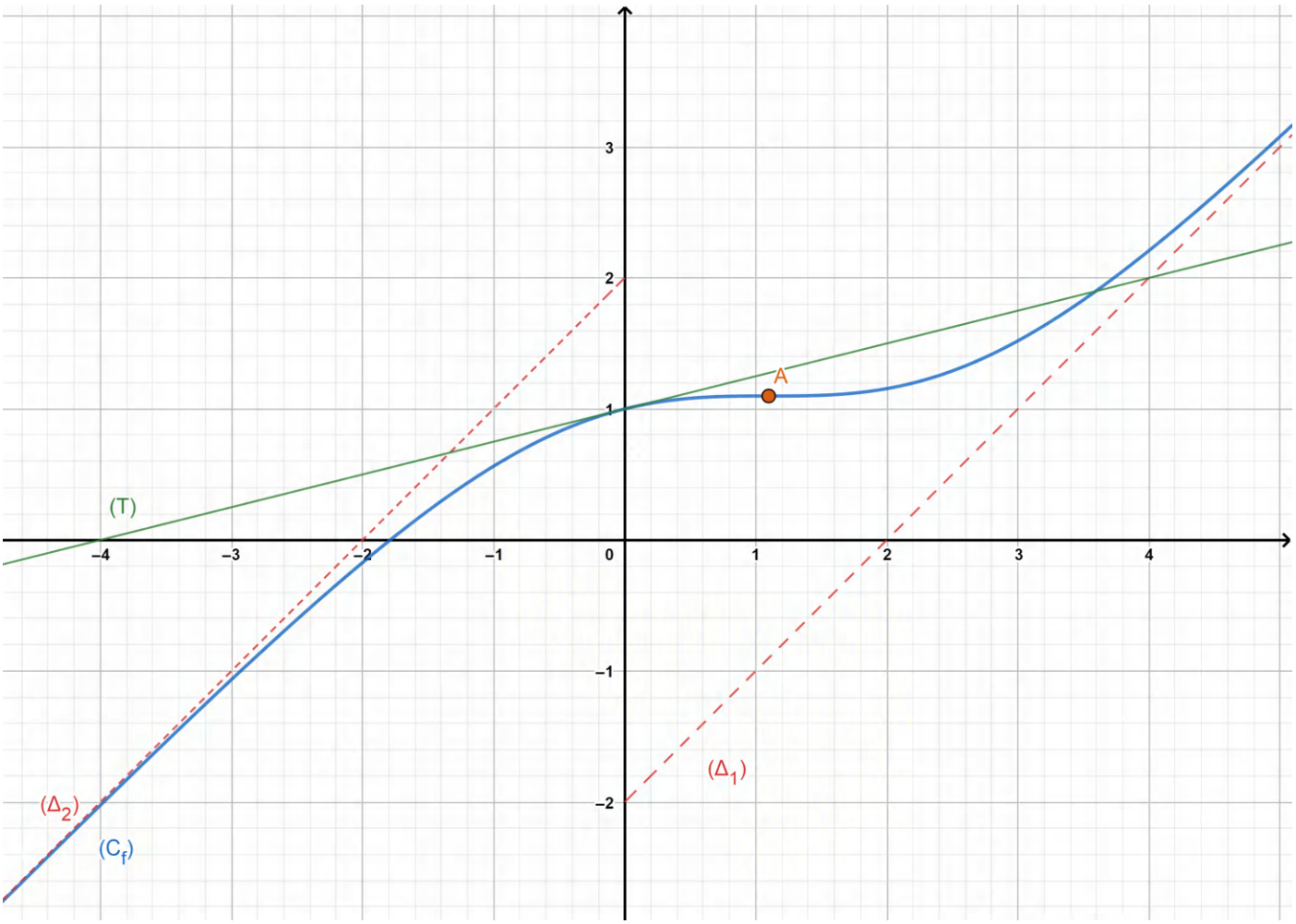
α	-2	-1.9	-1.8	-1.7	...	-1
$f(\alpha)$	-0.17	-0.09	-0.09	0.07	...	0.56

9) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة المائلة : $y = x + 2$ و $y = x - 2$
- نعين نقطة مركز تناظر المنحني (C_f)
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM



10)المناقشة البيانية:

$$f(-|x|) = \ln(|m|)x + 2$$

نضع $h(x) = f(-|x|)$

ومنه:

$$h(x) = \begin{cases} f(-(x)); x \geq 0 \\ f(-(-x)); x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} f(-x); x \geq 0 \\ f(x); x \leq 0 \end{cases}$$

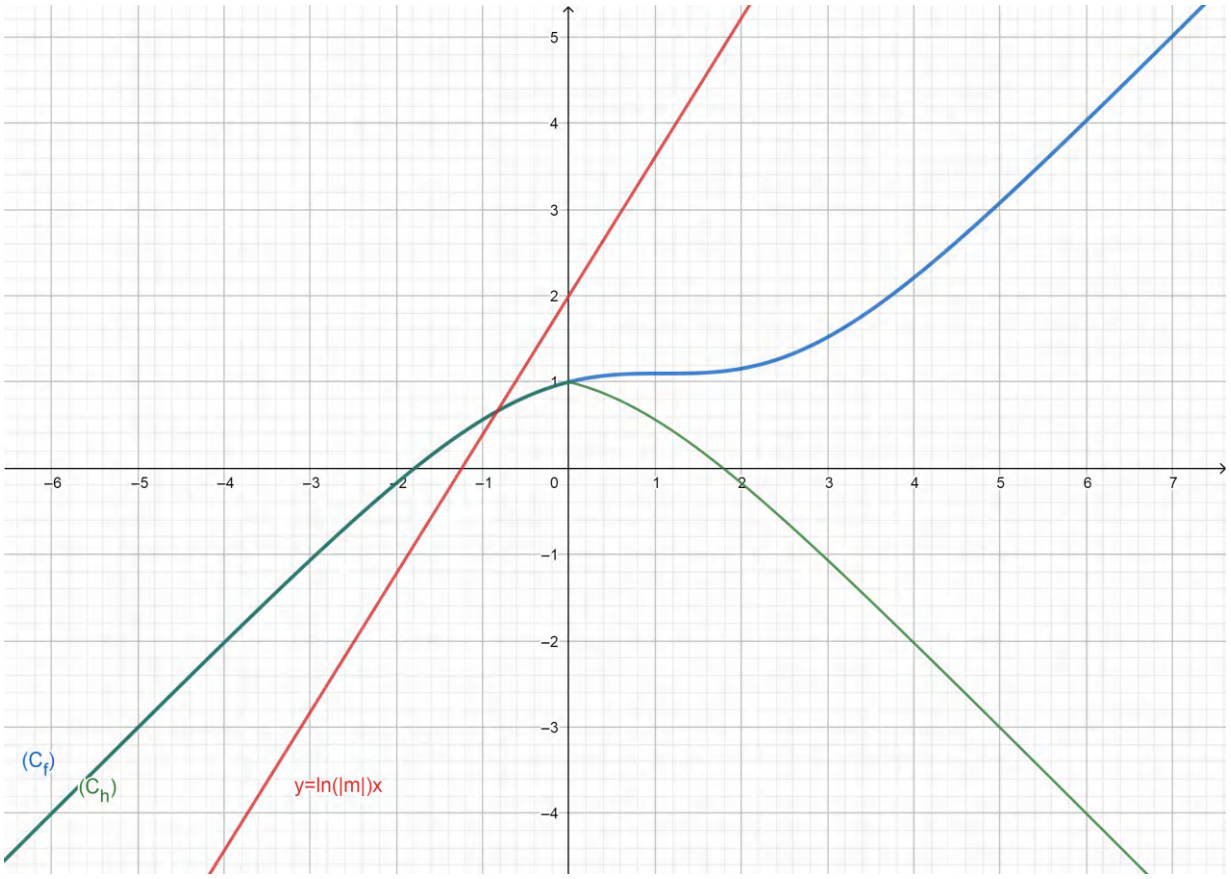
لما $x \leq 0$ المنحني (C_h) ينطبق على (C_f) .

لما $x \geq 0$ المنحني (C_h) يناظر المنحني العكسي لـ (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب.

ومنه تمثيل (C_h) كالآتي:

المنحني (C_f) و المنحني (C_h) و المستقيم $y = \ln|m|\, x$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM



ومنه المناقشة كالآتي:

المعادلة لا تقبل حلولا لما:

$$-1 \leq \ln|m| \leq 1$$

أي:

$$\ln|m| \geq -1 \text{ و } \ln|m| \leq 1$$

أي:

$$|m| \geq e^{-1} \text{ و } |m| \leq e$$

أي:

$$m \in]-e; e[$$

و

$$m \in]-\infty; -e^{-1}[\cup]e^{-1}; +\infty[$$

أي:

$$m \in \begin{pmatrix}]-\infty; -e^{-1}[\cup]e^{-1}; +\infty[\\ \cap \\ ]-e; e[\end{pmatrix}$$

أي:

$$m \in]-e; -e^{-1}[\cup]e^{-1}; e[$$

المعادلة تقبل حلا وحيدا لما:

$$\ln|m| < -1$$

أي:

$$|m| < e^{-1}$$

أي:

$$-e^{-1} < m < e^{-1}$$

أي:

$$m \in]-e^{-1}; e^{-1}[$$

المعادلة تقبل حلا وحيدا لما:

$$\ln|m| > -1$$

أي:

$$|m| > e$$

أي:

$$m \in]-\infty; -e[\cup]e; +\infty[$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لما: $1 \leq \ln|m| < 1$ أي: $e \leq |m| < e$ أي لما: $m \in [-e; e]$ المعادلة لا تقبل حلول

لما: $\ln|m| > 1$ أي: $|m| > e$ أي: $m \in]-\infty; -e[\cup]e; +\infty[$ المعادلة تقبل حل وحيدا

(II)

1) دراسة تغيرات الدالة g .

نلاحظ أنّ $g(x) = (f \circ k)(x)$ حيث $k(x) = 3x - 2$

2) التحقق من أن $g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 0$:

$$g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = f\left(3\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) - 2\right) = f(\alpha) = 0$$

- تبيين أن $g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'(\alpha)$:

لدينا: $g'(x) = 3f'(3x-2)$ ومنه:

$$g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'\left(3\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) - 2\right) = 3f'(\alpha)$$

3) استنتاج معادلة المماس (d) لمنحني الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{3}$:

$$\begin{aligned}(d): y &= g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) + g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) \\ &= 3f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) + 0 \\ &= 3f'(\alpha)x - f'(\alpha)(\alpha+2)\end{aligned}$$

4) التحقق من معادلة المماس (d) :

لدينا:

$$\begin{aligned}f(\alpha) = 0 &\Rightarrow \alpha + 2 - \frac{4e^{\alpha}}{e^{\alpha}+3} = 0 \\ &\Rightarrow \alpha + 2 = \frac{4e^{\alpha}}{e^{\alpha}+3} \\ &\Rightarrow (\alpha+2)(e^{\alpha}+3) - 4e^{\alpha} = 0 \\ &\Rightarrow ae^{\alpha} + 3a + 2e^{\alpha} + 6 - 4e^{\alpha} = 0 \\ &\Rightarrow e^{\alpha}(a-2) = -(3a+6) \\ &\Rightarrow e^{\alpha} = \frac{3\alpha+6}{2-\alpha}\end{aligned}$$

ولدينا:

$$(d): y = 3f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right)$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= 3\left(\frac{e^{\alpha}-3}{e^{\alpha}+3}\right)^{2}\left(x-\frac{\alpha+2}{3}\right)$$
$$= 3\left(\frac{\frac{3\alpha+6}{2-\alpha}-3}{\frac{3\alpha+6}{2-\alpha}+3}\right)^{2}\left(x-\frac{\alpha+2}{3}\right)$$
$$= 3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2}\left(x-\frac{\alpha+2}{3}\right)$$
$$= \frac{3\alpha^{2}}{4}x-\frac{\alpha^{2}(\alpha+2)}{4}$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

03 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) من البيان نجد:

أ/

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)]=-1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)]=+\infty$

ب-

- $g(0)=-2$
- $g'(0)=0$

2) ايجاد a ، b و c :

لدينا:

$$\begin{cases} g(0)=-2 \\ g'(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)]=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a(0)+b)e^0+c=-2 \\ (a(0)+a+b)e^0=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}[(ax+b)e^x+c]=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c=-2 \\ a+b=0 \\ c=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$$

3) أ/ تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)]\times\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)]<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α .

- التحقق من أن $1.2<\alpha<1.3$:

لدينا: $g(1.3)=0.1$ و $g(1.2)=-0.3$

ولدينا: $g(1.3)\times g(1.2)<0$

ومنه: $1.2<\alpha<1.3$.

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1) أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$:

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x+1}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{x}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}\right] = 0$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right] = 0$ (نهاية شهيرة)

- التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$

ب/ حساب $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{e^x+1}\right]$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{e^x+1}\right] = -\infty$$

2) أ/ تبيين أنه من اجل كل x حقيقي: $f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$:

$$f'(x) = \frac{e^x+1-xe^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{(1-x)e^x+1}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-\big((x-1)e^x-1\big)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $f(0) = 0$

ولدينا: $f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x+1)^2} < 0$ ومنه إشارة المشتقة عكس إشارة $g(x)$.

ومنه جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$	0		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0

3) تعيين $\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$ دون حساب:

$$\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right] = f'(\alpha) = \frac{-g(\alpha)}{(e^\alpha+1)^2} = 0$$

- تفسير الهندسي:

المنحنى (C_f) يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة α موازٍ لحامل محور الفواصل.

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4) تبيين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يمر من المبدأ:

لدينا معادلة المماس تكتب من الشكل:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

يوجد مماس يمر من $O(0;0)$ معناه:

$$\begin{aligned} f'(a)(0-a) + f(a) = 0 \\ \Rightarrow -af'(a)x + f(a) = 0 \\ \Rightarrow a\frac{(a-1)e^a - 1}{(e^a+1)^2} + \frac{a}{e^a+1} = 0 \\ \Rightarrow a(a-1)e^a - a + a(e^a+1) = 0 \\ \Rightarrow a^2e^a = 0 \\ \Rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

ومنه معادلة المماس هي:

$$\begin{aligned} (T): y = f'(0)(x-0) + f(0) \\ y = \frac{-g(0)}{(e^0+1)^2}x + \frac{0}{e^0+1} \\ y = \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

5) تبيين أن $f(\alpha) = \alpha - 1$:

مما سبق لدينا

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 \Rightarrow (\alpha-1)e^\alpha - 1 = 0 \\ \Rightarrow (\alpha-1)e^\alpha = 1 \\ \Rightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha-1} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha}{e^\alpha+1} \\ &= \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha} \\ &= \alpha - 1 \end{aligned}$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$\begin{aligned} 1.2 < \alpha < 1.3 \\ 0.2 < a - 1 < 0.3 \\ 0.2 < f(\alpha) < 0.3 \end{aligned}$$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

6) أ/ تبيين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{e^x+1}-x\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x-xe^x-x}{e^x+1}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-xe^x}{e^x+1}\right] = 0$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}[xe^x] = 0$ (نهاية شهيرة)

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

دراسة إشارة الفرق: $[f(x)-y]$:

$$f(x)-y = \frac{x}{e^x+1}-x$$
$$= \frac{x-xe^x-x}{e^x+1}$$
$$= \frac{-xe^x}{e^x+1}$$

لدينا $(e^x+1) > 0$ و $e^x > 0$ ومنه الإشارة من إشارة $(-x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$

الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) في المجال: $]-\infty;0[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة 0
- (C_f) تحت (Δ) في المجال: $]0;+\infty[$

7) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب $y = 0$ و المستقيم المقارب المائل (Δ)
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM