# العبقري في الرياضيات

## الدوال اللوغاريتمية

## الثالثة ثانوي

الشعب: ● تسيير وإقتصاد.

جمع وإعداد الأستاذ: بوعزة مصطفى.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

# مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال الأسية واللوغاريتمية)
## الملخص // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

**ملخص: حول الدّوال الأسية واللوغاريتمية// التحضير الجيد بكالوريا // الشعبة: تسيير وإ.**

## 1 الدّالة الأسية

### ❶ مبرهنة وتعريف

توجد دّالة **وحيدة** $f$ **قابلة للاشتقاق** على $\mathbb{R}$ بحيث:

$f'=f$ ① $\quad f(0)=1$ ②

نرمز إليها بالرمز "**exp**"، ونسميها **الدّالة الأسية النيبيرية**.

**نتائج من التعريف:**

- $\boxed{\exp(0)=1}$.
- من أجل **كل عدد حقيقي** $x$، $\boxed{\exp'(x)=\exp(x)}$.

### ❷ خواص جبرية

$x$ و $y$ عددان **حقيقيان** وَ $n$ عدد **صحيح**.

① $\exp(x)>0$

② $\exp(x)\times\exp(-x)=1$

$\left(\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}\right)$

③ $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$

④ $\exp(x-y)=\frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

⑤ $(n\in\mathbb{Z})\ \exp(nx)=[\exp(x)]^n$

**العدد $e$ والترميز $e^x$:**

- العدد $e$ هو **صورة 1** بالدّالة **الأسية** أي:

$\boxed{\exp(1)=e\simeq 2{,}72}$

- حسب **الخاصية** ⑤ ومن أجل $x=1$ نجد:

$(n\in\mathbb{Z})\ \exp(n)=[\exp(1)]^n=e^n$

**اصطلاحاً:** $\boxed{\exp(x)=e^x}$

**(من أجل كل** $x\in\mathbb{R}$**)**

### قواعد الحساب: (خواص الدّالة " exp ")

$x$ و $y$ عددان **حقيقيان** وَ $n$ عدد **صحيح**.

① $\boxed{e^0=1}$ ② $\boxed{(e^x)'=e^x>0}$

③ $\boxed{e^x\times e^{-x}=1}$ $\left(\boxed{e^{-x}=\frac{1}{e^x}>0}\right)$

④ $\boxed{e^{x+y}=e^x\times e^y}$ ⑤ $\boxed{e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}}$

⑥ $(n\in\mathbb{Z})\ \boxed{e^{nx}=(e^x)^n}$

### ❸ دراسة الدّالة " exp "

**لدينا:** $\exp(x)=e^x$ وَ $D_{\exp}=]-\infty;+\infty[$.

**النهايات**

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ ❷ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$

**إتجاه التغيّر**

من أجل **كل عدد حقيقي** $x$، $\boxed{(e^x)'=e^x>0}$

**إذن:** الدّالة **"exp" متزايدة تماماً** على $\mathbb{R}$.



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## جدول التغيّرات

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $(e^x)'$ | | $+$ | | |
| $e^x$ | $0^+$ | $\nearrow$ $1$ | $\nearrow$ $e$ | $+\infty$ |

نعلم أنّ $e^x > 0$ **من جدول التغيرات:**

- $0 < e^x < 1$ **يعني:** $x < 0$
- $e^x = 1$ **يعني:** $x = 0$
- $1 < e^x < e$ **يعني:** $0 < x < 1$
- $e^x > e$ **يعني:** $x > 1$

يُمكن أن يكون $x$ **عبارة جبرية**.

بمأنّ الدّالة "$exp$" **متزايدة تماماً** على $\mathbb{R}$، فإنّ:

- $a > b$ **يعني:** $e^a > e^b$
- $a < b$ **يعني:** $e^a < e^b$
- $a = b$ **يعني:** $e^a = e^b$

$a$ **وَ** $b$ **عددان حقيقيان أو عبارتان جبريتان.**

**ملاحظة مهمة:** تُستعمل **لحل معادلات** و**متراجحات** أو**لدراسة إشارة عبارة جبرية تتضمن** $e$.

## نتائج:

- بمأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ فإنّ $(C_{\exp})$ يقبل **محور الفواصل كمُقارب** عند $-\infty$.
- لدينا: $\exp(0) = e^0 = 1$ وَ $\exp'(0) = 1$

إذن: $(C_{\exp})$ يقبل **عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماساً**، $(\Delta): y = \exp'(0)(x-0) + \exp(0)$

أي: $(\Delta): y = x + 1$.

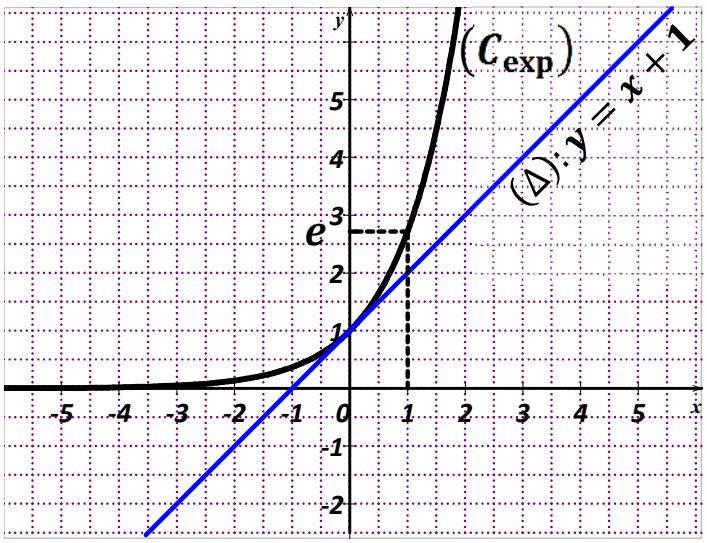
- باستعمال **تعريف العدد المشتق** للدّالة "$\exp$" عند **0**:

**لدينا:** $\exp'(0) = \lim\limits_{x\to0} \frac{\exp(x)-\exp(0)}{x-0}$، إذن: ❸ $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

- الدّالة $x \mapsto x+1$ هي **أحسن تقريب تآلفي** للدّالة $x \mapsto e^x$ بجوار $0$

**أي:** $e^x \simeq x+1$ من أجل $x$ قريب من $0$.

## التمثيل البياني



## ❹ دراسة الدّالة " $\exp \circ u$ "

**لدينا:** $(exp \circ u)(x) = e^{u(x)}$

### النهايات

لدراسة نهاية دّالة "$\exp \circ u$"
نستعمل **المبرهنة الخاصة**
**بنهاية دّالة مركبة.**

### إتجاه التغيّر

للدّالتين "$u$" وَ"$\exp \circ u$"
**نفس اتجاه التغيّر** على $I$، حيث:
$u$ معرّفة على $I$.
لأنّ الدّالة "exp" **متزايدة تماماً.**

### المشتقة

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$$

إشارة $\left(e^{u(x)}\right)'$
من إشارة $u'(x)$
لأنّ: $e^{u(x)} > 0$.

## ❺ التزايد المقارن

**التزايد المقارن للدّالتين $x \mapsto e^x$ وَ $x \mapsto x$:**

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ❹ $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$ ❺

**التزايد المقارن للدّالتين $x \mapsto e^x$ وَ $x \mapsto x^n$:**

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ ❹ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0^-$ ❺

$(n \in \mathbb{N}^*)$

تُستعمل هذه النهايات لرفع حالات عدم التعيين.

## ❻ معادلات من الشكل " $ae^{2x} + be^x + c = 0$ " حيث $(a \neq 0)$

**نضع:** $X = e^x$

نقوم بعد ذلك **بحل المعادلة** $aX^2 + bX + c = 0$ ثمّ **نستنتج قيم $x$ في حالة وجودها** (لأنّ $e^x > 0$).

- **نأخذ قيم $X > 0$ لإيجاد $x$ وذلك بالعودة إلى الوضع.**

## ❼ المعادلات التفاضلية من الشكل " $y' = ay + b$ " بحيث $(a \neq 0)$

- **المعادلة التفاضلية $y' = ay$**، الحلول هي الدّوال $x \mapsto ce^{ax}$ حيث $c \in \mathbb{R}$.
- **المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$**، الحلول هي الدّوال $x \mapsto ce^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث $c \in \mathbb{R}$.
- **إذا أُعطي شرط مثلاً $f(x_0) = y_0$**، نُعوض في الحلول، نقوم بإجاد $c$، ويُصبح الحل **وحيد** للمعادلة التفاضلية.

## ❽ إشارة بعض العبارات زردت في البكالوريا

- **إشارة $e^x - 1$**

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $e^x - 1$ | - | ○ | + |

**لدراسة إشارة العبارة $ae^{2x} + be^x + c$** $(abc \neq 0)$

نحلّله باستعمال المميز $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$ ☜ $ae^{2x} + be^x + c = a(e^x - X')(e^x - X'')$

$\Delta = 0$ ☜ $ae^{2x} + be^x + c = a(e^x - X')^2$

$\Delta < 0$ ☜ $ae^{2x} + be^x + c$

**يُمكن تلخص إشارته في جدول باستعمال القواعد المعروفة**
**لإشارة كثير حدود من الدرجة الثانية.**

**إشارة** $ae^{\alpha x+\beta}+b$

إذا كان: $a$ و$b$ **موجبين** فإنّ: $ae^{\alpha x+\beta}+b>0$.

إذا كان: $a$ و$b$ **سالبين** فإنّ: $ae^{\alpha x+\beta}+b<0$.

إذا كان: $a$ و$b$ **مختلفين في الإشارة**، فإنّ: $ae^{\alpha x+\beta}+b$ **متغيرة الإشارة** ولمعرفة إشارته

- نحل المعادلة والمتراجحات $ae^{\alpha x+\beta}+b>0$،
  $ae^{\alpha x+\beta}+b<0$،
  $ae^{\alpha x+\beta}+b=0$

# 2 الدّالة اللوغاريتمية

## 1 اللوغاريتم النيبيري لعدد

**مبرهنة وتعريف:**

يوجد **عدد حقيقي وحيد** $b$ بحيث $e^b=a>0$،
يسمى هذا العدد **اللوغاريتم النيبيري** للعدد $a$،
ونرمز إليه بالرمز " $\ln a$ " أي $\boxed{b=\ln a}$.

**مثلاً:** $e^b=2$ معناه: $b=\ln 2$.

## 1 تعريف الدّالة " ln "

نسمي "**الدّالة اللوغاريتمية النيبيرية**" الدّالة التي نرمز إليها بالرمز "**ln**"، والتي **تُرفق** بكل عدد حقيقي $x$ من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$.

**نتائج من التعريف:**

- من أجل $x\in\mathbb{R}$ وَ $y\in]0;+\infty[$، $\boxed{x=\ln y \text{ يعني: } e^x=y}$
- من أجل $x\in]0;+\infty[$، $\boxed{e^{\ln x}=x}$.
- من أجل $x\in\mathbb{R}$، $\boxed{\ln(e^x)=x}$.
- بمأنّ: $e^0=1$ فإنّ: $\ln 1=0$، وَبمأنّ: $e^1=e$ فإنّ: $\ln e=1$.

**حسب النتيجة 1)** الدّالة **اللوغاريتمية النيبيرية "ln"** هي **الدّالة العكسية** للدّالة **الأسية النيبيرية "exp"**.

في معلم متعامد ومتجانس، $(C_{\exp})$ وَ$(C_{\ln})$ **متناظران بالنسبة** إلى المستقيم ذو المعادلة $y=x$ (المنصف الأوّل).

## 2 خواص جبرية

**الخاصية الأساسية:**

$x$ و$y$ عددان **حقيقيان** من $]0;+\infty[$،

① $\boxed{\ln(xy)=\ln x+\ln y}$

**نتائج:**

$x$ و$y$ عددان **حقيقيان** من $]0;+\infty[$، وَ$n$ عدد **صحيح**.

② $\boxed{\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x}$

③ $\boxed{\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y}$

④ $\boxed{\ln(x^n)=n\ln x}$ $(n\in\mathbb{Z})$

⑤ $\boxed{\ln\sqrt{x}=\frac{1}{2}\ln x}$



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

- يكون للعدد $\ln x$ **معنى** إذا وفقط إذا كان: $x > 0$ (ما بعد ln **موجب تماماً**)
- يكون للعدد $\ln[u(x)]$ **معنى** إذا وفقط إذا كان: $u(x) > 0$. (ما بعد ln **موجب تماماً**)
- يكون للعدد $\ln|u(x)|$ **معنى** إذا وفقط إذا كان: $u(x) \neq 0$.
- يكون للعدد $\ln[u(x)]^n$ **معنى** إذا وفقط إذا كان: $u(x) \neq 0$، في حالة $n = 2k$ **زوجي.**
  $u(x) > 0$، في حالة $n = 2k+1$ **فردي.**

## ❸ دراسة الدّالة " ln "

**لدينا:** $\ln: x \mapsto \ln(x)$ وَ $D_{\ln} = ]0; +\infty[$.

### النهايات

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ ❷ $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$

### إتجاه التغيّر

من أجل **كل** $x$ من $]0; +\infty[$، $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$

**إذن:** الدّالة **"ln" متزايدة تماماً** على $]0; +\infty[$.

### جدول التغيّرات

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(\ln x)'$ | ‖ | | $+$ | | | | |
| $\ln x$ | ‖ $-\infty$ | $-$ $-$ | $0$ | $+$ $+$ | $1$ | $+$ | $+\infty$ |

نعلم أنّ $\ln x$ **متغيرة الإشارة** (لأنّ $\ln x \in \mathbb{R}$)

**ومن جدول التغيرات:**

- $\ln x < 0$ **يعني:** $0 < x < 1$
- $\ln x = 0$ **يعني:** $x = 1$
- $0 < \ln x < 1$ **يعني:** $1 < x < e$
- $\ln x = 1$ **يعني:** $x = e$
- $\ln x > 1$ **يعني:** $x > e$

- **إشارة $\ln x$**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

يُمكن أن يكون $x$ **عبارة جبرية** (استعمل كلمة ما بعد ln )

بمأنّ الدّالة **"ln" متزايدة تماماً** على $]0; +\infty[$، فإنّ

- $a > b$ **يعني:** $\ln a > \ln b$
- $a < b$ **يعني:** $\ln a < \ln b$
- $a = b$ **يعني:** $\ln a = \ln b$

$a$ وَ $b$ **عددان حقيقيان موجبان تماماً** أو **عبارتان جبريتان موجبتان تماماً**.

**ملاحظة مهمة:** تُستعمل **لحل معادلات** و**متراجحات** أو**لدراسة إشارة عبارة جبرية تتضمن ln**.

## نتائج:

- بمأنّ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} lnx = -\infty$ فإنّ $(C_{ln})$ يقبل **محور التراتيب كمُقارب له.**
- لدينا: $\ln(1) = 0$ وَ $(\ln \mathbf{1})' = \frac{1}{1} = 1$

إذن: $(C_{\ln})$ يقبل **عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماساً**، $(\Delta'): y = (\ln \mathbf{1})'(x-1) + \ln 1$

أي: $(\Delta'): y = x - 1$.

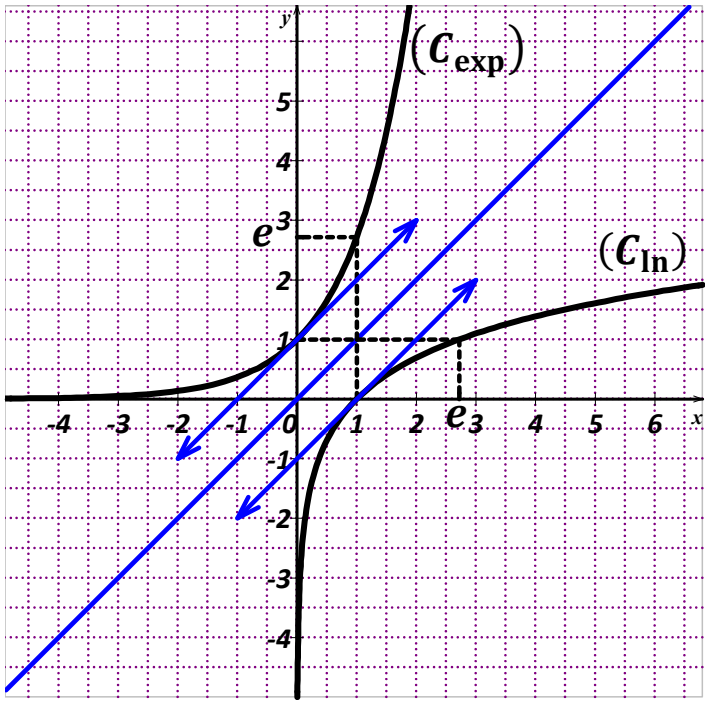
- باستعمال **تعريف العدد المشتق** للدّالة "ln" عند **1**

$(\ln 1)' = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}$، إذن: ❸ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$.

- الدّالة $x \mapsto x - 1$ هي **أحسن تقريب تآلفي** للدّالة $x \mapsto \ln x$ بجوار **1**

**أي:** $\ln x \simeq x - 1$ من أجل $x$ قريب من **1**.

## التمثيل البياني




## ❹ دراسة الدّالة " $\ln \circ u$ "

**لدينا:** $(\ln \circ u)(x) = \ln[u(x)]$

### النهايات

لدراسة نهاية دّالة "$\ln \circ u$" نستعمل **المبرهنة الخاصة بنهاية دّالة مركبة.**

### إتجاه التغيّر

للدّالتين "$u$" وَ "$\ln \circ u$" **نفس اتجاه التغيّر** على $I$، حيث: $u$ معرّفة و**موجبة تماماً** على $I$.

لأنّ الدّالة "ln" **متزايدة تماماً.**

### المشتقة

$$(\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

**ملاحظة:**

$$(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

## ❺ التزايد المقارن

**التزايد المقارن للدّالتين $x \mapsto \ln x$ وَ $x \mapsto x$:**

❹ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+$ ❺ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x = 0^-$

**التزايد المقارن للدّالتين $x \mapsto \ln x$ وَ $x \mapsto x^n$:**

❹ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0^+$ ❺ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^n\ln x = 0^-$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

تُستعمل هذه النهايات لرفع حالات عدم التعيين.

## ❻ معادلات من الشكل " $a[\ln x]^2 + b\ln x + c = 0$ " حيث $(a \neq 0)$

**نضع:** $X = \ln x$

نقوم بعد ذلك **بحل المعادلة** $aX^2 + bX + c = 0$ ثمّ **نستنتج قيم $x$ في حالة وجودها** (لأنّ $x > 0$).

- **نأخذ قيم $X$ لإيجاد $x$ وذلك بالعودة إلى الوضع.**

## ❼ إشارة بعض العبارات زردت في البكالوريا

**لدراسة إشارة العبارة** $a[\ln(x)]^2 + b\ln(x) + c$ $(abc \neq 0)$

نحلّله باستعمال المميز $\Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta > 0$، $a[\ln(x)]^2 + b\ln(x) + c = a(\ln x - X')(\ln x - X'')$
- $\Delta = 0$، $a[\ln(x)]^2 + b\ln(x) + c = a(\ln x - X')^2$
- $\Delta < 0$، $a[\ln(x)]^2 + b\ln(x) + c$

**يُمكن تلخيص إشارته في جدول باستعمال القواعد المعروفة لإشارة كثير حدود من الدرجة الثانية.**

**إشارة** $a\ln(\alpha x + \beta) + b$

- نحل المعادلة والمتراجحات $a\ln(\alpha x + \beta) + b > 0$،
  $a\ln(\alpha x + \beta) + b < 0$،
  $a\ln(\alpha x + \beta) + b = 0$

**ملاحظة مهمة جداً:** لحل معادلات (أو متراجحات) تتضمن ln نُعيّن أولا مجموعة التعريف $D$.

## الـــــــدّالة

### 1 الأسية

| | |
|---|---|
| ❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ | ❷ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ |
| ❸ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ | |
| ❹ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ | ❺ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$ |
| ❹ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ | ❺ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^ne^x = 0^-$ |

$(n \in \mathbb{N}^*)$

### 2 اللوغاريتمية

| | |
|---|---|
| ❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ | ❷ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$ |
| ❸ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$ | |
| ❹ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+$ | ❺ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x = 0^-$ |
| ❹ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0^+$ | ❺ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^n\ln x = 0^-$ |

$(n \in \mathbb{N}^*)$

## 2 النهايات ☹

# مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال اللوغاريتمية -بكالوريات جزائرية)

## التمارين// الشعبة: تسيير وإقتصاد.

## التمرين 01: (03 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

ليكن $P(x)$ كثير الحدود حيث: $P(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

1.أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$.

ب) استنتج في المجال $]0;+\infty[$ حلول المتراجحة التالية: $2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 > 0$.

2.حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $2^{2x+1} = 5 \times 2^x - 2$.

## التمرين 02: (04 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

نعتبر الدّالة العددية $f$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x - 3$.

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس. (ln هو رمز اللوغاريتم النيبيري)

1)أ) حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة: $f(x) = 0$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب) حلّل $f(x)$ إلى جداء عاملين.

جـ) حل في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة: $2\ln x + 2 \geq 0$.

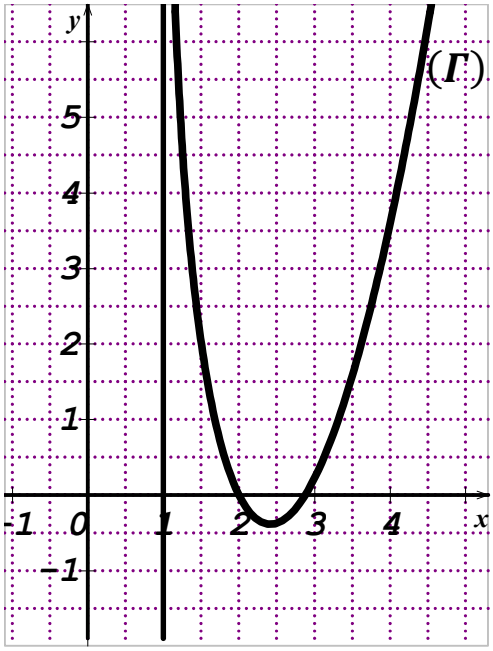
2)أحسب $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغيّر الدّالة $f$.

3)بيّن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيين إحداثييها.

## التمرين 03: (09 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

*I*)لتكن $g$ الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 - 2x - 4\ln(x-1)$

(ln هو رمز اللوغاريتم النيبيري). $(\Gamma)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس كما هو في الشكل التالي:




1)بقراءة بيانية، عيّن عدد حلول المعادلة $g(x) = 0$.

2)احسب $g(2)$.

3)بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً $\alpha$ حيث $2,87 < \alpha < 2,88$.

4)استنتج حسب قيم $x$، إشارة $g(x)$ في المجال $]1;+\infty[$.

*II*)لتكن $f$ الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = x - 3 + 4\frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$$

وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)أ-أوجد نهاية الدّالة $f$ عند $+\infty$. (لاحظ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

ب-احسب $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

جـ-بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y = x - 3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $+\infty$

د-أوجد فاصلة نقطة تقاطع $(\Delta)$ مع $(C_f)$.

هـ-ادرس الوضعية النسبية للمنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$.



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2)أ-بيّن أنّه من أجل كل عدد $x$ من المجال $]1;+\infty[$ لدينا: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$، ($f'$ هي الدّالة المشتقة للدّالة $f$).

ب-استنتج اتجاه تغيّر الدّالة $f$ وشكّل جدول تغيّراتها.

3)ارسم المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(C_f)$. (نأخذ $f(\alpha)\simeq 3,9$)

4)أ-عيّن مشتقة الدّالة: $x\mapsto [\ln(x-1)]^2$، ثم استنتج دّالة أصلية للدّالة $f$ على المجال $]1;+\infty[$.

ب-احسب: $\int_2^5 f(x)dx$، فسّر النتيجة هندسيا.

## التمرين 04: (03 نقاط) بكالوريا 2011// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية توجد ثلاثة اقتراحات من بينها واحد فقط صحيح، حدّد الاقتراح الصحيح في كل حالة مع التبرير.

1)مجموعة حلول المتراجحة $\ln(-3x+2)\leq \ln 3$ هي:

أ. $\left]-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right[$؛ ب. $\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$؛ جـ. $\mathbb{R}$.

2)لتكن $f$ الدّالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{1}{x}$. الدّالة الأصلية $F$ للدّالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم من أجل $x=e$ معرّفة كما يلي:

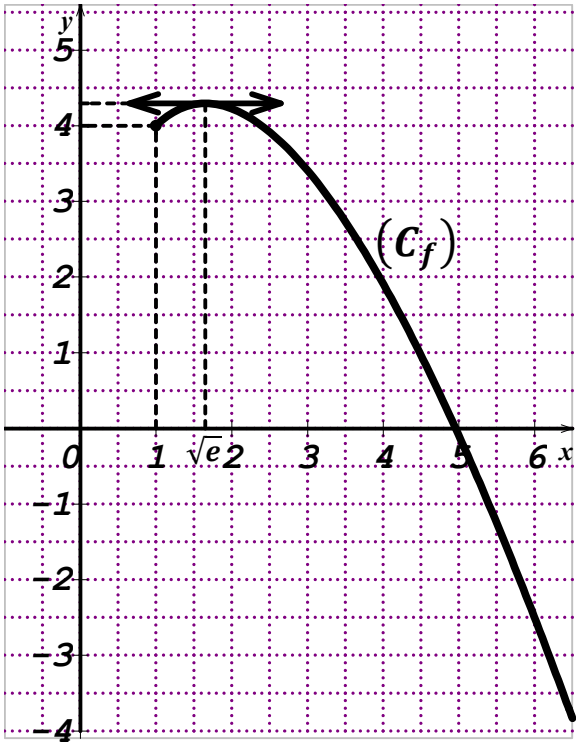
أ. $F(x)=e^{-2}-\frac{1}{x^2}$؛ ب. $F(x)=-1+\ln x$؛ جـ. $F(x)=\ln x$.

3)القيمة المتوسطة للدّالة $g:x\mapsto \frac{x^2}{4}$ على المجال $[-2;2]$ تساوي:

أ. $\frac{4}{3}$؛ ب. 3؛ جـ. $\frac{1}{3}$.

## التمرين 05: (06 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

التمثيل البياني $(C_f)$ المقابل هو للدّالة $f$ المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=ax+b+cx\ln x$؛ حيث $a$، $b$ و$c$ أعداد حقيقية.




1)خمّن بقراءة بيانية اتجاه تغيّر $f$ ونهاية $f$ عند $+\infty$.

2)أ-أحسب بدلالة $a$ و$c$ عبارة $f'(x)$ حيث $f'$ هي الدّالة المشتقة للدّالة $f$ على $]1;+\infty[$.

ب-باستعمال معطيات في الشكل، وعلماً أنّ $f(5)=16-10\ln 5$.

-بيّن أنّ: $f(x)=3x+1-2x\ln x$.

جـ-تحقّق من صحة تخمينك في السؤال 1، ثم شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$.

3)بيّن أنّ المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ على $]1;+\infty[$، ثم تحقّق أنّ $4,95<\alpha<4,96$.

4)نُعرف العدد الحقيقي $S$ كما يلي: $S=\int_1^{\alpha} f(x)=dx$

($\alpha$ هو حل المعادلة $f(x)=0$).

أ-بيّن أنّ الدّالة: $g:x\mapsto 2x^2+x-x^2\ln x$ دّالة أصلية للدّالة $f$ على $]1;+\infty[$.

ب-أعط تفسيرا هندسيا للعدد $S$، ثم احسبه بدلالة $\alpha$.



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

جـ-بيّن أنّ: $S=\frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)-3$، ثم استنتج حصرا للعدد $S$.

## التمرين 06: (07 نقاط) بكالوريا 2013// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

$I$)الدّالة العددية $g$ معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\frac{-x^2+x+2}{x^2}$.

1)عيّن، تبعا لقيم $x$، إشارة $g(x)$.

2)أ-تحقّق أنه، من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$، $g(x)=-1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$.

ب-استنتج الدّوال الأصلية للدّالة $g$ على $]0;+\infty[$.

$II$)الدّالة العددية $f$ معرّفة على المجال $]0;8]$ كما يلي: $f(x)=3-x-\frac{2}{x}+\ln x$.

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1)أ-تحقّق أنّ $f$ هي الدّالة الأصلية للدّالة $g$ على المجال $]0;8]$ والتي تنعدم عند 1.

ب-استنتج اتجاه تغير الدّالة $f$ على المجال $]0;8]$.

جـ-احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

د-شكّل جدول تغيرات الدّالة $f$.

2)بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين، أحدهما $\alpha$، حيث: $3,8<\alpha<3,9$.

3)مثّل بيانياً $(C_f)$.

$III$)الدّالة العددية $h$ معرّفة على $\left]-\frac{2}{3};2\right]$ كما يلي: $h(x)=f(3x+2)$.

1)بيّن أنّه إذا كان $-\frac{2}{3}<x\leq 0$ فإنّ $0<3x+2\leq 2$،

وإذا كان $0\leq x\leq 2$ فإنّ $2\leq 3x+2\leq 8$.

2)احسب $h'(x)$. (عبارة $h(x)$ غير مطلوبة)

3)شكّل جدول تغيّرات $h$.

## التمرين 07: (04 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

1)أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ فإنّ: $(2x+1)(x^2-5x+6)=2x^3-9x^2+7x+6$

ب) حل في $\mathbb{R}$ كلا من المعادلتين: $2(\ln x)^3-9(\ln x)^2+7\ln x+6=0$؛

$6e^{-3x}+7e^{-2x}-9e^{-x}+2=0$.

جـ) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $2e^{3x}-9e^{2x}+7e^{x}+6\leq 0$.

2)حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\log(x^2+100)=1+\log 2+\log x$.

## التمرين 08: (07 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

$I$)الدّالة العددية $g$ معرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=1-x^2-\ln x$.

1)ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $g$.

2)احسب $g(1)$ ثمّ استنتج تبعا لقيم $x$ إشارة $g(x)$.

$II$)الدّالة العددية $f$ معرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$.

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1)أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (يُعطى $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

ب) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

2)أ) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ فإنّ: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ ثمّ استنتج اتجاه تغيّر الدّالة $f$.

ب) شكّل جدول تغيرات الدّالة $f$.

3)أ) بيّن أنّ المستقيم $(D)$ الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$.

ب) ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(D)$.

4)عيّن فاصلة النقطة $A$ من $(C_f)$ التي يكون فيها المماس $(T)$ مُوازيا للمستقيم $(D)$ ثمّ اكتب معادلة للمماس $(T)$.

5)ارسم $(D)$، $(T)$ و$(C_f)$.

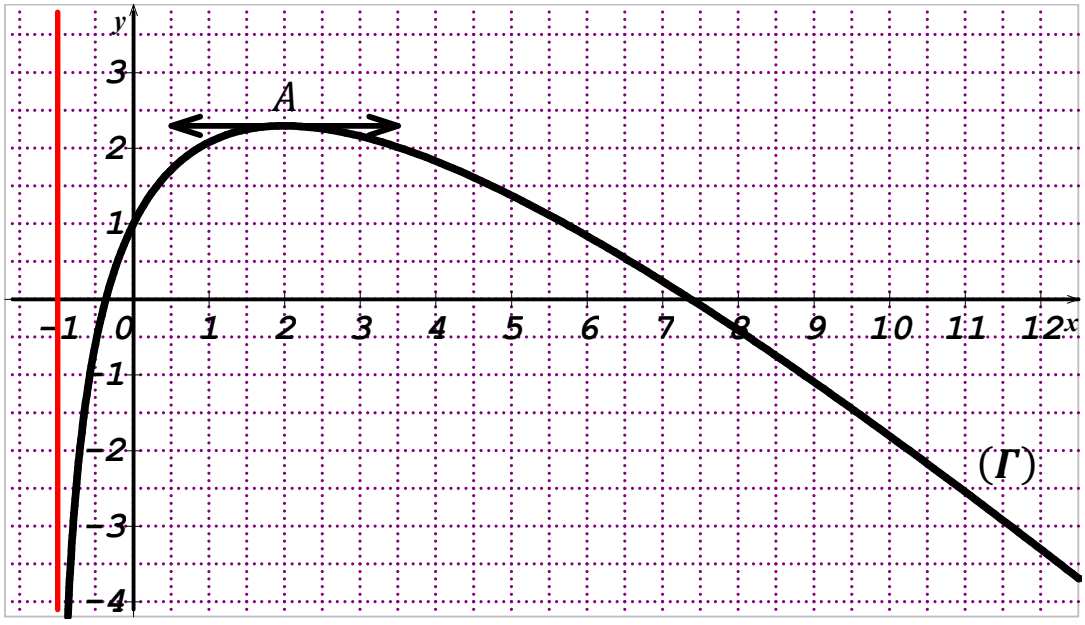
6)احسب القيمة المتوسطة للدّالة $f$ على المجال $[1;3]$.

## التمرين 09: (09 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

$I$) $f$ دّالة معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x) = ax + b + 3\ln(x+1)$، حيث $a$ و$b$ عددان حقيقيان.

$(\Gamma)$ التمثيل البياني للدّالة $f$، المُعطى في الشكل المقابل، يقبل في النقطة $A(2;-1+3\ln 3)$ مماساً **مُوازياً لحامل محور الفواصل**.




1)بقراءة بيانية:

أ) ضع تخميناً حول $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$.

ب) شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$.

2)باستعمال المعطيات المتوفرة، جِد قيمة كل من $a$ و$b$.

$II$)نعتبر في هذا الجزء: $f(x) = -x + 1 + 3\ln(x+1)$.

1)احسب نهاية الدّالة $f$ عند $(-1)$ بقيم أكبر.

2)احسب نهاية الدّالة $f$ عند $+\infty$. (يُعطى $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$)


قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3)أ) عيّن النقطة $B$ من المنحنى $(\Gamma)$ التي يكون فيها المماس $(T)$ للمنحنى $(\Gamma)$ موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = x$، ثم اكتب معادلة للمماس $(T)$.

ب) استنتج بيانياً، قيم العدد الحقيقي $m$ التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x) = x + m$ حلين موجبين تماماً.

4)$g$ الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$.

أ) احسب $g'(x)$؛ ثمّ استنتج دالة أصلية للدّالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$.

ب) لتكن $\alpha$ و $\beta$ فاصلتي نقطتي تقاطع المنحنى $(\Gamma)$ مع حامل محور الفواصل،

بيّن أنّ: $\alpha \in ]7{,}37;7{,}38[$ و $\beta \in ]-0{,}37;-0{,}36[$.

جـ) احسب $S$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\Gamma)$ وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x = 0$، $x = \alpha$.

د) تحقّق أنّ: $S = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha - 1\right) ua$؛ ثمّ عيّن حصراً لـ $S$. ($ua$ وحدة مساحة)

*III*)تنتج إحدى الورشات في اليوم الواحد 7 آلاف قطعة على الأكثر.

تُنمذج الكلفة الهامشية $C_m$ (الوحدة 1000 دينار) لإنتاج قطعة إضافية على المجال $[0;7]$ بالدّالة $f$ المعرفة في الجزء ***II***)، أي من أجل $x \in [0;7]$ لدينا $C_m(x) = f(x)$.

نرمز بـ $C_T(x)$ إلى الكلفة الإجمالية لإنتاج $x$ قطعة.

1)عيّن عبارة الكلفة الإجمالية $C_T(x)$ علماً أن الكلفة الإجمالية لإنتاج الألف قطعة الأولى هي $\frac{5}{2}$.

2)قدِّر قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 7 آلاف قطعة.

## التمرين 10: (07,5 نقطة) بكالوريا 2016// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

*I*) $g$ دالّة عددية معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = ax + b + \ln x$ حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان.

1)عيّن $a$ و $b$ بحيث: $g(1) = 2$ و $g'(2) = \frac{3}{2}$.

2)نضع: $g(x) = x + 1 + \ln x$.

أ-احسب $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب-ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $g$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

جـ-بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً حقيقيا وحيداً $\alpha$ حيث: $0{,}2 < \alpha < 0{,}3$.

د-حدّد تبعا لقيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

*II*)نعتبر الدّالة $f$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x\ln x}{x+1}$.

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1)بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغيّر الدّالة $f$.

2)احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (يُعطى: $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$)

3)تحقق أنّ: $f(\alpha) = -\alpha$ ثم شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$.

4)احسب $f(1)$ و $f(5)$ ثمّ ارسم $(C_f)$ على المجال $]0;5]$.

## التمرين 11: (07 نقاط) بكالوريا 2016// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

*I*)نعتبر الدّالة $g$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = -4 + 2x(1+\ln x)$.

1)احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. (تُعطى: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x = 0$)

2)ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $g$ على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3)بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ حيث: $1{,}4 < \alpha < 1{,}5$.

4)حدّد إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II)نعتبر الدّالة $f$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=(2x-4)\ln x$.

$(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1)أ-احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$. فسّر النتيجة هندسيا.

ب-احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)أ-بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$.

ب-استنتج اتجاه تغيّر الدّالة $f$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3)عيّن نقط تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل.

4)أ-اكتب معادلة للمماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1.

ب-أنشئ $(T)$ و$(C_f)$. (تُعطى: $f(\alpha)\simeq -0{,}41$)

5)نعتبر الدّالة $F$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $F(x)=(x^2-4x)\ln x-\frac{1}{2}x^2+4x$.

أ-بيّن أنّ $F$ دّالة أصلية للدّالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب-احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$، $x=1$ و$x=2$.

## التمرين 12: (08 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

I)نعتبر الدّالة $g$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+3\ln x-3$.

1)ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $g$.

2)بيّن أنّ: المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ حيث: $1{,}40<\alpha<1{,}41$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$.

II)نعتبر الدّالة $f$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+1-\frac{3\ln x}{x}$.

ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1)أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$، فسّر النتيجة بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)بيّن أنّ: من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ موجب تماماً، $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

3)استنتج اتجاه تغيّر الدّالة $f$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

4)أ) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$.

ب) ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$.

5)أنشئ المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(C_f)$. (تُعطى: $f(\alpha)\simeq 1{,}68$)

6)أ) بيّن أنّ الدّالة $h$ حيث $h(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$ أصلية للدّالة $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب) احسب $S$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $x=1$، $x=e$ و$y=x+1$.


قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## التمرين 13: (08 نقاط) بكالوريا 2018// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لتكن $f$ الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]-2;8[$ بـ: $f(x)=\ln(x+2)+\ln(-x+8)-\ln 16$.
وليكن $(C_f)$ منحنى الدّالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.
نأخذ الوحدة البيانية: $2cm$.

1) احسب نهايتي الدّالة $f$ عند طرفي مجموعة التعريف $]-2;8[$ وفسّر النتيجتين بيانيا.

2)تحقّق أنّه من أجل كلّ $x$ من $]-2;8[$: $f'(x)=\frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)}$. ($f'$ مشتقة الدّالة $f$)

3)ادرس إشارة $f'(x)$ على المجال $]-2;8[$ وشكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$.

4)عيّن نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع محوري الإحداثيات.

5)بيّن أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]-2;8[$: $(6-x)$ ينتمي إلى $]-2;8[$ و$f(6-x)=f(x)$، ثمّ فسّر النتيجة بيانياً.

6)ارسم المنحنى $(C_f)$.

7)لتكن الدّالة العددية $F$ المعرّفة على المجال $]-2;8[$ بِـ:

$$F(x)=(x+2)\ln(x+2)+(x-8)\ln(-x+8)-2x-x\ln 16.$$

بيّن أنّ $F$ دّالة أصلية لـ $f$ على المجال $]-2;8[$.

8)احسب بِـ $cm^2$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$، $x=0$ وَ $x=4$.

# مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال اللوغاريتمية -بكالوريات جزائرية)

## الحلول// الشعبة: تسيير وإقتصاد.

## حل التمرين 01: (03 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $P(x)$ كثير الحدود حيث: $P(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

**1.أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$:**

$P(x) = 0$ تُكافئ $2x^2 - 5x + 2 = 0$، **نحسب مميزها $\Delta$:** $\Delta = (-5)^2 - 4(2)(2) = 9 > 0$

إذن: للمعادلة حلين متمايزين هما، $x' = \frac{-(-5)+\sqrt{9}}{2(2)} = \frac{5+3}{4} = 2$ وَ $x'' = \frac{-(-5)-\sqrt{9}}{2(2)} = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$.

**ب) استنتج في المجال $]0;+\infty[$ حلول المتراجحة التالية، $2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 > 0$:**

نضع: $X = \ln x$ نجد: $2X^2 - 5X + 2 > 0$، **ندرس إشارة $2X^2 - 5X + 2$** (الجذرين هما $2$ وَ $\frac{1}{2}$)

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2X^2 - 5X + 2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

وبالتالي: $X \in ]-\infty;\frac{1}{2}[ \cup ]2;+\infty[$ أي: $\ln x \in ]-\infty;\frac{1}{2}[ \cup ]2;+\infty[$؛ إذن: $x \in ]0;e^{\frac{1}{2}}[ \cup ]e^2;+\infty[$.

**2.حل في $\mathbb{R}$ المعادلة، $2^{2x+1} = 5 \times 2^x - 2$:**

$2^{2x+1} = 5 \times 2^x - 2$ تُكافئ: $2^1 \times 2^{2x} - 5 \times 2^x + 2 = 0$

أي: $2 \times (2^x)^2 - 5 \times 2^x + 2 = 0$

نضع: $Y = 2^x$ نجد: $2Y^2 - 5Y + 2 = 0$

وعليه: $Y = \frac{1}{2}$ أو $Y = 2$

أي: $2^x = \frac{1}{2}$ أو $2^x = 2$

وبالتالي: $2^x = 2^{-1}$ أو $2^x = 2^1$

إذن: $x = -1$ أو $x = 1$.

## حل التمرين 02: (04 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $f(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x - 3$ وَ $D_f = ]0;+\infty[$.

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس. ($\ln$ هو رمز اللوغاريتم النيبيري)

**1)أ) حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة، $f(x) = 0$:**

لدينا: $f(x) = 0$ يعني: $(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0$

وبوضع: $\ln x = Y$ نجد: $Y^2 + 2Y - 3 = 0$ ... (1)؛ مميزها: $\Delta = 2^2 - 4(1)(-3) = 16 > 0$

المعادلة (1) تقبل حلين متمايزين هما، $Y' = \frac{-2+\sqrt{16}}{2(1)} = 1$ وَ $Y'' = \frac{-2-\sqrt{16}}{2(1)} = -3$.

- من أجل $Y' = 1$ يكون $\ln x = 1$ ومنه: $x = e$.
- من أجل $Y'' = -3$ يكون $\ln x = -3$ ومنه: $x = e^{-3}$.

إذن: $S = \{e^{-3}; e\}$.



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**تفسير النتيجة هندسيا:** $(C_f)$ يقطع **حامل محور الفواصل** في نقطتين فاصلتيهما، $e$ وَ $e^{-3}$.

**ب) تحليل $f(x)$ إلى جداء عاملين:**

كثير الحدود $Y^2+2Y-3$ يقبل **جذرين متمايزين** هما، $Y'=1$ وَ $Y''=-3$.

فيُكتب من الشكل: $Y^2+2Y-3=1(Y-Y')(Y-Y'')=(Y-1)(Y+3)$

ومن أجل $\ln x=Y$ نجد: $\boxed{f(x)=(\ln x)^2+2\ln x-3=(\ln x-1)(\ln x+3)}$.

**جـ) حل في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة، $2\ln x+2\geq 0$:**

$2\ln x+2\geq 0$ تُكافئ $\ln x\geq -1$ ومنه: $x\geq e^{-1}$ أي: $x\geq \frac{1}{e}$ إذن: $\boxed{S=\left[\frac{1}{e};+\infty\right[}$.

**2)حساب $f'(x)$ واستنتاج اتجاه تغيّر الدّالة $f$ :**

$f$ **قابلة للإشتقاق** على $]0;+\infty[$، ولدينا: $\boxed{f'(x)=2\left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)+2\times\frac{1}{x}=\frac{2\ln x+2}{x}}$.

ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(2\ln x+2)$ على المجال $]0;+\infty[$.

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2\ln x+2$ | ‖ | - | 0 | + | |
| $f'(x)$ | ‖ | - | 0 | + | |

إذن: $f$ **متناقصة تماما** على المجال $\left]0;\frac{1}{e}\right]$، و**متزايدة تماما** على المجال $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$.

**3)تبيان أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيين إحداثييها:**

لدينا: $f''(x)=\frac{2\left(\frac{1}{x}\right)\times x-1\times(2\ln x+2)}{x^2}=\frac{2-(2\ln x+2)}{x^2}=\frac{-2\ln x}{x^2}=\frac{2(-\ln x)}{x^2}$.

ومنه: إشارة $f''(x)$ من إشارة $(-\ln x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | ‖ | - | 0 | + | |
| $f''(x)$ | ‖ | + | 0 | - | |

نلاحظ أنّ: $f''(x)$ **تنعدم عند 1 مغيّرةً إشارتها**، إذن: $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف هي: $I(1;f(1))$؛ أي: $\boxed{I(1;-3)}$.

## حل التمرين 03: (09 نقاط) بكالوريا 2010// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

$I$)لدينا: $g(x)=x^2-2x-4\ln(x-1)$ وَ $D_g=]1;+\infty[$.

$(\Gamma)$ التمثيل البياني لـ$g$ في معلم متعامد ومتجانس.

**1)تعيين بيانيا عدد حلول المعادلة $g(x)=0$:**

بمأنّ $(\Gamma)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين؛ فإنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلين متمايزين.

**2)حساب $g(2)$:**

بالتعويض نجد: $g(2)=(2)^2-2(2)-4\ln(2-1)=0$.

**3)تبيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً $\alpha$ حيث $2,87<\alpha<2,88$:**

- $g$ **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $]2,87;2,88[$

(لأنّ من البيان نلاحظ أنّها **متزايدة تماما** على المجال $[2,5;+\infty[$)

- ولدينا: $\begin{cases}g(2,87)\simeq -0,0069\\ g(2,88)\simeq 0,0093\end{cases}$، أي: $g(2,87)\times g(2,88)<0$



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

إذن: **حسب مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً $\alpha$ حيث $2,87<\alpha<2,88$.

**4)استنتاج حسب قيم $x$، إشارة $g(x)$ في المجال $]1;+\infty[$ :**

من البيان وحسب الأسئلة السابقة ينتج:

| $x$ | 1 | | 2 | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | + | 0 | - | 0 | + | |

$II$)لدينا: $f(x)=x-3+4\frac{\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}$ وَ $D_f=]1;+\infty[$.

$(C_f)$ التمثيل البياني لـ$f$ في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

**1)أ-إيجاد نهاية الدّالة $f$ عند $+\infty$: (علماً أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ )**

بوضع: $\boxed{X=x-1}$ (لما $x\to+\infty$، فإنّ $X\to+\infty$)

نجد: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}\left(X-2+4\frac{\ln X}{X}+\frac{5}{X}\right)=+\infty$

(لأنّ $\lim\limits_{X\to+\infty}(X-2)=+\infty$ وَ $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0$ وَ $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{5}{X}=0$ )

**ب-حساب $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}f(x)$ ثم تفسير النتيجة هندسيا:**

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\left(x-3+\frac{4\ln(x-1)+5}{x-1}\right)=-\infty$،

(لأنّ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\ln(x-1)=-\infty$ وَ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}(x-1)=0^+$)

**تفسير النتيجة هندسيا:**

بمأنّ: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}f(x)=-\infty}$، فإنّ: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x=-1}$ (المُوازي لمحور التراتيب) مُقارب للمنحنى $(C_f)$.

**جـ-تبيان أنّ المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x-3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $+\infty$:**

**(نُبين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=0$ )**

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4\frac{\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}\left(4\frac{\ln X}{X}+\frac{5}{X}\right)=0$

إذن: المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x-3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $+\infty$.

**د-إيجاد فاصلة نقطة تقاطع $(\Delta)$ مع $(C_f)$:**

**نحل المعادلة $f(x)=x-3$ في المجال $]1;+\infty[$.**

لدينا: $f(x)=x-3$ معناه: $4\frac{\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}=0$

ومنه: $\frac{4\ln(x-1)+5}{x-1}=0$

وعليه: $4\ln(x-1)+5=0$ وَ $x-1>0$

وبالتالي: $\boxed{x=e^{-\frac{5}{4}}+1}$؛ (وهي فاصلة نقطة تقاطع $(\Delta)$ مع $(C_f)$ ).

**هـ-دراسة الوضعية النسبية للمنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$: (ندرس إشارة الفرق $f(x)-(x-3)$)**

لدينا: $f(x)-(x-3)=\frac{4\ln(x-1)+5}{x-1}$، ومنه:

إشارة الفرق $f(x)-(x-3)$ من إشارة البسط ( لأنّ: $x-1>0$ على المجال $]1;+\infty[$ )



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

نضع: $4\ln(x-1)+5>0$ نجد: $x>e^{-\frac{5}{4}}+1$ **إذن:**

| $x$ | $1$ | | $e^{-\frac{5}{4}}+1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $4\ln(x-1)+5$ | ‖ | - | 0 | + | |
| $f(x)-(x-3)$ | ‖ | - | 0 | + | |
| الوضع النسبي | ‖ | $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ | |

**2)أ-تبيان أنّه من أجل كل عدد $x$ من المجال $]1;+\infty[$ لدينا، $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$:**

$f$ قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$، ولدينا:

$$f'(x)=1+4\left(\frac{\frac{1}{x-1}\times(x-1)-1\times\ln(x-1)}{(x-1)^2}\right)-\frac{5(1)}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2+4-4\ln(x-1)-5}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-4\ln(x-1)}{(x-1)^2}$$

ومنه: $\boxed{f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^2}}$ (وهو المطلوب).

**ب-استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة $f$ وتشكيل جدول تغيّراتها:**

لدينا: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$، ومنه: لـ$f'(x)$ وَ$g(x)$ **نفس إشارة** وعليه:

| $x$ | $1$ | | $2$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | + | 0 | - | 0 | + | |

إذن: $f$ **متزايدة تماما** على كل من المجالين $[2;\alpha]$ وَ$]-\infty;2]$، وَ**متناقصة تماما** على المجال $[\alpha;+\infty[$.

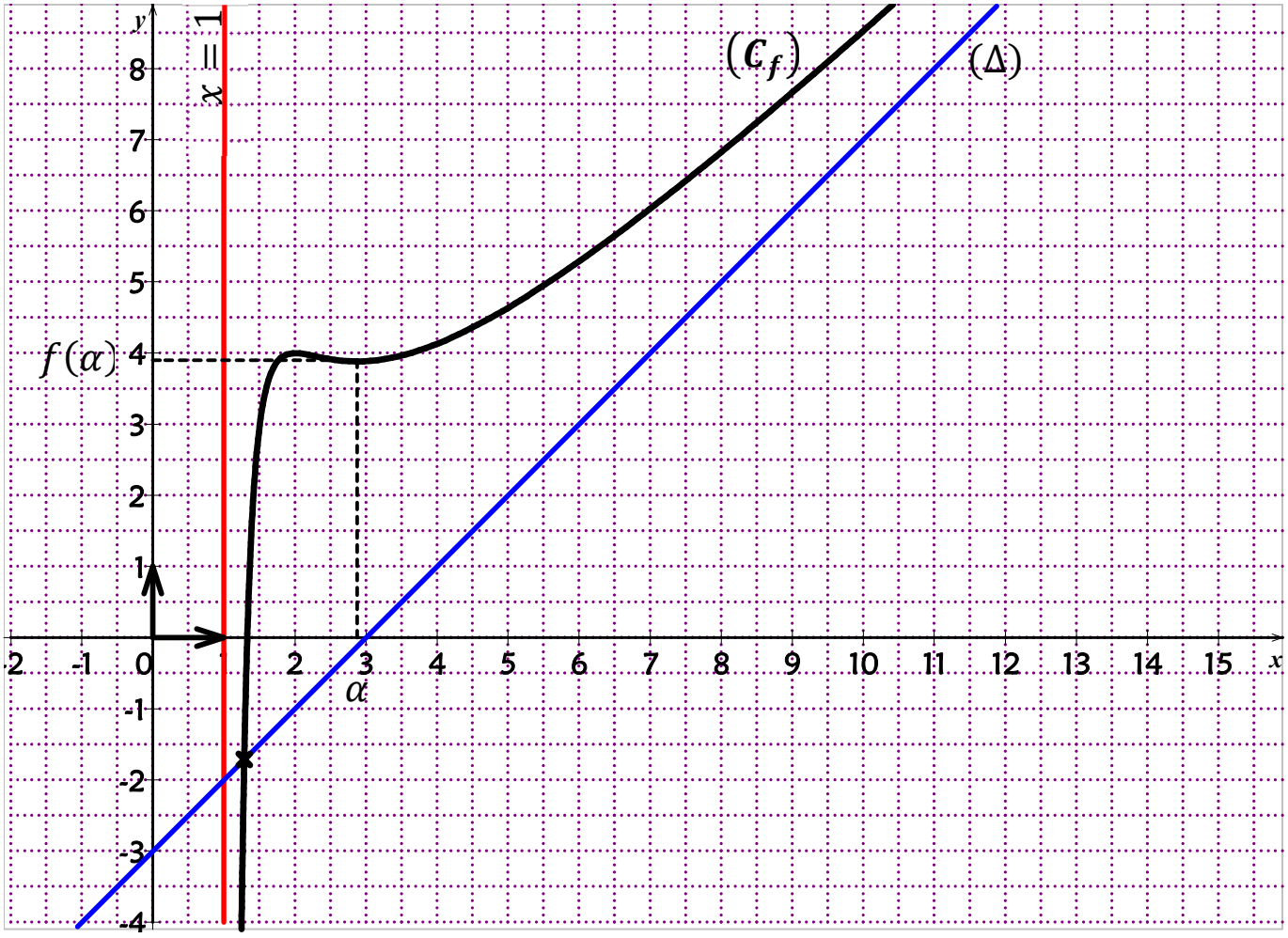
**ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

| $x$ | $1$ | | $2$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | + | 0 | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | ‖ | $-\infty$ ↗ | $4$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

**3)رسم المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(C_f)$: (بأخذ $f(\alpha)\simeq 3,9$)**



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM




**4)أ-تعيين مشتقة الدّالة $x \mapsto [\ln(x-1)]^2$، ثم استنتاج دّالة أصلية للدّالة $f$ على المجال $]1;+\infty[$ :**

نضع: $h(x) = [\ln(x-1)]^2$، $h$ قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$، ولدينا:

$$h'(x) = 2 \times \frac{1}{x-1} \times [\ln(x-1)]^1 = 2\frac{\ln(x-1)}{x-1}$$

**استنتاج دّالة أصلية للدّالة $f$ على المجال $]1;+\infty[$ :**

الدّالة $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2[\ln(x-1)]^2 + 5\ln(x-1)$ أصلية للدّالة $f$ على المجال $]1;+\infty[$.

**ب-حساب $\int_2^5 f(x)dx$:**

لدينا: $\int_2^5 f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2[\ln(x-1)]^2 + 5\ln(x-1)\right]_2^5$

ومنه: $\int_2^5 f(x)dx = \left[\frac{25}{2} - 15 + 2[\ln(4)]^2 + 5\ln(4)\right] - [-4] = 8[\ln 2]^2 + 10\ln 2 + \frac{3}{2}$

**تفسير النتيجة هندسيا:**

التكامل $\int_2^5 f(x)dx$ هو **مساحة** الحيز المحدد بالمنحنى $(C_f)$ وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذوي المعادلتين $x=2$ و $x=5$.

## حل التمرين 04: (03 نقاط) بكالوريا 2011// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

**تحديد الاقتراح الصحيح، مع التبرير:**

1)مجموعة حلول المتراجحة $\ln(-3x+2) \leq \ln 3$ هي: أ. $\left[-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right[$؛

**التعليل:** لدينا: $D = \left]-\infty;\frac{2}{3}\right[$ (المجموعة المرجعية)



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ولدينا: $\ln(-3x+2) \leq \ln 3$ تُكافئ: $-3x+2 \leq 3$

ومنه: $-3x \leq 1$

وعليه: $x \geq -\frac{1}{3}$

وبالتالي: $S = D \cap \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right[$ إذن: $\boxed{S = \left[-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right[}$.

2)لتكن $f$ الدّالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعبارة $f(x) = \frac{1}{x}$. الدّالة الأصلية $F$ للدّالة $f$ على المجال $]0; +\infty[$ والتي تنعدم من أجل $x = e$ معرّفة كما يلي: **ب.** $F(x) = -1 + \ln x$؛

**التعليل:** لدينا: من أجل كل $x$ من $]0; +\infty[$، $F(x) = \ln x + k$ (حيث $k \in \mathbb{R}$)

ولدينا: $F(e) = 0$ تُكافئ: $\ln e + k = 0$

ومنه: $1 + k = 0$ وبالتالي: $k = -1$ إذن: $\boxed{F(x) = -1 + \ln x}$.

**ط02)** الاقتراح الصحيح هو: **ب.** $F(x) = -1 + \ln x$؛ **لأنّ:**

$$\boxed{F(x) = \int_e^x \frac{1}{t}dt = \left[\ln t\right]_e^x = \ln x - \ln e = \ln x - 1}.$$

3)القيمة المتوسطة للدّالة $g: x \mapsto \frac{x^2}{4}$ على المجال $[-2; 2]$ تساوي: **جـ.** $\frac{1}{3}$؛ **لأنّ:**

$$\boxed{m = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2} g(x)dx = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{12}x^3\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{12}\left[\left(2^3\right)-\left((-2)^3\right)\right] = \frac{1}{3}}.$$

## حل التمرين 05: (06 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $D_f = [1; +\infty[$ وَ $f(x) = ax + b + cx\ln x$؛ حيث $a$، $b$ و$c$ أعداد حقيقية.

**1)تخمين بيانياً اتجاه تغيّر $f$ ونهاية $f$ عند $+\infty$:**

- $f$ **متزايدة تماما** على المجال $[1; \sqrt{e}]$، و**متناقصة تماما** على المجال $[\sqrt{e}; +\infty[$؛
- $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.

**2)أ-حساب بدلالة $a$ و$c$ عبارة $f'(x)$ حيث $f'$ هي الدّالة المشتقة للدّالة $f$ على $[1; +\infty[$:**

$f$ **قابلة للاشتقاق** على $]1; +\infty[$، ولدينا: $\boxed{f'(x) = a + c\left(1\times\ln x + \frac{1}{x}\times x\right) = a + c(\ln x + 1)}$.

ب-باستعمال معطيات في الشكل، وعلماً أنّ $f(5) = 16 - 10\ln 5$.

**-تبيان أنّ، $f(x) = 3x + 1 - 2x\ln x$ :**

لدينا: $\begin{cases} f(1) = 4 \\ f'(\sqrt{e}) = 0 \\ f(5) = 16 - 10\ln 5 \end{cases}$، أي: $\begin{cases} a(1) + b + c(1)\ln 1 = 4 \\ a + c\left(\ln\sqrt{e} + 1\right) = 0 \\ a(5) + b + c(5)\ln 5 = 16 - 10\ln 5 \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} a + b = 4 \\ a + c\left(\frac{1}{2}\ln e + 1\right) = 0 \\ 5a + b + 5c\ln 5 = 16 - 10\ln 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ a+\frac{3}{2}c=0 \\ 5a+b=16 \\ 5c=-10 \end{cases}$$ أي:

وبالتالي: $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \\ c=-2 \end{cases}$؛ إذن: $\boxed{f(x)=3x+1-2x\ln x}$.

**جـ-التحقق من صحة التخمين في السؤال 1، ثم تشكيل جدول تغيّرات الدّالة $f$ :**

- لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(3+\frac{1}{x}-\ln x\right)\right]=-\infty$ لأنّ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty \end{cases}$.
- لدينا: $f'(x)=1-2\ln x$،

**إشارة $f'(x)$ على المجال $[1;+\infty[$:**

$\boxed{f'(x)>0}$ يعني: $1-2\ln x>0$ ومنه: $\ln x<\frac{1}{2}$ وعليه: $1<x<e^{\frac{1}{2}}$ أي: $\boxed{1<x<\sqrt{e}}$

$\boxed{f'(x)=0}$ يعني: $1-2\ln x=0$ ومنه: $\ln x=\frac{1}{2}$ وعليه: $x=e^{\frac{1}{2}}$ أي: $\boxed{x=\sqrt{e}}$

$\boxed{f'(x)<0}$ يعني: $1-2\ln x<0$ ومنه: $\ln x>\frac{1}{2}$ وعليه: $x>e^{\frac{1}{2}}$ أي: $\boxed{x>\sqrt{e}}$

ومنه: $f$ **متزايدة تماما** على المجال $[1;\sqrt{e}]$، و**متناقصة تماما** على المجال $[\sqrt{e};+\infty[$؛

**ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

| $x$ | 1 | | $\sqrt{e}$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | | - | | |
| $f(x)$ | 4 | ↗ | $f(\sqrt{e})$ | ↘ | 0 | ↘ | $-\infty$ |

**حيث** $f(\sqrt{e})=3(\sqrt{e})+1-2(\sqrt{e})\ln\sqrt{e}=3\sqrt{e}+1-2\sqrt{e}\times\frac{1}{2}\ln e=2\sqrt{e}+1$.

**3)تبيان أنّ المعادلة، $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ على $[1;+\infty[$:**

- لدينا: حسب جدول التغيرات، $f$ متزايدة تماما على المجال $[1;\sqrt{e}]$ وَ $f(1)=4$

أي: $f(x)=0$ لا تقبل حلولا على المجال $[1;\sqrt{e}]$.

- على المجال $[\sqrt{e};+\infty[$:
  - $f$ **مستمرة ومتناقصة تماما** على المجال $[\sqrt{e};+\infty[$
  - ولدينا: $\begin{cases} f(\sqrt{e})=2\sqrt{e}+1\simeq 4{,}30 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \end{cases}$ أي: $0\in\left]-\infty;2\sqrt{e}+1\right]$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ في المجال $[\sqrt{e};+\infty[$.

**التحقق أنّ $4{,}95<\alpha<4{,}96$:**

لدينا: $\begin{cases} f(4{,}95)\simeq 0{,}02 \\ f(4{,}96)\simeq -0{,}01 \end{cases}$، أي: $f(4{,}95)\times f(4{,}96)<0$ إذن: $\boxed{4{,}95<\alpha<4{,}96}$.

4)العدد الحقيقي $S$ معرّف كما يلي، $S=\alpha$ (حيث $\alpha$ هو حل المعادلة $f(x)=0$).



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**أ-تبيان أنّ الدّالة، $g: x \mapsto 2x^2 + x - x^2 \ln x$ دّالة أصلية للدّالة $f$ على $]1; +\infty[$:**

$g$ قابلة للاشتقاق على $]1; +\infty[$، ولدينا:

$$g'(x) = 4x + 1 - \left(2x \ln x + \frac{1}{x} \times x^2\right) = 4x + 1 - 2x \ln x - x = 3x + 1 - 2x \ln x = f(x)$$

إذن: $g: x \mapsto 2x^2 + x - x^2 \ln x$ دّالة أصلية للدّالة $f$ على $]1; +\infty[$.

**ب-إعطاء تفسيرا هندسيا للعدد $S$:**

العدد $S$ هو مساحة الحيز من المستوي المحدّد بالمنحنى $(C_f)$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = \alpha$.

**حساب بدلالة $\alpha$، العدد $S$:**

لدينا: $S = \int_1^{\alpha} f(x) = dx = [g(x)]_1^{\alpha} = g(\alpha) - g(1) = 2\alpha^2 + \alpha - 3 - \alpha^2 \ln \alpha$.

**جـ-تبيان أنّ، $S = \frac{1}{2}\alpha(\alpha + 1) - 3$:**

لدينا: $\alpha$ حل للمعادلة $f(x) = 0$ أي: $f(\alpha) = 0$ ومنه: $3\alpha + 1 - 2\alpha \ln \alpha = 0$؛ وعليه: $\boxed{\ln \alpha = \frac{3\alpha+1}{2\alpha}}$

وبالتعويض نجد: $S = 2\alpha^2 + \alpha - 3 - \alpha^2\left(\frac{3\alpha+1}{2\alpha}\right) = 2\alpha^2 + \alpha - \frac{1}{2}\alpha(3\alpha + 1) - 3$

ومنه: $S = \frac{1}{2}\alpha[4\alpha + 2 - (3\alpha + 1)] - 3 = \frac{1}{2}\alpha(\alpha + 1) - 3$ (وهو المطلوب).

**استنتاج حصرا للعدد $S$:**

لدينا: $\begin{cases} 4{,}95 < \alpha < 4{,}96 \\ S = \frac{1}{2}\alpha(\alpha + 1) - 3 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} \frac{4{,}95}{2} < \frac{1}{2}\alpha < \frac{4{,}96}{2} \\ 5{,}95 < \alpha + 1 < 5{,}96 \end{cases}$

وبالتالي: $\frac{4{,}95}{2}(5{,}95) - 3 < \frac{1}{2}\alpha(\alpha + 1) - 3 < \frac{4{,}96}{2}(5{,}96) - 3$

إذن: $\boxed{11{,}73 < S < 11{,}78}$.

## حل التمرين 06: (07 نقاط) بكالوريا 2013// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

***I*) لدينا:** $g(x) = \frac{-x^2+x+2}{x^2}$ وَ $D_g = ]0; +\infty[$.

**1) تعيين، تبعا لقيم $x$، إشارة $g(x)$:**

**إشارة $g(x)$ من إشارة البسط $(-x^2 + x + 2)$ على $]0; +\infty[$.**

نضع: $-x^2 + x + 2 = 0$ مميزها: $\Delta = (1)^2 - 4(-1)(2) = 9 > 0$

للمعادلة حلين متمايزين هما:

$x' = \frac{-(1)+\sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \notin ]0; +\infty[$ وَ $x'' = \frac{-(1)-\sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1-3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$.

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**2)أ-التحقق أنه، من أجل كل $x$ من $]0; +\infty[$، $g(x) = -1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$:**

من أجل كل $x$ من $]0; +\infty[$، لدينا: $\boxed{g(x) = \frac{-x^2+x+2}{x^2} = \frac{-x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = -1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}$.

**ب-استنتاج الدّوال الأصلية للدّالة $g$ على $]0; +\infty[$:**

الدّوال الأصلية للدّالة $g$ على $]0; +\infty[$، هي دّوال من الشكل $G: x \mapsto -x + \ln x + \frac{2}{x} + k$ (حيث $k \in \mathbb{R}$)



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**II)لدينا:** $f(x)=3-x-\frac{2}{x}+\ln x$ وَ $D_f=]0;8]$.

$(C_f)$ التمثيل البياني لـ$f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**1)أ-التحقق أنّ $f$ هي الدّالة الأصلية للدّالة $g$ على المجال $]0;8]$ والتي تنعدم عند 1:**

**ط01)** لدينا: $\begin{cases} f'(x)=-1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}=g(x) \\ f(1)=3-1-\frac{2}{1}+\ln 1=0 \end{cases}$، إذن: $f$ هي الدّالة الأصلية للدّالة $g$ على المجال $]0;8]$ والتي تنعدم عند 1.

**ط02)** لدينا: $\int_1^x g(t)dt=[G(t)]_1^x=G(x)-G(1)=\left(-x+\ln x-\frac{2}{x}+k\right)-\left(-1+\ln 1-\frac{2}{1}+k\right)$

ومنه: $\int_1^x g(t)dt=-x+\ln x-\frac{2}{x}+3=f(x)$،

إذن: $f$ هي الدّالة الأصلية للدّالة $g$ على المجال $]0;8]$ والتي تنعدم عند 1.

**ب-استنتاج اتجاه تغير الدّالة $f$ على المجال $]0;8]$:**

لدينا: من أجل كل $x$ من $]0;8]$، $\boxed{f'(x)=g(x)}$ (لأنّ $f$ دّالة أصلية لـ$g$)

أي: لـ$f'(x)$ وَ$g(x)$ **نفس الإشارة،**

إذن: $f$ **متزايدة تماما** على المجال $]0;2]$، وَ**متناقصة تماما** على المجال $[2;8]$.

**جـ-حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$، ثم تفسير النتيجة هندسياً:**

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(3-x-\frac{2}{x}+\ln x)=-\infty$، لأنّ: $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(-\frac{2}{x}\right)=-\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln x=-\infty \end{cases}$

**التفسير الهندسي:**

بمأنّ: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty}$، فإنّ: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x=0}$ (محور التراتيب) مُقارب لـ$(C_f)$.

**د-تشكيل جدول تغيرات الدّالة $f$ :**

| $x$ | 0 | | 2 | | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $\ln 2$ | ↘ | $\frac{-21}{4}+3\ln 2$ |

**2)تبيان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين، أحدهما $\alpha$، حيث $3,8<\alpha<3,9$:**

**بالنسبة للحل الأوّل:**

- $f$ **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $]0;2]$
- ولدينا: $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty \\ f(2)=\ln 2>0 \end{cases}$ أي: $0\in\ ]-\infty;\ln 2]$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً وهو العدد ***1*** في المجال $]0;2]$.

**بالنسبة لـ$\alpha$:**

- $f$ **مستمرة ومتناقصة تماما** على المجال $[2;8]$ (لأنّها **متناقصة تماما** على المجال $[2;8]$)

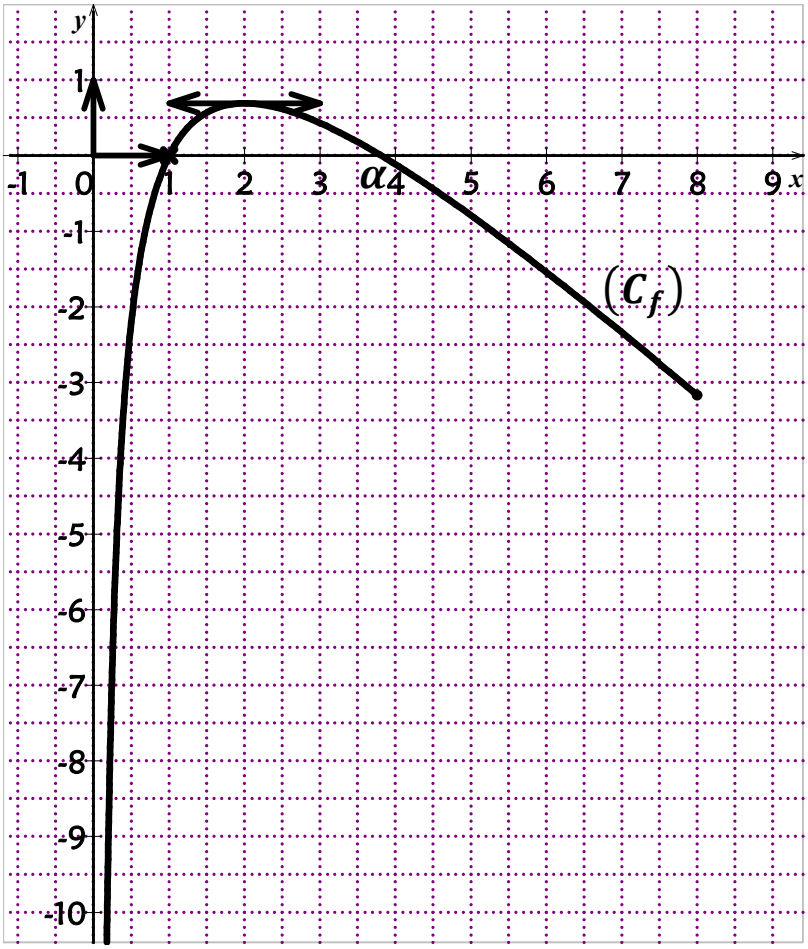


قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

- ولدينا: $\begin{cases} f(3,8) \simeq 0,01 \\ f(3,9) \simeq -0,05 \end{cases}$ أي: $f(3,8) \times f(3,9) < 0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ حيث $3,8 < \alpha < 3,9$.

**3)تمثّيل بيانياً $(C_f)$:**




***III*)لدينا:** $h(x) = f(3x+2)$ وَ $D_h = \left]-\frac{2}{3}; 2\right]$.

**نلاحظ أنّ:** $h$ عبارة عن مركب دّالتين $f$ وَ $x \mapsto 3x+2$.

1)في حالة: $-\frac{2}{3} < x \leq 0$ فإنّ: $-2 < 3x \leq 0$ ويكون: $0 < 3x+2 \leq 2$،

وفي حالة: $0 \leq x \leq 2$ فإنّ: $0 \leq 3x \leq 6$ ويكون: $2 \leq 3x+2 \leq 8$.

**2)حساب $h'(x)$: (عبارة $h(x)$ غير مطلوبة)**

تذكير: $\boxed{[u(ax+b)]' = au'(ax+b)}$.

$h$ **قابلة للاشتقاق** على $\left]-\frac{2}{3}; 2\right]$، ولدينا: $\boxed{h'(x) = 3f'(3x+2)}$.

**3)تشكيل جدول تغيّرات $h$:**

إشارة $h'(x)$ من إشارة $f'(3x+2)$.

**لدينا:**

| $3x+2$ | **0** | | **2** | | **8** |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(3x+2)$ | ‖ | **+** | 0 | **-** | |
| $f(3x+2)$ | ‖ | ↗ | $\ln 2$ | ↘ | $\frac{-21}{4} + 3\ln 2$ |

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

وباستعمال السؤال 1) نجد:

| $x$ | $-\frac{2}{3}$ | | $0$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(x)$ | ‖ | $-\infty$ ↗ | $\ln 2$ | ↘ $\frac{-21}{4}+3\ln 2$ | |

## حل التمرين 07: (04 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

**1)أ) التحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ فإنّ، $(2x+1)(x^2-5x+6)=2x^3-9x^2+7x+6$:**

لدينا: $(2x+1)(x^2-5x+6)=2x(x^2-5x+6)+1(x^2-5x+6)$

$=2x^3-10x^2+12x+x^2-5x+6=2x^3-9x^2+7x+6$

إذن: $\boxed{(2x+1)(x^2-5x+6)=2x^3-9x^2+7x+6}$.

**ب) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة، $2(\ln x)^3-9(\ln x)^2+7\ln x+6=0$:**

لدينا: $D=]0;+\infty[$ ($D$ المجموعة المرجعية)

**باستعمال السؤال 1)أ)**

$2(\ln x)^3-9(\ln x)^2+7\ln x+6=0$ تُكافئ: $(2\ln x+1)[(\ln x)^2-5\ln x+6]=0$

ومنه: $\begin{cases}2\ln x+1=0\\ \text{أو}\\ (\ln x)^2-5\ln x+6=0\end{cases}$

- $2\ln x+1=0$ معناه: $\ln x=-\frac{1}{2}$ ومنه: $x=e^{-\frac{1}{2}}$ أي: $\boxed{x=\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\in D}$،
- بوضع: $\boxed{X=\ln x}$، المعادلة $(\ln x)^2-5\ln x+6=0$

تُصبح: $(*)\ X^2-5X+6=0$ **مميز $(*)$:** $\Delta=(-5)^2-4(1)(6)=1>0$

للمعادلة $(*)$ حلين متمايزين هما: $X'=\frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2(1)}=3$ و $X''=\frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2(1)}=2$.

**وبالعودة إلى الوضع** نجد: من أجل $X=3$ أي: $\ln x=3$ فإنّ: $\boxed{x=e^3\in D}$

وَمن أجل $X=2$ أي: $\ln x=2$ فإنّ: $\boxed{x=e^2\in D}$

إذن: مجموعة الحلول هي $\boxed{S_1=\left\{\frac{1}{\sqrt{e}};e^2;e^3\right\}}$.

**حل في $\mathbb{R}$ المعادلة، $6e^{-3x}+7e^{-2x}-9e^{-x}+2=0$:**

$6e^{-3x}+7e^{-2x}-9e^{-x}+2=0$ تُكافئ: $e^{3x}(6e^{-3x}+7e^{-2x}-9e^{-x}+2)=e^{3x}(0)$

تُصبح: $6+7e^x-9e^{2x}+2e^{3x}=0$

أي: $2(e^x)^3-9(e^x)^2+7e^x+6=0$

ومنه: $(2e^x+1)[(e^x)^2-5e^x+6]=0$

وعليه: $(2e^x+1)(e^x-3)(e^x-2)=0$

وبالتالي: $e^x-3=0$ أو $e^x-2=0$ (لأنّ: $2e^x+1>0$)

أي أنّ: $x=\ln 3$ أو $x=\ln 2$.



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

إذن: مجموعة الحلول هي $S_2 = \{\ln 2\,;\ln 3\}$.

**جـ) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة، $2e^{3x} - 9e^{2x} + 7e^x + 6 \leq 0$: (ندرس إشارة $2e^{3x} - 9e^{2x} + 7e^x + 6$)**

**إشارة $(2e^{3x} - 9e^{2x} + 7e^x + 6)$ من إشارة $[(e^x)^2 - 5e^x + 6]$**

(لأنّ $2e^{3x} - 9e^{2x} + 7e^x + 6 = (2e^x + 1)[(e^x)^2 - 5e^x + 6]$ وَ $2e^x + 1 > 0$)

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln 2$ | | $\ln 3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(e^x)^2 - 5e^x + 6$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $2e^{3x} - 9e^{2x} + 7e^x + 6$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

إذن: مجموعة الحلول هي $S_3 = [\ln 2\,;\ln 3]$.

**2)حل في $\mathbb{R}$ المعادلة، $\log(x^2 + 100) = 1 + \log 2 + \log x$:**

لدينا: $D = ]0;+\infty[$ ($D$ المجموعة المرجعية)

$\log(x^2 + 100) = 1 + \log 2 + \log x$ تُكافئ: $\log(x^2 + 100) = \log 10 + \log 2 + \log x$

وتُصبح: $\log(x^2 + 100) = \log(10 \times 2 \times x)$

ومنه: $x^2 + 100 = 10 \times 2 \times x$

أي: $(x - 10)^2 = 0$

يعني: $x - 10 = 0$، وبالتالي: $x = 10 \in D$

إذن: مجموعة الحلول هي $S_4 = \{10\}$.

## حل التمرين 08: (07 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

***I*)لدينا:** $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$ وَ $D_g = ]0;+\infty[$.

**1)دراسة اتجاه تغيّر الدّالة $g$:**

$g$ **قابلة للاشتقاق** على $]0;+\infty[$، ولدينا: $g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = -\left(2x + \frac{1}{x}\right) < 0$،

إذن: $g$ **متناقصة تماما** على المجال $]0;+\infty[$.

**2) حساب $g(1)$ ثمّ استنتاج تبعا لقيم $x$ إشارة $g(x)$:**

لدينا: $g(1) = 1 - (1)^2 - \ln 1 = 0$.

**استنتاج تبعا لقيم $x$ إشارة $g(x)$:**

بمأنّ: $g$ **متناقصة تماما** على المجال $]0;+\infty[$ وَ $g(1) = 0$، فإنّ:

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | + | 0 | - | |

***II*)لدينا:** $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$ وَ $D_f = ]0;+\infty[$.

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

**1)أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: (علماً أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)**

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$، لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - 1) = +\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

**ب) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ثمّ تفسير النتيجة هندسيا:**



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لدينا: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln x}{x} = -\infty$.

**التفسير الهندسي:**

المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x = 0}$ (محور التراتيب) مُقارب لـ$(C_f)$.

**2)أ) تبيان أنّه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ فإنّ، $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ ثمّ استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة $f$ :**

$f$ **قابلة للاشتقاق** على $]0;+\infty[$، ولدينا: $f'(x) = 1 - \left(\frac{\frac{1}{x}\times x - 1\times \ln x}{x^2}\right) = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{-(1 - x^2 - \ln x)}{x^2} = \frac{-g(x)}{x^2}$

**إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$**، وبالتالي:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | - | $0$ | + | |

إذن: $f$ **متناقصة تماما** على المجال $]0;1]$، وَ**متزايدة تماما** على المجال $[1;+\infty[$.

**ب) تشكيل جدول تغيرات الدّالة $f$ :**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | - | $0$ | + | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**3)أ) تبيان أنّ المستقيم $(D)$ الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$:**

**نُبين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (x-1)] = 0$.**

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (x-1)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{x}\right) = 0$ **لأنّ:** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$

ومنه: المستقيم $(D): y = x - 1$ مُقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$.

**ب) دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(D)$: (ندرس إشارة الفرق $[f(x) - (x-1)]$ )**

لدينا: $f(x) - (x-1) = \frac{-\ln x}{x}$،

ومنه: **إشارة الفرق $[f(x) - (x-1)]$ عكس إشارة $(\ln x)$ على المجال $]0;+\infty[$**، وبالتالي:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | ‖ | - | $0$ | + | |
| $f(x) - (x-1)$ | ‖ | + | $0$ | - | |
| **الوضع النسبي** | ‖ $(C_f)$ يقع **فوق** $(D)$ | | $(C_f)$ **يقطع** $(D)$ | | $(C_f)$ يقع **تحت** $(D)$ |

**4)تعيين فاصلة النقطة $A$ من $(C_f)$ التي يكون فيها المماس $(T)$ مُوازيا للمستقيم $(D)$ ثمّ كتابة معادلة للمماس $(T)$:**

$(T)//(D)$ معناه: $f'(x) = 1$ ومنه: $\frac{-g(x)}{x^2} = 1$ أي: $-g(x) = x^2$ وعليه: $\ln x = 1$ إذن: $\boxed{x = e = x_A}$.

- معادلة $(T)$ من الشكل: $y = f'(x_A)(x - x_A) + \underbrace{f(x_A)}_{y_A}$

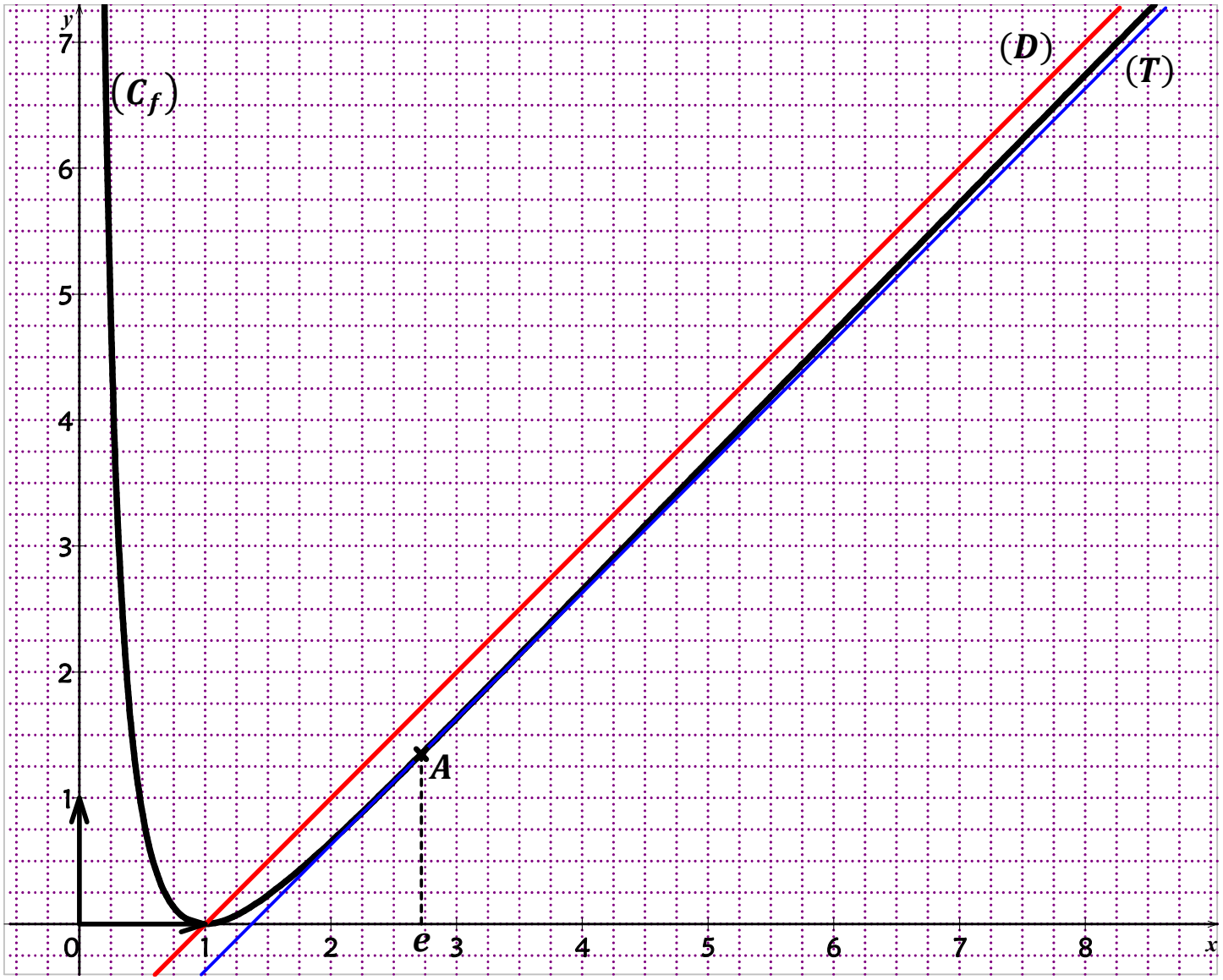


قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ولدينا: $\begin{cases} f'(x_A) = f'(e) = 1 \\ f(x_A) = f(e) = e - 1 - \frac{\ln e}{e} = e - 1 - \frac{1}{e} \end{cases}$،

بالتعويض نجد: $y = 1(x - e) + e - 1 - \frac{1}{e}$ ومنه: $\boxed{(T): y = x - 1 - \frac{1}{e}}$.

**5)رسم $(D)$، $(T)$ و $(C_f)$:**




**6)حساب القيمة المتوسطة للدّالة $f$ على المجال $[1;3]$:**

القيمة المتوسطة للدّالة $f$ على المجال $[1;3]$ هي العدد $m$ والمعرف كما يلي:

$$m = \frac{1}{3-1}\int_1^3 f(x)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}(3)^2 - 3 - \frac{(\ln 3)^2}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2 - 1 - \frac{(\ln 1)^2}{2}\right)\right]$$

ومنه: $\boxed{m = 1 - \frac{(\ln 3)^2}{4}}$.

## حل التمرين 09: (09 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

**I)لدينا:** $D_f = ]-1;+\infty[$، وَ $f(x) = ax + b + 3\ln(x+1)$، حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان.

$(\Gamma)$ التمثيل البياني للدّالة $f$، يقبل في النقطة $A(2;-1+3\ln 3)$ مماساً **مُوازياً لحامل محور الفواصل**

**معناه:** $f'(2) = 0$ وَ $f(2) = -1 + 3\ln 3$.

1)بقراءة بيانية:



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**أ) وضع تخمين حول $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)$ :**

**من البيان:** $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$؛ $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=-\infty}$.

**ب) تشكيل جدول تغيّرات الدّالة $f$ :**

**من البيان:**

| $x$ | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $-1+3\ln 3$ | ↘ | $-\infty$ |

**2)باستعمال المعطيات المتوفرة، إيجاد قيمة كل من $a$ و$b$:**

- $f$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$، ولدينا: $\boxed{f'(x)=a+\frac{3}{x+1}}$
- ولدينا من جهة أخرى: $\begin{cases} f'(2)=0 \\ f(2)=-1+3\ln 3 \end{cases}$ معناه: $\begin{cases} a+1=0 \\ 2a+b+3\ln 3=-1+3\ln 3 \end{cases}$

ومنه: $\boxed{a=-1}$ وَ $\boxed{b=1}$.

إذن: $f(x)=-x+1+3\ln(x+1)$ وَ $f'(x)=-1+\frac{3}{x+1}$.

*II*)باعتبار في هذا الجزء: $f(x)=-x+1+3\ln(x+1)$.

**1)حساب نهاية الدّالة $f$ عند $(-1)$ بقيم أكبر:**

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=-\infty$ ، لأنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} \ln(x+1)=\lim\limits_{\substack{y\to0\\ >}} \ln y=-\infty$.

**2)حساب نهاية الدّالة $f$ عند $+\infty$: (علما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}=0$ )**

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(-1+\frac{1}{x}+3\frac{\ln(x+1)}{x}\right)\right]=-\infty$ ، لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}=0$.

**3)أ) تعيين النقطة $B$ من المنحنى $(\Gamma)$ التي يكون فيها المماس $(T)$ للمنحنى $(\Gamma)$ موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=x$، ثم كتابة معادلة للمماس $(T)$:**

المماس $(T)$ للمنحنى $(\Gamma)$ موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=1x$، معناه: $f'(x)=1$

أي: $-1+\frac{3}{x+1}=1$

ومنه: $x=\frac{1}{2}$

إذن: $B\left(\frac{1}{2};f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ أي: $\boxed{B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}+3\ln\frac{3}{2}\right)}$ (لأنّ: $B\in(\Gamma)$)

**كتابة معادلة للمماس $(T)$:**

**$(T)$ مماس للمنحنى $(\Gamma)$ في النقطة $B$.**

معادلة $(T)$ من الشكل: $y=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)$

ولدينا: $\begin{cases} f'\left(\frac{1}{2}\right)=1 \\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+3\ln\frac{3}{2} \end{cases}$، بالتعويض نجد: $y=1\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}+3\ln\frac{3}{2}$؛ ومنه: $\boxed{(T):y=x+3\ln\frac{3}{2}}$.



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**ب) استنتاج بيانياً، قيم العدد الحقيقي $m$ التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x)=x+m$ حلين موجبين تماماً:**

المعادلة $f(x)=x+m$ تقبل حلين موجبين تماماً من أجل $1<m<3\ln\frac{3}{2}$.

4)لدينا: $g(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$ وَ $D_g=]-1;+\infty[$.

**أ) حساب $g'(x)$؛ ثمّ استنتاج دالة أصلية للدّالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$ :**

$g$ **قابلة للاشتقاق** على $]-1;+\infty[$، ولدينا:

$$g'(x)=\left[1\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}\times(x+1)\right]-1=\ln(x+1)$$

**استنتاج دالة أصلية للدّالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$ :**

بمأنّ: $g$ أصلية للدّالة $x\mapsto\ln(x+1)$ على المجال $]-1;+\infty[$،

فإنّ: الدّالة $3g(x)+x+\frac{1}{2}x^2$ أصلية لـ$f$ على المجال $]-1;+\infty[$.

$$\left(F(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+3(x+1)\ln(x+1)\right)$$

ب) $\alpha$ و $\beta$ فاصلتي نقطتي تقاطع المنحنى $(\Gamma)$ مع حامل محور الفواصل، معناه: $f(\alpha)=f(\beta)=0$.

**تبيان أنّ $\alpha\in]7,37;7,38[$ و $\beta\in]-0,37;-0,36[$ :**

**بالنسبة لـ $\alpha$:**

- $f$ **مستمرة ومتناقصة تماما** على المجال $]7,37;7,38[$ (لأنّها **متناقصة تماما** على $]2;+\infty[$)
- ولدينا: $\begin{cases}f(7,37)\simeq 0,003\\ f(7,38)\simeq -0,002\end{cases}$ أي: $f(7,37)\times f(7,38)<0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ في المجال $]7,37;7,38[$.

**بالنسبة لـ $\beta$:**

- $f$ **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $]-0,37;-0,36[$ (لأنّها **متزايدة تماما** على $]-1;2[$)
- ولدينا: $\begin{cases}f(-0,37)\simeq -0,01\\ f(-0,36)\simeq 0,02\end{cases}$ أي: $f(-0,37)\times f(-0,36)<0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $\beta$ في المجال $]-0,37;-0,36[$.

**جـ) حساب $S$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\Gamma)$ وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما $x=0$، $x=\alpha$:**

لدينا: $S=\int_0^{\alpha}f(x)\,dx=[F(x)]_0^{\alpha}=F(\alpha)-F(0)=F(\alpha)$،

ومنه: $\boxed{S=\left(-\frac{1}{2}\alpha^2-2\alpha+3(\alpha+1)\ln(\alpha+1)\right)ua}$.

**د) التحقق أنّ $S=\left(\frac{1}{2}\alpha^2-2\alpha-1\right)ua$؛ ثمّ تعيين حصراً لـ$S$: ($ua$ وحدة مساحة)**

بمأنّ: $f(\alpha)=0$ فإنّ: $\ln(\alpha+1)=\frac{\alpha-1}{3}$، وبالتعويض نجد:

$$S=\left(-\frac{1}{2}\alpha^2-2\alpha+3(\alpha+1)\left(\frac{\alpha-1}{3}\right)\right)ua=\left(-\frac{1}{2}\alpha^2-2\alpha+\alpha^2-1\right)ua=\left(\frac{1}{2}\alpha^2-2\alpha-1\right)ua$$

**تعيين حصراً لـ$S$:**

لدينا: $7,37<\alpha<7,38$، ومنه: $\begin{cases}\frac{(7,37)^2}{2}<\frac{1}{2}\alpha^2<\frac{(7,38)^2}{2}\\ -2(7,38)-1<-2\alpha-1<-2(7,37)-1\end{cases}$

ويكون: $\boxed{11,39845<S<11,49220}$.

*III*)تنتج إحدى الورشات في اليوم الواحد 7 آلاف قطعة على الأكثر.



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تُنمذج الكلفة الهاشمية $C_m$ (الوحدة 1000 دينار) لإنتاج قطعة إضافية على المجال $[0;7]$ بالدّالة $f$ المعرفة في الجزء ***II***)، أي من أجل $x \in [0;7]$ لدينا $C_m(x) = f(x)$.

نرمز بـ$C_T(x)$ إلى الكلفة الإجمالية لإنتاج $x$ قطعة.

**1)تعيين عبارة الكلفة الإجمالية $C_T(x)$ علماً أن الكلفة الإجمالية لإنتاج الألف قطعة الأولى هي $\frac{5}{2}$:**

نعلم أنّ الكلفة الإجمالية $C_T$ أصلية للكلفة الهاشمية $C_m$، وبمأنّ $F$ أصلية لـ $f$

فإنّ: $C_T(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3(x+1)\ln(x+1) + c$ (حيث $c \in \mathbb{R}$)، مع $C_T(1) = \frac{5}{2}$

ومنه: $-\frac{1}{2} - 2 + 3(2)\ln 2 + c = \frac{5}{2}$

وعليه: $c = 5 - 6\ln 2$، إذن: $\boxed{C_T(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3(x+1)\ln(x+1) + 5 - 6\ln 2}$

2)تقدير قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 7 آلاف قطعة:

بالتعويض نجد: $C_T(7) = -\frac{1}{2}(7)^2 - 2(7) + 3(8)\ln(8) + 5 - 6\ln 2 \simeq 12{,}248$

إذن: قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 7 آلاف قطعة هي 12,248 ألف دينار.

## حل التمرين 10: (07,5 نقطة) بكالوريا 2016// الموضوع 01// الشعبة: تسيير وإ.

*I*)لدينا: $D_g = ]0;+\infty[$ وَ $g(x) = ax + b + \ln x$، حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان.

**1)تعيين $a$ و $b$ بحيث، $g(1) = 2$ وَ $g'(2) = \frac{3}{2}$:**

$g$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$، ولدينا: $g'(x) = a + \frac{1}{x}$.

أي: $\begin{cases} g(1) = 2 \\ g'(2) = \frac{3}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} a + b = 2 \\ a + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$ ومنه: $\boxed{a = b = 1}$، إذن: $g(x) = x + 1 + \ln x$ وَ $g'(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

**2)بوضع: $g(x) = x + 1 + \ln x$.**

**أ-حساب $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:**

- لدينا: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.
- ولدينا: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$.

**ب-دراسة اتجاه تغيّر الدّالة $g$ ثم تشكيل جدول تغيّراتها:**

$g$ **قابلة للاشتقاق** على $]0;+\infty[$، ولدينا: $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$.

ومنه: $g$ **متزايدة تماما** على $]0;+\infty[$، **ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

| $x$ | $0$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $g(x)$ | ‖ $-\infty$ | $-$ $-$ $0$ $+$ $+$ $+$ | $+\infty$ |

**جـ-تبيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً حقيقيا وحيداً $\alpha$ حيث، $0{,}2 < \alpha < 0{,}3$:**

- $g$ **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $]0{,}2;0{,}3[$ (لأنّها **متزايدة تماما** على $]0;+\infty[$)



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

- ولدينا: $\begin{cases} g(0,2) \simeq -0,41 \\ g(0,3) \simeq 0,10 \end{cases}$ أي: $g(0,2) \times g(0,3) < 0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ حيث، $0,2 < \alpha < 0,3$.

**د-تحديد تبعا لقيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:**

بمأنّ: $g$ **متزايدة تماما** على $]0; +\infty[$، وَ $g(\alpha) = 0$ فإنّ:

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | - | 0 | + | |

***II*) لدينا:** $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$ وَ $D_f = ]0; +\infty[$.

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

**1)تبيان أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ من المجال $]0; +\infty[$، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ثم استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة $f$:**

$f$ **قابلة للاشتقاق** على $]0; +\infty[$، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{\left((1 \ln x) + \left(\frac{1}{x} \times x\right)\right)(x+1) - 1(x \ln x)}{(x+1)^2} = \frac{(1+\ln x)(x+1) - x \ln x}{(x+1)^2} = \frac{x+1+x \ln x + \ln x - x \ln x}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $g(x)$

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | - | 0 | + | |

إذن: $f$ **متناقصة تماما** على $]0; \alpha]$؛ و**متزايدة تماما** على المجال $[\alpha; +\infty[$.

**2)حساب $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ : (علما أنّ $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$)**

- لدينا: $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0}$، لأنّ: $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ وَ $\lim\limits_{x \to 0^+} (x+1) = 1$.
- ولدينا: $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{1+\frac{1}{x}} = +\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ وَ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

**3)التحقق أنّ $f(\alpha) = -\alpha$ ثم تشكيل جدول تغيّرات الدّالة $f$:**

لدينا: $\ln \alpha = -(\alpha + 1)$ لأنّ: $g(\alpha) = 0$ ومنه: $f(\alpha) = \frac{\alpha \ln \alpha}{\alpha+1} = \frac{-\alpha(\alpha+1)}{\alpha+1} = -\alpha$.

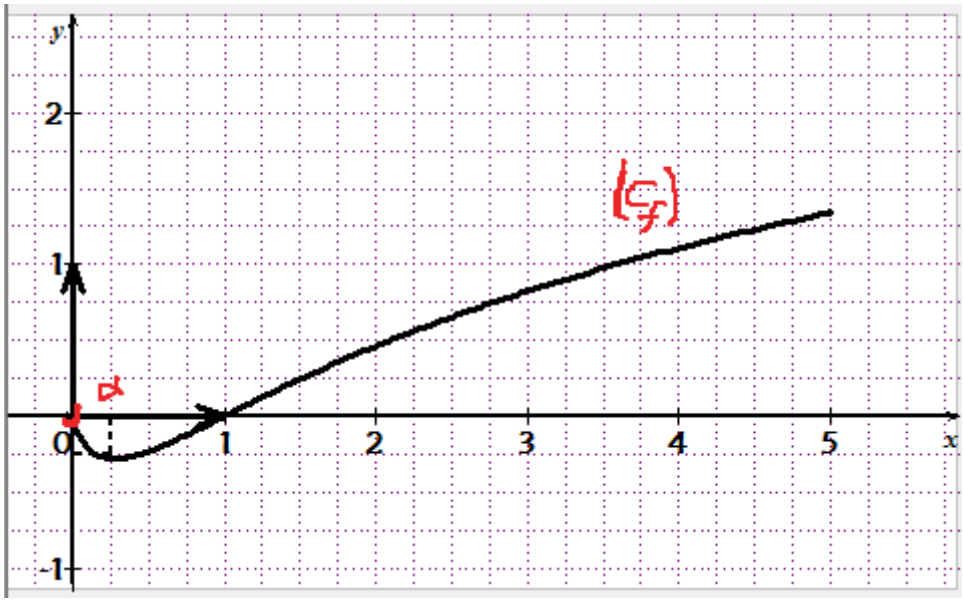
| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | ‖ 0 | ↘ | $-\alpha$ | ↗ | $+\infty$ |

**4)حساب $f(1)$ و $f(5)$ ثمّ رسم $(C_f)$ على المجال $]0; 5]$:**

بالتعويض نجد: $f(1) = 0$ وَ $f(5) = \frac{5 \ln 5}{6}$.



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM




## حل التمرين 11: (07 نقاط) بكالوريا 2016// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

**I)لدينا:** $g(x) = -4 + 2x(1 + \ln x)$ وَ $D_f = ]0; +\infty[$.

**1)حساب** $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ : (علما أنّ $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$)

- لدينا: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}(-4 + 2x + 2x\ln x) = -4}$، لأنّ: $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ وَ $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$.
- ولدينا: $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{x\to +\infty}(1 + \ln x) = +\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x = +\infty$.

**2)دراسة اتجاه تغيّر الدّالة $g$ على المجال $]0; +\infty[$ ثم تشكيل جدول تغيّراتها:**

$g$ **قابلة للاشتقاق** على $]0; +\infty[$، ولدينا:

$$g'(x) = 2(1 + \ln x) + \left(\frac{1}{x} \times 2x\right) = 2[(1 + \ln x) + 1] = 2(\ln x + 2)$$

ومنه: إشارة $g'(x)$ من إشارة $(\ln x + 2)$

نضع: $\ln x + 2 = 0$ نجد: $\ln x = -2$ ومنه: $x = e^{-2}$

| $x$ | $0$ | | $e^{-2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | - | $0$ | + | |

إذن: $g$ **متناقصة تماما** على $]0; e^{-2}]$؛ **ومتزايدة تماما** على المجال $[e^{-2}; +\infty[$.

**تشكيل جدول تغيّراتها:**

| $x$ | $0$ | | $e^{-2}$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | - | $0$ | + | $0$ | - | |
| $f(x)$ | ‖ $-4$ | ↘ | $-4 - 2e^{-2}$ | ↗ | $0$ | ↘ | $+\infty$ |

**3)تبيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ حيث $1,4 < \alpha < 1,5$:**

- $g$ **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $]1,4; 1,5[$ (لأنّها **متزايدة تماما** على $[e^{-2}; +\infty[$)
- ولدينا: $\begin{cases} g(1,4) \simeq -0,26 \\ g(1,5) \simeq 0,22 \end{cases}$ أي: $g(1,4) \times g(1,5) < 0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ حيث، $1,4 < \alpha < 1,5$.


قلم التحرير
WWW.DZPEN.COM

**4)تحديد إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:**

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | - | 0 | + | |

***II*)لدينا:** $f(x)=(2x-4)\ln x$ **وَ** $D_f=]0;+\infty[$.

$(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

**1)أ-حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$:**

- لدينا: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x=-\infty$ **وَ** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(2x-4)=-4$.

**تفسير ها الهندسي:**

حامل محور التراتيب مقارب لـ$(C_f)$.

**ب-حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ :**

- لدينا: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$ **وَ** $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-4)=+\infty$.

**2)أ-تبيان أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$، $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$:**

$f$ **قابلة للاشتقاق** على $]0;+\infty[$، ولدينا:

$$f'(x)=2(\ln x)+\left(\frac{1}{x}\times(2x-4)\right)=\frac{2x\ln x+2x-4}{x}=\frac{-4+2x(1+\ln x)}{x}=\frac{g(x)}{x}$$

**ب-استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة $f$ ثم تشكيل جدول تغيّراتها:**

لدينا: $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | - | 0 | + | |

إذن: $f$ **متناقصة تماما** على $]0;\alpha]$؛ **ومتزايدة تماما** على المجال $[\alpha;+\infty[$.

**ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

**3)تعيين نقط تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل: (نحل المعادلة $f(x)=0$ في المجال $]0;+\infty[$ )**

$f(x)=0$ معناه: $(2x-4)\ln x=0$

ومنه: $2x-4=0$ **أو** $\ln x=0$

وعليه: $\boxed{x=2}$ **أو** $\boxed{x=1}$، إذن: $\boxed{(C_f)\cap(xx')=\{A(1;0);B(2;0)\}}$.

**4)أ-كتابة معادلة للمماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1:**

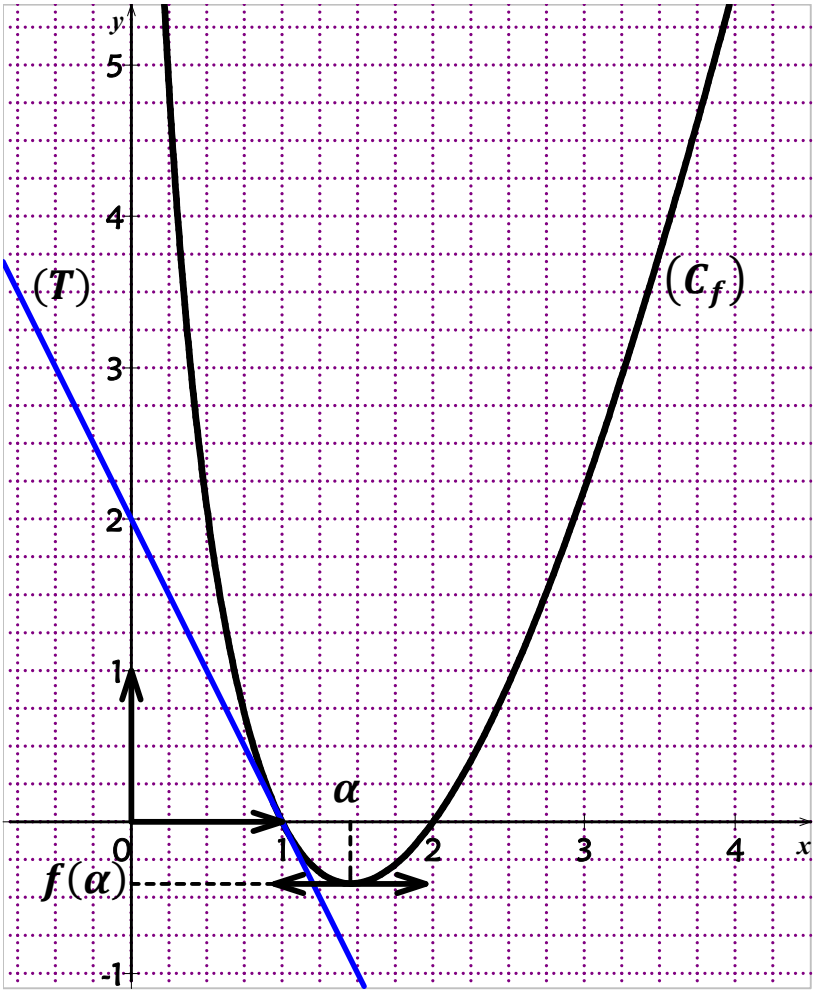
معادلة $(T)$ من الشكل: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

ولدينا: $\begin{cases}f'(1)=g(1)=-2\\ f(1)=y_A=0\end{cases}$، إذن: $\boxed{(T):y=-2x+2}$.



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**ب-إنشاء $(T)$ و$(C_f)$:** (علما أنّ $f(\alpha) \simeq -0,41$)




5)لدينا: الدّالة $F$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $F(x)=(x^2-4x)\ln x-\frac{1}{2}x^2+4x$.

**أ-تبيان أنّ $F$ دّالة أصلية للدّالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$:**

$F$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$، ولدينا: $F'(x)=(2x-4)(\ln x)+\left(\frac{1}{x}\times(x^2-4x)\right)-x+4$

ومنه: $F'(x)=(2x-4)(\ln x)+x-4-x+4=(2x-4)(\ln x)=f(x)$

إذن: $F$ دّالة أصلية للدّالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$.

**ب-حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$، $x=1$ و$x=2$:**

لتكن مساحة الحيز هي $A$ نجد: $A=\int_1^2 -f(x)\,dx=-[F(x)]_1^2=-[F(2)-F(1)]$

ومنه: $A=-\left[(-4\ln 2+6)-\frac{9}{2}\right]=-\frac{3}{2}+4\ln 2\,ua$

## حل التمرين 12: (08 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 01// الشعبة: تسيير وإ.

**I)لدينا:** $g(x)=x^2+3\ln x-3$ و $D_g=]0;+\infty[$.

**1)دراسة اتجاه تغيّر الدّالة $g$:**

$g$ **قابلة للاشتقاق** على $]0;+\infty[$، ولدينا: $\boxed{g'(x)=2x+\frac{3}{x}>0}$.

**ومنه:** $g$ **متزايدة تماما** على $]0;+\infty[$.

**2)تبيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ حيث، $1,40<\alpha<1,41$:**

- $g$ **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $]0;+\infty[$ (لأنّها **متزايدة تماما** على $]0;+\infty[$)


قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

- ولدينا: $\begin{cases} g(1,40) \simeq -0,03 \\ g(1,41) \simeq 0,02 \end{cases}$ أي: $g(1,40) \times g(1,41) < 0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ حيث، $1,40 < \alpha < 1,41$.

**استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$:**

بمأنّ: $g$ **متزايدة تماما** على $]0;+\infty[$، وَ $g(\alpha) = 0$ فإنّ:

| $x$ | **0** | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | - | 0 | + | |

***II*) لدينا:** $f(x) = x + 1 - \frac{3\ln x}{x}$ وَ $D_f = ]0;+\infty[$.

$(C_f)$ التمثيل البياني لـ$f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

**1)أ) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$:**

- لدينا: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = +\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{\ln x}{x} = -\infty$.

**تفسيرها بيانيا:** حامل محور التراتيب مقارب لـ$(C_f)$.

**ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ :**

- لدينا: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$.

**2)تبيان أنّ من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ موجب تماماً، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ :**

$f$ **قابلة للاشتقاق** على $]0;+\infty[$، ولدينا:

$$f'(x) = 1 - 3\frac{\left(\left(\frac{1}{x}\times x\right) - (1\ln x)\right)}{x^2} = 1 - 3\frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2-3+3\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

**3)استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة $f$ ثم تشكّيل جدول تغيّراتها:**

بمأنّ: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$، فإنّ: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $g(x)$

| $x$ | **0** | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | - | 0 | + | |

إذن: $f$ **متناقصة تماما** على $]0;\alpha]$؛ و**متزايدة تماما** على المجال $[\alpha;+\infty[$.

**ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

| $x$ | **0** | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | ‖ **0** | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

**4)أ) تبيان أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$:**

**نُبين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - y] = 0$.**

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\frac{3\ln x}{x}\right) = 0$، لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

إذن: المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $x + 1$ مقارب مائل للمنحنى $f$ عند $+\infty$.



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

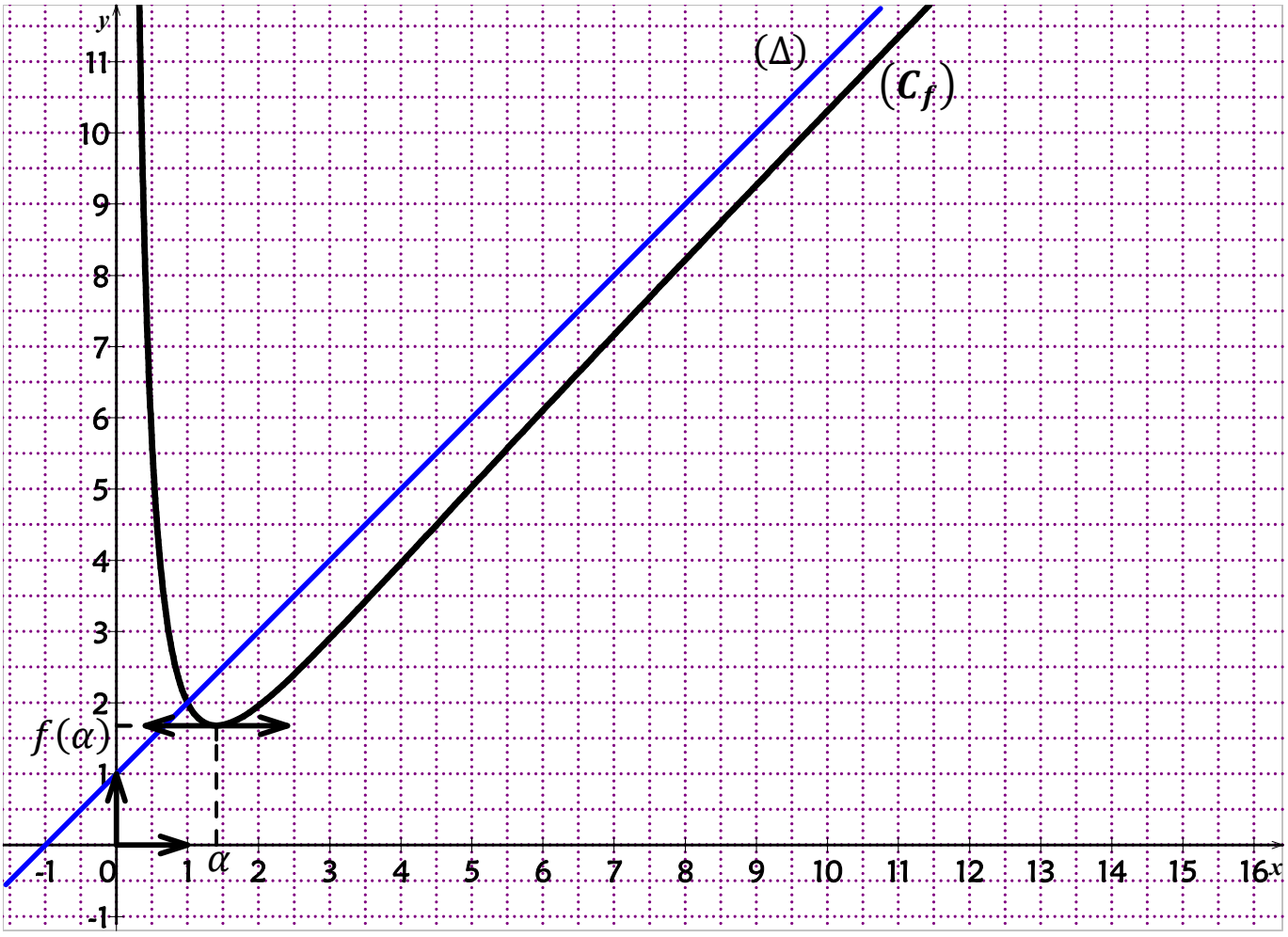
**ب) دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$: (ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ )**

لدينا: $f(x)-y=\frac{3(-\ln x)}{x}$،

ومنه: إشارة الفرق $[f(x)-y]$ من إشارة $(-\ln x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | ‖ | - | $0$ | + | |
| $f(x)-y$ | ‖ | + | $0$ | - | |
| الوضع النسبي | ‖ | $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ | |

**5)إنشاء المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(C_f)$: (علما أنّ $f(\alpha)\simeq 1,68$)**




**6)أ) تبيان أنّ الدّالة $h$ حيث $h(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$ أصلية للدّالة $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$:**

$h$ **قابلة للاشتقاق** على $]0;+\infty[$، ولدينا: $h'(x)=\frac{1}{3}(2)\left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)=\frac{\ln x}{x}$.

إذن: الدّالة $h$ حيث $h(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$ أصلية للدّالة $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

**ب) حساب $S$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها $x=1$، $x=e$ و $y=x+1$:**

لتكن مساحة الحيز هي $A$ نجد: $A=\int_1^e[y-f(x)]\,dx=3\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=3[h(x)]_1^e=\frac{3}{2}ua$.



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## التمرين 13: (08 نقاط) بكالوريا 2018// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $f(x)=\ln(x+2)+\ln(-x+8)-\ln 16$ وَ $D_f=]-2;8[$.

و$(C_f)$ منحنى الدّالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**ملاحظة:** الوحدة البيانية: $2cm$.

**1) حساب نهايتي الدّالة $f$ عند طرفي مجموعة التعريف $]-2;8[$:**

- لدينا: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x)=-\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} \ln(x+2)=\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ >}} \ln y=-\infty$.
- ولدينا: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 8\\ <}} f(x)=-\infty}$، لأنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to 8\\ <}} \ln(-x+8)=\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ >}} \ln y=-\infty$.

**تفسير النتيجتين بيانيا:**

المستقيمان اللّذان معادلتاهما $\boxed{x=-2}$ وَ $\boxed{x=8}$ على الترتيب (الموازيان لحامل محور التراتيب) مستقيمان مقاربان لـ$(C_f)$.

**2)التحقق أنّه من أجل كلّ $x$ من $]-2;8[$، $f'(x)=\frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)}$ :**

$f$ **قابلة للاشتقاق** على $]-2;8[$، ولدينا:

$$f'(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{-1}{-x+8}=\frac{1(-x+8)-1(x+2)}{(x+2)(-x+8)}=\frac{-x+8-x-2}{(x+2)(-x+8)}=\frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)}$$ (وهو المطلوب)

**3)دراسة إشارة $f'(x)$ على المجال $]-2;8[$ وتشكيل جدول تغيّرات الدّالة $f$ :**

لدينا: $f'(x)=\frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)}$، ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(-2x+6)$

(**لأنّ:** $x+2>0$ وَ $-x+8>0$ على المجال $]-2;8[$) ما بعد ln موجب تماما تذكروا

نضع: $-2x+6=0$ نجد: $x=3$ ومنه:

| $x$ | $-2$ | | $3$ | | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2x+6$ | ‖ | + | 0 | - | ‖ |
| $f'(x)$ | ‖ | + | 0 | - | ‖ |

إذن: $f$ **متزايدة تماما** على $]-2;3]$؛ **ومتناقصة تماما** على المجال $[3;8[$.

**ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

| $x$ | $-2$ | | $3$ | | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | + | 0 | - | ‖ |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $2\ln\frac{5}{4}$ | ↘ | ‖ $-\infty$ |

**4)تعيين نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع محوري الإحداثيات:**

- **تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع حامل محور التراتيب: (نحسب $f(0)$ )**

لدينا: $f(0)=\ln 2+\ln 8-\ln 16=\ln 2+3\ln 2-4\ln 2=0$،

إذن: $\boxed{(C_f)\cap(yy')=\{O(0;0)\}}$.

- **تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل: (نحل المعادلة $f(x)=0$ في المجال $]-2;8[$ )**

لدينا: $f(x)=0$ معناه: $\ln(x+2)+\ln(-x+8)=\ln 16$



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ومنه: $\ln(x+2)(-x+8) = \ln 16$

وعليه: $(x+2)(-x+8) = 16$

ويكون: $x(-x+6) = 0$

وبالتالي: $\boxed{x=0}$ وَ $\boxed{x=6}$، إذن: $\boxed{(C_f) \cap (xx') = \{O(0;0); A(6;0)\}}$.

5)تبيان أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]-2;8[$، $(6-x)$ ينتمي إلى $]-2;8[$ و $f(6-x) = f(x)$،

لدينا: $]-2;8[ \in x$ أي: $-2 < x < 8$

ومنه: $-8 < -x < 2$ وعليه: $-2 < 6-x < 8$ أي: $(6-x) \in ]-2;8[$

ولدينا: $f(6-x) = \ln[(6-x)+2] + \ln[-(6-x)+8] - \ln 16$

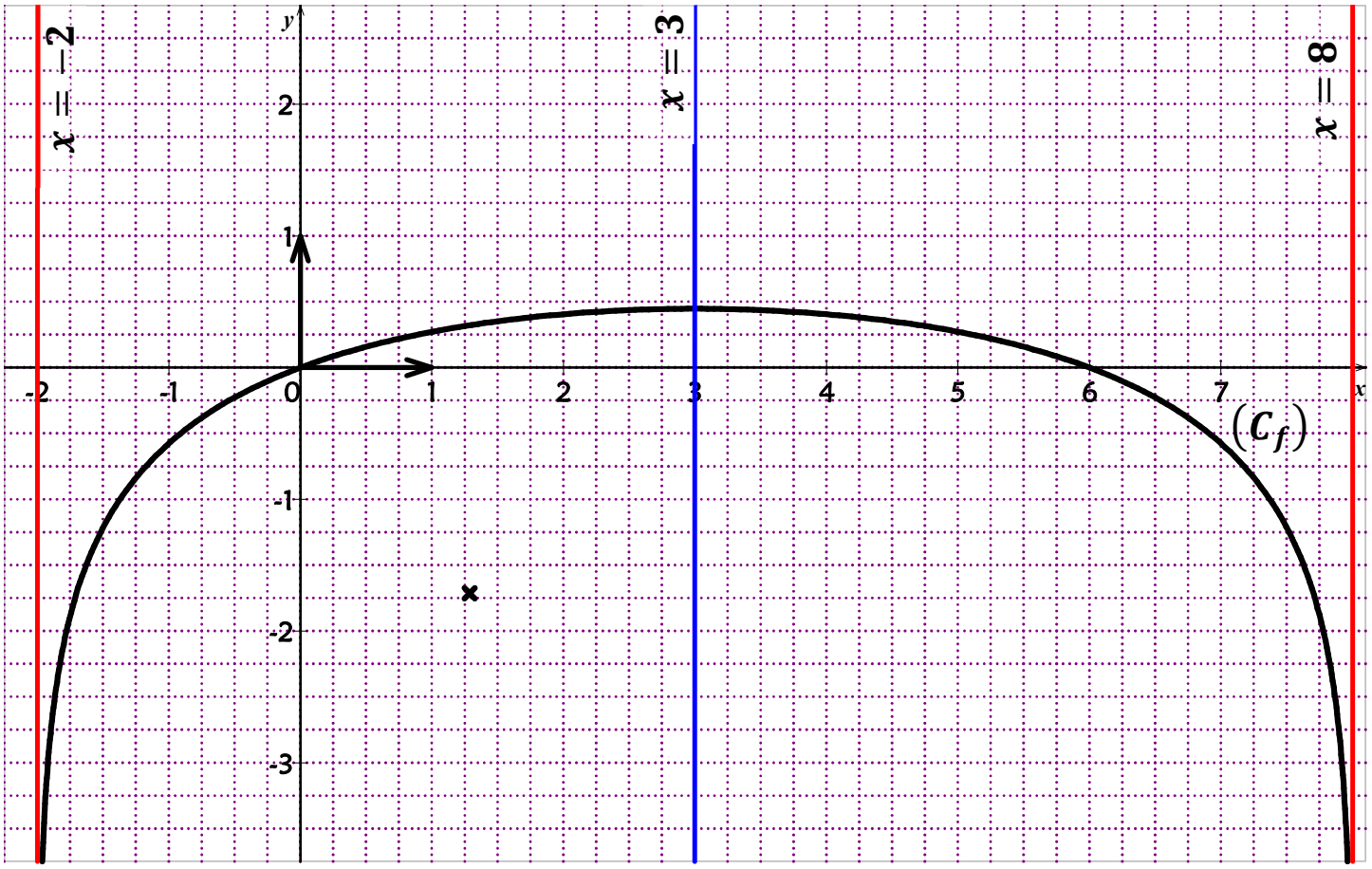
ومنه: $f(6-x) = \ln(-x+8) + \ln(x+2) - \ln 16 = f(x)$.

**تفسير النتيجة بيانياً:**

لدينا: $f(6-x) = f(x)$ أي: $f(6-x) - f(x) = 0$ من الشكل $f(2\alpha - x) - f(x) = 0$ حيث $\alpha = 3$،

إذن: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x=3}$ هو محور تناظر لـ$(C_f)$.

**6)رسم المنحنى $(C_f)$:**




**7)لدينا:** $F(x) = (x+2)\ln(x+2) + (x-8)\ln(-x+8) - 2x - x\ln 16$ وَ $D_F = ]-2;8[$.

**تبيان أنّ $F$ دالّة أصلية لـ $f$ على المجال $]-2;8[$:**

$F$ قابلة للاشتقاق على $]-2;8[$، ولدينا:

$$F'(x) = \left[1 \times \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} \times (x+2)\right] + \left[1 \times \ln(-x+8) + \frac{(-1)}{-x+8} \times (x-8)\right] - 2 - \ln 16$$

ومنه: $F'(x) = \ln(x+2) + 1 + \ln(-x+8) + 1 - 2 - \ln 16 = f(x)$

وبالتالي: $F$ دالّة أصلية لـ $f$ على المجال $]-2;8[$.



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**8)حساب بـ $cm^2$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها $y = 0$، $x = 0$ وَ $x = 4$:**

لتكن مساحة الحيز هي $A$ **ومنه:**

$$A = \int_0^4 f(x)\,dx \times 4cm^2 = [F(x)]_0^4 \times 4cm^2 = [F(4) - F(0)] \times 4cm^2$$

ويكون: $\boxed{A = 4(6\ln 6 - 2\ln 2 - 8)cm^2}$.



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM