عن موقع www.eddirasa.com
البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com

الدرس 1

المُتَتَالِيَاتُ التراجِعِيَةُ والبرهانُ بِالتراجُعِ

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

1 - عموميات حول المتتاليات

1 ـ 1 تعريف

المتتالية هي دالة U معرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ أو جزء من $\mathbb{N}$

اصطلاحات :

نرمز إلى صورة العدد الطبيعي n بالرمز U_n بدلا من $U(n)$.
- نرمز إلى المتتالية بالرمز (U_n) بدلا من U
- U_n يدعى الحد العام للمتتالية (U_n) أو الحد ذو الدليل n

ملاحظة

هناك طريقتان لتوليد متتالية .
1) تعيين متتالية بإعطاء العبارة الصريحة للحد العام .
2) تعيين متتالية بعلاقة تراجعية .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

مثال -

(U_n) ، (V_n) ، (W_n) ثلاث متتاليات معرفة بـ :

$U_n = (-\frac{1}{2})^n$ ، $V_n = g(n)$ حيث $g : x \mapsto x^2 + 1$ و $W_{n+1} = 3W_n - 1$ مع $W_0 = 2$

- المتتاليتان (U_n) و (V_n) معرفتان بحديهما العام وأما المتتالية (W_n) فهي تراجعية.

1 - 2 اتجاه تغير متتالية

- القول ان المتتالية (U_n) متزايدة تماما يعني انه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} \rangle U_n$
- القول ان المتتالية (U_n) متناقصة تماما يعني انه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} \langle U_n$
- القول ان المتتالية (U_n) ثابتة يعني انه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = U_n$

ملاحظة

بنفس الكيفية السابقة نعرف التتالية المتزايدة او المتناقصة وذلك بتبديل المتباينة
$U_{n+1} \rangle U_n$ بـ $U_{n+1} \geq U_n$ (المتباينة $U_{n+1} \langle U_n$ بالمتباينة $U_{n+1} \leq U_n$)

مثال -

(U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة $U_n = 3n + 5$

و منه الحد U_{n+1} معرف بـ $U_{n+1} = 3(n+1) + 5 = 3n + 8 = U_n + 3$

بما ان $3 \rangle 0$ فإن (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

1 - 3 المتتالية الحسابية

- القول ان المتتالية (U_n) حسابية يعني انه يوجد عدد حقيقي r بحيث من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_{n+1} = U_n + r$ ، يدعى r اساس المتتالية (U_n)
- من أجل كل عددين طبيعيين m و P يكون $U_m = U_P + (m - p)r$
- مجموع حدود متعاقبة لمتتالية حسابية

- إذا كان $S = P + \ldots\ldots + d$ هو مجموع m حد لمتتابعة من متتالية حسابية فإن:

$$S = \frac{m}{2}(P + d)$$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

مثال -

ليكن S مجموع الأعداد الطبيعية المتتالية $1, 2, \ldots\ldots, n$

لاحظ ان S هو مجموع n حد أول لمتعاقبة من متتالية حسابية حدها الأول 1

وحدها الأخير n و أساسها $r = 1$ و منه فإن $S = \frac{n}{2}(1 + n)$

1 - 4 المتتالية الهندسية

- القول أن (U_n) متتالية هندسية يعني أنه يوجد عدد حقيقي q بحيث انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_{n+1}=q\times U_n$ ، ويدعى q أساس المتتالية (U_n)
- من أجل كل عددين طبيعيين m و P يكون $U_m=U_p\times q^{m-p}$
- مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية

إذا كان $d+$ ..... $+S=p$ هو مجموع m حد المتتابعة لمتتالية هندسية حدها الأول p و أساسها q فإن $S=p\times\frac{1-q^m}{1-q}$ حيث $(q\neq 1)$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

مثال -

S مجموع الأعداد الحقيقية المعرف بـ $S=1+q+$ ..... $+q^{n-1}$

S عبارة عن مجموع n حد أول من حدود متتالية هندسية حدها الأول 1 و أساسها q إذن $S=\frac{1-q^n}{1-q}$

تمرين تدريبي 1

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_0=1$ و $U_{n+1}=\frac{U_n}{1+U_n}$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

1) عين الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية ثم استنتج عبارة الحد العام U_n

2) نفرض أن $U_n\neq 0$ و نضع $V_n=\frac{1}{U_n}$

أ- بين أن المتتالية (V_n) حسابية يطلب تعيين حدها الأول و أساسها .

ب- استنتج عبارة V_n ثم U_n بدلالة n

✓ الحل :

1) $U_1=\frac{U_0}{U_0+1}=\frac{1}{2}$ ، $U_2=\frac{U_1}{U_1+1}=\frac{1}{3}$ ، $U_3=\frac{U_2}{U_2+1}=\frac{1}{4}$ ، $U_4=\frac{U_3}{U_3+1}=\frac{1}{5}$ ،

$U_5=\frac{U_4}{U_4+1}=\frac{1}{6}$

نلاحظ ان الحدود الأولى لهذه المتتالية تكتب على الشكل $U_n=\frac{1}{n+1}$

2) أ) حتى تكون (V_n) حسابية يجب أن يوجد عدد حقيقي r بحيث من أجل كل عدد طبيعي n يكون $V_{n+1}-V_n=r$

$$V_{n+1}-V_n=\frac{1}{U_{n+1}}-\frac{1}{U_n}=\frac{1+U_n}{U_n}-\frac{1}{U_n}=1$$

ومنه (V_n) متتالية حسابية أساسها $r=1$ و حدها الأول $V_0 = \frac{1}{U_0} = 1$

ب) عبارة الحد العام V_n هي $V_n = V_0 + n \times r$ بالتعويض نجد :

$V_n = 1+n$ و منه $U_n = \frac{1}{1+n}$

تمرين تدريبي ❷

- عين خمسة حدود موجبة من متتالية هندسية U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 مع العلم

ان $U_1 \times U_5 = 25$ و $U_2 + U_3 + U_4 = \frac{35}{2}$

✓ الحل :

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com

$U_1 \times U_5 = U_1 \times U_1 \times r^4 = (U_1 \times r^2)^2 = (U_3)^2$

و بما ان $U_1 \times U_5 = 25$ فإن $U_3 = 5$

المساواة $U_2 + U_3 + U_4 = \frac{35}{2}$ تصبح $U_2 + U_4 = \frac{25}{2}$

بما أن U_3 الوسط الهندسي لـ U_2 و U_4 فإن $U_2 \times U_4 = U_3^2 = 25$

إذن $\begin{cases} U_2 \times U_4 = 25 \\ U_2 + U_4 = \frac{25}{2} \end{cases}$ .... (I)

بعد حل الجملة (I) نجد $U_1 = \frac{5}{4}$ ، $U_2 = \frac{5}{2}$ ، $U_3 = 5$ ، $U_4 = 10$ ، $U_5 = 20$

❷ -البرهان بالتراجع

2 - 1 أهمية البرهان بالتراجع

في الرياضيات توجد بعض الخواص تتعلق بعدد طبيعي n مثلا

$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ نرمز إلى هذه الخاصية بـ P_n .

نستطيع القول ان P_1 صحيحة لأن $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

P_2 صحيحة لأن $1+2 = \frac{2(2+1)}{2}$

P_3 صحيحة لأن $1+2+3 = \frac{3(3+1)}{2}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لكن هل P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n ؟ إذا كان كذلك فكيف نبينه مع العلم انه لا يمكن التحقق من ذلك بالحساب لأن مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ غير منتهية البرهان بالتراجع يسمح لنا باستنتاج صحة الخاصية P_n من اجل كل $n \geq 1$ و بالتالي فهو وسيلة تسمح بالمرور من المنتهي إلى اللامنتهي .

2 - 2 مبدأ البرهان بالتراجع :

للبرهان على أن الخاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$ نتبع خطوتين اساسيتين هما :

1) نتحقق أن P_{n_0} صحيحة .

2) نفرض أن الخاصية P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي n كيفي و على هذا الفرض نبين أن الخاصية P_{n+1} صحيحة

إذا تحقق الشرطان السابقان معا نستنتج أن الخاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$

ملاحظة

. الفرضية " P_n صحيحة " تسمى فرضية التراجع

تمرين تدريبي 1

برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n اكبر من أو يساوي 1 يكون :

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

✓ الحل :

من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ نسمي P_n الخاصية

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- P_1 صحيحة لأن $1^2=1$ و $\frac{1(1+1)(2+1)}{6}=1$

- نفرض ان P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي n و نبرهن صحة P_{n+1} اي:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$.

لتوظيف فرضية التراجع نكتب :

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n+1)^2=1^2+2^2+3^2+n^2+(n+1)^2$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

لأن $2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$

إذن الخاصية P_{n+1} صحيحة و عليه فان الخاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$

تمرين تدريبي ❷

برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n العدد 10^n-1 يقبل القسمة على 9

✓ الحل

من أجل كل عدد طبيعي n نسمي P_n الخاصية " العدد 10^n-1 يقبل القسمة على 9 "

- بما أن $10^0-1=0$ و الصفر يقبل القسمة على 9 فإن P_0 صحيحة .
- نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي $n \geq 0$ أي $10^n-1=9k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $10^{n+1}-1=9k'$

لتوظيف فرضية التراجع نكتب :

$$10^{n+1}-1 = 10^n \times 10-1=10^n(1+9)-1 = (10^n-1)+9\times 10^n$$
$$=9k+9\times 10^n = .9(k+10^n)=9k'$$

إذن P_{n+1} صحيحة وعليه فإن الخاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي .

تمرين تدريبي ❸

برهن بالتراجع ان من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون $2^n > n$.

✓ الحل :

- P_1 صحيحة لأن $2^1 > 1$
- نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي $n \geq 1$ أي $2^n > n$ و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $2^{n+1} > n+1$.

بضرب طرفي المتباينة $2^n > n$ بالعدد 2 نجد $2^{n+1} > 2n$ ... (1)

و لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $2n \geq n+1$ ... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $2^{n+1} > n+1$

إذن P_{n+1} صحيحة وعليه فان الخاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

موقع الدراسة الجزائري
www.eddirasa.com
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM