# العبقري
# في الرياضيات

## الدوال الأسية

## الثالثة ثانوي

الشعب: ● تسيير وإقتصاد.

جمع وإعداد الأستاذ: بوعزة مصطفى.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

# مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال الأسية واللوغاريتمية)
## الملخص // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

**ملخص: حول الدّوال الأسية واللوغاريتمية// التحضير الجيد بكالوريا // الشعبة: تسيير وإ.**

## 1 الدّالة الأسية

### ❶ مبرهنة وتعريف

توجد دّالة **وحيدة** $f$ **قابلة للاشتقاق** على $\mathbb{R}$ بحيث:

$f'=f$ ① $\quad f(0)=1$ ②

نرمز إليها بالرمز "**exp**"، ونسميها **الدّالة الأسية النيبيرية**.

**نتائج من التعريف:**

- $\boxed{\exp(0)=1}$.
- من أجل **كل عدد حقيقي** $x$، $\boxed{\exp'(x)=\exp(x)}$.

### ❷ خواص جبرية

$x$ و $y$ عددان **حقيقيان** وَ $n$ عدد **صحيح**.

① $\exp(x)>0$

② $\exp(x)\times\exp(-x)=1$

$\left(\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}\right)$

③ $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$

④ $\exp(x-y)=\frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

⑤ $(n\in\mathbb{Z})\ \exp(nx)=[\exp(x)]^n$

**العدد $e$ والترميز $e^x$:**

- العدد $e$ هو **صورة 1** بالدّالة **الأسية** أي:

$\boxed{\exp(1)=e\simeq 2{,}72}$

- حسب **الخاصية** ⑤ ومن أجل $x=1$ نجد:

$(n\in\mathbb{Z})\ \exp(n)=[\exp(1)]^n=e^n$

**اصطلاحاً:** $\boxed{\exp(x)=e^x}$

**(من أجل كل** $x\in\mathbb{R}$**)**

### قواعد الحساب: (خواص الدّالة " exp ")

$x$ و $y$ عددان **حقيقيان** وَ $n$ عدد **صحيح**.

① $\boxed{e^0=1}$ ② $\boxed{(e^x)'=e^x>0}$

③ $\boxed{e^x\times e^{-x}=1}$ $\left(\boxed{e^{-x}=\frac{1}{e^x}>0}\right)$

④ $\boxed{e^{x+y}=e^x\times e^y}$ ⑤ $\boxed{e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}}$

⑥ $(n\in\mathbb{Z})\ \boxed{e^{nx}=(e^x)^n}$

### ❸ دراسة الدّالة " exp "

**لدينا:** $\exp(x)=e^x$ وَ $D_{\exp}=]-\infty;+\infty[$.

**النهايات**

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ ❷ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$

**إتجاه التغيّر**

من أجل **كل عدد حقيقي** $x$، $\boxed{(e^x)'=e^x>0}$

**إذن:** الدّالة **"exp" متزايدة تماماً** على $\mathbb{R}$.



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## جدول التغيّرات

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $(e^x)'$ | | $+$ | | |
| $e^x$ | | $0^+$ ↗ $1$ ↗ $e$ | | $+\infty$ |

نعلم أنّ $e^x > 0$ **من جدول التغيرات:**

- $0 < e^x < 1$ **يعني:** $x < 0$
- $e^x = 1$ **يعني:** $x = 0$
- $1 < e^x < e$ **يعني:** $0 < x < 1$
- $e^x > e$ **يعني:** $x > 1$

يُمكن أن يكون $x$ **عبارة جبرية**.

بمأنّ الدّالة "$exp$" **متزايدة تماماً** على $\mathbb{R}$، فإنّ:

- $e^a > e^b$ **يعني:** $a > b$
- $e^a < e^b$ **يعني:** $a < b$
- $e^a = e^b$ **يعني:** $a = b$

$a$ وَ $b$ **عددان حقيقيان** أو **عبارتان جبريتان**.

**ملاحظة مهمة:** تُستعمل **لحل معادلات** و**متراجحات** أو**لدراسة إشارة عبارة جبرية تتضمن** $e$.

## نتائج:

- بمأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ فإنّ $(C_{\exp})$ يقبل **محور الفواصل كمُقارب** عند $-\infty$.
- لدينا: $\exp(0) = e^0 = 1$ وَ $\exp'(0) = 1$

إذن: $(C_{\exp})$ يقبل **عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماساً**، $(\Delta): y = \exp'(0)(x-0) + \exp(0)$

أي: $(\Delta): y = x + 1$.

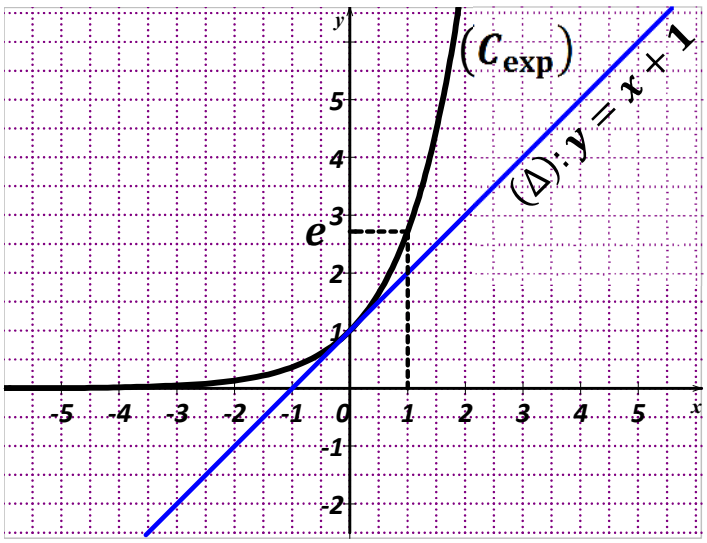
- باستعمال **تعريف العدد المشتق** للدّالة "$\exp$" عند **0**:

**لدينا:** $\exp'(0) = \lim\limits_{x\to0} \frac{\exp(x)-\exp(0)}{x-0}$، إذن: ❸ $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

- الدّالة $x \mapsto x + 1$ هي **أحسن تقريب تآلفي** للدّالة $x \mapsto e^x$ بجوار $0$

**أي:** $e^x \simeq x + 1$ من أجل $x$ قريب من $0$.

## التمثيل البياني



## ❹ دراسة الدّالة " $\exp \circ u$ "

**لدينا:** $(exp \circ u)(x) = e^{u(x)}$

### النهايات

لدراسة نهاية دّالة "$\exp \circ u$"
نستعمل **المبرهنة الخاصة**
**بنهاية دّالة مركبة.**

### إتجاه التغيّر

للدّالتين "$u$" وَ"$\exp \circ u$"
**نفس اتجاه التغيّر** على $I$، حيث:
$u$ معرّفة على $I$.
لأنّ الدّالة "exp" **متزايدة تماماً.**

### المشتقة

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$$

إشارة $\left(e^{u(x)}\right)'$
من إشارة $u'(x)$
لأنّ: $e^{u(x)} > 0$.

## ❺ التزايد المقارن

**التزايد المقارن للدّالتين $x \mapsto e^x$ وَ $x \mapsto x$:**

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ❹ $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$ ❺

**التزايد المقارن للدّالتين $x \mapsto e^x$ وَ $x \mapsto x^n$:**

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ ❹ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0^-$ ❺
$(n \in \mathbb{N}^*)$

تُستعمل هذه النهايات لرفع حالات عدم التعيين.

## ❻ معادلات من الشكل " $ae^{2x} + be^x + c = 0$ " حيث $(a \neq 0)$

**نضع:** $X = e^x$
نقوم بعد ذلك **بحل المعادلة** $aX^2 + bX + c = 0$ ثمّ **نستنتج قيم $x$ في حالة وجودها** (لأنّ $e^x > 0$).

- **نأخذ قيم $X > 0$ لإيجاد $x$ وذلك بالعودة إلى الوضع.**

## ❼ المعادلات التفاضلية من الشكل " $y' = ay + b$ " بحيث $(a \neq 0)$

- **المعادلة التفاضلية $y' = ay$**، الحلول هي الدّوال $x \mapsto ce^{ax}$ حيث $c \in \mathbb{R}$.
- **المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$**، الحلول هي الدّوال $x \mapsto ce^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث $c \in \mathbb{R}$.
- **إذا أُعطي شرط مثلاً $f(x_0) = y_0$**، نُعوض في الحلول، نقوم بإجاد $c$، ويُصبح الحل **وحيد** للمعادلة التفاضلية.

## ❽ إشارة بعض العبارات زردت في البكالوريا

- **إشارة $e^x - 1$**

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $e^x - 1$ | - | ○ | + |

**لدراسة إشارة العبارة $ae^{2x} + be^x + c$** $(abc \neq 0)$
نحلّله باستعمال المميز $\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta > 0$ ☜ $ae^{2x} + be^x + c = a(e^x - X')(e^x - X'')$
$\Delta = 0$ ☜ $ae^{2x} + be^x + c = a(e^x - X')^2$
$\Delta < 0$ ☜ $ae^{2x} + be^x + c$
**يُمكن تلخص إشارته في جدول باستعمال القواعد المعروفة**
**لإشارة كثير حدود من الدرجة الثانية.**

**إشارة** $ae^{\alpha x+\beta}+b$

إذا كان: $a$ و$b$ **موجبين** فإنّ: $ae^{\alpha x+\beta}+b>0$.

إذا كان: $a$ و$b$ **سالبين** فإنّ: $ae^{\alpha x+\beta}+b<0$.

إذا كان: $a$ و$b$ **مختلفين في الإشارة**، فإنّ: $ae^{\alpha x+\beta}+b$ **متغيرة الإشارة** ولمعرفة إشارته

- نحل المعادلة والمتراجحات $ae^{\alpha x+\beta}+b>0$،
  $ae^{\alpha x+\beta}+b<0$،
  $ae^{\alpha x+\beta}+b=0$

# 2 الدّالة اللوغاريتمية

## 1 اللوغاريتم النيبيري لعدد

**مبرهنة وتعريف:**

يوجد **عدد حقيقي وحيد** $b$ بحيث $e^b=a>0$،
يسمى هذا العدد **اللوغاريتم النيبيري** للعدد $a$،
ونرمز إليه بالرمز " $\ln a$ " أي $\boxed{b=\ln a}$.

**مثلاً:** $e^b=2$ معناه: $b=\ln 2$.

## 1 تعريف الدّالة " ln "

نسمي "**الدّالة اللوغاريتمية النيبيرية**" الدّالة التي نرمز إليها بالرمز "**ln**"، والتي **تُرفق** بكل عدد حقيقي $x$ من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$.

**نتائج من التعريف:**

- من أجل $x\in\mathbb{R}$ وَ $y\in]0;+\infty[$، $\boxed{x=\ln y \text{ يعني: } e^x=y}$
- من أجل $x\in]0;+\infty[$، $\boxed{e^{\ln x}=x}$.
- من أجل $x\in\mathbb{R}$، $\boxed{\ln(e^x)=x}$.
- بمأنّ: $e^0=1$ فإنّ: $\ln 1=0$، وَبمأنّ: $e^1=e$ فإنّ: $\ln e=1$.

**حسب النتيجة 1)** الدّالة **اللوغاريتمية النيبيرية "ln"** هي **الدّالة العكسية** للدّالة **الأسية النيبيرية "exp"**.

في معلم متعامد ومتجانس، $(C_{\exp})$ وَ$(C_{\ln})$ **متناظران بالنسبة** إلى المستقيم ذو المعادلة $y=x$ (المنصف الأوّل).

## 2 خواص جبرية

**الخاصية الأساسية:**

$x$ و$y$ عددان **حقيقيان** من $]0;+\infty[$،

① $\boxed{\ln(xy)=\ln x+\ln y}$

**نتائج:**

$x$ و$y$ عددان **حقيقيان** من $]0;+\infty[$، وَ$n$ عدد **صحيح**.

② $\boxed{\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x}$

③ $\boxed{\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y}$

④ $\boxed{\ln(x^n)=n\ln x}$ $(n\in\mathbb{Z})$

⑤ $\boxed{\ln\sqrt{x}=\frac{1}{2}\ln x}$



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

- يكون للعدد $\ln x$ **معنى** إذا وفقط إذا كان: $x > 0$ (ما بعد ln **موجب تماماً**)
- يكون للعدد $\ln[u(x)]$ **معنى** إذا وفقط إذا كان: $u(x) > 0$. (ما بعد ln **موجب تماماً**)
- يكون للعدد $\ln|u(x)|$ **معنى** إذا وفقط إذا كان: $u(x) \neq 0$.
- يكون للعدد $\ln[u(x)]^n$ **معنى** إذا وفقط إذا كان: $u(x) \neq 0$، في حالة $n = 2k$ **زوجي.**
  $u(x) > 0$، في حالة $n = 2k+1$ **فردي.**

## ❸ دراسة الدّالة " ln "

**لدينا:** $\ln: x \mapsto \ln(x)$ وَ $D_{\ln} = ]0; +\infty[$.

### النهايات

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ ❷ $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$

### إتجاه التغيّر

من أجل **كل** $x$ من $]0; +\infty[$، $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$

**إذن:** الدّالة **"ln" متزايدة تماماً** على $]0; +\infty[$.

### جدول التغيّرات

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(\ln x)'$ | ‖ | | $+$ | | | | |
| $\ln x$ | ‖ $-\infty$ | $-$ $-$ | $0$ | $+$ $+$ | $1$ | $+$ | $+\infty$ |

نعلم أنّ $\ln x$ **متغيرة الإشارة** (لأنّ $\ln x \in \mathbb{R}$)

**ومن جدول التغيرات:**

- $\ln x < 0$ **يعني:** $0 < x < 1$
- $\ln x = 0$ **يعني:** $x = 1$
- $0 < \ln x < 1$ **يعني:** $1 < x < e$
- $\ln x = 1$ **يعني:** $x = e$
- $\ln x > 1$ **يعني:** $x > e$

- **إشارة $\ln x$**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

يُمكن أن يكون $x$ **عبارة جبرية** (استعمل كلمة ما بعد ln )

بمأنّ الدّالة **"ln" متزايدة تماماً** على $]0; +\infty[$، فإنّ

- $a > b$ **يعني:** $\ln a > \ln b$
- $a < b$ **يعني:** $\ln a < \ln b$
- $a = b$ **يعني:** $\ln a = \ln b$

$a$ وَ $b$ **عددان حقيقيان موجبان تماماً** أو **عبارتان جبريتان موجبتان تماماً**.

**ملاحظة مهمة:** تُستعمل **لحل معادلات** و**متراجحات** أو**لدراسة إشارة عبارة جبرية تتضمن ln**.

## نتائج:

- بمأنّ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} lnx = -\infty$ فإنّ $(C_{ln})$ يقبل **محور التراتيب كمُقارب له.**
- لدينا: $\ln(1) = 0$ وَ $(\ln \mathbf{1})' = \frac{1}{1} = 1$

إذن: $(C_{\ln})$ يقبل **عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماساً**، $(\Delta'): y = (\ln \mathbf{1})'(x-1) + \ln 1$

أي: $(\Delta'): y = x - 1$.

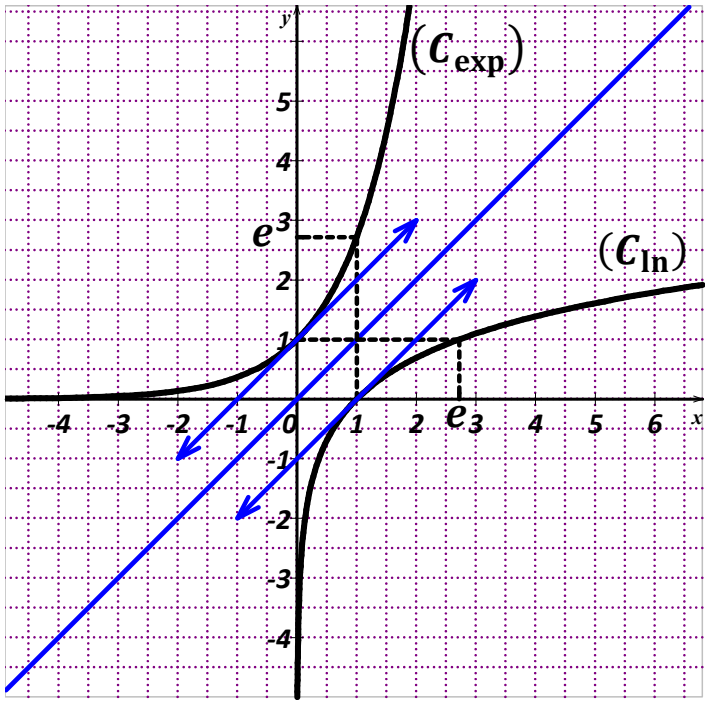
- باستعمال **تعريف العدد المشتق** للدّالة "ln" عند **1**

$(\ln 1)' = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}$، إذن: ❸ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$.

- الدّالة $x \mapsto x - 1$ هي **أحسن تقريب تآلفي** للدّالة $x \mapsto \ln x$ بجوار **1**

**أي:** $\ln x \simeq x - 1$ من أجل $x$ قريب من **1**.

## التمثيل البياني




## ❹ دراسة الدّالة " $\ln \circ u$ "

**لدينا:** $(\ln \circ u)(x) = \ln[u(x)]$

### النهايات

لدراسة نهاية دّالة "$\ln \circ u$" نستعمل **المبرهنة الخاصة بنهاية دّالة مركبة.**

### اتجاه التغيّر

للدّالتين "$u$" وَ "$\ln \circ u$" **نفس اتجاه التغيّر** على $I$، حيث: $u$ معرّفة و**موجبة تماماً** على $I$.

لأنّ الدّالة "ln" **متزايدة تماماً**.

### المشتقة

$$(\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

**ملاحظة:**

$$(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

## ❺ التزايد المقارن

**التزايد المقارن للدّالتين $x \mapsto \ln x$ وَ $x \mapsto x$:**

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ ❹ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x = 0^-$ ❺

**التزايد المقارن للدّالتين $x \mapsto \ln x$ وَ $x \mapsto x^n$:**

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$ ❹ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^n \ln x = 0^-$ ❺

$(n \in \mathbb{N}^*)$

تُستعمل هذه النهايات لرفع حالات عدم التعيين.

## ❻ معادلات من الشكل " $a[\ln x]^2 + b\ln x + c = 0$ " حيث $(a \neq 0)$

**نضع:** $X = \ln x$

نقوم بعد ذلك **بحل المعادلة** $aX^2 + bX + c = 0$ ثمّ **نستنتج قيم $x$ في حالة وجودها** (لأنّ $x > 0$).

- **نأخذ قيم $X$ لإيجاد $x$ وذلك بالعودة إلى الوضع.**

## ❼ إشارة بعض العبارات زردت في البكالوريا

**لدراسة إشارة العبارة** $a[\ln(x)]^2 + b\ln(x) + c$ $(abc \neq 0)$

نحلّله باستعمال المميز $\Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta > 0$، $a[\ln(x)]^2 + b\ln(x) + c = a(\ln x - X')(\ln x - X'')$
- $\Delta = 0$، $a[\ln(x)]^2 + b\ln(x) + c = a(\ln x - X')^2$
- $\Delta < 0$، $a[\ln(x)]^2 + b\ln(x) + c$

**يُمكن تلخيص إشارته في جدول باستعمال القواعد المعروفة لإشارة كثير حدود من الدرجة الثانية.**

**إشارة** $a\ln(\alpha x + \beta) + b$

- نحل المعادلة والمتراجحات $a\ln(\alpha x + \beta) + b > 0$،
  $a\ln(\alpha x + \beta) + b < 0$،
  $a\ln(\alpha x + \beta) + b = 0$

**ملاحظة مهمة جداً:** لحل معادلات (أو متراجحات) تتضمن ln نُعيّن أولا مجموعة التعريف $D$.

## الـــــــدّالة

### 1 الأسية

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ❶ | $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ ❷ |
| $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ ❸ | |
| $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ❹ | $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$ ❺ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ ❹ | $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0^-$ ❺ |

$(n \in \mathbb{N}^*)$

### 2 اللوغاريتمية

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ ❶ | $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ ❷ |
| $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ ❸ | |
| $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ ❹ | $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x = 0^-$ ❺ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$ ❹ | $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^n \ln x = 0^-$ ❺ |

$(n \in \mathbb{N}^*)$

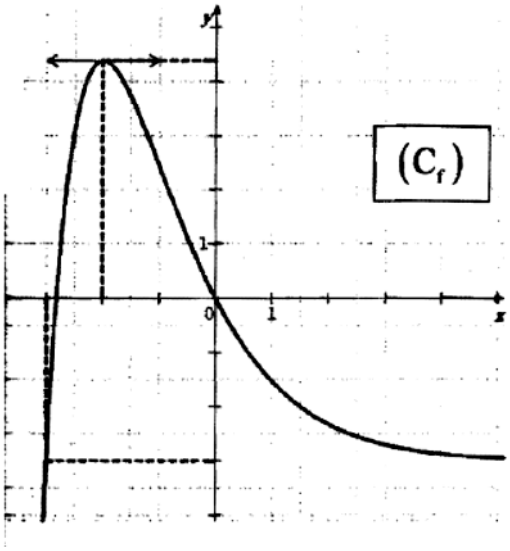
## 2 النهايات ☹

# مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال الأسية -بكالوريات جزائرية)

## التمارين// الشعبة: تسيير وإقتصاد.

## التمرين 01: (05 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

$f$ دّالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=(x+a)e^{-x}+b$ حيث $a$ وَ $b$ عددان حقيقيان وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

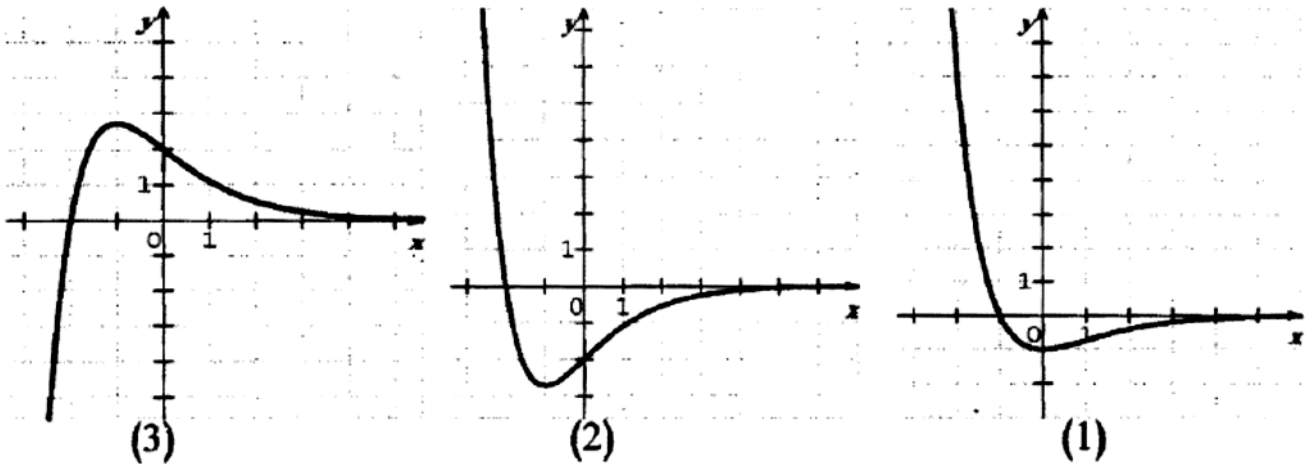



1)بقراءة بيانية للمنحنى $(C_f)$:

أ) عيّن $f(-3)$، $f(0)$، $f'(-2)$.

ب) عيّن حسب قيّم $x$ إشارة $f'(x)$.

ج) من بين المنحنيات الثلاثة (1)، (2)، (3) عيّن، مع التبرير، المنحنى المُمثل للدّالة $f'$ مشتقة الدّالة $f$.




2)أ) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$، $f(x)=(x+3)e^{-x}-3$.

ب) شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$.

جـ) بيّن أنّ $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا يُطلب تعيين معادلة له.

د) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=-2$ تقبل في المجال $[0;+\infty[$ حلا وحيدا $\alpha$ محصور بين 1,50 وَ1,52.

3)نعتبر الدّالة $F$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x)=(-x-4)e^{-x}$ وليكن $I$ العدد الحقيقي حيث:

$$I=\int_{-2}^{0} f(x)dx.$$

أ) احسب $F'(x)$ ثمّ استنتج دّالة أصلية للدّالة $f$ على $\mathbb{R}$.

ب) أعط تفسيرا بيانيا للعدد $I$ مُبررا الحصر التالي $4,5<I<5$ بإعتبارات بيانية مَحضة.

جـ) احسب العدد $I$.

## التمرين 02: (08 نقاط) بكالوريا 2011// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

1)لتكن $f$ الدّالة المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=e^{2x}-e^{x}-x-2$.

أ. احسب نهاية الدّالة $f$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$. (نَقبل أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{2x}}=0$)

ب. بيّن أنّ الدّالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأنّ دّالتها المشتقة $f'$ تُحقق: $f'(x)=(e^{x}-1)(2e^{x}+1)$.

جـ. ادرس حسب قيم $x$ إشارة $f'(x)$ ثمّ استنتج اتجاه تغيّر الدّالة $f$ وشكّل جدول تغيراتها.

2)$(C)$ منحنى $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ على المجال $]-\infty;1]$

أ. بيّن أنّ المستقيم $(d)$ الذي معادلته $y=-x-2$ مُقارب مائل للمنحنى $(C)$ بجوار $-\infty$.

ادرس الوضعية النسبية للمنحنى $(C)$ والمستقيم $(d)$.

ب. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $\alpha$ و$\beta$ حيث $-2,11<\alpha<-2,10$ وَ $0,81<\beta<0,82$ وفسّر النتيجة هندسياً.

جـ. ارسم المستقيم $(d)$ والمنحنى $(C)$.

3)عيّن دّالة أصلية $F$ للدّالة $f$ على المجال $]-\infty;1]$.

## التمرين 03: (06 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

جدول التغيّرات المُقابل هو للدّالة $f$ المعرفة على المجال $[-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=(x+1)e^{1-x}$،

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $e$ | ↘ | $0$ |

ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)بيّن أنّ معادلة $(\Delta)$ المماس للمنحنى $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة $1$ هي: $y=-x+3$.

2)$g$ هي الدّالة المعرّفة على المجال $[-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=-xe^{1-x}+1$.

أ-أُدرس اتجاه تغيّر الدّالة $g$.

ب-أُحسب $g(1)$، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[-1;+\infty[$.

3)$h$ هي الدّالة المعرّفة على المجال $[-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=(x+1)e^{1-x}+x-3$.

أ-لاحظ أنّه من أجل كل $x$ من المجال $[-1;+\infty[$، $h(x)=f(x)+x-3$، ثم استنتج أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=+\infty.$$

ب-بيّن أنّه من أجل كل $x$ من المجال $[-1;+\infty[$، $h'(x)=g(x)$، ثم استنتج جدول تغيّرات الدّالة $h$.

جـ-تحقّق أنّ المعادلة: $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-1;+\infty[$ يُطلب تعيينه.

د-حدّد إشارة $h(x)$، ثمّ استنتج وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$.

هـ-أنشئ كلا من المماس $(\Delta)$ والمنحنى $(C_f)$.

## التمرين 04: (07 نقاط) بكالوريا 2013// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

الدّالة العددية $f$ معرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=2x-1+\frac{1}{e^{x}-1}$ و$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1-أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x<0}}f(x)$ و$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}}f(x)$. فسّر النتيجتين هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

2-أ) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = 2x - 1$، مُقارب مائل للمنحنى $(C_f)$.

ب) تحقّق أنّه، من أجل كل عدد حقيقي $x$ غير معدوم، فإنّ: $f(x) = 2x - 2 + \frac{e^x}{e^x - 1}$، ثمّ استنتج أنّ المستقيم $(\Delta')$ ذا المعادلة $y = 2x - 2$، مُقارب للمنحنى $(C_f)$.

3-بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي $x$ غير معدوم، فإنّ: $f'(x) = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2}$.

استنتج اتجاه تغيّر الدّالة $f$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4-مثّل بيانيا كلاً من $(\Delta)$، $(\Delta')$ و $(C_f)$.

5-احسب العدد: $\int_1^2 f(x)dx$، ثمّ فسره هندسيا.

## التمرين 05: (07 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

الدّالة العددية $f$ معرّفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 6(1 - 2x)e^{-x} + 5$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

$I$) 1) احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسياً. (يُعطى $\lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$)

2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أنشئ $(C_f)$.

4) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 3{,}5$ تقبل في $[0; 7]$ حلين مختلفين $\alpha$، $\beta$ حيث:

$0{,}7 < \alpha < 0{,}8$ وَ $2{,}9 < \beta < 3$.

ب) حل بيانياً في المجال $[0; 7]$ المتراجحة: $f(x) \leq 3{,}5$.

5) أ) عيّن العددين الحقيقيين $a$، $b$ بحيث تكون الدّالة $g$ المعرّفة على $[0; 7]$ بـ:

$g(x) = (ax + b)e^{-x}$ دّالة أصلية للدّالة $h$ المعرّفة على $[0; 7]$ بـ: $h(x) = 6(1 - 2x)e^{-x}$.

ب) استنتج دّالة أصلية للدّالة $f$ على $[0; 7]$.

$II$) الكلفة الهامشية $C_M$ لصناعة كمية $x$ (مقدرة بالطن) من منتوج، حيث $x$ ينتمي إلى المجال $[0; 7]$ تُنمذج بالدّالة $f$ أي: $C_M(x) = f(x)$ (الكلفة مقدرة بملايين الدنانير).

1) حدّد كمية المنتوج بحيث تكون الكلفة الهامشية أقل ما يمكن، وما هي قيمة هذه الكلفة؟ (تُدور النتيجة إلى $10^{-2}$)

2) ما هي كميات المنتوج التي من أجلها لا تتجاوز الكلفة الهامشية 3,5 مليون دينار؟

3) نُذكّر أنّ دالة الكلفة الإجمالية دالة أصلية لدالة الكلفة الهامشية.

أ) بيّن أنّ الكلفة الإجمالية $C_T$ معرفة بـ: $C_T(x) = (12x + 6)e^{-x} + 5x + k$ حيث $k$ عدد حقيقي.

ب) حدّد قيمة $k$ إذا علمت أنّ المصاريف الثابتة 2 مليون دينار (أي $C_T(0) = 2$).

## التمرين 06: (09 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

$f$ الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{4e^{-x}}{e^{-x} + 1} - 3$.

$(C_f)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا: $f(x) = \frac{4}{e^x + 1} - 3$.

ب) احسب نهاية الدّالة $f$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$؛ ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $f$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أ) جِد فاصلة نقطة تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع محور الفواصل.



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ب) اكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ في النقطة $\Omega(0;-1)$.

جـ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا: $f(-x)+f(x)=-2$ ثم استنتج أنّ $(C_f)$ يقبل مركز تناظر.

د) أرسم المماس $(T)$ والمنحنى $(C_f)$ في نفس المعلم.

4)أحسب مساحة الحيز المستوي المُحدد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $x=0$، $x=-\ln 3$ وَ $y=0$.

5) $h$ الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بِـ: $h(x)=f(|x|)$، و $(C_h)$ منحناها البياني في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أ) بيّن أنّ $h$ دّالة زوجية.

ب) اعتماداً على المنحنى $(C_f)$، اشرح كيف يتم رسم المنحنى $(C_h)$ ثمّ ارسمه في نفس المعلم السابق.

## التمرين 07: (04 نقاط) بكالوريا 2016// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

$f$ الدّالة العددية للمتغيّر الحقيقي $x$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=e^x+2e^{-x}-3$.

اختر الجواب الصحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة مع التعليل.

| | | الإجابة أ) | الإجابة ب) | الإجابة جـ) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | حلّي المعادلة $f(x)=0$ هما | $0$ و $\ln 2$ | $0$ و $-\ln 2$ | $0$ و $\ln 3$ |
| 2 | نهاية $f(x)$ عندما $x$ يؤول إلى $+\infty$ هي | $-\infty$ | $+\infty$ | $-3$ |
| 3 | على المجال $\left]\frac{\ln 2}{2};+\infty\right[$ الدّالة $f$ | متزايدة تماما | متناقصة تماما | ليست رتيبة |
| 4 | $m$ القيمة المتوسطة للدّالة $f$ على المجال $[0;2]$، مُدوّر $m$ إلى الوحدة هو: | *1* | *2* | *- 1* |

## التمرين 08: (08 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

نعتبر الدّالة $f$ المعرّفة على $D_f$ حيث $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{e^x-1}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)أ) احسب النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}f(x)$ وَ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}f(x)$ وَفسّر بيانيا النتائج المُحصل عليها.

ب) احسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2)أ) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $D_f$، $f'(x)=\frac{1}{2}e^x+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة $f$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3)ادرس الوضعية النسبية للمنحنى $(C_f)$ مع المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=1$.

4)عيّن معادلة لـ$(T)$ المماس للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $\ln 3$.

5)نعتبر الدّالة $g$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=f(x)-\frac{9}{4}(x-\ln 3)-1$.

الجدول المُقابل يُمثل جدول تغيرات الدّالة $g$.

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

أ) احسب $g(\ln 3)$ واستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$.

ب) ادرس على المجال $]0;+\infty[$ وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المماس $(T)$، ثمّ فسّر ذلك بيانيا.

6)احسب $f(\ln 2)$ ثمّ أرسم المماس $(T)$ وَ $(C_f)$ على المجال $]-\infty;0[\cup]0;3]$.

## التمرين 09: (08 نقاط) بكالوريا 2017_د02// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

$I$)لتكن $g$ الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2x-1-e^{2x}$.

1)ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $g$.

2)استنتج إشارة $g(x)$.

$II$)نعتبر الدّالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x^2-x-\frac{1}{2}e^{2x}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$.

1)احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. (يُعطى: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^2}=+\infty$)

2)ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3)أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $-0,25<\alpha<-0,24$.

ب) أثبت أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف $A$ إحداثياها $\left(0;\frac{-1}{2}\right)$.

جـ) اكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ في النقطة $A$.

4)ارسم $(T)$ وَ $(C_f)$.

5)أ) احسب بالسّنتمتر مربع المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدّد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$، $x=\alpha$ و $y=0$.

ب) تحقّق أنّ $A(\alpha)=\frac{1}{3}(4\alpha^3-12\alpha^2+6\alpha+3)cm^2$.

## التمرين 10: (08 نقاط) بكالوريا 2018// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

$I$)نعتبر الدّالة العددية $g$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1+(1-x)e^{-x+1}$.

ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $g$ ثمّ بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$: $g(x)>0$. (لا يُطلب حساب النهايات)

$II$)نعتبر الدّالة العددية $f$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+xe^{-x+1}$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. ثمّ بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى $(C_f)$.

ب. ادرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$.

2)بيّن أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات للدّالة $f$.

3)بيّن أنّ المعادلة $f(x)=4$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ حيث $3,75<\alpha<3,77$.

4)اكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $1$ ثمّ ارسم $(T)$، $(\Delta)$ وَ $(C_f)$.

5)نعتبر الدّالة العددية $F$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $F(x)=\frac{1}{2}x^2-(x+1)e^{-x+1}$.

أ. بيّن أنّ الدّالة $F$ هي دّالة أصلية للدّالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب. أوجد القيمة المضبوطة للعدد $\int_1^4 f(x)dx$، ثمّ أعط تفسيرا هندسيا لهذا العدد.

6)تنمذج الكلفة الهامشية $C_m$ لإنتاج كمية $q$ (مقدرة بآلاف الوحدات) حيث $0\le q\le 7$ بالدّالة $f$ المعرّفة سابقا أي: $C_m(q)=f(q)$ حيث: $q\in[0;7]$. (الكلفة الهامشية مقدّرة بملايين الدنانير)

أ. ما هي كمية المنتوج التي من أجلها لا تتجاوز الكلفة الهامشية 4 ملايين دينار؟

ب. نذكّر أنّ دّالة الكلفة الإجمالية $C_T$ هي دّالة أصلية لدّالة الكلفة الهاشمية. احسب القيمة المتوسطة للكلفة الإجمالية عندما تنتج الشركة ما بين 1000 وحدة و4000 وحدة.

## التمرين 11: (07 نقاط) بكالوريا 2019// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

$I$) $g$ الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]-\infty;0]$ كما يلي: $g(x)=2x+6-e^{2x+1}$.

1)أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $g$ على المجال $]-\infty;0]$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2)أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $-3<\alpha<-2{,}9$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty;0]$.

$II$) $f$ الدّالة المعرّفة على المجال $]-\infty;0]$ كما يلي: $f(x)=-2x^2-12x+e^{2x+1}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

حيث الوحدة على محور الفواصل $1cm$ وعلى محور التراتيب $0{,}5cm$.

1)أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-\infty;0]$: $f'(x)=-2g(x)$.

2)استنتج اتجاه تغيّر الدّالة $f$ على المجال $]-\infty;0]$.

3)احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$.

4)بيّن أنّ: $f(\alpha)=-2\alpha(\alpha+5)+6$ وأعط حصرا للعدد $f(\alpha)$، ثمّ ارسم $(C_f)$ على المجال $[-4;0]$.

5)احسب بدلالة $\alpha$ التكامل: $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{0} f(x)dx$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

# مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال الأسية -بكالوريات جزائرية)

## الحلول// الشعبة: تسيير وإقتصاد.

## حل التمرين 01: (05 نقاط) بكالوريا 2009// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $f(x)=(x+a)e^{-x}+b$ و$D_f=\mathbb{R}$، حيث $a$ و$b$ عددان حقيقيان.

**1)بقراءة بيانية للمنحنى $(C_f)$،**

**أ) تعيين $f(-3)$، $f(0)$، $f'(-2)$:**

من البيان لدينا: $\boxed{f(-3)=-3}$؛ $\boxed{f(0)=0}$

و$\boxed{f'(-2)=0}$ (**المماس عند النقطة ذات الفاصلة $(-2)$ مُوازي لمحور الفواصل**).

**ب) تعيين حسب قيّم $x$ إشارة $f'(x)$ :**

من البيان لدينا: $f$ **متزايدة تماما** على المجال $]-\infty;-2]$ و**متناقصة تماما** على المجال $[-2;+\infty[$ **إذن:**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

ج) المنحنى المُمثل للدّالة $f'$ مشتقة الدّالة $f$ هو **المنحنى (2)** لأنّ:

- من أجل $x\in]-\infty;-2]$، **المنحنى (2)** يقع فوق محور الفواصل أي: $\boxed{f'(x)\geq 0}$.
- ومن أجل $x\in[-2;+\infty[$، **المنحنى (2)** يقع تحت محور الفواصل أي: $\boxed{f'(x)\leq 0}$.

**2)أ) تبيان أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$، $f(x)=(x+3)e^{-x}-3$ :**

**من 1)أ)**، لدينا: $\begin{cases}f(-3)=-3\\f(0)=0\\f'(-2)=0\end{cases}$ بحيث: $f'(x)=1e^{-x}-e^{-x}(x+a)=(1-x-a)e^{-x}$

ومنه: $\begin{cases}(-3+a)e^{-(-3)}+b=-3\\(0+a)e^{-0}+b=0\\(1-(-2)-a)e^{-(-2)}=0\end{cases}$ أي: $\begin{cases}(-3+a)e^{3}+b=-3\ \dots(1)\\a+b=0\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots(2)\\(3-a)e^{2}=0\ \dots\dots\dots\dots(3)\end{cases}$

من (3) نجد: $\boxed{a=3}$، وبالتعويض في (2) نجد: $\boxed{b=-3}$، إذن: $\boxed{f(x)=(x+3)e^{-x}-3}$.

**ب) تشكيل جدول تغيّرات الدّالة $f$ :**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $e^2-3$ | ↘ | $-2$ | ↘ | $-3$ |

بحيث، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}[(x+3)e^{-x}-3]=-\infty$ لأنّ: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3)=-\infty\\\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty\end{cases}$

و$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+3)e^{-x}-3]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}+\frac{3}{e^x}-3\right)=-3$

و$3)e^{-(-2)}-3=e^2-3$

**جـ) تبيان أنّ $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا يُطلب تعيين معادلة له:**

بمأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -3$ ،

فإنّ: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=-3}$ **(المُوازي لمحور الفواصل)** مُقارب لـ$(C_f)$ عند $+\infty$.

**د) تبيان أنّ المعادلة $f(x) = -2$ تقبل في المجال $[0;+\infty[$ حلاً وحيداً $\alpha$ محصور بين $1,50$ وَ$1,52$:**

- لدينا: $f$ **مستمرة ومتناقصة تماما** على المجال $[0;+\infty[$ (لأنّها **متناقصة تماما** على المجال $]-2;+\infty[$)
- ولدينا: $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -3 \end{cases}$، أي: $-2 \in ]-3;0]$

إذن: **حسب مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x) = -2$ تقبل في المجال $[0;+\infty[$ حلاً وحيداً $\alpha$.

وبمأنّ: $\begin{cases} f(1,50) \simeq -1,996 \\ f(1,52) \simeq -2,011 \end{cases}$، أي: $(-2$ محصور بين $f(1,50)$ و$f(1,52))$

فإنّ: $\boxed{1,50 < \alpha < 1,52}$.

3)لدينا: $F(x) = (-x-4)e^{-x}$ وَ$D_F = \mathbb{R}$؛ $I$ العدد الحقيقي حيث: $I = \int_{-2}^{0} f(x)dx$.

**أ) حساب $F'(x)$:** $F'(x) = -1 \times e^{-x} - e^{-x}(-x-4) = (-1+x+4)e^{-x} = (x+3)e^{-x}$

**استنتاج دّالة أصلية للدّالة $f$ على $\mathbb{R}$:**

بمأنّ: $F'(x) = (x+3)e^{-x}$ فإنّ: $F$ أصلية للدّالة $x \mapsto (x+3)e^{-x}$

وبالتالي: $x \mapsto F(x) - 3x$ هي أصلية للدّالة $f$.

**ب) إعطاء تفسيرا بيانيا للعدد $I$:**

العدد $I$ هو مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(C_f)$ وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما:

$x = -2$، $x = 0$.

**تبرير الحصر التالي $4,5 < I < 5$ باعتبارات بيانية مَحضة:**

**جـ) حساب العدد $I$:**

لدينا: $I = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx = [(-x-4)e^{-x} - 3x]_{-2}^{0}$

ومنه: $I = [(-0-4)e^{-0} - 3(0)] - [(-(-2)-4)e^{-(-2)} - 3(-2)]$

وعليه: $I = -4 - (-2e^2 + 6) = -10 + 2e^2$.

## حل التمرين 02: (08 نقاط) بكالوريا 2011// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

1)لدينا: $f(x) = e^{2x} - e^x - x - 2$ وَ$D_f = \mathbb{R}$.

**أ. حساب نهاية الدّالة $f$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$: (علماً أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{2x}} = 0$)**

- لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (e^{2x} - e^x - x - 2) = +\infty$، لأنّ: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (-x-2) = +\infty \end{cases}$.
- وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^{2x} - e^x - x - 2) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{2x}\left(1 - \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^{2x}} - \frac{2}{e^{2x}}\right)\right) = +\infty$، لأنّ: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{e^{2x}} = 0 \end{cases}$.

**ب. تبيان أنّ الدّالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\quad$ وأنّ $\quad$ تُحقق: $f'(x) = (e^x -$ $x$ :**

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$f$ **قابلة للاشتقاق** على $\mathbb{R}$ لأنّها **مجموع دّوال قابلة للاشتقاق** على $\mathbb{R}$ وهي:

$x \mapsto e^{2x}$ ؛ $x \mapsto -e^{x}$ وَ $x \mapsto -x-2$،

ولدينا: $f'(x) = 2e^{2x} - e^{x} - 1$ **(1)**

ولدينا من جهة أخرى: $(e^{x}-1)(2e^{x}+1) = 2e^{2x} + e^{x} - 2e^{x} - 1 = 2e^{2x} - e^{x} - 1$ **(2)**

إذن: $\boxed{f'(x) = (e^{x}-1)(2e^{x}+1)}$.

**جـ. دراسة حسب قيم $x$ إشارة $f'(x)$ ثمّ استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة $f$ وتشكيل جدول تغيراتها:**

**إشارة $f'(x)$ من إشارة $(e^{x}-1)$ لأنّ: $2e^{x}+1>0$**

$e^{x}-1>0$ يعني $e^{x}>1$ وعليه $x>\ln 1$ أي: $x>0$

$e^{x}-1=0$ يعني $e^{x}=1$ وعليه $x=\ln 1$ أي: $x=0$

$e^{x}-1<0$ يعني $e^{x}<1$ وعليه $x<\ln 1$ أي: $x<0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | ○ | + | |

إذن: $f$ **متناقصة تماما** على المجال $]-\infty;0]$، و**متزايدة تماما** على المجال $[0;+\infty[$.

**ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | | ○ | + | 0 | | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | | ↘ | $-2$ | ↗ | | ↗ | $+\infty$ |

2) $(C)$ منحنى $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ على المجال $]-\infty;1]$

**أ. تبيان أنّ المستقيم $(d)$ الذي معادلته $y=-x-2$ مُقارب مائل للمنحنى $(C)$ بجوار $-\infty$:**

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-2)] = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x}-e^{x}) = 0$ ، لأنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$.

إذن: المستقيم $(d)$ الذي معادلته $y=-x-2$ مُقارب مائل للمنحنى $(C)$ بجوار $-\infty$.

**دراسة الوضعية النسبية للمنحنى $(C)$ والمستقيم $(d)$:**

**ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-x-2)$**، لدينا: $f(x)-(-x-2) = e^{2x}-e^{x} = e^{x}(e^{x}-1)$

إشارة الفرق $f(x)-(-x-2)$ من إشارة $(e^{x}-1)$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e^{x}-1$ | | - | ○ | + | |
| $f(x)-(-x-2)$ | | - | ○ | + | |
| **الوضع النسبي** | $(C)$ يقع **تحت** $(d)$ | | $(C)$ **يقطع** $(d)$ | | $(C)$ يقع **فوق** $(d)$ |

**ب. تبيان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $\alpha$ و$\beta$ حيث $-2,11<\alpha<-2,10$ و$0,81<\beta<0,82$ وتفسير النتيجة هندسياً:**

**بالنسبة لـ $\alpha$:**

- $f$ **مستمرة ومتناقصة تماما** على المجال $]-2,11;-2,10[$ (لأنّها **متناقصة تماما** على $]-\infty;0]$)
- ولدينا: $\begin{cases} f(-2,11) \simeq 0,00346 \\ f(-2,10) \simeq -0,00746 \end{cases}$ أي: $f(-2,11)\times f(-2,10)<0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ في المجال $]-2,11;-2,10[$.


قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

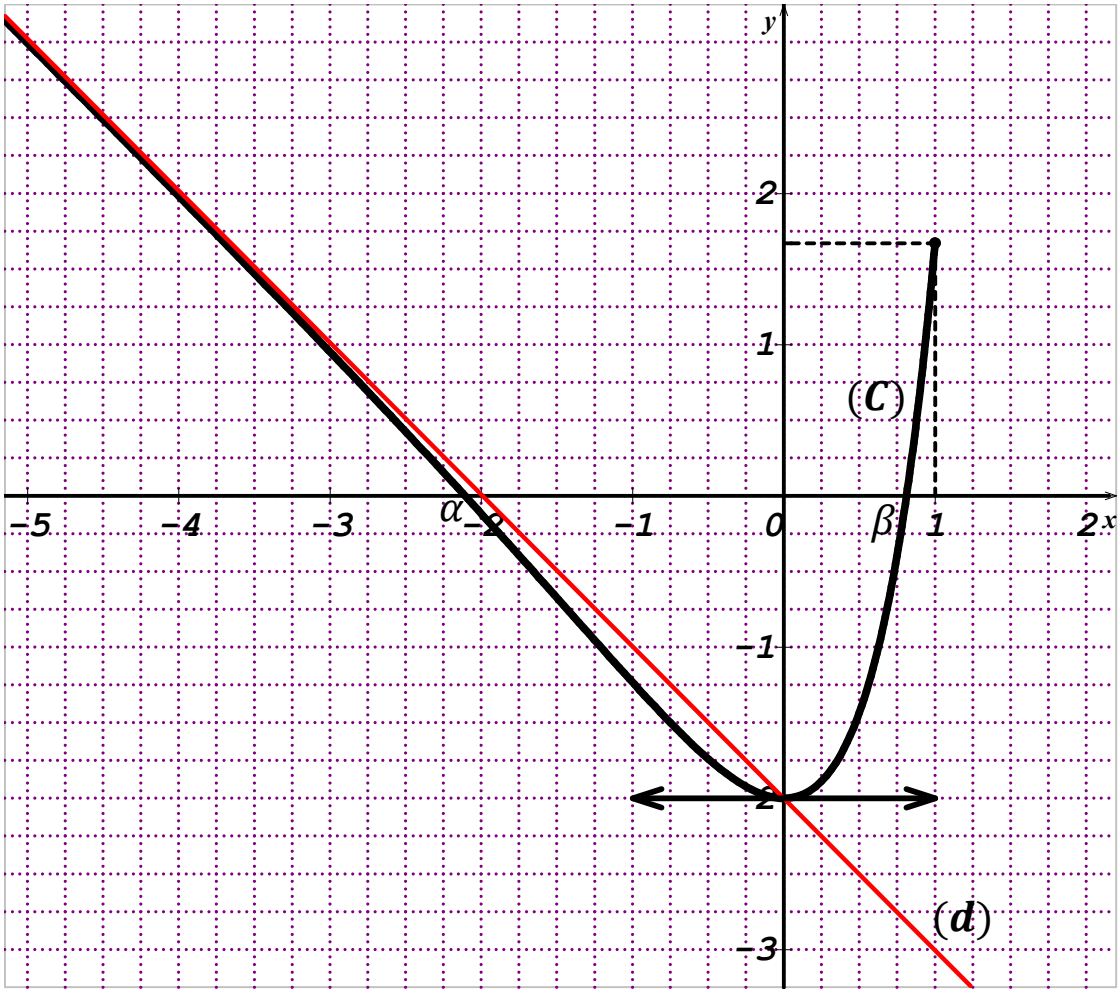
**بالنسبة لـ $\beta$:**

- $f$ **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $]0,81;0,82[$ (لأنّها **متزايدة تماما** على $[0;+\infty[$)
- ولدينا: $\begin{cases} f(0,81) \simeq -0,0048 \\ f(0,82) \simeq 0,0646 \end{cases}$ أي: $f(0,81) \times f(0,82) < 0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $\beta$ في المجال $]0,81;0,82[$.

**تفسير النتيجة هندسياً:** المنحنى يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما، $\alpha$ و $\beta$.

**جـ. رسم المستقيم $(d)$ والمنحنى $(C)$:**




**3)تعيين دّالة أصلية $F$ للدّالة $f$ على المجال $]-\infty;1]$:**

بمأنّ $f$ **مستمرة** على المجال $]-\infty;1]$، فإنّها تقبل **دّوال أصلية** من الشكل

$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^{x} - \frac{1}{2}x^2 - 2x + c$ (حيث $c \in \mathbb{R}$).

## حل التمرين 03: (06 نقاط) بكالوريا 2012// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $f(x) = (x+1)e^{1-x}$ وَ $D_f = [-1;+\infty[$.

**1)تبيان أنّ معادلة $(\Delta)$ المماس للمنحنى $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة *1* هي: $y = -x + 3$ :**

معادلة $(\Delta)$ من الشكل: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

ولدينا: $\begin{cases} f'(1) = -1e^{1-1} = -1 \\ f(1) = (1+1)e^{1-1} = 2 \end{cases}$، بحيث $f'(x) = 1e^{1-x} - e^{1-x}(x+1) = -xe^{1-x}$.

بالتعويض نجد: $y = -(x-1) + 2$ إذن: $\boxed{(\Delta): y = -x + 3}$.

2)لدينا: $g(x) = -xe^{1-x} + 1$ وَ $D_g = [-1;+\infty[$.



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**أ-دراسة اتجاه تغيّر الدّالة $g$:**

$g$ قابلة للاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$، ولدينا:

$$g'(x) = -1 \times e^{1-x} - e^{1-x} \times (-x) = (x-1)e^{1-x}.$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x-1)$

| $x$ | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | - | 0 | + | |

إذن: $g$ **متناقصة تماما** على المجال $[-1;1]$، و**متزايدة تماما** على المجال $]1;+\infty[$.

**ب-حساب $g(1)$، ثمّ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$:**

لدينا: $g(1) = -(1) \times e^{1-1} + 1 = -1 + 1 = 0$

وبالتالي: من أجل كل $x$ من المجال $]-1;+\infty[$، $g(x) \geq g(1)$ أي: $\boxed{g(x) \geq 0}$.

3)لدينا: $h(x) = (x+1)e^{1-x} + x - 3$ وَ $D_h = ]-1;+\infty[$.

أ-نلاحظ أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]-1;+\infty[$، $h(x) = f(x) + x - 3 = f(x) - y_{(\Delta)}$،

**استنتاج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$:**

من جدول تغيّرات الدّالة $f$ لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، وبمأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-3) = +\infty$ فإنّ: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty}$.

**ب-تبيان أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]-1;+\infty[$، $h'(x) = g(x)$، ثم استنتاج جدول تغيّرات الدّالة $h$:**

لدينا: $h(x) = f(x) + x - 3$ ومنه: $h'(x) = f'(x) + 1 = -xe^{1-x} + 1 = g(x) \geq 0$

وبالتالي: $h$ **متزايدة تماما** على المجال $]-1;+\infty[$، **ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

| $x$ | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | + | 0 | + | |
| $h(x)$ | $-4$ | - - - | | + + + | $+\infty$ |

بحيث: $h(-1) = f(-1) + (-1) - 3 = 0 - 4 = -4$.

**جـ-التحقّق أنّ المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-1;+\infty[$ يُطلب تعيينه:**

- $h$ **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $]-1;+\infty[$.
- ولدينا: $\begin{cases} h(-1) = -4 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty \end{cases}$، أي: $0 \in ]-4;+\infty[$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-1;+\infty[$

**تعيين الحل:**

بمأنّ $h(x) = f(x) - y_{(\Delta)}$ فإنّ **فاصلة نقطة التمّاس هي الحل**، وبالتالي: حل المعادلة $h(x) = 0$ هو $\boxed{x = 1}$.

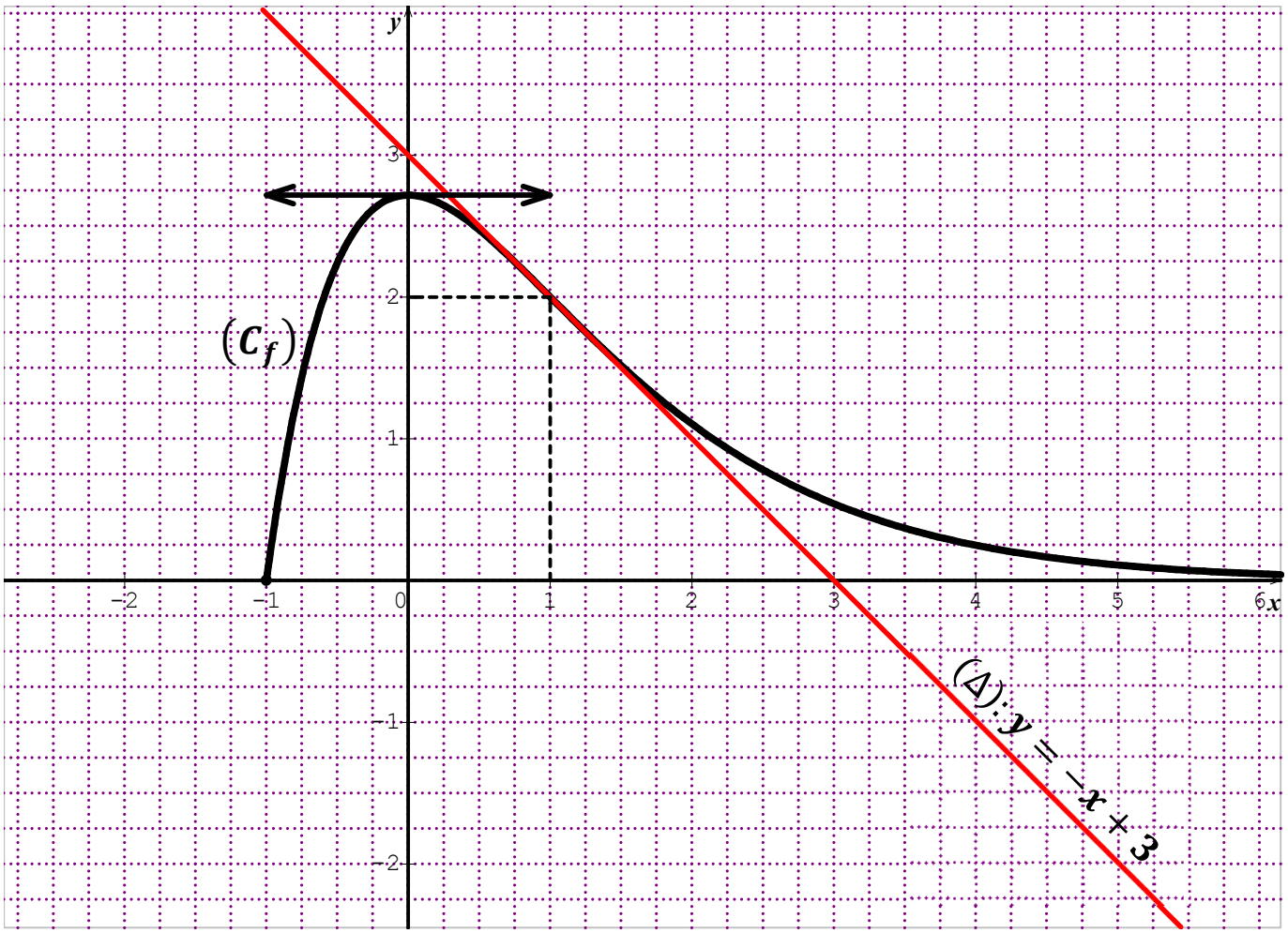
**د-تحديد إشارة $h(x)$، ثمّ استنتاج وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$:**

| $x$ | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | | - | 0 | + | |
| $f(x) - (-x+3)$ | | - | 0 | + | |
| **الوضع النسبي** | $(C_f)$ يقع **تحت** $(\Delta)$ | | $(C_f)$ **يقطع** $(\Delta)$ | | $(C_f)$ يقع **فوق** $(\Delta)$ |



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**هـ-إنشاء كلا من المماس $(\Delta)$ والمنحنى $(C_f)$:**




## حل التمرين 04: (07 نقاط) بكالوريا 2013// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$ وَ $D = \mathbb{R}^* = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$.

**1-أ) حساب $\lim\limits_{x<0} f(x)$ و $\lim\limits_{x>0} f(x)$، وتفسير النتيجتين هندسياً:**

لدينا: $\lim\limits_{x<0} f(x) = \lim\limits_{x<0}\left(2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}\right) = -\infty$، وَ $\lim\limits_{x>0} f(x) = \lim\limits_{x>0}\left(2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}\right) = +\infty$

لأنّ: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}(2x-1) = -1 \\ \lim\limits_{x<0}(e^x - 1) = 0^- \\ \lim\limits_{x>0}(e^x - 1) = 0^+ \end{cases}$.

**التفسير الهندسي للنتيجتين:** حامل محور التراتيب **مُقارب** لـ$(C_f)$.

**ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:**

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}\right) = +\infty$ لأنّ: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - 1) = +\infty \end{cases}$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}\right) = -\infty$ لأنّ: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - 1) = -1 \end{cases}$.

**2-أ) تبيان أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=2x-1$، مُقارب مائل للمنحنى $(C_f)$:**

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x-1}\right)=0$ ؛

وَ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(2x-1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^x-1}\right)=-1$

إذن: المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=2x-1$، **مُقارب مائل** للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$.

**ب) التحقّق أنّه، من أجل كل عدد حقيقي $x$ غير معدوم، فإنّ $f(x)=2x-2+\frac{e^x}{e^x-1}$، ثمّ استنتاج أنّ المستقيم $(\Delta')$ ذا المعادلة $y=2x-2$، مُقارب للمنحنى $(C_f)$:**

لدينا: $f(x)=2x-1+\frac{1}{e^x-1}-1+1=2x-2+\frac{1}{e^x-1}+1$

ومنه: $f(x)=2x-2+\frac{1}{e^x-1}+\frac{e^x-1}{e^x-1}=2x-2+\frac{1+e^x-1}{e^x-1}=2x-2+\frac{e^x}{e^x-1}$ **(وهو المطلوب)**

وعليه: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{e^x}}\right)=1$

وَ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(2x-2)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)=0$

إذن: المستقيم $(\Delta')$ ذا المعادلة $y=2x-2$، **مُقارب مائل** للمنحنى $(C_f)$ عند $-\infty$.

**3-تبيان أنّه، من أجل كل عدد حقيقي $x$ غير معدوم، فإنّ: $f'(x)=\frac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2}$ :**

$f$ قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ وَ $]0;+\infty[$، ولدينا:

$$f'(x)=2-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{2(e^x-1)^2-e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{2(e^{2x}+1-2e^x)-e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{2e^{2x}+2-4e^x-e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2}$$

**استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة $f$، ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها:**

**إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(2e^{2x}-5e^x+2)$**

بوضع: $X=e^x$ نجد: $2X^2-5X+2$ (مميزه $\Delta=(-5)^2-4(2)(2)=9>0$)

له جذران متمايزان هما، $X'=\frac{-(-5)+\sqrt{9}}{2(2)}=\frac{5+3}{4}=2$ وَ $X''=\frac{-(-5)-\sqrt{9}}{2(2)}=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$

- من أجل $X=2$ معناه: $e^x=2$ نجد: $x=\ln 2$.
- من أجل $X=\frac{1}{2}$ معناه: $e^x=\frac{1}{2}$ نجد: $x=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$.

| $x$ | $-\infty$ | $-\ln 2$ | $0$ | $\ln 2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ ‖ $-$ | $0$ | $+$ |

إذن: $f$ **متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-\infty;-\ln 2]$ وَ $[\ln 2;+\infty[$،

وَ**متناقصة تماما** على المجال $]0;-\ln 2]$ وَ $[\ln 2;0[$، **ويكون جدول تغيراتها كالتالي:**

| $x$ | $-\infty$ | $-\ln 2$ | $0$ | $\ln 2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ ‖ $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $-2\ln 2-3$ | ↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘ | $2\ln 2$ | ↗ $+\infty$ |

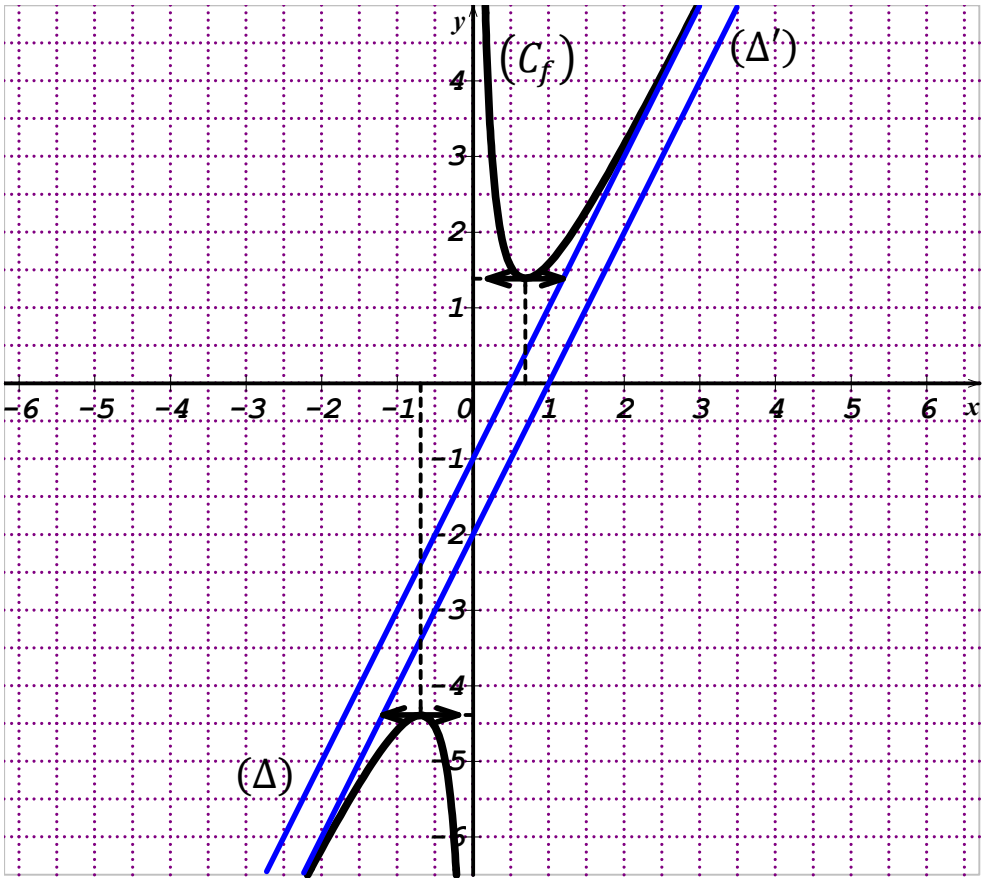
حيث: $f(\ln 2)=2\ln 2-1+\frac{1}{e^{\ln 2}-1}=2\ln 2$،



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$f(-\ln 2)=2(-\ln 2)-1+\frac{1}{e^{-\ln 2}-1}=-2\ln 2-1+\frac{1}{\frac{1}{e^{\ln 2}}-1}=-2\ln 2-1+\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2\ln 2-3$ وَ

**4-تمثيل بيانيا كلاً من $(\Delta)$، $(\Delta')$ و$(C_f)$:**




**5-حساب العدد: $\int_1^2 f(x)dx$، ثمّ تفسيره هندسيا:**

لدينا: $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\left(2x-1+\frac{1}{e^x-1}\right)dx=[x^2-x+\ln(e^x-1)]_1^2$

ومنه: $\int_1^2 f(x)dx=[2^2-2+\ln(e^2-1)]-[1^2-1+\ln(e^1-1)]$

وعليه: $\int_1^2 f(x)dx=2+\ln(e^2-1)-\ln(e-1)=2+\ln(e-1)(e+1)-\ln(e-1)$

وبالتالي: $\int_1^2 f(x)dx=2+\ln(e-1)+\ln(e+1)-\ln(e-1)=[2+\ln(e+1)]u.a$

**تفسيره هندسيا:** هو مساحة الحيّز المستوي المُحدد بـ$(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $x=1$، $x=2$ وَ $y=0$.

## حل التمرين 05: (07 نقاط) بكالوريا 2014// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $f(x)=6(1-2x)e^{-x}+5$ وَ $D_f=[0;+\infty[$.

**I)1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ تفسير النتيجة هندسياً: (علماً أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$)**

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(6e^{-x}-12xe^{-x}+5)=5$ لأنّ: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0\end{cases}$.

**التفسير الهندسي للنتيجة:** المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=5}$ (المُوازي لمحور الفواصل) مقارب لـ$(C_f)$ عند $+\infty$.

**2)دراسة اتجاه تغيّر الدّالة $f$ ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها:**

$f$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$، ولدينا:

$f'(x)=6[-2e^{-x}+(-e^{-x})(1-2x)]=6e^{-x}(-2-1+2x)=6e^{-x}(2x-3)$.


قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(2x-3)$ على $[0;+\infty[$.

| $x$ | $0$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | $0$ | + | |

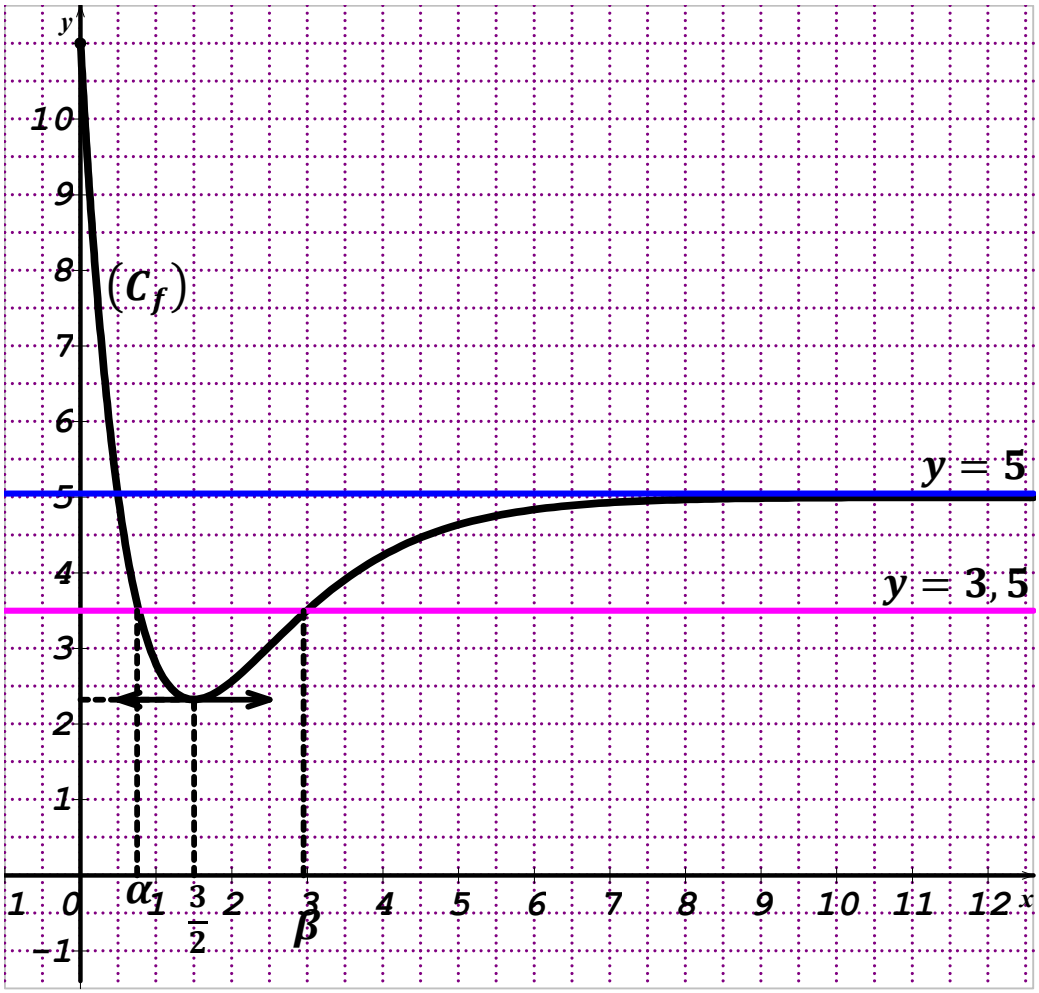
إذن: $f$ متناقصة تماما على $\left[0;\frac{3}{2}\right]$، وَمتزايدة تماما على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$؛

**ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

| $x$ | $0$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | $0$ | + | |
| $f(x)$ | $11$ | ↘ | $f\left(\frac{3}{2}\right)$ | ↗ | $5$ |

حيث $f\left(\frac{3}{2}\right)=-12e^{-\frac{3}{2}}+5$.

**3)إنشاء $(C_f)$:**




**4)أ) تبيان أنّ المعادلة $f(x)=3,5$ تقبل في $[0;7]$ حلين مختلفين $\alpha$، $\beta$ حيث: $0,7<\alpha<0,8$ وَ $2,9<\beta<3$:**

- على المجال $\left[0;\frac{3}{2}\right]$.
  - الدّالة $f$ مستمرة وَمتناقصة تماما على المجال $\left[0;\frac{3}{2}\right]$،



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

- ولدينا: $\begin{cases} f(0) = 11 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2.32 \end{cases}$، أي: 3,5 محصور بين $f(0)$ وَ $f\left(\frac{3}{2}\right)$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x) = 3{,}5$ تقبل في المجال $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ حلاً وحيداً $\alpha$.

ولدينا من جهة أخرى: $\begin{cases} f(0{,}7) \simeq 3{,}8 \\ f(0{,}8) \simeq 3{,}39 \end{cases}$، أي: $f(0{,}8) < 3{,}5 < f(0{,}7)$ إذن: $\boxed{0{,}7 < \alpha < 0{,}8}$.

- **على المجال** $\left[\frac{3}{2}; 7\right]$.

- الدّالة $f$ **مستمرة** وَ**متزايدة تماما** على المجال $\left[\frac{3}{2}; 7\right]$ (لأنّها **متزايدة تماما** على المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$)،

- ولدينا: $\begin{cases} f\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2{,}32 \\ f(7) \simeq 4{,}93 \end{cases}$، أي: 3,5 محصور بين $f\left(\frac{3}{2}\right)$ وَ $f(7)$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x) = 3{,}5$ تقبل في المجال $\left[\frac{3}{2}; 7\right]$ حلاً وحيداً $\beta$.

ولدينا من جهة أخرى: $\begin{cases} f(2{,}9) \simeq 3{,}42 \\ f(3) \simeq 3{,}5 \end{cases}$، أي: $f(2{,}9) < 3{,}5 < f(3)$ إذن: $\boxed{2{,}9 < \beta < 3}$.

**ب) حل بيانياً في المجال $[0; 7]$ المتراجحة، $f(x) \leq 3{,}5$ :**

حلول المتراجحة، $f(x) \leq 3{,}5$ **بيانياً** في المجال $[0; 7]$ هي **فواصل** نقط $(C_f)$ **الواقعة تحت** المستقيم ذو المعادلة $y = 3{,}5$ **مع فواصل** نقط **التقاطع**؛ من البيان: $\boxed{S = [\alpha; \beta]}$.

**5)أ) تعيين العددين الحقيقيين $a$، $b$ بحيث تكون الدّالة $g$ المعرّفة على $[0; 7]$ بـ: $g(x) = (ax + b)e^{-x}$ دّالة أصلية للدّالة $h$ المعرّفة على $[0; 7]$ بـ: $h(x) = 6(1 - 2x)e^{-x}$.**

$g$ دّالة أصلية للدّالة $h$ على المجال $[0; 7]$ معناه: $g'(x) = h(x) \ldots (*)$

لدينا: $g'(x) = ae^{-x} + (-e^{-x})(ax + b) = (a - b - ax)e^{-x}$

$(*)$ تُصبح $(a - b - ax)e^{-x} = (6 - 12x)e^{-x}$ ومنه: $\begin{cases} a - b = 6 \\ -a = -12 \end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases} b = 6 \\ a = 12 \end{cases}$

إذن: $\boxed{g(x) = (12x + 6)e^{-x}}$.

**ب) استنتاج دّالة أصلية للدّالة $f$ على $[0; 7]$:**

بمأنّ: $f(x) = h(x) + 5$ فإنّ: $F(x) = g(x) + 5x$، حيث $F$ **دّالة أصلية** لـ$f$ على المجال $[0; 7]$.

***II)*** الكلفة الهامشية $C_M$ لصناعة كمية $x$ (مقدرة بالطن) من منتوج، حيث $x$ ينتمي إلى المجال $[0; 7]$ تُنمذج بالدّالة $f$ أي: $C_M(x) = f(x)$ (الكلفة مقدرة بملايين الدنانير).

**1)تحديد كمية المنتوج بحيث تكون الكلفة الهامشية أقل ما يُمكن، وقيمة هذه الكلفة: (تُدور النتيجة إلى $10^{-2}$)**

لدينا: الدّالة $f$ تقبل قيمة حدية صغرى من أجل $x = \frac{3}{2}$، قيمتها $f\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2{,}32$.

ومنه: كمية المنتوج بحيث تكون الكلفة الهامشية أقل ما يُمكن هي ***1,5*** طن، وقيمة هذه الكلفة هي ***2,32*** مليون دينار.

**2)كميات المنتوج التي من أجلها لا تتجاوز الكلفة الهامشية 3,5 مليون دينار:**

لدينا: حلول المتراجحة $f(x) \leq 3{,}5$، في المجال $[0; 7]$ هي $x$ حيث: $x \in [\alpha; \beta]$.

ومنه: كميات المنتوج التي من أجلها لا تتجاوز الكلفة الهامشية ***3,5*** مليون دينار، هي $x$ حيث: $x \in [\alpha; \beta]$.

3)نُذكّر أنّ دّالة **الكلفة الإجمالية** دّالة أصلية لدالة **الكلفة الهامشية**

**أ) تبيان أنّ الكلفة الإجمالية $C_T$ معرّفة بـ، $C_T(x) = (12x + 6)e^{-x} + 5x + k$ حيث $k$ عدد حقيقي:**

لدينا: $(12 - 12x - 6)e^{-x} + 5$ $C_T'(x) = 12e^{-x}$



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ومنه: $C_T'(x) = 6(1-2x)e^{-x} + 5 = f(x) = C_M(x)$

إذن: الكلفة الإجمالية $C_T$ معرّفة بـ، $C_T(x) = (12x+6)e^{-x} + 5x + k$ حيث $k$ عدد حقيقي.

**ب) تحديد قيمة $k$ إذا علماً أنّ المصاريف الثابتة 2 مليون دينار (أي $C_T(0) = 2$):**

نضع: $C_T(0) = 2$ نجد: $6 + k = 2$ ومنه: $\boxed{k = -4}$

إذن: قيمة $k$ إذا علماً أنّ المصاريف الثابتة 2 مليون دينار هي $-4$.

## حل التمرين 06: (09 نقاط) بكالوريا 2015// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $f(x) = \frac{4e^{-x}}{e^{-x}+1} - 3$ وَ $D_f = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$.

**1)أ) تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا، $f(x) = \frac{4}{e^x+1} - 3$ :**

من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا، $f(x) = \frac{4e^{-x}}{e^{-x}+1} - 3 = \frac{4e^{-x}}{e^{-x}\left(1+\frac{1}{e^{-x}}\right)} - 3 = \frac{4}{e^x+1} - 3$.

**ب) حساب نهاية الدّالة $f$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$؛ ثمّ تفسّير النتيجتين هندسيا:**

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{e^x+1} - 3\right) = 4 - 3 = 1$ لأنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{e^x+1} - 3\right) = -3$ لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+1) = +\infty$.

**التفسير الهندسي للنتيجتين:**

المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = 1}$ (المُوازي لمحور الفواصل) مقارب لـ$(C_f)$ عند $-\infty$.

وَالمستقيم ذو المعادلة $\boxed{y = -3}$ (المُوازي لمحور الفواصل) مقارب لـ$(C_f)$ عند $+\infty$.

**2)دراسة اتجاه تغيّر الدّالة $f$ ثم تشكّيل جدول تغيراتها:**

$f$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x) = 4\left(\frac{-e^x}{(e^x+1)^2}\right) = \frac{-4e^x}{(e^x+1)^2} < 0$

وبالتالي: $f$ **متناقصة تماما** على $\mathbb{R}$، ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | |
| $f(x)$ | **1** | ↘ | **$-3$** |

**3)أ) ايجاد فاصلة نقطة تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع محور الفواصل: (نحل المعادلة $f(x) = 0$ )**

$f(x) = 0$ تُكافئ: $\frac{4}{e^x+1} - 3 = 0$

ومنه: $\frac{4-3(e^x+1)}{e^x+1} = 0$

وعليه: $\frac{-3e^x+1}{e^x+1} = 0$

ومنه: $-3e^x + 1 = 0$ وَ $e^x + 1 \neq 0$ إذن: $\boxed{x = \ln\frac{1}{3} = -\ln 3}$

**ب) كتابة معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ في النقطة $\Omega(0;-1)$:**

معادلة $(T)$ من الشكل $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

ولدينا: $\begin{cases} f'(0) = \frac{-4e^0}{(e^0+1)^2} = \frac{-4}{4} = -1 \\ f(0) = -1 \end{cases}$ ترتيب $\Omega$، إذن: $\boxed{(T): y = -x - 1}$.

**جـ) تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا، $f(-x) + f(x) = -2$ ثمّ استنتاج أنّ $(C_f)$ يقبل مركز تناظر:**



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لدينا: $f(x)=\frac{4}{e^x+1}-3$ وَ $f(-x)=\frac{4e^{-(-x)}}{e^{-(-x)}+1}-3=\frac{4e^x}{e^x+1}-3$

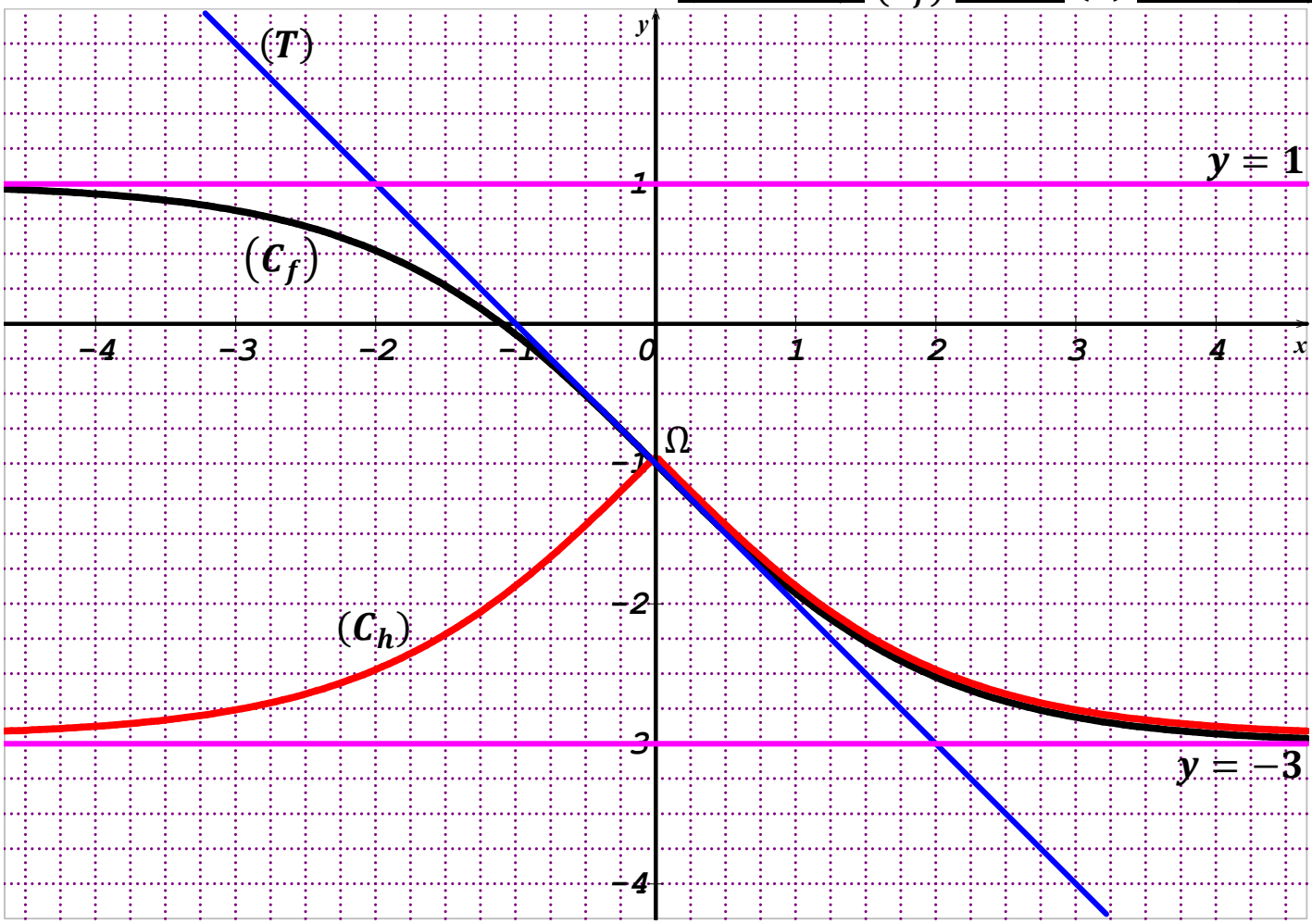
ومنه: $f(-x)+f(x)=\left(\frac{4e^x}{e^x+1}-3\right)+\left(\frac{4}{e^x+1}-3\right)=\frac{4(e^x+1)}{e^x+1}-6=4-6=-2$

**استنتاج أنّ $(C_f)$ يقبل مركز تناظر:**

لدينا: $f(-x)+f(x)=-2$ من الشكل $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$ حيث $\alpha=0$ وَ $\beta=-1$.

إذن: النقطة $\Omega(0;-1)$ هي **مركز تناظر** لـ $(C_f)$.

**د) رسم المماس $(T)$ والمنحنى $(C_f)$ في نفس المعلم:**




**4)حساب مساحة الحيز المستوي المُحدد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $x=0$، $x=-\ln 3$ وَ $y=0$ :**

لتكن $A$ هي مساحة الحيز، نجد: $A=\int_{-\ln 3}^{0}-f(x)dx=\int_{-\ln 3}^{0}\left(\frac{4(-e^{-x})}{e^{-x}+1}+3\right)dx$

ومنه: $A=[4\ln(e^{-x}+1)+3x]_{-\ln 3}^{0}=(4\ln 2)-(4\ln 4-3\ln 3)$

إذن: $\boxed{A=(-4\ln 2+3\ln 3)u.a}$.

5) لدينا: $h(x)=f(|x|)$ وَ $D_h=\mathbb{R}$، و $(C_h)$ منحناها البياني في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**أ) تبيان أنّ $h$ دّالة زوجية:**

من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}$ فإنّ $-x\in\mathbb{R}$ ولدينا: $h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$.

إذن: $h$ دّالة زوجية.

**ب) اعتماداً على المنحنى $(C_f)$، شرح كيف يتم رسم المنحنى $(C_h)$ ثمّ رسمه في نفس المعلم السابق:**

لدينا: $h(x)=f(|x|)=\begin{cases}f(x);x\geq 0\\f(-x);x\leq 0\end{cases}$، ومنه نستنتج ما يلي:

$(C_h)$ يكون **منطبق** على $(C_f)$ على المجال $[0;+\infty[$، و**نرسم الجزء المتبقي** من $(C_h)$ على المجال $]-\infty;0[$ **بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب**، لأنّ: دّالة زوجية.


WWW.DZPEN.COM

## حل التمرين 07: (04 نقاط) بكالوريا 2016// الموضوع 01// الشعبة: تسيير واقتصاد.

لدينا: $f(x) = e^x + 2e^{-x} - 3$ وَ $D_f = \mathbb{R}$.

**اختيار الجواب الصحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة مع التعليل:**

1/الإجابة الصحيحة هي الإجابة أ)،

**لأنّ:** لدينا: $f(x) = 0$ تُكافئ: $e^x + 2e^{-x} - 3 = 0$

أي: $e^x + \frac{2}{e^x} - 3$

ومنه: $\frac{e^{2x}+2-3e^x}{e^x} = 0$

وعليه: $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

وبوضع: $\boxed{X = e^x}$ نجد: $X^2 - 3X + 2 = 0$ (*) نحسب المميز $\Delta$: $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$

ومنه: $X' = \frac{3+1}{2} = 2$ وَ $X'' = \frac{3-1}{2} = 1$ وبالعودة إلى الوضع نجد: $e^x = 2$ وَ $e^x = 1$

إذن: $\boxed{S = \{0; \ln 2\}}$.

2/الإجابة الصحيحة هي الإجابة ب)،

التعليل: بمأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ فإنّ: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

3/الإجابة الصحيحة هي الإجابة أ)،

التعليل: $f$ **معرّفة وقابلة للاشتقاق** على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x) = e^x - 2e^{-x} = e^{-x}(e^{2x} - 2)$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(e^{2x} - 2)$ على $\mathbb{R}$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{\ln 2}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | 0 | + |

إذن: على المجال $\left[\frac{\ln 2}{2}; +\infty\right[$ الدّالة $f$ **متزايدة تماماً**.

4/الإجابة الصحيحة هي الإجابة أ)، التعليل:

لدينا: $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (e^x + 2e^{-x} - 3)dx = \frac{1}{2}[e^x - 2e^{-x} - 3x]_0^2$ إذن: $\boxed{m \simeq 1}$.

## حل التمرين 08: (08 نقاط) بكالوريا 2017_د01// الموضوع 02// الشعبة: تسيير وإ.

لدينا: $f(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{e^x-1}$ وَ $D_f = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$.

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

**1)أ) حساب النهايات، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{<\\ x\to0}} f(x)$ وَ $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to0}} f(x)$ وَتفسّير بيانيا النتائج المُحصل عليها:**

- لدينا: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{e^x-1}\right) = 1}$ لأنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x - 1) = -1$
- وَلدينا: $\boxed{\lim\limits_{\substack{<\\ x\to0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{<\\ x\to0}}\left(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{e^x-1}\right) = +\infty}$ وَ $\boxed{\lim\limits_{\substack{>\\ x\to0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{>\\ x\to0}}\left(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{e^x-1}\right) = -\infty}$

لأنّ: $\lim\limits_{\substack{<\\ x\to0}}(e^x - 1) = 0^-$ وَ $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to0}}(e^x - 1) = 0^+$ وَ $\lim\limits_{x\to0}(e^x) = 1$.



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**التفسير البياني للنتائج المُحصل عليها:**

المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=1}$ (المُوازي لمحور الفواصل) مقارب لـ$(C_f)$ عند $-\infty$، و**محور التراتيب** مقارب لـ$(C_f)$.

**ب) حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ :**

بمأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-1)=+\infty$ فإنّ: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

**2)أ) تبيان أنّه من أجل كل $x$ من $D_f$، $f'(x)=\frac{1}{2}e^x+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$ :**

$f$ **معرّفة وقابلة للاشتقاق** على كل من المجالين $]-\infty;0[$ وَ $]0;+\infty[$، ولدينا:

$$f'(x)=\frac{1}{2}e^x-\left(\frac{-e^x}{(e^x-1)^2}\right)=\frac{1}{2}e^x+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$$

**ب) استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة $f$ ثمّ تشكيل جدول تغيراتها:**

لدينا: $f'(x)=\frac{1}{2}e^x+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}>0$،

إذن: $f$ **متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-\infty;0[$ وَ $]0;+\infty[$، **ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | | ‖ | + | |
| $f(x)$ | $1$ ↗ | $+\infty$ | ‖ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

**3)دراسة الوضعية النسبية للمنحنى $(C_f)$ مع المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=1$ :**

**ندرس إشارة الفرق $f(x)-1$ على $D_f$.**

لدينا: $f(x)-1=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{e^x-1}-1=\frac{e^x(e^x-1)-2-2(e^x-1)}{2(e^x-1)}=\frac{e^x(e^x-1)-2e^x}{2(e^x-1)}=\frac{e^x(e^x-3)}{2(e^x-1)}$

إشارة الفرق $f(x)-1$ من إشارة الجداء $(e^x-3)(e^x-1)$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\ln 3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^x-1$ | - | | ‖ | + | | | |
| $e^x-3$ | - | | ‖ | - | 0 | + | |
| $f(x)-1$ | + | | ‖ | - | 0 | + | |
| **الوضع النسبي** | $(C_f)$ يقع **فوق** $(\Delta)$ | | ‖ | $(C_f)$ يقع **تحت** $(\Delta)$ | $(C_f)$ **يقطع** $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقع **فوق** $(\Delta)$ | |

**4)تعيين معادلة لـ$(T)$ المماس للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $\ln 3$:**

معادلة $(T)$ من الشكل $y=f'(\ln 3)(x-\ln 3)+f(\ln 3)$

لدينا: $\begin{cases} f'(\ln 3)=\frac{1}{2}e^{\ln 3}+\frac{e^{\ln 3}}{(e^{\ln 3}-1)^2}=\frac{9}{4} \\ f(\ln 3)=\frac{1}{2}e^{\ln 3}-\frac{1}{e^{\ln 3}-1}=\frac{2}{2}=1 \end{cases}$، إذن: $\boxed{(T):y=\frac{9}{4}x-\frac{9}{4}\ln 3+1}$.



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

5)لدينا: $g(x)=f(x)-\frac{9}{4}(x-\ln 3)-1$ وَ $D_g=]0;+\infty[$.

نلاحظ أنّ: $g(x)=f(x)-\left(\frac{9}{4}x-\frac{9}{4}\ln 3+1\right)=f(x)-y_{(T)}$.

**أ) حساب $g(\ln 3)$ واستنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$:**

لدينا: $g(\ln 3)=f(\ln 3)-\frac{9}{4}(\ln 3-\ln 3)-1=1-0-1=0$

بمأنّ $g$ **متزايدة تماماً** على المجال $]0;+\infty[$ وَ $g(\ln 3)=0$ فإنّ إشارة $g(x)$ هي كالتالي:

| $x$ | $0$ | | $\ln 3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | - | 0 | + | |

**ب) دراسة على المجال $]0;+\infty[$ وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى المماس $(T)$، ثمّ تفسير ذلك بيانيا:**

لدينا: من أجل $x\in]0;\ln 3[$، $g(x)<0$ أي: $f(x)-y_{(T)}<0$ إذن: $(C_f)$ يقع **تحت** $(T)$.

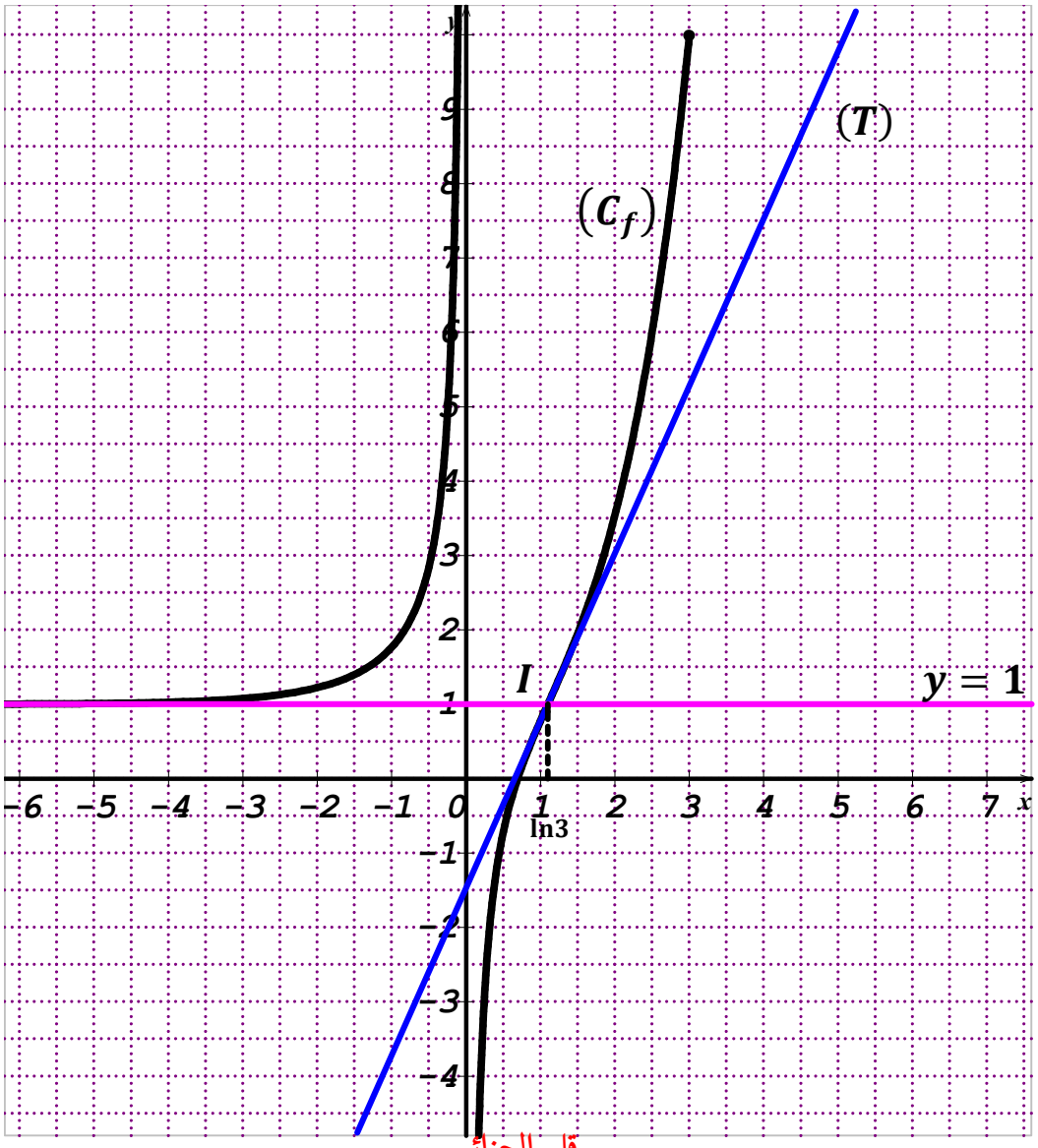
وَمن أجل $x=\ln 3$، $g(x)=0$ أي: $f(x)-y_{(T)}=0$ إذن: $(C_f)$ **يقطع** $(T)$.

وَمن أجل $x\in]\ln 3;+\infty[$، $g(x)>0$ أي: $f(x)-y_{(T)}>0$ إذن: $(C_f)$ يقع **فوق** $(T)$.

التفسير البياني: $(C_f)$ يقبل **نقطة انعطاف** $I(\ln 3\,;1)$.

**6)حساب $f(\ln 2)$ ثمّ رسم المماس $(T)$ وَ$(C_f)$ على المجال $]-\infty;0[\cup]0;3]$ :**

لدينا: $f(\ln 2)=\frac{1}{2}e^{\ln 2}-\frac{1}{e^{\ln 2}-1}=\frac{2}{2}-\frac{1}{1}=0$.






قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## حل التمرين 09: (08 نقاط) بكالوريا 2017_د02// الموضوع 01// الشعبة: تسيير وإ.

**I)** لدينا: $g(x)=2x-1-e^{2x}$ و $D_g=\mathbb{R}$.

**1)دراسة اتجاه تغيّر الدّالة $g$:**

$g$ **معرّفة وقابلة للاشتقاق** على $\mathbb{R}$، ولدينا: $g'(x)=2-2e^{2x}=2(1-e^{2x})$.

**إشارة $g'(x)$ من إشارة $(1-e^{2x})$ على $\mathbb{R}$**

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | + | 0 | - |

إذن: $g$ **متزايدة تماما** على المجال $]-\infty;0]$ و**متناقصة تماما** على المجال $[0;+\infty[$.

**2)استنتاج إشارة $g(x)$:**

لدينا: $g(0)=2(0)-1-e^{2(0)}=-2$، بالتالي: من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$، $g(x)\leq g(0)$

أي: $g(x)\leq -2$ إذن: $\boxed{g(x)<0}$.

**II)** لدينا: $f(x)=x^2-x-\frac{1}{2}e^{2x}$ و $D_f=\mathbb{R}$.

$(C_f)$ التمثيل البياني لـ $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، $\|\vec{i}\|=2cm$.

**1)حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ (علماً أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^2}=+\infty$)**

- لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x})=0$.
- ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\times\frac{e^{2x}}{x^2}\right)\right]=-\infty$ لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\times\frac{e^{2x}}{x^2}\right)=-\infty\end{cases}$.

**2)دراسة اتجاه تغيّر الدّالة $f$ ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها:**

$f$ **معرّفة وقابلة للاشتقاق** على $\mathbb{R}$، ولدينا: $f'(x)=2x-1-e^{2x}=g(x)<0$.

إذن: $f$ **متناقصة تماما** على $\mathbb{R}$، **ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ |

**3)أ) تبيان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $-0,25<\alpha<-0,24$:**

- $f$ **مستمرة ومتناقصة تماما** على المجال $]-0,25;-0,24[$ (لأنّها **متناقصة تماما** على $\mathbb{R}$)
- ولدينا: $\begin{cases}f(-0,25)\simeq 0,01\\ f(-0,24)\simeq -0,01\end{cases}$، أي: $f(-0,25)\times f(-0,24)<0$.

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $-0,25<\alpha<-0,24$.

**ب) إثبات أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف $A$ إحداثياها $\left(0;\frac{-1}{2}\right)$:**

لدينا: $f''(x)=g'(x)$.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | + | 0 | - |



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

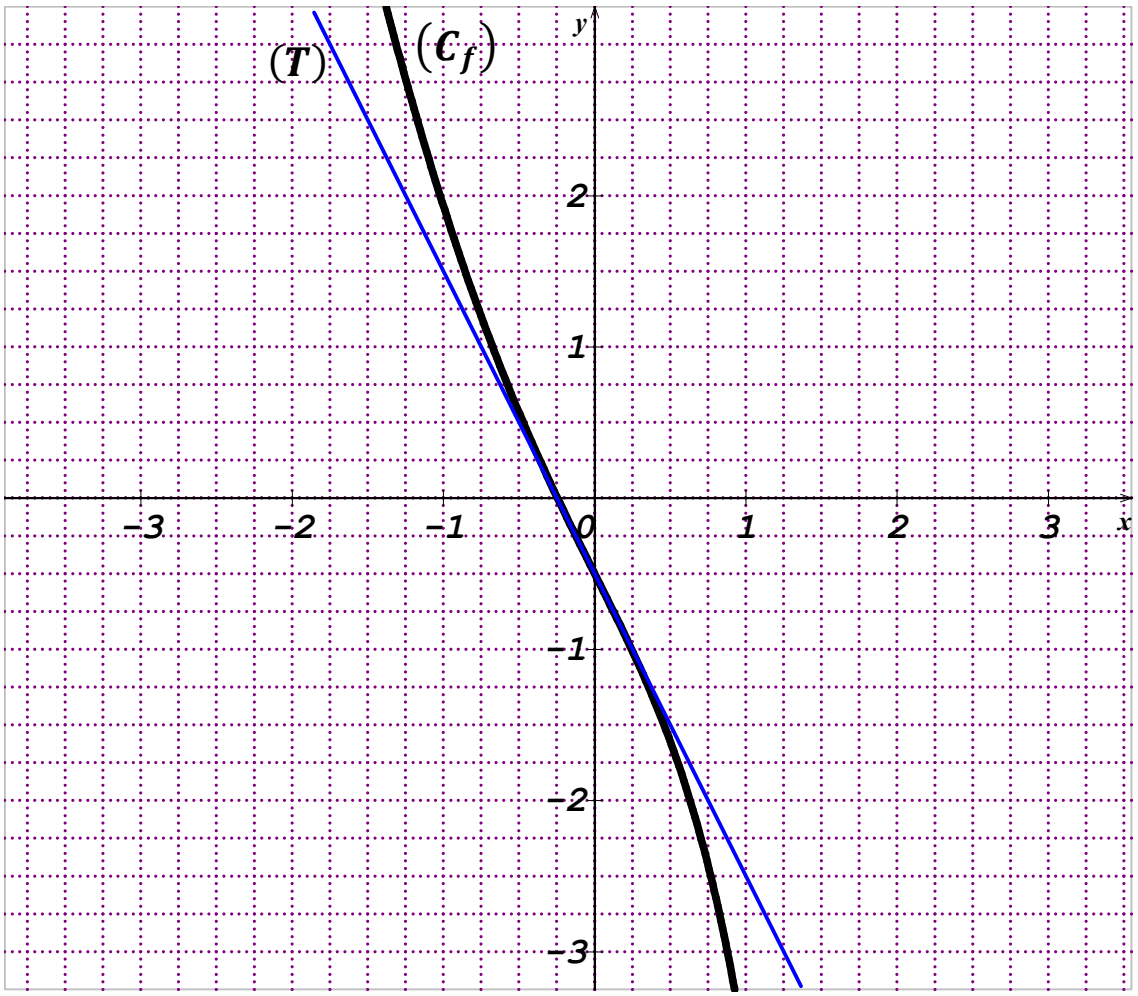
نلاحظ أنّ: $f''(x)$ **انعدمت عند** $0$ **مغيرة إشارتها**، إذن: $(C_f)$ يقبل **نقطة انعطاف** $A(0;f(0))$، أي: $A\left(0;\frac{-1}{2}\right)$.

**جـ) كتابة معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ في النقطة $A$:**

معادلة $(T)$ من الشكل $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

ولدينا: $\begin{cases} f'(0)=g(0)=-2 \\ f(0)=-\frac{1}{2} \end{cases}$ ترتيب $A$، إذن: $\boxed{(T):y=-2x-\frac{1}{2}}$.

**4)رسم $(T)$ وَ$(C_f)$:**




**5)أ) حساب بالسّنتمتر مربع المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدّد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$، $x=\alpha$ و$y=0$ :**

بمأنّ: الدّالة $f$ **مستمرة وسالبة** على المجال $[\alpha\ ;0]$ فإنّ:

$$A(\alpha)=\left(\int_{\alpha}^{0}-f(x)d(x)\right)\times 4cm^2=\left(\int_{\alpha}^{0}\left(-x^2+x+\frac{1}{2}e^{2x}\right)d(x)\right)\times 4cm^2$$

ومنه: $A(\alpha)=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}e^{2x}\right]_{\alpha}^{0}\times 4cm^2=\left(\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{3}\alpha^3+\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{4}e^{2\alpha}\right)\right)\times 4cm^2$

وعليه: $A(\alpha)=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\alpha^3-\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{1}{4}e^{2\alpha}\right)\times 4cm^2=\left(1+\frac{4}{3}\alpha^3-2\alpha^2-e^{2\alpha}\right)cm^2$

**ب) التحقّق أنّ $A(\alpha)=\frac{1}{3}(4\alpha^3-12\alpha^2+6\alpha+3)cm^2$:**

لدينا: $f(\alpha)=0$ يعني: $\alpha^2-\alpha-\frac{1}{2}e^{2\alpha}=0$ ومنه: $\alpha^2-\alpha=\frac{1}{2}e^{2\alpha}$ أي: $\boxed{2\alpha^2-2\alpha=e^{2\alpha}}$

وبالتالي: $A(\alpha)=\left(1+\frac{4}{3}\alpha^3-2\alpha^2-e^{2\alpha}\right)cm^2=\left(1+\frac{4}{3}\alpha^3-2\alpha^2-(2\alpha^2-2\alpha)\right)cm^2$


قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ومنه: $A(\alpha)=\left(1+\frac{4}{3}\alpha^3-2\alpha^2-2\alpha^2+2\alpha\right)cm^2=\left(1+\frac{4}{3}\alpha^3-4\alpha^2+2\alpha\right)cm^2$

إذن: $A(\alpha)=\frac{1}{3}(4\alpha^3-12\alpha^2+6\alpha+3)cm^2$ (وهو المطلوب).

## حل التمرين 10: (08 نقاط) بكالوريا 2018// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

**I)** لدينا: $g(x)=2x+6-e^{2x+1}$ و $D_g=]-\infty;0]$.

**1)أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$:**

بمأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+6)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x+1}=0$ فإنّ: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty}$.

**ب) دراسة اتجاه تغيّر الدّالة $g$ على المجال $]-\infty;0]$ ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها:**

$g$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]-\infty;0]$، ولدينا: $g'(x)=2-2e^{2x+1}=2(1-e^{2x+1})$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(1-e^{2x+1})$ لأنّ: $2>0$

$1-e^{2x+1}>0$ يعني $-e^{2x+1}>-1$ وعليه $e^{2x+1}<1$ ويكون $2x+1<0$ أي: $x<-\frac{1}{2}$

$1-e^{2x+1}=0$ يعني $-e^{2x+1}=-1$ وعليه $e^{2x+1}=1$ ويكون $2x+1=0$ أي: $x=-\frac{1}{2}$

$1-e^{2x+1}<0$ يعني $-e^{2x+1}<-1$ وعليه $e^{2x+1}>1$ ويكون $2x+1>0$ أي: $0\geq x>-\frac{1}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

إذن: $g$ **متزايدة تماما** على المجال $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$، و**متناقصة تماما** على المجال $\left[-\frac{1}{2};0\right]$.

**ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $-$ $-$ $-$ | $0$ | $+$ $+$ | $4$ | $+$ $+$ $+$ | $6-e$ |

**2)أ) تبيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $-3<\alpha<-2,9$:**

- $g$ **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $]-3;-2,9[$ (لأنّها **متزايدة تماما** على $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$)
- ولدينا: $\begin{cases}g(-3)\simeq-0,007\\g(-2,9)\simeq0,192\end{cases}$ أي: $g(-3)\times g(-2,9)<0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ حيث $-3<\alpha<-2,9$.

**ب) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty;0]$ :**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**II)** لدينا: $f(x)=-2x^2-12x+e^{2x+1}$ و $D_f=]-\infty;0]$.

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى **المعلم المتعامد** $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

حيث الوحدة على محور الفواصل $1cm$ وعلى محور التراتيب $0,5cm$.



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**1)اثبات أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-\infty;0]$ ،** $f'(x)=-2g(x)$ **:**

$f$ **معرّفة وقابلة للاشتقاق** على $]-\infty;0]$، ولدينا:

$$f'(x)=-4x-12+2e^{2x+1}=-2(2x+6-e^{2x+1})=-2g(x)$$

**2)استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة $f$ على المجال $]-\infty;0]$ :**

لدينا: $f'(x)=-2g(x)$ ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

إذن: $f$ **متزايدة تماما** على المجال $]-\infty;\alpha]$، و**متناقصة تماما** على المجال $[\alpha;0]$.

**3)حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثمّ تشكيل جدول تغيّرات الدّالة $f$ :**

بمأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^2-12x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^2)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x+1}=0\end{cases}$، فإنّ: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$.

**جدول تغيّرات الدّالة $f$ :**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $e$ |

**4)تبيان أنّ $f(\alpha)=-2\alpha(\alpha+5)+6$ :**

- لدينا: $f(\alpha)=-2\alpha^2-12\alpha+e^{2\alpha+1}$
- ولدينا من جهة أخرى $g(\alpha)=0$ أي: $2\alpha+6-e^{2\alpha+1}=0$ وعليه: $\boxed{e^{2\alpha+1}=2\alpha+6}$.

وبالتالي: $f(\alpha)=-2\alpha^2-12\alpha+2\alpha+6=-2\alpha^2-10\alpha+6=-2\alpha(\alpha+5)+6$.

**اعطاء حصراً للعدد $f(\alpha)$ :**

لدينا: $-3<\alpha<-2{,}9$ ومنه: $\begin{cases}5{,}8<-2\alpha<6\\ 2<\alpha+5<2{,}1\end{cases}$

وعليه: $11{,}6<-2\alpha(\alpha+5)<12{,}6$

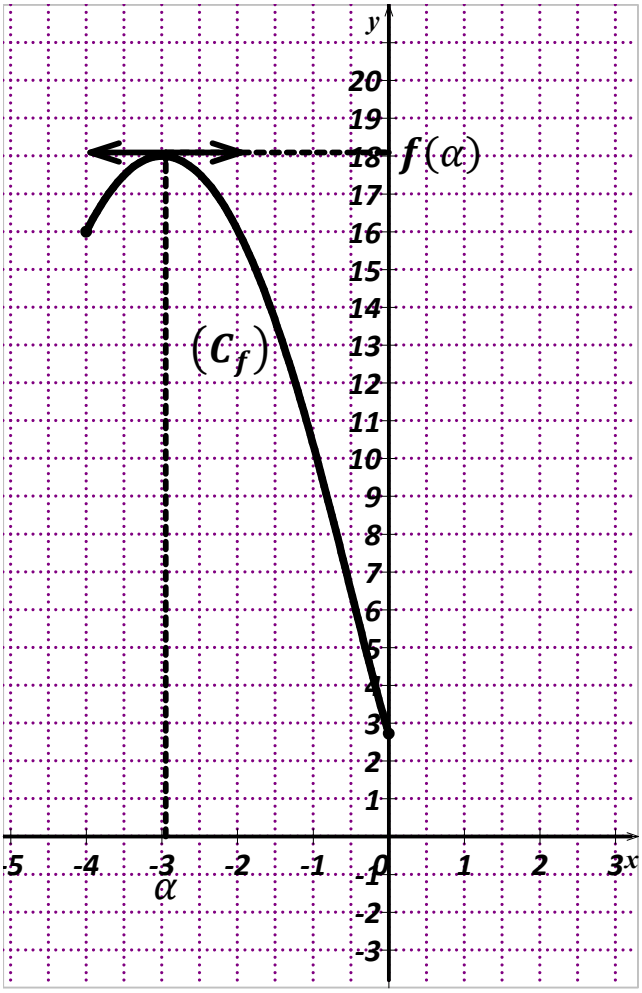
ويكون: $17{,}6<-2\alpha(\alpha+5)+6<18{,}6$

أي: $\boxed{17{,}6<f(\alpha)<18{,}6}$.

**رسم $(C_f)$ على المجال $[-4;0]$:**



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM




**5)حساب بدلالة $\alpha$ التكامل، $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{0} f(x)dx$ ثمّ تفسير النتيجة بيانيا:**

لدينا: $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{0} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{0}(-2x^2-12x+e^{2x+1})dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{3}x^3-6x^2+\frac{1}{2}e^{2x+1}\right]_{\alpha}^{0}$

ومنه: $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{0} f(x)dx = \frac{1}{4}e+\frac{1}{3}\alpha^3+3\alpha^2-\frac{1}{4}e^{2\alpha+1}$

**تفسير النتيجة بيانيا:** هي **نصف** مساحة الحيز المستو المحدد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $x=\alpha$؛ $x=0$ وَ $y=0$.

## حل التمرين 11: (07 نقاط) بكالوريا 2019// الموضوع 02// الشعبة: تسيير واقتصاد.

***I*)** لدينا: $g(x)=1+(1-x)e^{-x+1}$ وَ $D_g=[0;+\infty[$.

**دراسة اتجاه تغيّر الدّالة $g$ ثمّ تبيان أنّه من أجل كل $x$ من $[0;+\infty[$، $g(x)>0$:**

$g$ معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$، ولدينا:

$$g'(x)=-e^{-x+1}+(-e^{-x+1})(1-x)=e^{-x+1}\big(-1-(1-x)\big)=e^{-x+1}(-2+x)$$

**إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x-2)$ على $[0;+\infty[$.**

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | - | $0$ | + | |

إذن: $g$ **متناقصة تماما** على المجال $[0;2]$ وَ**متزايدة تماما** على المجال $[2;+\infty[$.

نلاحظ أنّه من أجل كل $x$ من $[0;+\infty[$، $g(x)\geq g(2)$ (لأنّ $g(2)=1-\frac{1}{e}$ قيمة حدية صغرى لـ$g$)

أي: $g(x)\geq 1-\frac{1}{e}>0$ إذن: $\boxed{g(x)>0}$.


قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**II)** لدينا: $f(x) = x + xe^{-x+1}$ وَ $D_f = [0; +\infty[$.

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

**1)أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ تبيان أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى $(C_f)$:**

- لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x(1 + e^{-x+1})\right) = +\infty$ لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+1} = 0$.
- ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} (xe^{-x+1}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(e\frac{x}{e^x}\right) = 0$ ، لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

إذن: المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ **مقارب مائل** للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$.

**ب. دراسة وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ): (ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$ )**

لدينا: من أجل $x \in [0; +\infty[$، $f(x) - x = xe^{-x+1} \geq 0$ إذن: $(C_f)$ يقع **فوق** (Δ) على $[0; +\infty[$.

**2)تبيان أنّه من أجل كل $x$ من المجال $[0; +\infty[$، $f'(x) = g(x)$ ثمّ تشكيل جدول تغيّرات للدّالة $f$ :**

$f$ **معرفة وقابلة للاشتقاق** على المجال $[0; +\infty[$، ولدينا:

$$f'(x) = 1 + e^{-x+1} + (-e^{-x+1})(x) = 1 + (1 - x)e^{-x+1} = g(x) > 0$$

إذن: $f$ **متزايدة تماما** على $[0; +\infty[$، **ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ ↗ | $+\infty$ |

**3)تبيان أنّ المعادلة $f(x) = 4$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ حيث $3,75 < \alpha < 3,77$:**

- $f$ **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $]3,75; 3,77[$ (لأنّها **متزايدة تماما** على $[0; +\infty[$)
- ولدينا: $\begin{cases} f(3,75) \simeq 3,99 \\ f(3,77) \simeq 4,01 \end{cases}$، أي: $f(3,75) < 4 < f(3,77)$.

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x) = 4$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $3,75 < \alpha < 3,77$.

**4)كتابة معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة *1* :**

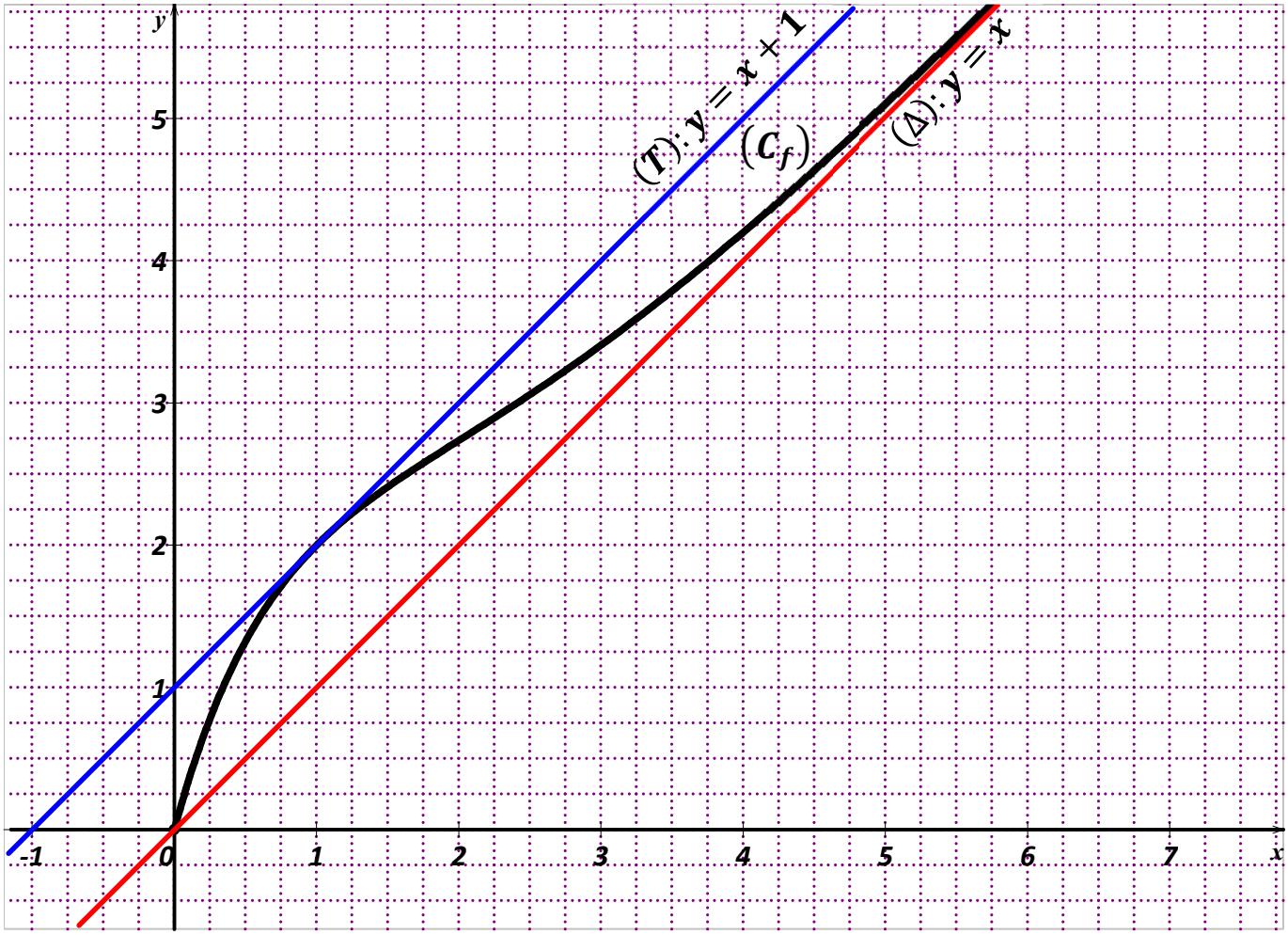
معادلة $(T)$ من الشكل $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

ولدينا: $\begin{cases} f'(1) = g(1) = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$، إذن: $\boxed{(T): y = x + 1}$.

**رسم $(T)$، (Δ) وَ $(C_f)$:**



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM




**5)لدينا:** $F$ دّالة عددية معرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $F(x)=\frac{1}{2}x^2-(x+1)e^{-x+1}$.

**أ. تبيان أنّ الدّالة $F$ هي دّالة أصلية للدّالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$:**

$F$ دّالة معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$، ولدينا:

$$F(x)=x-[(1)e^{-x+1}+(-e^{-x+1})(x+1)]=x-[(1-x-1)e^{-x+1}]=x+xe^{-x+1}=f(x)$$

إذن: $F$ هي دّالة أصلية للدّالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$.

**ب. ايجاد القيمة المضبوطة للعدد $\int_1^4 f(x)dx$، ثمّ إعطاء تفسيرا هندسيا لهذا العدد:**

لدينا: $\int_1^4 f(x)dx=[F(x)]_1^4=F(4)-F(1)$

ومنه: $\int_1^4 f(x)dx=\left(\frac{1}{2}(4)^2-(4+1)e^{-4+1}\right)-\left(\frac{1}{2}(1)^2-(1+1)e^{-1+1}\right)$

وعليه: $\int_1^4 f(x)dx=8-5e^{-3}-\frac{1}{2}+2=\frac{19}{2}-5e^{-3}$.

**تفسيره الهندسي** هو مساحة الحيز المستو المحدد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $x=1$؛ $x=4$ وَ $y=0$.

6)تُنمذج الكلفة الهامشية $C_m$ لإنتاج كمية $q$ (مقدرة بآلاف الوحدات) حيث $0\le q\le 7$ بالدّالة $f$ المعرّفة سابقا أي: $C_m(q)=f(q)$ حيث: $q\in[0;7]$. (الكلفة الهامشية مقدّرة بملايين الدنانير)

**أ. ايجاد كمية المنتوج التي من أجلها لا تتجاوز الكلفة الهامشية 4 ملايين دينار:**

لدينا: $f$ **متزايدة تماما** على المجال $[0;7]$ وَ $f(\alpha)=4$، **ومنه:** $f(x)\le 4$ إذا وفقط إذا كان $x\in[0;\alpha]$

**أي:** $C_m(q)\le 4$ إذا وفقط إذا كان $q\in[0;\alpha]$

ب. دّالة الكلفة الإجمالية $C_T$ هي **دّالة أصلية** لدّالة الكلفة الهاشمية.


قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**حساب القيمة المتوسطة للكلفة الإجمالية عندما تنتج الشركة ما بين 1000 وحدة و4000 وحدة:**

لدينا: الكلفة الإجمالية $C_T$ هي **دّالة أصلية** لدّالة الكلفة الهاشمية $C_m$ **وَ**الدّالة $F$ هي **دّالة أصلية** لدّالة $f$ **وَبمأنّ:** $C_m(q) = f(q)$ **فإنّ:** $C_T(q) = F(q)$، **وبالتالي** القيمة المتوسطة للكلفة الإجمالية عندما تنتج الشركة ما بين 1000 وحدة و4000 وحدة هي العدد الحقيقي $\mu$ **حيث**

$$\mu = \frac{1}{4-1}\int_1^4 C_m(q)dq = \frac{1}{3}\left[\frac{19}{2} - 5e^{-3}\right] = \frac{19}{6} - \frac{5e^{-3}}{3}.$$



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM