1150

العملاق في الرياضيات

- النهايات ـ الاستمرارية ـ الاشتقاقية
- الدوال الأصلية ـ الحساب التكاملي
- الاحتمالات
- الدوال الأسية و اللوغاريتمية
- الحسابيات (القواسم ـ الموافقات)
- نماذج تجريبية تحضيرا للبكالوريا

السنة الثالثة ثانوي

علوم تجريبية ـ رياضيات ـ تقني رياضي

أحسن وأحدث البكالوريات الوطنية والأجنبية محلولة

جزائرية - تونسية - مغربية - فرنسية

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تأليف الأستاذ: بواب نورالدين

باسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

الحمد لله و الصلاة والسلام على سيدنا محمد وعلى آله و صحبه أجمعين وبعد:

يسرني أن أضع بين أيدي زملائي الأساتذة الكرام وتلامذتنا الأعزاء الجزء الثاني من كتاب «العملاق في الرياضيات» للسنة الثالثة من التعليم الثانوي خاص بالشعب علوم تجريبية، رياضيات وتقني رياضي .

للتذكير فإن الجزء الأول لهذه السلسلة يضم المحاور الآتية :

المتتاليات العددية ، الأعداد المركبة ، الهندسة في الفضاء، وكل محور من هذه المحاور مدعّم بمجموعة من التمارين والبكالوريات الوطنية والأجنبية مرفقة بالحلول المفصلة والتوجيهات القيمة .

وتلبية لرغبة زملائي الأساتذة الكرام ولأبنائي الطلبة وإثراء للمكتبة العلمية في بلادنا، فقد تمّ بعون الله وتوفيقه إصدار الجزء الثاني من كتاب العملاق في الرياضيات ، هذا الأخير يعالج بقية المحاور المبرمجة في منهاج السنة الثالثة ثانوي والتي تخص الشعب سالفة الذكر .

زيادة على الدروس و التمارين المحلولة بطريقة بسيطة وسهلة وهادفة فإن الجزء الثاني يتضمن حلولا مفصلة لعشرات البكالوريات الوطنية ، التونسية ، المغربية والفرنسية التي تتماشى والمنهاج الجديد الذي أقرته وزارة التربية الوطنية .

يشتمل هذا الكتاب على أربعة أبواب أساسية هي :

الباب الأول : التحليل

النهايات والاستمرارية .

الاشتقاقية .

الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية .

الدوال الأصلية .

الحساب التكاملي .

بكالوريات وطنية وأجنبية محلولة .

الباب الثاني : الحساب (خاص شعبة رياضيات وتقني رياضي)

القسمة في $\mathbb{Z}$ والقواسم .

قلم الجزائري
WWW.DZPEN.COM

الموافقات في $\mathbb{Z}$، التعداد والمضاعفات.

مبرهنتا بيزو وغوص والأعداد الأولية.

المعادلات من الشكل $ax + by = c$.

بكالوريات وطنية وأجنبية محلولة .

الباب الثالث : الاحتمالات

الاحتمالات .

بكالوريات وطنية وأجنبية محلولة

الباب الرابع : توقعات ونماذج تجريبية تحضيرا للبكالوريا

عرضنا في هذا الباب 15 نموذج اختبار من بين أحسن وأحدث البكالوريات الوطنية والأجنبية، كل نموذج على شكل امتحان بكالوريا وذلك قصد تدريب أبنائنا الطلبة على التحضير الجيد للبكالوريا، وقد أرفقنا بهذه النماذج الحل التفصيلي لـ 5 نماذج حتى يتسنى لأبنائنا الطلبة التعود على الإجابة الدقيقة في امتحان البكالوريا.

والله أسأل أن أكون قد وفقت في أن يكون هذا الكتاب نافعا ومفيدا لأبنائنا التلاميذ وزملائي الأساتذة، شاكرا لهم كل نقد أو ملاحظة بناءة آخذا بها مستقبلا إن شاء الله.

والله ولي التوفيق

مع تحيات الأستاذ بواب نورالدين

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

النهايات والاستمرارية

الكفاءات المستهدفة

- حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند الحدود (المنتهية أو غير المنتهية) لمجالات مجموعة التعريف.
- حساب نهاية باستعمال المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات أو المقارنة وتركيب دالتين.
- دراسة السلوك التقاربي لدالة.
- استعمال مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات وجود حلول للمعادلة $f(x)=k$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

النهايات

1-نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$:

نهاية منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$:

f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0 ; +\infty[$ و l عدد حقيقي.

القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل أيضا كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.

نكتب: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ ونقرأ: $f(x)$ يؤول إلى l لما يؤول x إلى $+\infty$.

نتيجة:

في معلم، المستقيم الذي معادلته $y = l$ مستقيم مقارب للمنحني الممثل للدالة f عند $+\infty$.

ملاحظة:

نحصل على تعريف ونتيجة مماثلتين عند $-\infty$.

مثال:

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 1 + \dfrac{2x-3}{x^2}$

✦ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-3}{x^2} = 0 \right)$

✦ المستقيم (D) الذي معادلته $y = 1$ مستقيم مقارب للمنحني C_f عند $+\infty$.

٢- نهاية غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$:

✦ تعريف 1: f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0 ; +\infty[$.

نقول إن الدالة f تؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$ عندما كل مجال مفتوح من الشكل

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$]A;+\infty[$ (مع $A\in\mathbb{R}$) يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.

نكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ونقرأ: $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$.

تعريف2: f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0;+\infty[$.

نقول إن الدالة f تؤول إلى $-\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$ عندما كل مجال مفتوح من الشكل $]B;-\infty[$ (مع $B\in\mathbb{R}$) يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.

نكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

ونقرأ: $f(x)$ يؤول إلى $-\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$.

ملاحظة:

نحصل على تعريفين مماثلين عند $-\infty$.

أمثلة:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$

3-المستقيم المقارب المائل:

a وb عددان حقيقيان مع $a\neq 0$. C_f المنحني الممثل لدالة f في معلم.

القول أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني C_f عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) يعني أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

(على الترتيب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$)

ملاحظة:

إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي:

$f(x)=ax+b+g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ فإن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني C_f عند $+\infty$.

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$f(x)=\frac{x^2-2x+3}{x}$$

من أجل كل $x>2$ ، $f(x)=x-2+\frac{3}{x}$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}\right)=0$

وبالتالي فإن المستقيم الذي معادلته $y=x-2$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $+\infty$.

2- نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند عدد حقيقي:

1-نهاية منتهية عند عدد حقيقي:

f دالة معرفة على مجموعة من الشكل: $]a;x_0[\cup]x_0;b[$ و l عدد حقيقي.

نقول إن $f(x)$ يؤول إلى العدد الحقيقي l لما يؤول x إلى x_0 عندما كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل أيضا كل صور $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0.

نكتب: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$

ونقرأ: $f(x)$ يؤول إلى l لما يؤول x إلى x_0

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

2-نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي:

f دالة معرفة على مجموعة من الشكل: $]a;x_0[\cup]x_0;b[$.

نقول إن $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى x_0 عندما كل مجال مفتوح من الشكل $]A;+\infty[$ (مع $A\in\mathbb{R}$) يشمل كل الصور $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0.

نكتب: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ونقرأ: $f(x)$ يؤول $+\infty$ لما يؤول x إلى x_0

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

نتيجـــة:

في معلم، المستقيم الذي معادلته $x=x_0$ مستقيم مقارب للمنحني الممثل للدالة c_f عند f.

ملاحظة:

نحصل على تعريف ونتيجة مماثلتين لما « نهاية f عند x_0 هي $-\infty$ »

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$$

وبالتالي فإن المستقيم الذي معادلته $x=1$ مستقيم مقارب للمنحني الممثل للدالة f.

3- عمليات على النهايات:

f و g دالتان معرفتان على نفس مجموعة التعريف D.

a يمثل عددا حقيقيا أو $+\infty$ أو $-\infty$ ؛ l و l' عددان حقيقيان.

نهاية مجموع دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$
l	l'	$l+l'$
l أو $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
l أو $-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت

نهاية جداء دالتين:

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(f\times g)(x)$
l	l'	$l\times l'$
$l\neq 0$	$-\infty$ أو $+\infty$	$-\infty$ أو $+\infty$
$-\infty$ أو $+\infty$	$-\infty$ أو $+\infty$	$-\infty$ أو $+\infty$
0	$-\infty$	ح ع ت

لتعيين إشارة ∞ ، يكفي تطبيق قواعد الإشارات العادية :

$(-2)\times(-\infty)=+\infty$ ، $(+2)\times(-\infty)=-\infty$ ، $(-\infty)\times(-\infty)=+\infty$ ، وهكذا ...

نهاية حاصل قسمة دالتين :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$
l	$l'\neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	$-\infty$ أو $+\infty$	0
$-\infty$ أو $+\infty$	$l'\neq 0$	$-\infty$ أو $+\infty$
$-\infty$ أو $+\infty$	$-\infty$ أو $+\infty$	ح ع ت
0	0	ح ع ت
$l\neq 0$ أو $-\infty$ أو $+\infty$	0	$-\infty$ أو $+\infty$

لتعيين إشارة ∞ ، يكفي تطبيق قواعد الإشارات العادية :

$\frac{-\infty}{+2}=-\infty$ ، $\frac{-\infty}{+2}=+\infty$ ، $\frac{+\infty}{+2}=+\infty$ ، وهكذا ...

○ حالات عدم التعيين :

حالات عدم التعيين (ح ع ت) أربعة هي : $\infty-\infty$ ، $0\times\infty$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{0}{0}$

مثال 1 : f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$.

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ ومنه حالة عدم تعيين ح ع ت

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

من أجل كل عدد حقيقي x:

$$x-\sqrt{x^2+1}=\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\times\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

وبالتالي: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=0$

مثال 2: f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ: $f(x)=\frac{x^2-x}{(x-1)(x+1)}$

حساب $\lim\limits_{x\to1}f(x)$: لدينا $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\frac{0}{0}$ وهي ح ع ت

من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$: $\frac{x^2-x}{(x-1)(x+1)}=\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x}{x+1}$

وبالتالي: $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$

○ نهاية دالة كثير حدود:

نهاية دالة كثير حدود عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدّها الأعلى درجة.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x^2-5x+1\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(3x^2\right)=+\infty$$

○ نهاية دالة ناطقة:

نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حاصل قسمة حدّها الأعلى درجة من البسط على حدّها الأعلى درجة من المقام.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x+1}{x^2+3x-6}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x}=0$$

○ نهاية دالة مثلثية: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

مثال: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to0}2\times\frac{\sin 2x}{2x}=2\times1=2$.

طريقة أخرى: نعلم أن $\sin 2x=2\sin x.\cos x$

ومنه: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times(2\cos x)=1\times2=2$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4 النهايات بالمقارنة:

f، g و h دوال عددية. l عدد حقيقي، و x_0 عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$.

مبرهنة 1:

إذا كانت دالة f محصورة بدالتين g و h لهما نفس النهاية l عند x_0، فإن نهاية f عند x_0 هي l. وهذا يعني:

إذا كان: $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ مع $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$ و $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$

فإن $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

ملاحظة:

تسمى هذه المبرهنة : مبرهنة الحصر.

مثال 1: لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$

من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$، $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ وبضرب جميع الحدود بالعدد الحقيقي الموجب تماما x ينتج: $x \leq x\sin\frac{1}{x} \leq x$ أي $-x \leq f(x) \leq x$

لكن: $\lim\limits_{x \to 0}(-x) = 0$ و $\lim\limits_{x \to 0}(x) = 0$ وحسب مبرهنة الحصر، نستنتج أن:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

مبرهنة 2:

- إذا كان: $f(x) \leq g(x)$ وَ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$، فإن $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$
- إذا كان: $f(x) \geq g(x)$ وَ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$، فإن $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

مثال 2: f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -2x + \cos x$

من أجل كل عدد حقيقي x، $\cos x \leq 1$ ومنه: $-2x + \cos x \leq -2x + 1$

أي: $f(x) \leq -2x + 1$. لكن: $\lim\limits_{x \to +\infty}(-2x + 1) = -\infty$

إذن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

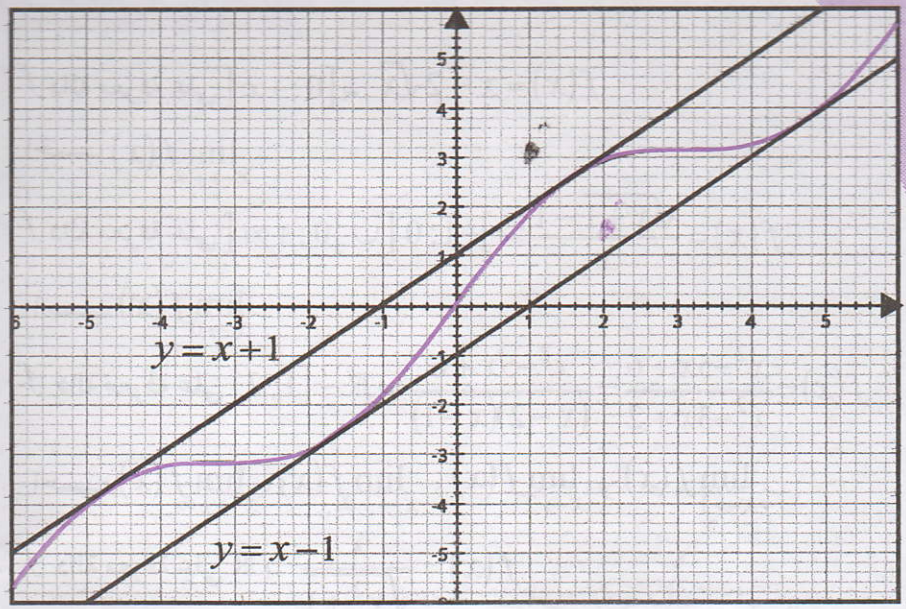
مثال 3: f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + \sin x$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $-1 \leq \sin x \leq 1$ ومنه: $x-1 \leq x+\sin x \leq x+1$

أي: $x-1 \leq f(x) \leq x+1$.

لكن: $\lim\limits_{x \to +\infty}(x-1)=+\infty$ نستنتج أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$

كذلك: $\lim\limits_{x \to +\infty}(x+1)=-\infty$ نستنتج أن: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=-\infty$



5 نهاية دالة مركبة:

لتكن $f = v \circ u$ دالة مركبة من دالتين u و v.

a، b و c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$.

إذا كان لدينا $\lim\limits_{x \to a} u(x)=b$ و $\lim\limits_{x \to b} v(x)=c$ فإن $\lim\limits_{x \to a} f(x)=c$

مثال: f دالة معرفة على المجال $]-\infty\,;1[$ بـ: $f(x)=\sqrt{\dfrac{4x-5}{x-1}}$

لدينا: $x \xmapsto{u} \dfrac{4x-5}{x-1}$ و $X \xmapsto{v} \sqrt{X}$

ومنه: $x \xmapsto{f=v\circ u} \sqrt{\dfrac{4x-5}{x-1}}$

نعلم أن: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x-5}{x-1}=4$ وبالتالي: $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{4x-5}{x-1}}=\sqrt{4}=2$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

إذن: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=2$

تمارين محلولة

تمرين محلول 1:

1. f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-2\sqrt{x}$

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. f دالة معرفة على $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

3. f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1;2\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\dfrac{x^2-5x+6}{(x-2)(x-1)}$

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$، $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

4. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

الحل:

1. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2\sqrt{x}\right)=+\infty-\infty$ وهي حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty-\infty$.

من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$،

$$f(x)=x-2\sqrt{x}=\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)$$

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-2\right)=+\infty$ نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2. حساب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$:

نهاية البسط: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}-1\right)=0$ ونهاية المقام: $\lim\limits_{x\to 0} x=0$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

وبالتالي نحصل على حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$.

من أجل كل x من $]-1;0[\cup]0;+\infty[$،

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$

ومنه: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$

3 أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1 \text{ و } \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

ب- حساب $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$: $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\frac{x^2-5x+6}{(x-2)(x-1)}$

نهاية البسط: $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-5x+6\right)=0$ ونهاية المقام: $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x+2\right)=0$

وبالتالي نحصل على حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1;2\}$،

$$f(x)=\frac{x^2-5x+6}{(x-2)(x-1)}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)}=\frac{x-3}{x-1}$$

ومنه: $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-3}{x-1}=-1$

جـ- حساب $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$:

نهاية البسط: $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-5x+6\right)=2$ ونهاية المقام: $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-3x+2\right)=0$

وبالتالي فإن $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ هي $+\infty$ أو $-\infty$ لذلك نميّز حالتين:

- نهاية البسط: $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-5x+6\right)=2$ ونهاية المقام: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\left(x^2-3x+2\right)=0^-$

نستنتج أن: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}f(x)=-\infty$

- نهاية البسط: $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-5x+6\right)=2$ ونهاية المقام: $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}\left(x^2-3x+2\right)=0^+$

نستنتج أن: $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}f(x)=+\infty$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

❹ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

نهاية البسط: $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ ونهاية المقام: $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}=+\infty$

وبالتالي نحصل على حالة عدم التعيين من الشكل $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}=\dfrac{x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$

$$=\begin{cases}\dfrac{x}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} & ;\ x>0\\ \dfrac{x}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\dfrac{-1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} & ;\ x<0\end{cases}$$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=-1$

تمرين محلول 2:

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\dfrac{\cos x}{x^2}$

❶ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $-\dfrac{1}{x^2}\le f(x)\le\dfrac{1}{x^2}$

❷ استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

الحل:

❶ إثبات أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $-\dfrac{1}{x^2}\le f(x)\le\dfrac{1}{x^2}$:

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $-1\le\cos x\le 1$ وبقسمة جميع الأطراف على العدد x^2

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

(x^2 موجب تماما في $\mathbb{R}^*$)، ينتج: $-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\cos x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$

إذن: $-\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$.

2) استنتاج نهاية الدالة f عند $+\infty$:

من السؤال السابق وجدنا أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $-\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$.

نعلم أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

حسب مبرهنة الحصر، نستنتج أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

تمرين محلول 3:

1) أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $1 \leq 2 - \cos x \leq 3$ و $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\cos x} \leq 1$

2) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x}{2-\cos x}$

أ- ادرس نهاية f عند $+\infty$.

ب- ادرس نهاية f عند $-\infty$.

3) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x) = \frac{2-\cos x}{x}$

أ- ادرس نهاية g عند 0 على اليمين.

ب- ادرس نهاية g عند 0 على اليسار.

الحل:

1) إثبات أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $1 \leq 2 - \cos x \leq 3$:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $-1 \leq \cos x \leq 1$ وبضرب الأطراف الثلاثة بالعدد -1

ينتج: $-1 \leq -\cos x \leq 1$ وبإضافة العدد 2 لجميع الأطراف نحصل على:

$1 \leq 2 - \cos x \leq 3$

إذن: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $1 \leq 2 - \cos x \leq 3$

إثبات أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\cos x} \leq 1$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

من السؤال السابق وجدنا أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $1 \leq 2-\cos x \leq 3$

وباستعمال خواص الدالة «مقلوب» نستنتج أن: $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\cos x} \leq 1$

② أ- دراسة نهاية f عند $+\infty$:

من السؤال السابق وجدنا أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\cos x} \leq 1$

وبضرب الأطراف الثلاثة بالعدد الحقيقي x حيث $x > 0$ نحصل على:

$\frac{1}{3}x \leq \frac{x}{2-\cos x} \leq x$. لكن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{3}x = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

نستنتج، حسب مبرهنة الحصر، أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2-\cos x} = +\infty$

إذن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

ب- دراسة نهاية f عند $-\infty$:

من السؤال (1) وجدنا أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\cos x} \leq 1$

وبضرب الأطراف الثلاثة بالعدد الحقيقي x حيث $x < 0$ نحصل على:

$\frac{1}{3}x \leq \frac{x}{2-\cos x} \leq x$. لكن $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{3}x = -\infty$

نستنتج، حسب مبرهنة الحصر، أن: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{2-\cos x} = -\infty$

إذن: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

③ أ- دراسة نهاية g عند 0 على اليمين:

عندما: $x \xrightarrow{>} 0$ فإن البسط $(2-\cos x) \longrightarrow 1$ والمقام $x \longrightarrow 0^+$

نستنتج أن: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = +\infty$

ب- دراسة نهاية g عند 0 على اليسار:

عندما: $x \xrightarrow{<} 0$ فإن البسط $(2-\cos x) \longrightarrow 1$ والمقام $x \longrightarrow 0^-$

نستنتج أن: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} g(x) = -\infty$

ملاحظة:

يمكن استعمال النتيجة التالية: من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $f(x) = \frac{1}{g(x)}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الاستمرارية

1 تعريف:

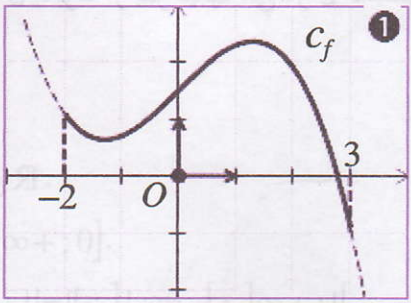
f دالة معرفة على مجال I وَ a عدد حقيقي من I.

✦ القول أن f مستمرة عند a يعني: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

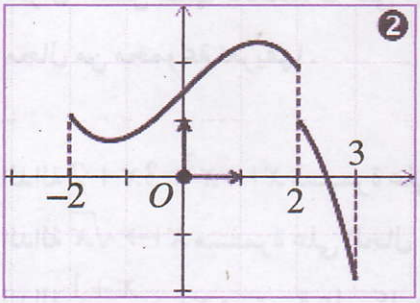
✦ القول أن f مستمرة على I يعني أن f مستمرة عند كل عدد حقيقي من I.

التفسير البياني: تكون دالة f مستمرة على مجال عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليد).

أمثلة:



على المجال $[-2;3]$، يمكن رسم منحني الدالة f دون رفع القلم.
f مستمرة على المجال $[-2;3]$



على المجال $[-2;3]$، لا يمكن رسم منحني الدالة f دون رفع القلم.
f غير مستمرة على المجال $[-2;3]$
(f غير مستمرة عند 2)

ملاحظة:

بالنسبة للمنحني الثاني، f مستمرة على المجال $[-2;2]$ لأنه يمكن رسم تمثيلها البياني على هذا المجال دون رفع القلم. رغم أن f غير مستمرة عند 2

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} \; ; \; x \neq 1 \\ f(1) = -3 \end{cases}$

لنبيّن أن الدالة f مستمرة عند 1:

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-4)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1} (x-4) = -3 = f(1)$$

إذن: الدالة f مستمرة عند 1

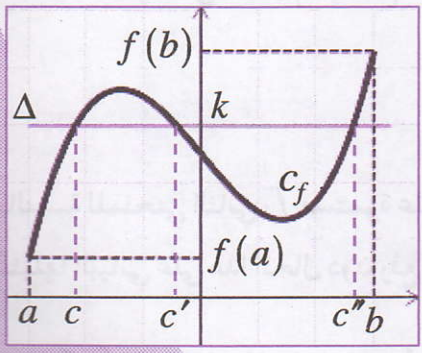
2 خواص:

- الدوال المرجعية هي دوال مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- الدوال كثيرات الحدود، sin، cos هي دوال مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) هي دوال مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- الدوال المحصل عليها بالعمليات على دوال مألوفة أو بتركيبها هي دوال مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

أمثلة:

- الدالة $x \mapsto x^2-3x+2$ مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرة على المجال $[0;+\infty[$.
- الدالة $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$.

3 مبرهنة القيم المتوسطة: f دالة مستمرة على مجال I، a و b عددان حقيقيان من I.
من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=k$.



التفسير البياني:

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المستقيم Δ الذي معادلته $y=k$ يقطع المنحنى C_f الممثل للدالة f في نقطة على الأقل فاصلتها c.

(في الشكل المقابل، Δ يقطع C_f في ثلاث نقط فواصلها c، c' و c'')

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

حالة خاصة: $k=0$

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $[a\,;b]$ وكان $f(a)\times f(b)<0$ (العدد 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$) فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=0$.

بيانيا: المنحنى C_f يقطع حامل محور الفواصل على الأقل في نقطة فاصلتها c.

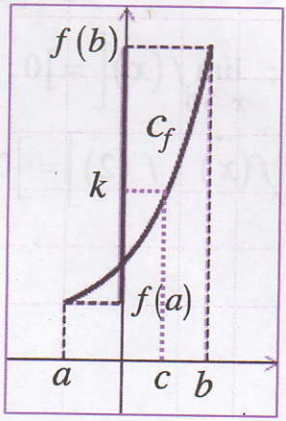
مثال: لتكن المعادلة $x^5+2x-1=0$.

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^5+2x-1$ هي دالة كثير حدود، وبالتالي فهي مستمرة على $\mathbb{R}$. زيادة على ذلك، نتحقق بسهولة أن $f(0)=-1$ و $f(1)=2$

العدد الحقيقي 0 محصور بين -1 و 2، وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين 0 و 1 بحيث $f(c)=0$.

نستنتج أن المعادلة $x^5+2x-1=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]0\,;1[$.

4 الدوال المستمرة والرتيبة تماما على مجال $[a\,;b]$:



ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a<b$.

إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة تماما على مجال $[a\,;b]$، فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$:

المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a\,;b]$.

جدول تغيرات دالة مستمرة:

إذا كانت f دالة جدول تغيراتها مبيّن في الشكل المقابل.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$	2	↗	4	↘	$-\infty$ || 0	↗	5

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

❖ f مستمرة على المجال $]-\infty;3[$، متزايدة تماما على $]-\infty;2[$ ومتناقصة تماما على $]2;3[$.

❖ f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]3;+\infty[$.

صورة مجال بواسطة دالة مستمرة :

❖ صورة مجال بواسطة دالة مستمرة هو مجال من $\mathbb{R}$.

❖ إذا كانت f دالة مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[a\ ;\ b]$ فإن :

$$f([a\ ;\ b])=[f(a)\ ;f(b)]$$

❖ إذا كانت f دالة مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[a\ ;\ b]$ فإن :

$$f([a\ ;\ b])=[f(b)\ ;f(a)]$$

مثال : f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\frac{1}{x}$

الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty\ ;\ 0[$ و $]0\ ;\ +\infty[$ وبالتالي :

❖ $f([1;4])=[f(4)\ ;f(1)]=\left[\frac{1}{4}\ ;1\right]$

❖ $f(]0\ ;\ +\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ ;\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)\right[=]0\ ;\ +\infty[$

❖ $f([2\ ;\ +\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ ;f(2)\right]=\left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

❖ f مستمرة على المجال $]-\infty\,;3[$، متزايدة تماما على $]-\infty\,;2[$ ومتناقصة تماما على $]2;3[$.

❖ f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]3;+\infty[$.

صورة مجال بواسطة دالة مستمرة :

❖ صورة مجال بواسطة دالة مستمرة هو مجال من $\mathbb{R}$.

❖ إذا كانت f دالة مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[a\,;\,b]$ فإن :

$$f([a\,;\,b])=[f(a)\,;f(b)]$$

❖ إذا كانت f دالة مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[a\,;\,b]$ فإن :

$$f([a\,;\,b])=[f(b)\,;f(a)]$$

مثال : f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\dfrac{1}{x}$

الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty\,;0[$ و $]0\,;+\infty[$ وبالتالي :

❖ $f([1\,;4])=[f(4)\,;f(1)]=\left[\frac{1}{4}\,;1\right]$

❖ $f(]0\,;+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\;;\lim\limits_{x\to 0} f(x)\right[=]0\,;+\infty[$

❖ $f([2\,;+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\;;f(2)\right]=\left]0\,;\frac{1}{2}\right]$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تمارين محلولة

تمرين محلول 1:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\begin{cases} x-1 & ; x\le 0 \\ ax+b & ; 0<x\le 2 \\ 2x+3 & ; x>2 \end{cases}$

عيّن العددين الحقيقيين a وb بحيث تكون الدالة f مستمرة عند **0** وعند **2**.

الحل:

تذكير: القول أن f مستمرة عند a يعني: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

❖ f مستمرة عند 0 معناه: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

لدينا: $f(0)=0-1=-1$ ..... **(1)**

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to} 0} f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to} 0}(x-1)=-1$ ..... **(2)**

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to} 0} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to} 0}(ax+b)=b$ ..... **(3)**

من **(1)**، **(2)** و **(3)** نستنتج أن $b=-1$

❖ f مستمرة عند 2 معناه: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

لدينا: $f(2)=a\times 2+b=2a+b$ ..... **(4)**

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to} 2} f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to} 2}(ax+b)=2a+b$ ..... **(5)**

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to} 2} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to} 2}(2x+3)=2\times 2+3=7$ ..... **(6)**

من **(4)**، **(5)** و **(6)** نستنتج أن $2a+b=7$ لكن $b=-1$ ومنه: $a=4$

إذن: تكون الدالة f مستمرة عند 0 وعند 2 من أجل: $a=4$ و $b=-1$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تمرين محلول 2:

P دالة كثير حدود معرفة بـ: $P(x)=2x^3-3x^2-1$.

1. برّر استمرارية الدالة P على $\mathbb{R}$.
2. احسب نهاية الدالة P عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
3. ادرس اتجاه تغير الدالة P وشكل جدول تغيراتها.
4. أثبت أن المعادلة $P(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1.6\ ;\ 1.7[$.
5. استنتج، حسب قيم x، إشارة $P(x)$.

الحل:

1. تبرير استمرارية الدالة P على $\mathbb{R}$:

الدالة P مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثير حدود.

2. حساب نهاية الدالة P عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}2x^3=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}2x^3=-\infty$$

3. دراسة اتجاه تغير الدالة P:

- حساب المشتقة: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $P'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

- إشارة المشتقة:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة P متناقصة تماما على المجال $[0\ ;1]$ ومتزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty\ ;0]$ و $[1\ ;+\infty[$.

- جدول تغيرات الدالة P:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

❹ إثبات أن المعادلة $P(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[1.7\,;\,1.6]$:

- الدالة P المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $P(x)=2x^3-3x^2-1$ هي دالة كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$، وبالتالي فهي مستمرة على المجال $[1.7;1.6]$.

- زيادة على ذلك، نتحقق بسهولة أن: $P(1.6)\times P(1.7)<0$.

- أضف إلى ذلك، الدالة P متزايدة تماما على المجال $[1.7;1.6]$.

من الحالات الثلاثة السابقة وحسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج أن المعادلة $P(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[1.7\,;\,1.6]$.

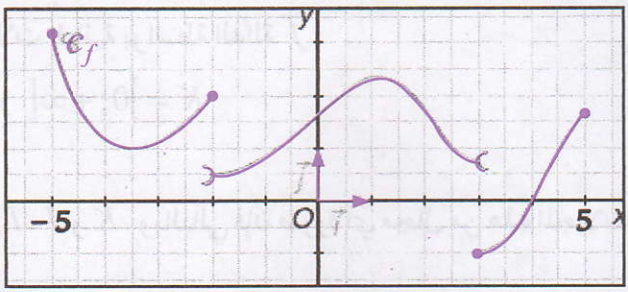
❺ استنتاج إشارة $P(x)$:

من جدول تغيرات الدالة P ومن السؤال (4) نستنتج إشارة $P(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	

تمرين محلول 3:

في الشكل الآتي، C_f هو المنحنى الممثل للدالة f معرفة على المجال $[-5\,;\,5]$.



بقراءة بيانية، أذكر إن كانت الخواص التالية صحيحة أو خاطئة:

❶ الدالة f غير مستمرة عند 3.

❷ الدالة f مستمرة عند -1.

❸ الدالة f مستمرة على المجال $[-3\,;\,3]$.

❹ الدالة f مستمرة على المجال $[-2\,;\,5]$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

❺ الدالة f مستمرة على المجال $[-5;2[$.

الحل:

❶ الدالة f غير مستمرة عند 3 ← صحيحة

❷ الدالة f مستمرة عند -1 ← صحيحة

❸ الدالة f مستمرة على المجال $[-3;3]$ ← خاطئة

❹ الدالة f مستمرة على المجال $[-5;-2]$ ← صحيحة

❺ الدالة f مستمرة على المجال $[-5;2[$ ← خاطئة

تمرين محلول 4:

لتكن f دالة جدول تغيراتها هو:

x	$-\infty$		-1		0		1		4		$+\infty$
	$+\infty$	↘		↘	$+\infty$	↘		↗		↗	2
$f(x)$			5				-2		0		
				↘	3						

عيّن صورة كل مجال من المجالات التالية بواسطة الدالة f:

$I=[1;4]$، $J=[-1;0[$ و $K=]0;+\infty[$

الحل:

الدالة f مستمرة على كل من I، J و K. وبالتالي فإن صورة أيّ مجال من هذه المجالات هو مجال من $\mathbb{R}$.

❖ $f(I)=[-2;0]$ لأن: $f(1)=-2$، $f(4)=0$ و f متزايدة تماما على I.

❖ $f(J)=]3;5]$ لأن: $f(-1)=5$، $\lim\limits_{x\to 0^{<}} f(x)=3$ و f متناقصة تماما على J.

❖ $f(K)=[-2;+\infty[$ لأن: $K=]0;+\infty[=]0;1]\cup[1;+\infty[$

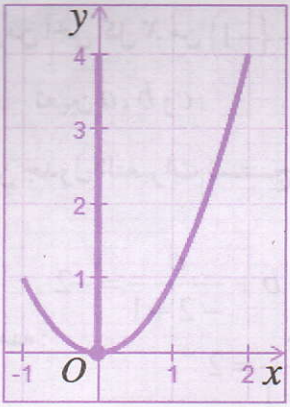
وبالتالي: $f(K)=f(]0;1])\cup f([1;+\infty[)$

لكن: $f(]0;1])=[-2;2[$ و $f([1;+\infty[)=[-2;+\infty[$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لدينا: $[-2;+\infty[\cup[-2;2[=[-2;+\infty[$

إذن: $f(K)=[-2;+\infty[$



ملاحظة:

صورة المجال $[-1;2]$ بواسطة الدالة مربع $f: x \mapsto x^2$ هو المجال $[0;4]$

أي: $f([-1;2])=[0;4]$.

يمكن ملاحظة أن: $f([-1;2]) \neq [f(-1);f(2)]$

(الدالة f غير رتيبة على المجال $[-1;2]$)

تمرين محلول 5:

a، b، c و d أعداد حقيقية بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x \neq -1$،

$f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+d}$. جدول تغيرات الدالة f هو الآتي:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

❶ أ- ما هي قيمة d؟

ب- احسب $f'(x)$.

جـ- عيّن الأعداد الحقيقية a، b و c.

❷ أ- أثبت أن، في معلم، المنحنى C_f الممثل للدالة f يقبل المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

ب- ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم Δ.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الحل:

❶ أ- قيمة d: نلاحظ أن الدالة f غير معرفة عند -1، نستنتج أن $d=1$.

ب- حساب $f'(x)$:

الدالة f' قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;-1[$ و $]-1;+\infty[$

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$، $f'(x)=a-\dfrac{c}{(x+1)^2}$

جـ- تعيين a، b و c:

من جدول التغيرات نستنتج أن: $\begin{cases} f(-2)=-2 \\ f(0)=2 \end{cases}$ و $\begin{cases} f'(-2)=0 \\ f'(0)=0 \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} -2a+b+\dfrac{c}{-2+1}=-2 \\ b+\dfrac{c}{0+1}=2 \end{cases}$ و $\begin{cases} a-\dfrac{c}{(-2+1)^2}=0 \\ a-\dfrac{c}{(0+1)^2}=0 \end{cases}$

إذن: $a=b=c=1$ وبالتالي: $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x+1}$

② أ- إثبات أن Δ مستقيم مقارب مائل للمنحنى C_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

تذكير: إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=ax+b+g(x)$ وكانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ فإن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى الممثل للدالة f عند $+\infty$ (وبطريقة مماثلة عند $-\infty$).

لدينا: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+1}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x+1}=0 \end{cases}$

نستنتج أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى C_f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب- دراسة الوضعية النسبية للمنحنى C_f والمستقيم Δ:

لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$، $f(x)-(x+1)=\dfrac{1}{x+1}$ وبالتالي فإن إشارة الفرق $f(x)-(x+1)$ هي إشارة $(x+1)$، ومنه النتائج التالية:

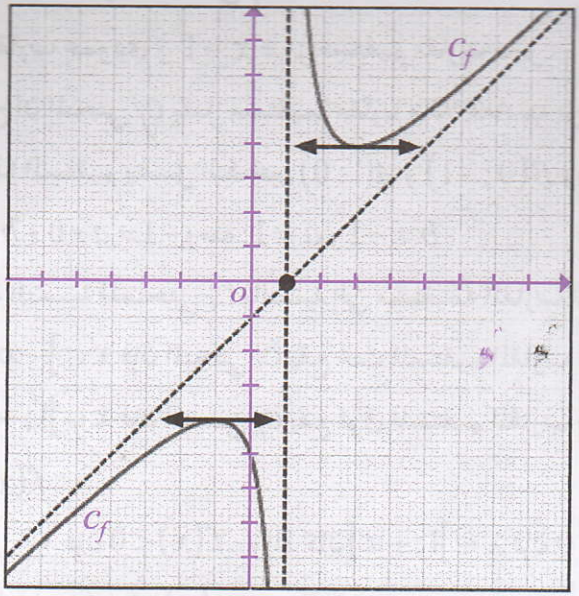
- إذا كان $x>-1$ يكون $f(x)-(x+1)>0$ وبالتالي C_f يقع فوق Δ.

- إذا كان $x<-1$ يكون $f(x)-(x+1)<0$ وبالتالي C_f يقع تحت Δ.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تمرين محلول 6:

في الشكل الآتي، يمثل C_f المنحنى البياني الممثل لدالة f.



❶ بقراءة بيانية، عيّن:

أ- مجموعة التعريف D للدالة f.

ب- نهايات f عند أطراف مجالات التعريف D.

جـ- المستقيمات المقاربة للمنحنى C_f ومعادلاتها.

د- الوضعية النسبية للمنحنى C_f بالنسبة إلى مستقيمه المقارب المائل.

هـ- إشارة $f(x)$.

❷ g الدالة المعرفة بـ: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ- بيّن أن g معرفة على المجال $]1;+\infty[$.

ب- أوجد نهاية الدالة g عند 1 وعند $+\infty$.

جـ- أعط اتجاه تغيّر الدالة g.

الحل:

❶ أ- تعيين D: $D=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ب- تعيين النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$

جـ- تعيين المستقيمات المقاربة للمنحني C_f:

$x=1$ مستقيم مقارب عمودي وَ $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل.

من البيان نستنتج أن المنحني C_f يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته من الشكل:

$y=ax+b$، وهذا المستقيم يشمل النقطتين $A(1;0)$ و $B(0;-1)$ وبالتالي:

$0=a\times 1+b$ و $-1=a\times 0+b$ ومنه: $a=1$ و $b=-1$

د- تعيين الوضعية النسبية للمنحني C_f بالنسبة إلى مستقيمه المقارب المائل:

- إذا كان $x\in]-\infty;1[$ فإن المنحني C_f يقع تحت المستقيم المقارب المائل.

- إذا كان $x\in]1;+\infty[$ فإن المنحني C_f يقع فوق المستقيم المقارب المائل.

هـ- تعيين إشارة $f(x)$:

إذا كان $x\in]-\infty;1[$ فإن $f(x)<0$، وإذا كان $x\in]1;+\infty[$ فإن $f(x)>0$

② g الدالة المعرفة بـ $g(x)=\sqrt{f(x)}$

أ- تبيان أن g معرفة على المجال $]1;+\infty[$:

[الدالة g معرفة] يكافئ [f معرفة وموجبة] وهذا يعني أن g معرفة من أجل $x\in]1;+\infty[$ فإن $f(x)>0$. من السؤال (1) الفرع (هـ) وجدنا أنه إذا كان $]1;+\infty[$ $f(x)>0$. نستنتج أن الدالة g معرفة على المجال $]1;+\infty[$.

ب- نهاية الدالة g عند 1 وعند $+\infty$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=+\infty$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

جـ- اتجاه تغيّر الدالة g: من أجل كل x من $]1;+\infty[$، $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

وبالتالي فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة $f'(x)$، نستنتج أن للدالتين f و g نفس اتجاه التغير على المجال $]1;+\infty[$. وبما أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ (من البيان) وبالتالي فإن الدالة g متناقصة تماما على $]1;+\infty[$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الاشتقاقية

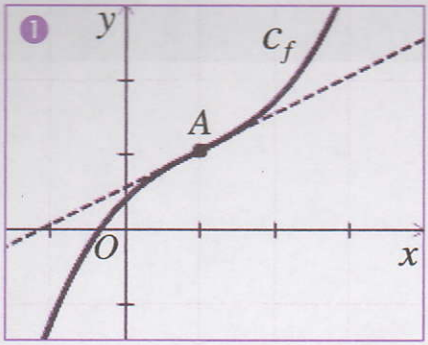
الكفاءات المستهدفة

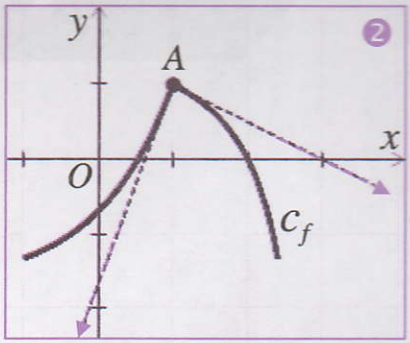
- توظيف المشتقات لحل مشكلات.
- استعمال المشتقات لدراسة خواص دالة والمنحني الممثل لها (التغيرات، التقريب الخطي، نقطة الانعطاف، ...).
- حساب مشتق دالة مركبة.

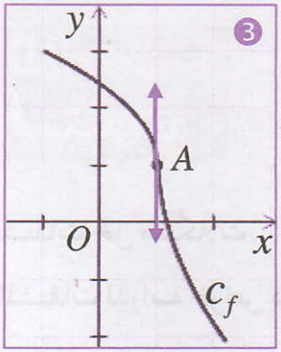
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

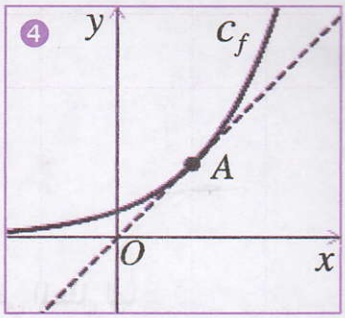
نشاط 1:

في كل حالة من الحالات الآتية، C_f هو المنحنى الممثل لدالة f معرفة على المجال $[-1\,;\,3]$.









هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1 ؟ علل إجابتك.

الحل:

الشكل 1: الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1 (يوجد مماس عند A لا يوازي oy).

الشكل 2: الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1 على اليمين وعلى اليسار، لكن العدد المشتق عند 1 على اليمين لا يساوي العدد المشتق عند 1 على اليسار.

نستنتج أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1 ($A(1\,;\,1)$ نقطة زاوية للمنحنى C_f).

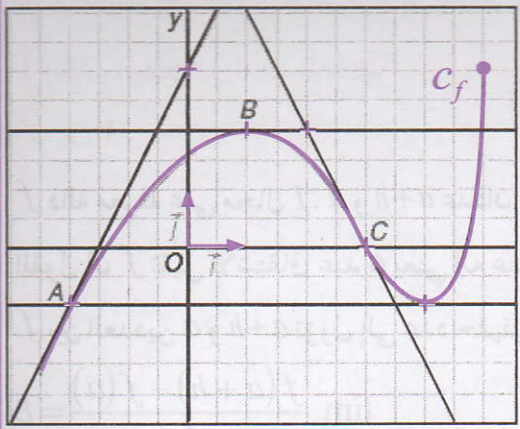
الشكل 3: الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1 لأن:

$$\lim_{x<1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x>1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

المنحنى C_f يقبل عند النقطة $A(1;1)$ مماسا يوازي محور التراتيب .

الشكل ❹ : الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1 (يوجد مماس عند A لا يوازي oy) .



نشاط 2:

في الشكل المقابل، C_f هو المنحنى الممثل لدالة f معرفة على المجال $[-2.5;5]$.

اختر الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة لكل سؤال من الأسئلة الآتية :

❶ أ) $f'(-2)=0$ ب) $f'(1)=0$ جـ) $f'(3)=0$

❷ عندما يؤول h إلى 0 فإن النسبة $\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$ تؤول إلى :

أ) 0 ب) $+\infty$ جـ) 2

❸ معادلة المماس للمنحنى C_f عند النقطة C هي :

أ) $y=-2x+6$ ب) $y=-\frac{1}{2}x+3$ جـ) $y=-2x$

❹ المماس للمنحنى C_f عند النقطة A يوازي المستقيم الذي معادلته :

أ) $y=2x$ ب) $y=-2x$ جـ) $y=-\frac{1}{2}x$

❺ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;4]$:

أ) $f'(x)\geq 0$ ب) $f'(x)\leq 0$ جـ) $f'(x)=0$

الحل:

❶ الاقتراح الصحيح هو (ب)

❷ الاقتراح الصحيح هو (جـ)

❸ الاقتراح الصحيح هو (أ)

❹ الاقتراح الصحيح هو (أ)

❺ الاقتراح الصحيح هو (ب)

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الاشتقاقية

1 العدد المشتق – الدالة المشتقة :

تعريف 1 :

f دالة معرفة على مجال I. a و $a+h$ عددان حقيقيان من I مع $h \neq 0$.

القول أن f تقبل الاشتقاق عند a يعني أنه عندما يؤول h إلى 0، فإن نسبة تزايد f بين العددين a و $a+h$ تؤول إلى عدد حقيقي L، أي :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$$

يسمى L العدد المشتق للدالة f عند a ونرمز له بالرمز $f'(a)$

إذن : $\boxed{f'(a)=\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$ أو $\boxed{f'(a)=\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$

وذلك بوضع : $x = a+h$.

تعريف 2 :

يمكن استخدام التعريف الآتي بدلا من التعريف السابق

f دالة معرفة على مجال I. a و $a+h$ عددان حقيقيان من I مع $h \neq 0$.

القول أن L هو العدد المشتق للدالة f عند a يعني تحقق أحد الشرطين التاليين :

(1) الدالة $x \mapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ لها نهاية L عند 0 .

(2) الدالة $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ لها نهاية L عند a.

نرمز للعدد المشتق للدالة f عند a بالرمز $f'(a)$

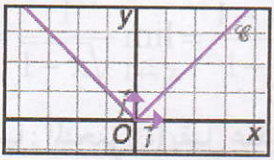
إذن : $\boxed{f'(a)=\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$ أو $\boxed{f'(a)=\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

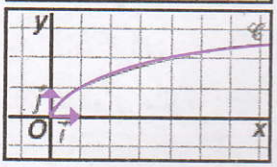
ملاحظات:

- القول أن f تقبل الاشتقاق على مجال I يعني أن f تقبل الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I . الدالة المشتقة للدالة f، نرمز لها f'، هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x من I العدد $f'(x)$.
- كل دالة قابلة للاشتقاق على مجال هي دالة مستمرة على هذا المجال (العكس غير صحيح) .

أمثلة:



- الدالة القيمة المطلقة $x \mapsto |x|$ هي دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ (مستمرة عند 0) ، لكنها غير قابلة للاشتقاق عند 0.



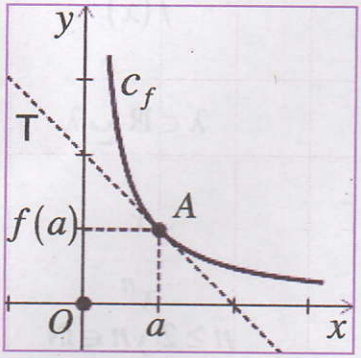
- الدالة الجذر التربيعي $x \mapsto \sqrt{x}$ هي دالة مستمرة على $[0;+\infty[$، لكنها غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

2 مماس منحنى دالة:

نفرض أن f دالة قابلة للاشتقاق عند a من I.

في معلم، المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند النقطة A ذات الفاصلة a هو المستقيم T الذي يمرّ بالنقطة A ومعامل توجيهه $f'(a)$ ومعادلته:

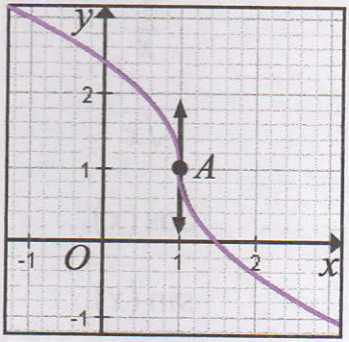
$$y = f'(a).(x-a)+f(a)$$



نتيجة:

إذا كانت $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$

أو $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ نستنتج ما يلي:



- تحليليا: الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a.
- بيانيا: المنحنى الممثل للدالة f يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$ مماسا يوازي محور التراتيب

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تمرين محلول 1:

(جزء من تمرين بكالوريا 2008 . الشعبة : رياضيات)

f دالة معرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالعبارة $f(x)=3+\sqrt{x-1}$

يرمز (c) إلى منحنى f في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

احسب $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ، ثم فسّر هذه النتيجة هندسيا .

الحل :

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x-1}}=+\infty$$

هندسيا : المنحنى (c) يقبل عند النقطة $A(1;3)$ نصف مماس يوازي محور التراتيب

3 قواعد الاشتقاق :

أ- مشتقات دوال مألوفة :

$f(x)$	$f'(x)$	f قابلة للاشتقاق على المجال
λ مع $\lambda\in\mathbb{R}$	0	$]-\infty;+\infty[$
x	1	$]-\infty;+\infty[$
x^n $n\geq 2$ و $n\in\mathbb{N}$	nx^{n-1}	$]-\infty;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$]-\infty;+\infty[$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$]-\infty;+\infty[$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ب- المشتقات والعمليات على الدوال:

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I و λ عدد حقيقي.

الدالة	$u+v$	λu	uv
الدالة المشتقة	$u'+v'$	$\lambda u'$	$u'v+v'u$

إذا كان من أجل كل x من I، $v(x)\neq 0$:

الدالة	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$
الدالة المشتقة	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$

نتائج:

- الدوال كثيرات الحدود هي دوال قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة هي دوال قابلة للاشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها.

4 مشتقة دالة مركبة:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I، و v دالة قابلة للاشتقاق على مجال J حيث، من أجل كل عدد حقيقي x من I، $u(x)\in J$، فإن الدالة المركبة $v\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و، من أجل كل x من I، لدينا:

$$(v\circ u)'(x)=u'(x)\times v'[u(x)]$$

تطبيقات:

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

الدالة	الدالة المشتقة	ملاحظات
u^n $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$	$nu'u^{n-1}$	
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	من أجل كل x من I، $u(x)>0$
$\cos(u)$	$-u'\times\sin(u)$	
$\sin(u)$	$u\times\cos(u)$	

أمثلة :

❖ الدالة $f:x\mapsto\left(x^2+x-2\right)^3$ معرفة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل u^3 مع

$u:x\mapsto x^2+x-2$. u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $u'(x)=2x+1$.

ومنه : f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'=3u'u^2$

إذن : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=3(2x+1)\left(x^2+x-2\right)^2$.

❖ الدالة $f:x\mapsto\frac{1}{\left(x^2-1\right)^2}$ معرفة على المجال $]1;+\infty[$ وهي من الشكل u^{-2}

مع $u:x\mapsto x^2-1$. u لا تنعدم على المجال $]1;+\infty[$ ، وهي قابلة للاشتقاق

على هذا المجال و $u'(x)=2x$.

ومنه : f قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و $f'=-2u'u^{-3}=\frac{-2u'}{u^3}$

إذن : من أجل كل x من $]1;+\infty[$، $f'(x)=\frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^3}$.

❖ الدالة $f:x\mapsto\sqrt{x^2+x-2}$ معرفة على المجال $]1;+\infty[$ وهي من الشكل $\sqrt{u}$

مع $u:x\mapsto x^2+x-2$. u موجبة تماما على $]1;+\infty[$، وهي قابلة للاشتقاق على

هذا المجال و $u'(x)=2x+1$.

ومنه : f قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و $f'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

إذن : من أجل كل x من $]1;+\infty[$، $f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}}$.

❖ الدالة $f:x\mapsto\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ معرفة على $\mathbb{R}^*$ وهي من الشكل $\cos(u)$ مع

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$u: x \mapsto \frac{1}{x}$. u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

ومنه: f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و $f' = -u' \times \sin(u)$.

إذن: من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f'(x) = \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

5 اتجاه تغير دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

- إذا كانت الدالة المشتقة f' معدومة على المجال I، تكون الدالة f ثابتة على هذا المجال .
- إذا كانت الدالة المشتقة f' موجبة تماما على المجال I، تكون الدالة f متزايدة تماما على هذا المجال.
- إذا كانت الدالة المشتقة f' سالبة تماما على المجال I، تكون الدالة f متناقصة تماما على هذا المجال.

تمرين محلول 2:

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 - 3x^2$

1. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
2. استنتج عدد حلول المعادلة:

أ) $f(x) = -1$. ب) $f(x) = -5$.

الحل:

1. دراسة اتجاه تغيّر الدالة f:

- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$[f'(0) = 0]$ يكافئ $[x = 0$ أو $x = 2]$.

$[f'(x) > 0]$ يكافئ $[x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$.

قسم الجزائر
WWW.DZREN2.COM

$[f'(x)<0]$ يكافئ $[x\in]0;2[]$.

✦ جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

$f(0)=0$

$f(2)=-4$

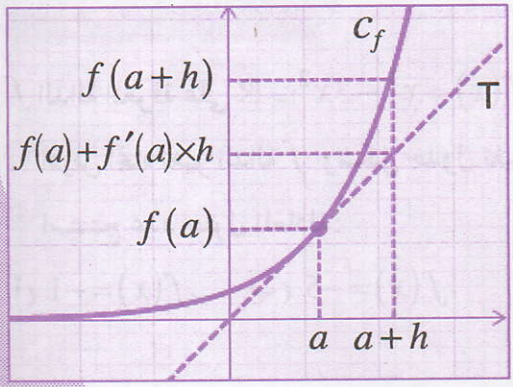
❷ أ- استنتاج عدد حلول المعادلة $f(x)=-1$:

من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن المعادلة $f(x)=-1$ تقبل ثلاثة حلول، الأول في المجال $]0;-\infty[$، الثاني في المجال $]2;0[$ والثالث في المجال $]+\infty;2[$

ب- استنتاج عدد حلول المعادلة $f(x)=-5$:

من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن المعادلة $f(x)=-5$ تقبل حلا واحدا في المجال $]0;-\infty[$.

6 التقريب التآلفي:



f دالة معرفة على مجال I.

إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند عدد حقيقي a من I، فإنه توجد دالة φ بحيث من أجل كل عدد حقيقي h مع $(a+h)\in I$:

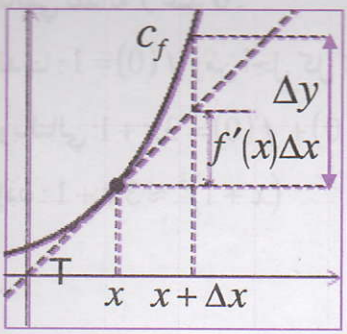
$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+h\varphi(h) \quad \text{و} \quad \lim_{h\to 0}\varphi(h)=0$$

نقول أن $f(a)+hf'(a)$ هو تقريب تآلفي لـ $f(a+h)$ من أجل h قريب من 0، المرفق بالدالة f.

الكتابة التفاضلية:

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند عدد حقيقي x من I، فإنه من أجل كل عدد حقيقي h حيث $(x+h)\in I$:



$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+h\varphi(h)$$

و $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$

في الفيزياء ، نضع : $\Delta y=f(x+h)-f(x)$

و $\Delta x=(x+h)-x=h$

وبالتالي : $\Delta y=f'(x)\Delta x+\Delta x\varphi(\Delta x)$

عندما يكون Δx قريبا من 0 فإن $\Delta y=f'(x)\Delta x$

تصطلح الصياغة التفاضلية التالية : $dy=f'(x)dx$ أو $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$

تمرين محلول 3:

f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(x+1)^3$

تعيين تقريب تآلفي للدالة f عند 0 :

✦ طريقة 1 :

تذكير : $f(a)+hf'(a)$ هو تقريب تآلفي لـ $f(a+h)$ من أجل h قريب من 0.

نضع $x=a+h=0+h=h$ $(a=0)$

لدينا : $f(a)=f(0)=1$

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=3(x+1)^2$ ومنه : $f'(a)=f'(0)=3$

وبالتالي : $f(a)+hf'(a)=f(0)+xf'(0)=1+3x$

ومنه : $1+3x$ هو تقريب تآلفي لـ $f(x)$ من أجل $f(a+h)=f(0+h)$

h قريب من 0.

إذن : $(x+1)^3\approx 3x+1$

✦ طريقة 2 :

معادلة مماس المنحنى الممثل للدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي :

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$y = f'(0).(x-0)+f(0)$ نستنتج أن $f'(0).(x-0)+f(0)$ هو تقريب تآلفي للدالة f عند 0.

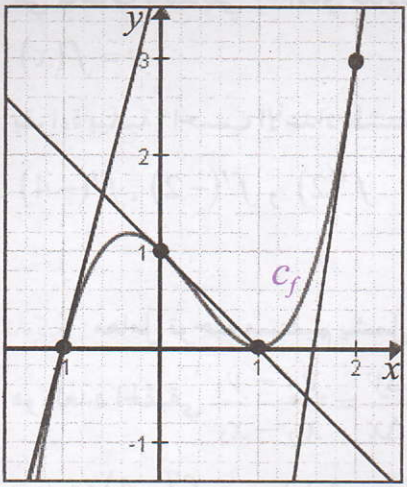
لدينا : $f(0)=1$ ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=3(x+1)^2$ ومنه : $f'(0)=3$

وبالتالي: $f'(0).(x-0)+f(0)=3x+1$ هو تقريب تآلفي للدالة f عند 0.

إذن : $(x+1)^3 \approx 3x+1$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تمارين محلولة



تمرين محلول 1:

المستقيمات المرسومة في الشكل المقابل هي مماسات للمنحنى C_f الذي معادلته $y = f(x)$.

بقراءة بيانية، احسب الأعداد المشتقة:

$f'(-1)$ ، $f'(0)$ ، $f'(1)$ و $f'(2)$

الحل:

تذكير: معامل توجيه مستقيم يشمل النقطتين $M_1(x_1 ; y_1)$ و $M_2(x_2 ; y_2)$ هو العدد الحقيقي $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

✦ العدد $f'(-1)$ هو معامل توجيه للمستقيم الذي يشمل النقطتين $A(-1;0)$ و $B(0;4)$. وبالتالي: $f'(-1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-0}{0-(-1)} = 4$

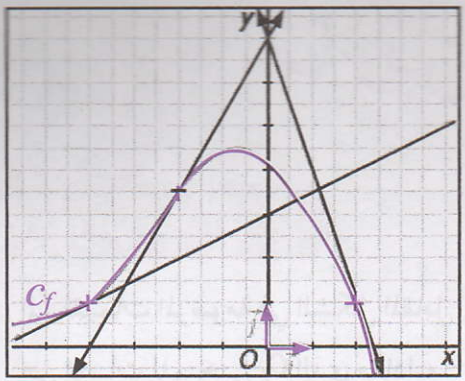
✦ العدد $f'(0)$ هو معامل توجيه للمستقيم الذي يشمل النقطتين $C(0;1)$ و $D(1;0)$. وبالتالي: $f'(-1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-1}{1-0} = -1$

✦ $f'(1) = 0$ لأن مماس المنحنى C_f عند النقطة ذات الفاصلة 1 يوازي محور الفواصل.

✦ العدد $f'(2)$ هو معامل توجيه للمستقيم الذي يشمل النقطتين $E(2;3)$ و $F\left(\frac{3}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$. وبالتالي: $f'(2) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{1}{2} - 3}{\frac{3}{2} - 2} = 7$

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تمرين محلول 2:



المستقيمات المرسومة في الشكل المقابل هي مماسات للمنحنى C_f الذي معادلته $y = f(x)$.

بقراءة بيانية، احسب الأعداد المشتقة:

$f'(-4)$، $f'(-2)$ و $f'(2)$

الحل:

تذكير: معامل توجيه مستقيم يشمل النقطتين $M_1(x_1\,;y_1)$ و $M_2(x_2\,;y_2)$ هو العدد الحقيقي $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

✦ العدد $f'(-4)$ هو معامل توجيه للمستقيم الذي يشمل النقطتين $A(-4\,;1)$ و $B(0\,;3)$. وبالتالي: $f'(-4)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3-1}{0-(-4)}=\frac{1}{2}$

✦ العدد $f'(-2)$ هو معامل توجيه للمستقيم الذي يشمل النقطتين $C\left(-2\,;\frac{7}{2}\right)$ و $D(-4\,;0)$. وبالتالي: $f'(-2)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0-\frac{7}{2}}{-4-(-2)}=\frac{7}{4}$

✦ العدد $f'(2)$ هو معامل توجيه للمستقيم الذي يشمل النقطتين $E(2\,;1)$ و $F(0\,;7)$. وبالتالي: $f'(2)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{7-1}{0-2}=-3$

تمرين محلول 3:

f دالة معرفة على المجال $]-1\,;+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\sqrt{x^3+x^2}$

احسب $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$، ثم فسّر هذه النتيجة تحليليا وهندسيا.

الحل:

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

✦ حساب $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt{x^2(x+1)}}{x}=\frac{|x|\sqrt{x+1}}{x}=\begin{cases}\dfrac{x\sqrt{x+1}}{x}=\sqrt{x+1}\\ \dfrac{-x\sqrt{x+1}}{x}=-\sqrt{x+1}\end{cases}$$

ومنه: $\lim\limits_{x\geq 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\geq 0}\sqrt{x+1}=1$

و $\lim\limits_{x\leq 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\leq 0}-\sqrt{x+1}=-1$

✦ التفسير التحليلي لهذه النتيجة: الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0.

(f قابلة للاشتقاق عند 0 على اليمين وقابلة للاشتقاق عند 0 على اليسار لكن العدد المشتق على اليمين لا يساوي العدد المشتق على اليسار $(1\neq -1)$)

✦ التفسير الهندسي لهذه النتيجة: النقطة $O(0;0)$ هي نقطة زاوية لبيان الدالة f.

(بيان الدالة f يقبل عند النقطة $O(0;0)$ نصف مماس على اليمين ونصف مماس على اليسار معاملا توجيههما مختلفان)

تمرين محلول 4:

f دالة معرفة على المجال $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=\sqrt{x^2+1}$، C_f تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

1. أثبت أن محور التراتيب محور تناظر للمنحنى C_f.
2. احسب الدالة المشتقة للدالة f، شكل جدول تغيرات f على $[0;+\infty[$.
3. بيّن أن المستقيم الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى f عند $+\infty$
4. ارسم المنحنى C_f ومستقيميه المقاربين.

الحل:

1. إثبات أن محور التراتيب محور تناظر للمنحنى C_f:

[محور التراتيب محور تناظر للمنحنى C_f يكافئ f دالة زوجية]

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تكون الدالة f زوجية إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $-x \in \mathbb{R}$ و $f(-x)=f(x)$

الشرط الأول: واضح أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، فإن $-x \in \mathbb{R}$.

الشرط الثاني: $f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}=\sqrt{x^2+1}=f(x)$

نستنتج أن f دالة زوجية وبالتالي فإن محور التراتيب محور تناظر للمنحني C_f.

❷ حساب $f'(x)$:

$f: x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ معرفة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $\sqrt{u}$

مع $u: x \mapsto x^2+1$. u موجبة تماما على $\mathbb{R}$، وهي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و $u'(x)=2x$. ومنه: f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

إذن: $f'(x)=\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

من أجل كل $x>0$، $f'(x)>0$ و $f'(0)=0$

وبالتالي فإن f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

✦ جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$

❸ تبيان أن المستقيم الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحني C_f عند $+\infty$:

تذكير: إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ نقول إن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $+\infty$.

✦ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$:

$$f(x)-x=\sqrt{x^2+1}-x=\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

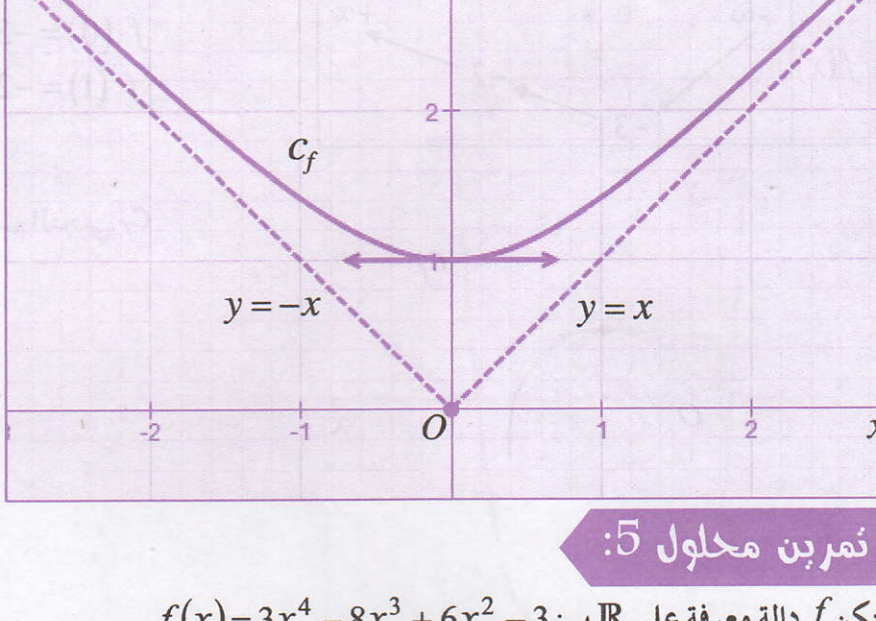
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$: منه

ذن : المستقيم الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحني C_f عند $+\infty$.

الرسم :

استعمال التناظر بالنسبة إلى محور التراتيب نستنتج أن المستقيم الذي معادلته

$y=-$ مستقيم مقارب مائل للمنحني C_f عند $-\infty$.



تمرين محلول 5:

حكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-3$

C_f تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ارسم المنحني C_f.

حل :

النهايات : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}3x^4=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}3x^4=+\infty$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

حساب المشتقة : الدالة f كثير حدود وبالتالي فهي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f''(x)=12x^3-24x^2+12x=12x(x-1)^2$

✦ دراسة إشارة $f'(x)$:

$[\ f'(x)=0\ ]$ يكافئ $[\ x=0$ أو $x=1\ ]$.

$[\ f'(x)>0\ ]$ يكافئ $[\ x\in\ ]0;1[\cup]1;+\infty[\ ]$

$[\ f'(x)<0\ ]$ يكافئ $[\ x\in\ ]-\infty;0[\ ]$.

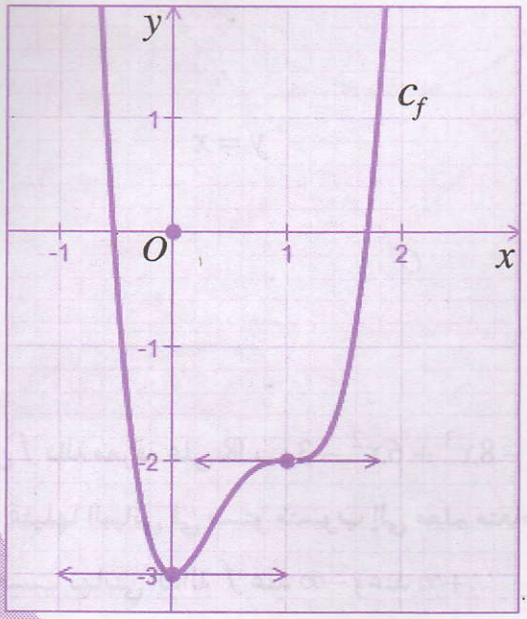
✦ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	-2	↗	$+\infty$

$f(0)=-3$

$f(1)=-2$

❸ رسم المنحنى C_f :



تمرين محلول 6:

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $f(x)=x-2+\dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$

و C_f تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

❶ احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2 ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3 أ- أثبت أن المنحنى C_f يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما.

ب- ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة إلى مستقيمه المقارب المائل D.

4 عيّن فاصلة النقطة I من C_f التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم D.

5 ارسم D وَ C_f:

الحل:

1 حساب النهايات:

✦ لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{(x-1)^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

✦ لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-2}{(x-1)^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)=-\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

✦ $\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$

2 دراسة اتجاه تغير الدالة f:

✦ حساب المشتقة:

من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$، $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x-3)x^2}{(x-1)^4}=\dfrac{(x-3)x^2}{(x-1)^3}$

✦ إشارة المشتقة: إشارة $f'(x)$ هي إشارة الجداء $(x-1)(x-3)\times x^2$

[f $x=0$] يكافئ [$x=0$ $x=3$].

[$f'(x)>0$] يكافئ [$x\in]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]3;+\infty[$].

[$f'(x)<0$] يكافئ [$x\in]1;3[$].

✦ جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{11}{4}$	↗	$+\infty$

$f(0)=-4$

$f(3)=3$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3 أ- إثبات أن المنحنى C_f يقبل مستقيمين مقاربين:

✦ من $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$ نستنتج أن: $x=1$ مستقيم مقارب للمنحنى C_f.

✦ بما أن: $f(x)=ax+b+g(x)$ مع $\lim\limits_{x\to\mp\infty} g(x)=0$

أي: $f(x)=x-2+\dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$ مع $\lim\limits_{x\to\mp\infty}\dfrac{3x-2}{(x-1)^2}=0$

نستنتج أن المستقيم D الذي معادلته $y=x-2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى C_f.

ب- دراسة وضعية C_f بالنسبة إلى D:

لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$، $f(x)-(x-2)=\dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$ وبالتالي فإن

إشارة الفرق $f(x)-(x-2)$ هي إشارة $(3x-2)$، ومنه النتائج التالية:

- إذا كان $x=\dfrac{2}{3}$ يكون $f(x)-(x-2)=0$ وبالتالي فإن D يقطع C_f في النقطة $A\left(\dfrac{2}{3}\,;\,-\dfrac{4}{3}\right)$.

- إذا كان $x>\dfrac{2}{3}$ يكون $f(x)-(x-2)>0$ وبالتالي C_f يقع فوق D.

- إذا كان $x<\dfrac{2}{3}$ يكون $f(x)-(x-2)<0$ وبالتالي C_f يقع تحت D.

4 تعيين x_0 فاصلة النقطة I من C_f التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم D:

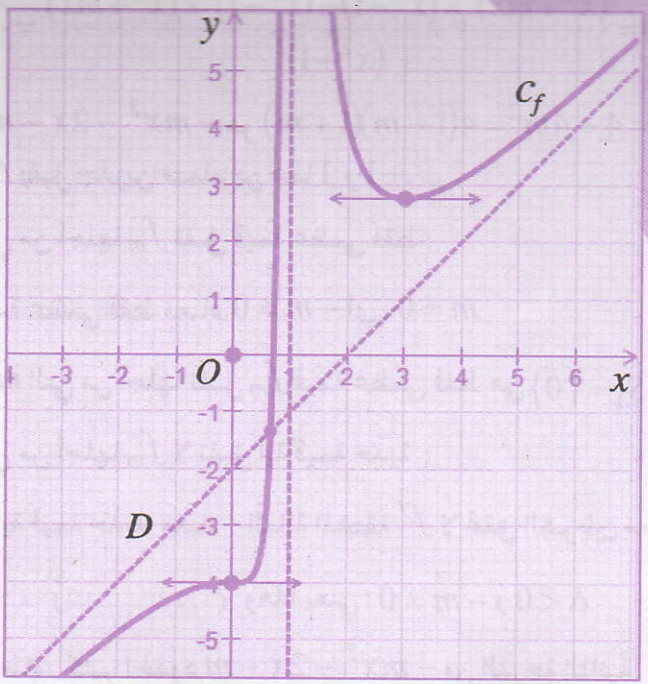
معامل توجيه المستقيم D هو1، ومعامل توجيه المماس عند النقطة I هو $f'(x_0)$

المماس عند I يوازي D معناه: $f'(x_0)=1$ أي: $\dfrac{(x_0-3)x_0^{\,2}}{(x_0-1)^3}=1$

وبحل هذه المعادلة نجد: $x_0=\dfrac{1}{3}$.

5 رسم D و C_f:

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM



تمرين محلول 7:

f_m دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ: $f_m(x)=\dfrac{x^2+mx}{x^2-1}$ ، $(m\in\mathbb{R})$

عيّن قيم العدد الحقيقي m في كل حالة من الحالات التالية:

1. الدالة f_m تقبل قيمة عظمى فقط.
2. الدالة f_m لا تقبل أية قيمة حدّية.
3. الدالة f_m تقبل قيمة عظمى وقيمة صغرى.

الحل:

تذكير: f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I، x_0 عدد حقيقي من I.

إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند x_0 مغيّرة إشارتها فإن $f(x_0)$ قيمة حدّية محلية للدالة f.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الدالة f_m قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ ومن أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$:

$$f_m'(x)=\frac{(x^2+mx)'\times(x^2-1)-(x^2-1)'\times(x^2+mx)}{(x^2-1)^2}=\frac{-mx^2-2x-m}{(x^2-1)^2}$$

مميز كثير الحدود $-mx^2-2x-m$ هو $\Delta=4-4m^2=4(1-m)(1+m)$

نستنتج أن المميز Δ يقبل جذرين متمايزين هما 1 و -1.

❶ تعيين قيم m التي من أجلها f_m تقبل قيمة عظمى فقط :

الدالة f_m تقبل قيمة عظمى فقط معناه $m=0$ – أي : $m=0$

إذن : مجموعة قيم m التي من أجلها تقبل f_m قيمة عظمى فقط هي $S_1=\{0\}$

❷ تعيين قيم m التي من أجلها f_m لا تقبل أية قيمة حدّية :

الدالة f_m لا تقبل أية قيمة حدّية معناه : الدالة المشتقة f' لا تحقق الشرطين معا

(الشرطان هما : تنعدم وَ تغيّر إشارتها) وهذا يعني : $m\neq 0$ – وَ $\Delta<0$.

الشرط $m\neq 0$ – معناه : كثير الحدود $-mx^2-2x-m$ من الدرجة الثانية.

الشرط $\Delta<0$ معناه : كثير الحدود $-mx^2-2x-m$ – لا ينعدم وإشارته موجبة

(من أجل $m<0$) وسالبة (من أجل $m>0$) وذلك مهما كان العدد الحقيقي x.

إذن : مجموعة قيم m التي من أجلها لا تقبل f_m أية قيمة حدّية هي

$$S_2=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$$

❸ تعيين قيم m التي من أجلها f_m تقبل قيمة عظمى وقيمة صغرى :

الدالة f_m تقبل قيمة عظمى وقيمة صغرى معناه : $m\neq 0$ – وَ $\Delta>0$.

إذن : مجموعة قيم m التي من أجلها f_m تقبل قيمة عظمى وقيمة صغرى هي

$$S_3=]-1;0[\cup]0;1[$$

تمرين محلول 8:

a و b عددان حقيقيان و f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

موقع الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$\left.\begin{array}{l} x<1 \text{ إذا كان } f(x)=ax^2+6x-5 \\ x\geq 1 \text{ إذا كان } f(x)=\dfrac{b}{x}-x \end{array}\right\}$$

عيّن عددين حقيقيين a وb بحيث تكون f قابلة للاشتقاق عند 1.

الحل:

$$\left.\begin{array}{l} x<1 \text{ إذا كان } f'(x)=2ax+6 \\ x>1 \text{ إذا كان } f'(x)=-\dfrac{b}{x^2}-1 \end{array}\right\}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1 معناه: $2a\times 1+6=-\dfrac{b}{1^2}-1$

أي: $2a+6=-b-1$ وبالتالي: $b=-2a-7$

من أجل $a=-3$ نجد: $b=-1$.

إذن: يكفي اختيار $a=-3$ وَ $b=-1$ حتى تكون f قابلة للاشتقاق عند 1.

تمرين محلول 9:

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=2-\sqrt{x^2-x} & ;\ x\in]-\infty;0[\\ f(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & ;\ x\in [0;+\infty[\end{cases}$$

1. بيّن أن الدالة f مستمرة عند 0.
2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 وفسّر هندسيا النتيجة.
3. أ- بيّن أنه، من أجل كل $x\in]0;+\infty[$، $f'(x)=\dfrac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيّراتها.

4. أثبت أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1.5\ ;\ 1.6[$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

طرائق

طريقة 1 : المستقيمات المقاربة

إذا كان ...	فإن ...
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0$	المستقيم الذي معادلته $y=y_0$ هو مستقيم مقارب أفقي للمنحني الممثل للدالة f.
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$	المستقيم الذي معادلته $x=x_0$ هو مستقيم مقارب عمودي للمنحني الممثل للدالة f.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$	المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f.
$f(x)=ax+b+g(x)$ مع $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0$	المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f.

مثال :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ $f(x)=\dfrac{-x^2+2x+3}{x-2}=-x+\dfrac{3}{x-2}$،

C_f تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم.

❖ لدينا : $\lim\limits_{x\to 2^<} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 2^>} f(x)=+\infty$ نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x=2$ مستقيم مقارب للمنحني C_f.

❖ ولدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x-2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x-2}=0$ نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y=-x$ مستقيم مقارب مائل للمنحني C_f

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

طريقة 2: البرهان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α مع $a<\alpha<b$

نستعمل مبرهنة القيم المتوسطة. إذا كان:

1. f مستمرة على المجال $[a;b]$؛
2. f رتيبة تماما على المجال $[a;b]$؛
3. $f(a).f(b)<0$.

فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]a;b[$.

مثال: لتكن المعادلة $(E): x^3+x=3$.

إثبات أن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]1;2[$:

- الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3+x-3$ هي دالة كثير حدود، وبالتالي فهي مستمرة على $\mathbb{R}$. نستنتج أن f مستمرة على المجال $[1;2]$.
- لدينا: $f(1)=-1$ و $f(2)=7$ ومنه: $f(1)\times f(2)<0$.
- من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=3x^2+1$ نستنتج أن f متزايدة تماما على $[1;2]$

نتيجة:

من المراحل الثلاثة السابقة وحسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج أن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]1;2[$.

التفسير الهندسي لهذه النتيجة: المنحنى الممثل للدالة f يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها α حيث $\alpha\in]1;2[$.

طريقة 3: الوضعية النسبية لمنحنيين

في معلم، ليكن C_f المنحنى الممثل لدالة f و C_g المنحنى الممثل لدالة g.

دراسة الوضعية النسبية للمنحنيين C_f و C_g يؤول إلى دراسة إشارة الفرق $f(x)-g(x)$

- إذا كان $f(x)-g(x)>0$ فإن $f(x)>g(x)$، وبالتالي C_f يقع فوق C_g؛
- إذا كان $f(x)-g(x)<0$ فإن $f(x)<g(x)$، وبالتالي C_f يقع تحت C_g.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

مثال:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بـ $f(x)=x-2+\dfrac{4}{x-3}$، C_f تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم.

يمكن التحقق بسهولة أن المستقيم D الذي معادلته $y=x-2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى C_f.

دراسة الوضعية النسبية للمنحنى C_f والمستقيم D:

لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{3\}$، $f(x)=x-2+\dfrac{4}{x-3}$ وبالتالي فإن

إشارة الفرق $f(x)-(x-2)$ هي إشارة $(x-3)$، ومنه النتائج التالية:

- إذا كان $x>3$ يكون $f(x)-(x-2)>0$ وبالتالي C_f يقع فوق D.
- إذا كان $x<3$ يكون $f(x)-(x-2)<0$ وبالتالي C_f يقع تحت D.

طريقة 4: تعيين معادلة مماس منحن

معادلة مماس المنحني الممثل لدالة f عند النقطة ذات الفاصلة a هي:

$$y=f'(a).(x-a)+f(a)$$

مثال:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ $f(x)=\dfrac{2x}{x+2}$، C_f تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم. T مماس للمنحنى C_f عند النقطة ذات الفاصلة $a=0$.

كتابة معادلة المماس T:

معادلة T من الشكل: $y=f'(a).(x-a)+f(a)$

لدينا: $a=0$ ومنه: $f(0)=0$

من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2\}$، $f'(x)=\dfrac{4}{(x+2)^2}$ ومنه: $f'(0)=1$

إذن: معادلة T هي $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي: $y=x$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

طريقة 5: القيم الحدّية المحلية

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I، x_0 عدد حقيقي من I.

إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند x_0 مغيّرة إشارتها فإن $f(x_0)$ قيمة حدّية محلية للدالة f.

المماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0 يوازي محور الفواصل ($f'(x_0)=0$).

مثال 1:

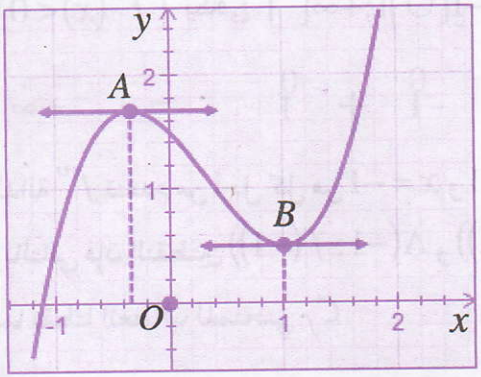
من جدول التغيرات المقابل نستنتج أن $f(2)=4$ قيمة حدّية (عظمي) للدالة f.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$	2	↗	4	↘	$-\infty$ ‖ 0	↗	5

مثال 2:

من الشكل المقابل نستنتج أن :

- $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ قيمة حدّية (عظمي) للدالة f وبالتالي فإن المماس عند النقطة A يوازي محور الفواصل.
- $f(1)$ قيمة حدّية (صغرى) للدالة f وبالتالي فإن المماس عند النقطة B يوازي محور الفواصل.



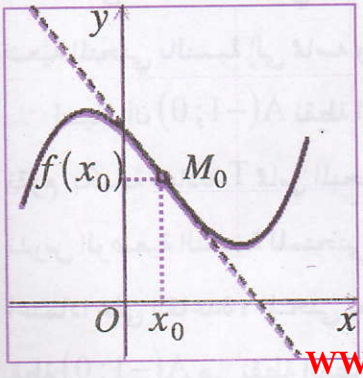
طريقة 6: نقطة الانعطاف

✦ طريقة 1:

f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I،

x_0 عدد حقيقي من I.

إذا انعدمت الدالة المشتقة f'' عند x_0 مغيّرة إشارتها فإن النقطة $M_0(x_0\ f(x_0))$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

مثال:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}$، C_f تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم .

إثبات أن المنحني C_f يقبل نقطتي انعطاف:

الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$.

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{8x}{(x^2+3)^2}$ و $f''(x)=\dfrac{-24(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$

$[f''(x)=0]$ يكافئ $[x=-1$ أو $x=1]$

$[f''(x)>0]$ يكافئ $[\ ]-1;1[\ ]$ $[x\in\ ]-1;1[\ ]$

$[f''(x)<0]$ يكافئ $[\ ]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\ ]$ $[x\in\ ]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\ ]$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	

الدالة f'' تنعدم من أجل كل من $x=-1$ و $x=1$ مغيرة إشارتها عند كل منهما وبالتالي فإن النقطتين $A(-1;f(-1))$ و $B(1;f(1))$ أي: $A(-1;0)$ و $B(1;0)$ هما نقطتا انعطاف للمنحني C_f.

✦ طريقة 2:

اعتمادا على القاعدة «المنحني يخترق مماسه عند نقطة الانعطاف»، يمكن دراسة وضعية المنحني بالنسبة إلى مماسه واستنتاج وجود أو عدم وجود نقطة الانعطاف.

مثلا: لتبيان أن $A(-1;0)$ نقطة انعطاف للمنحني C_f السابق يمكن إتباع ما يلي:

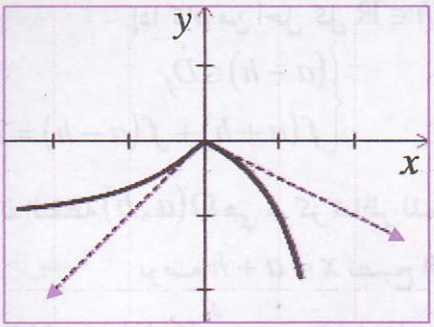
- نقوم بكتابة معادلة T مماس المنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة -1؛
- ندرس الوضعية النسبية للمنحني C_f والمماس T؛
- اعتمادا على القاعدة « المنحني يخترق مماسه في نقطة الانعطاف»، نستنتج أن النقطة $A(-1;0)$ هي نقطة انعطاف للمنحني C_f.

تم تحميل من الجزائر
WWW.DZPEN.COM

✦ طريقة 3 :

إذا انعدمت الدالة المشتقة الأولى f' من أجل قيمة a دون أن تغيّر إشارتها عندها، نستنتج أن النقطة ذات الفاصلة a هي نقطة انعطاف لبيان الدالة f.

طريقة 7 : النقطة الزاوية



نقطة زاوية هي نقطة يقبل فيها المنحني نصف مماس على اليمين ونصف مماس على اليسار معاملا توجيههما مختلفان .

إذا كانت $M_0\left(x_0 ; f(x_0)\right)$ نقطة زاوية تكون الدالة f مستمرة وغير قابلة للاشتقاق عند النقطة ذات الفاصلة x_0 .

• مثال :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ $f(x)=\dfrac{|x|}{x-2}$ ، C_f تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم .

دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0=0$:

لدينا : $f(x)=\dfrac{|x|}{x-2}=\begin{cases}\dfrac{x}{x-2} & ; x\geq 0\\ \dfrac{-x}{x\ \ 2} & ; x\leq 0\end{cases}$

لدينا : $\lim\limits_{x\geq 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\geq 0}\dfrac{1}{x-2}=-\dfrac{1}{2}$

و $\lim\limits_{x\leq 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\leq 0}\dfrac{-1}{x-2}=\dfrac{1}{2}$

تحليليا : الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 على اليمين وعلى اليسار، لكن العدد المشتق عند 0 على اليمين لا يساوي العدد المشتق عند 0 على اليسار ($-\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{1}{2}$)

نستنتج أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

قالمة الجزائر
WWW.DZPEN.COM

هندسيا: بيان الدالة f يقبل عند النقطة $O(0;0)$ نصف مماس على اليمين ونصف مماس على اليسار معاملا توجيههما مختلفان $\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$

نستنتج أن النقطة $O(0;0)$ هي نقطة زاوية للمنحني C_f.

طريقة 8: مركز التناظر

✦ **طريقة 1:** إذا كان من أجل كل $h \in \mathbb{R}$ حيث $(a+h) \in D_f$، لدينا:

$$\begin{cases} (a-h) \in D_f \\ f(a+h) + f(a-h) = 2b \end{cases}$$

فإن النقطة $\Omega(a;b)$ هي مركز تناظر للمنحني الممثل للدالة f.

✦ **طريقة 2:** بوضع $x = a+h$ تصبح النتيجة السابقة كما يلي:

إذا كان من أجل كل x من D_f، لدينا:

$$\begin{cases} (2a-x) \in D_f \\ f(x) + f(2a-x) = 2b \end{cases}$$

فإن النقطة $\Omega(a;b)$ هي مركز تناظر للمنحني الممثل للدالة f.

مثال:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ ، C_f تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

إثبات أن النقطة $\Omega(1;2)$ هي مركز تناظر للمنحني C_f:

لإثبات أن النقطة $\Omega(1;2)$ هي مركز تناظر للمنحني C_f يكفي تحقق ما يلي:

من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$ فإن $(2-x) \in \mathbb{R}-\{1\}$ و $f(x)+f(2-x)=4$

✦ من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$ ، $-x \in \mathbb{R}-\{-1\}$ ومنه: $(2-x) \in \mathbb{R}-\{1\}$

✦ $f(x)+f(2-x) = \frac{x^2+3}{x-1} + \frac{(2-x)^2+3}{(2-x)-1} = \ldots = \frac{4(x-1)}{x-1} = 4$

نستنتج أن النقطة $\Omega(1;2)$ هي مركز تناظر للمنحني C_f.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

طريقة 9: محور التناظر

إذا كان من أجل كل x من D_f، لدينا : $\begin{cases}(2a-x)\in D_f\\ f(2a-x)=f(x)\end{cases}$

فإن المستقيم الذي معادلته $x=a$ هو محور تناظر للمنحنى الممثل للدالة f.

مثال :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$ ، C_f تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

إثبات أن المستقيم الذي معادلته $x=1$ هو محور تناظر للمنحنى C_f :

لإثبات أن المستقيم الذي معادلته $x=1$ هو محور تناظر للمنحنى C_f يكفي تحقق ما يلي : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $(2-x)\in\mathbb{R}$ و $f(2-x)=f(x)$

- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-x\in\mathbb{R}$ ومنه : $(2-x)\in\mathbb{R}$
- $f(2-x)=\sqrt{(2-x)^2-(2-x)+2}=\sqrt{4-4x+x^2-2+2x-2}=\cdots=f(x)$

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x=1$ هو محور تناظر للمنحنى C_f .

مثال :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$ ، C_f تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

إثبات أن المستقيم الذي معادلته $x=1$ هو محور تناظر للمنحنى C_f:

لإثبات أن المستقيم الذي معادلته $x=1$ هو محور تناظر للمنحنى C_f يكفي تحقق ما يلي : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $(2-x)\in\mathbb{R}$ و $f(2-x)=f(x)$

- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-x\in\mathbb{R}$ ومنه : $(2-x)\in\mathbb{R}$
- $f(2-x)=\sqrt{(2-x)^2-(2-x)+2}=\sqrt{4-4x+x^2-2+2x-2}=\cdots=f(x)$

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x=1$ هو محور تناظر للمنحنى C_f .

طريقة 10 : دراسة اتجاه تغير دالة

قلم الجزائر
WWW.DZREN.COM

لدراسة اتجاه تغيّر دالة نتبع المراحل الثلاثة التالية :

1. نقوم بحساب الدالة المشتقة وذلك باستعمال قوانين الدرس ؛
2. ندرس إشارة المشتقة ؛
3. نستنتج اتجاه التغيّر .

مثال :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$.

- حساب $f'(x)$: الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$: $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

- دراسة إشارة $f'(x)$: إشارة $f'(x)$ هي إشارة البسط x^2-2x-3.

لدينا : $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ ومنه النتائج الآتية :

$[\ f'(x)=0\ ]$ يكافئ $[\ x=-1$ أو $x=3\ ]$

$[\ f'(x)>0\ ]$ يكافئ $[\ x\in\ ]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[\ ]$

$[\ f'(x)<0\ ]$ يكافئ $[\ x\in\ ]-1;1[\cup]1;3[\ ]$

خلاصة

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-1]$ ، $[3;+\infty[$

ومتناقصة تماما على كل من المجالين $[-1\ ;\ 1[$ ، $]1;\ 3]$.

طريقة 11 : دراسة تغيّرات دالة على مجال

لدراسة تغيّرات دالة نتبع المراحل الثلاثة التالية :

1. نقوم بحساب النهايات عند حدود مجالات التعريف ؛
2. نقوم بحساب الدالة المشتقة وندرس إشارتها ثم نستنتج اتجاه تغيّرها ؛
3. نشكل جدول التغيّرات .

ملاحظة:

دراسة اتجاه تغير دالة هي مرحلة من مراحل دراسة تغيّراتها .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM