بورجي داود
أستاذ مادة الرياضيات

BAC

الهدى في الرياضيات

دروس مفصلة، تمارين ومسائل محلولة عن:
الهندسة الفضائية

السنة الثالثة ثانوي
علوم تجريبية، تقني رياضي
رياضيات

Kimou

دار الهدى
عين مليلة - الجزائر

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الجداء السلمي

I: الجداء السلمي في المستوي (مراجعة)

تمرين: ABCD مستطيل حيث:

E منتصف [AD] و $AB = 1cm$ ، $AD = 2cm$

أحسب بثلاث طرق مختلفة: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE}$

تعريف: $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان من المستوي.

الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u} \cdot \vec{v}$ المعرف كما يلي:

- إذا كان: $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$

فإن: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

- إذا كان: $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$

فإن: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} ، \vec{v})$.

مثال: ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث: $AB = 2cm$

لدينا: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB} ، \overrightarrow{AC})$

ومنه: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 2 \times \cos\frac{\pi}{3}$

إذن: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$

خاصية: يرمز إلى العدد الحقيقي $\vec{u} \cdot \vec{u}$ بالرمز: $\vec{u}^2$ ويسمى المربع السلمي.

بين أن: $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

العبارة التحليلية للجداء السلمي:

إذاكان: ▪ المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس.

▪ $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

فإن: $\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$

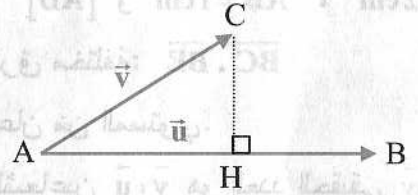
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الجداء السلمي والمسقط العمودي لشعاع:

إذا كان: ■ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ ، $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ حيث: $A\neq B$.

■ H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB)

فإن: $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$



تطبيق: $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان من المستوي ، برهن صحة مايلي:

1) $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right]$

2) $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right]$

تطبيقات الجداء السلمي:

■في كل ما يأتي المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;I,J)$

1) المسافة بين نقطتين:

إذا كانت: $A(x_1,y_1)$ ، $B(x_2,y_2)$ فإن:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

2) بعد نقطة عن مستقيم:

إذا كانت: $A(x_0,y_0)$ نقطة كيفية من المستوي وكان (Δ) مستقيم معرف بالمعادلة: $ax+by+c=0$ مع $(a,b)\neq(0,0)$

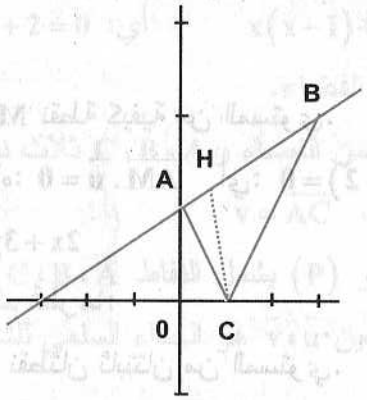
فإن: بعد النقطة A عن (Δ) يعطى بالعلاقة: $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

مثال: نعتبر في مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس النقاط:

$A(0,1)$ ، $B(3,2)$ ، $C(1,0)$

أكتب معادلة للمستقيم (AB) ، ثم أحسب مساحة المثلث ABC.

الحل: كتابة معادلة للمستقيم (AB).



لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوي.

$M\in(AB)$ معناه: $\overrightarrow{AM}$ ، $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا.

لدينا: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}$

ومنه: $x=3(y-1)$ أي: $x-3y+3=0$

حساب مساحة المثلث ABC:

نعلم أن: $S=\frac{AB\times CH}{2}$ حيث: $[CH]$ الارتفاع المتعلق بالضلع $[AB]$.

لدينا: $AB=\sqrt{(3)^2+(1)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

لدينا أيضا: CH هو بعد النقطة C عن المستقيم (AB)

ومنه: $CH=\frac{|1-3(0)+3|}{\sqrt{(1)^2+(-3)^2}}=\frac{4}{\sqrt{10}}$

إذن: $S=\frac{\sqrt{10}\times\frac{4}{\sqrt{10}}}{2}=2$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3) معادلة مستقيم علم شعاع ناظم له ونقطة منه:

إذا كان: $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ شعاع غير معدوم ناظم لمستقيم (Δ).

فإن: معادلة المستقيم (Δ) تكتب من الشكل: $ax+by+c=0$

مثال: أكتب معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(1,2)$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ شعاع ناظم له.

الحل: لتكن $M(x,y)$ نقطة كيفية من المستوي.

$M\in(\Delta)$ معناه: $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$ أي: $2(x-1)+3(y-2)=0$

إذن: $2x+3y-8=0$

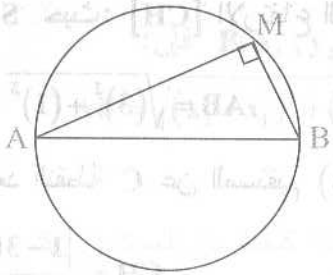
4) معادلة دائرة علم قطرها:

اذا كانت: A ، B نقطتان ثابتتان من المستوي.

فإن: الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$

مثال: أكتب معادلة للدائرة (C) التي قطرها $[AB]$ حيث:

$A(1,2)$ ، $B(0,1)$



الحل: لتكن $M(x,y)$ نقطة كيفية من المستوي.

$M\in(C)$ معناه: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$

لدينا: $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}$

إذن: معادلة الدائرة (C) هي:

$x(x-1)+(y-1)(y-2)=0$ أي: $x^2+y^2-x-3y+2=0$

II: الجداء السلمي في الفضاء.

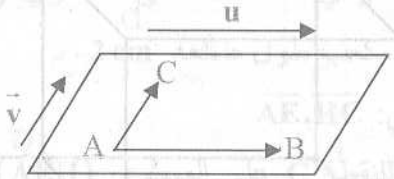
تعريف: $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء و A ، B ، C ثلاث نقاط حيث:

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ ، $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

يوجد على الأقل مستو (P) يشمل النقاط A ، B ، C بحيث:

الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ هو الجداء السلمي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ في المستوي (P).

أي: $\vec{u}.\vec{v}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$



خواص: كل خواص الجداء السلمي في المستوي تطبق على الأشعة من نفس المستوي في الفضاء.

نتائج: $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء ينتميان إلى نفس المستوي و α عدد حقيقي

1) $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

2) $(\alpha\vec{u}).\vec{v}=\vec{u}.(\alpha\vec{v})=\alpha\times(\vec{u}.\vec{v})$

3) $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right]$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

العبارة التحليلية للجداء السلمي:

إذا كان: $\vec{u}(a,b,c)$ ، $\vec{v}(a',b',c')$ شعاعان من فضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;I,J,k)$

فإن: $\vec{u}.\vec{v}=aa'+bb'+cc'$

نتيجة: إذا كانت $A(x_1,y_1,z_1)$ ، $B(x_2,y_2,z_2)$ نقطتان من فضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس فإن:

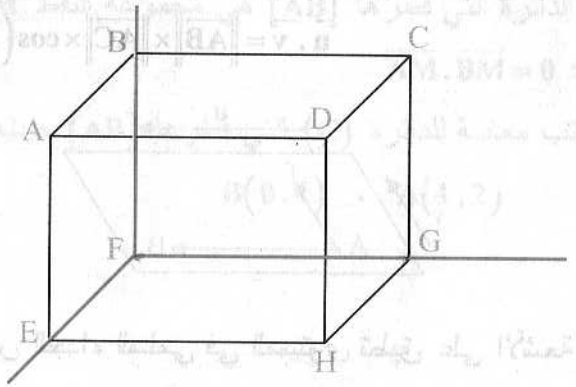
$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

مثال: ABCDEFGH مكعب طول حرفه 1.

بين أن المستقيمين (AG) ، (FC) متعامدان.

الحل: نزود الفضاء بمعلم متعامد ومتجانس $(F;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

فيكون: $A(1,0,1)$ ، $C(0,1,1)$ ، $G(0,1,0)$ ، $F(0,0,0)$



لدينا: $\overrightarrow{AG}(-1,1,-1)$ ، $\overrightarrow{FC}(0,1,1)$

ومنه: $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{FC}=(-1)(0)+(1)(1)+(-1)(1)=0$

وهذا يعني أن الشعاعين $\overrightarrow{AG}$ ، $\overrightarrow{FC}$ متعامدان.

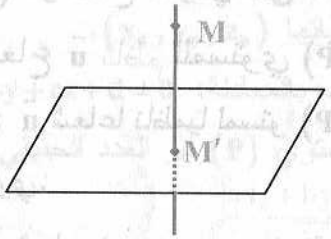
إذن المستقيمان (AG) ، (FC) متعامدان.

التعامد: الإسقاط العمودي على مستو:

تعريف: (P) مستو و M نقطة من الفضاء.

المستقيم العمودي على المستوي (P) ويشمل النقطة M يقطع المستوي (P) في نقطة وحيدة M'.

تسمى النقطة M' المسقط العمودي للنقطة M على المستوي (P).



خاصية: اذا كانت:

- A ، B نقطتان مختلفتان من مستو (P).
- C نقطة من الفضاء لا تنتمي الى المستوي (P).

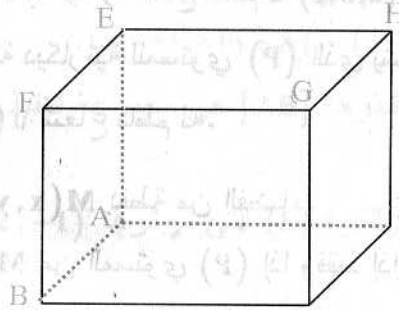
فإن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

حيث: H المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P).

مثال: ABCDEFGH مكعب طول ضلعه 2 cm.

احسب الجداء السلمي: $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{HC}$

الحل: المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (AEH) هي النقطة D.



ومنه: $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{HD}$

بما أن: $\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{AE}$ فإن: $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{HC}=-\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}$

أي: $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{HC}=-\|\overrightarrow{AE}\|^2=-4$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تطبيقات الجداء السلمي:

في كل ما يأتي نزود الفضاء بمعلم متعامد ومتجانس.

1) المعادلة الديكارتية لمستو:

تعريف: كل شعاع غير معدوم $\vec{u}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا من مستو (P) هو شعاع عمودي على المستوي (P).

- يسمى الشعاع $\vec{u}$ ناظم للمستوي (P).

نتيجة: إذا كان: $\vec{u}$ شعاعا ناظميا لمستو (P) فإنه: عمودي على أي شعاع من هذا المستوي.

تعيين مستو: $\vec{u}$ شعاع غير معدوم و A نقطة ثابتة من الفضاء.

مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$ هي مجموعة نقط المستوي الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}$ شعاع ناظم له.

خاصية (1): لكل مستو شعاع ناظم له $\vec{u}(a,b,c)$ معادلة ديكارتية من الشكل: $ax+by+cz+d=0$ حيث d عدد حقيقي.

خاصية (2): مجموعة النقط M التي إحداثياتها (x,y,z) تحقق المعادلة: $ax+by+cz+d=0$ حيث a، b، c أعداد حقيقية ليست كلها معدومة هي: مجموعة نقط مستو شعاع ناظم له $\vec{u}(a,b,c)$

مثال: أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(1,2,3)$ و $\vec{u}(2,-4,3)$ شعاع ناظم له.

الحل: لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.

تكون النقطة M من المستوي (P) إذا وفقط إذا كان: $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$

أي: $2(x-1)-4(y-2)+3(z-3)=0$

إذن: $2x-4y+3z-3=0$

حالات خاصة: $(O;I,J,k)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

1) معادلة ديكارتية للمستوي $(O;I,J)$ هي: $z=0$

2) معادلة ديكارتية للمستوي $(O;I,k)$ هي: $y=0$

3) معادلة ديكارتية للمستوي $(O;J,K)$ هي: $x=0$

2) بعد نقطة عن مستو:

إذا كان: ▪ A نقطة إحداثياتها (x_0,y_0,z_0).

▪ (P) مستو معرف بالمعادلة: $ax+by+cz+d=0$

فإن: بعد النقطة A عن المستوي (P) هو العدد الحقيقي الموجب:

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

مثال: نعتبر المستوي (P) المعرف بالمعادلة: $x+y-z+1=0$.

بعد النقطة $A(2,3,0)$ عن المستوي (P) هو:

$$\frac{|2+3-0+1|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

3) معادلة سطح كرة:

تعريف: سطح الكرة التي مركزها A وطول نصف قطرها r هي: مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $AM=r$.

مبرهنة: معادلة سطح الكرة التي مركزها $A(a,b,c)$ وطول نصف قطرها r هي: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$.

نتيجة: سطح الكرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$

مثال: أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها $A(1,2,-1)$ وطول نصف قطرها 3.

الحل: لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.

تكون النقطة M من سطح الكرة (S) إذا وفقط إذا كان: $AM=3$

أي: $AM^2=9$ معناه: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث:

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

لدراسة هذه المجموعة نحسب: $\Delta=a^2+b^2+c^2-4d$

ونميز الحالات التالية:

- $\Delta<0$: المجموعة خالية.
- $\Delta=0$: المجموعة تشمل نقطة واحدة إحداثياتها $\left(\frac{a}{-2},\frac{b}{-2},\frac{c}{-2}\right)$
- $\Delta>0$: المجموعة سطح كرة احداثيات مركزها $\left(\frac{a}{-2},\frac{b}{-2},\frac{c}{-2}\right)$

وطول نصف قطرها $\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$.

مثال: حدد المجموعة (S) للنقط M من الفضاء التي إحداثياتها (x,y,z) تحقق المعادلة: $x^2+y^2+z^2-2x-3=0$

الحل: لدينا: $a=-2$ ، $b=0$ ، $c=0$ ، $d=-3$

ومنه: $\Delta=(-2)^2+(0)^2+(0)^2-4(-3)=16>0$

بما أن: $\Delta>0$ فإن: المجموعة (S) سطح كرة مركزها $A(1,0,0)$

وطول نصف قطرها $\frac{\sqrt{\Delta}}{2}=\frac{\sqrt{16}}{2}=2$.

المرجح

المرجح في المستوي (مراجعة).

تمرين: A ، B ، C ثلاث نقاط من مستو.

1) أنشئ النقطة G مرجح الجملة: $\{(A,1),(B,3),(C,1)\}$

2) نزود المستوي بالمعلم $(O;I,J)$ ونفرض:

$A(2,0)$ ، $B(0,1)$ ، $C(3,2)$ حدد احداثيي النقطة G ثم علمها.

3) عين المجموعة (C) للنقط M من المستوي بحيث:

$\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

المرجح في الفضاء:

مبرهنة وتعريف: $\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\ldots\ldots,(A_n,\alpha_n)\}$

جملة تشمل n نقطة من الفضاء حيث:

$\alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots+\alpha_n\neq 0$.

- توجد نقطة وحيدة G من الفضاء تحقق:

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\ldots\ldots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$$

- تسمى النقطة G مرجح الجملة:

$$\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\ldots\ldots,(A_n,\alpha_n)\}$$

خاصية: عندما تتساوى المعاملات غير المعدومة α_n تسمى النقطة G مركز ثقل الجملة.

مبرهنة: من أجل كل نقطة M من الفضاء

$$\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+\ldots\ldots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}=(\alpha_1+\alpha_1+\ldots\ldots+\alpha_n)\overrightarrow{MG}$$

حيث: G مرجح الجملة:

$$\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\ldots\ldots,(A_n,\alpha_n)\}$$

مثال: عين المجموعة (E) للنقط M من الفضاء بحيث:

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=1$$

الحل: لتكن G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,-1),(C,1)\}$

ومنه: $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ أي: $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}$

لدينا: $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=1$ ومنه: $MG=1$

إذن: (E) هي مجموعة نقط سطح كرة مركزها G ونصف قطرها 1.

التمييز بالمرجح: A، B، C ثلاث نقاط من الفضاء ليست في استقامية.

1) المستقيم (AB) هو مجموعة مراجح للنقطتين A، B.

2) القطعة المستقيمة $[AB]$ هي مجموعة مراجح للنقطتين A، B مرفقة بمعاملين من نفس الإشارة.

3) المستوي (ABC) هو مجموعة مراجح للنقاط A، B، C.

برهان الخاصية (1):

- نفرض M نقطة من المستقيم (AB)

ونبرهن M مرجح للنقطتين A، B.

بما أن: M نقطة من المستقيم (AB)

فإن: $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AM}$ مرتبطان خطيا

معناه: يوجد عدد حقيقي α بحيث: $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}$

أي: $\overrightarrow{AM}=\alpha\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)$ إذن: $(1-\alpha)\overrightarrow{AM}+\alpha\overrightarrow{BM}=\vec{0}$

لدينا: $(1-\alpha)+\alpha=1\neq 0$

ومنه: M مرجح $\{(A,1-\alpha),(B,\alpha)\}$

- نفرض M مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$

ونبرهن M نقطة من المستقيم (AB).

بما أن: M مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$

فإن: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

معناه: $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.

إذن: النقطة M تنتمي إلى المستقيم (AB).

مجموعات النقط M من الفضاء حيث:

1: $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=\alpha$ حيث: $\vec{u}$ شعاع غير معدوم

مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=\alpha$ هي مجموعة نقط مستو شعاع ناظم له $\vec{u}$.

2: $\alpha AM^2+\beta BM^2=\lambda$ حيث: α، β، λ أعداد حقيقية.

لتعيين مجموعة النقط M نميز الحالتين التاليتين:

أ) إذا كان: $\alpha+\beta=0$.

المعادلة: $\alpha AM^2+\beta BM^2=\lambda$ تكافئ:

$$\alpha\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}\right)^2+\beta\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}\right)^2=\lambda$$

بعد النشر والتبسيط نجد:

$$\alpha AO^2+\beta BO^2+2\overrightarrow{OM}.\left(\alpha\overrightarrow{AO}+\beta\overrightarrow{BO}\right)=\lambda$$

نضع: $\alpha\overrightarrow{AO}+\beta\overrightarrow{BO}=\vec{u}$ ، $0.5\left(\lambda-\alpha AO^2-\beta BO^2\right)=k$

فتصبح المعادلة من الشكل: $\overrightarrow{OM}.\vec{u}=k$

إذن مجموعة النقط M من الفضاء هي:

إما مستو وإما الفضاء وإما المجموعة الخالية.

ب) إذا كان: $\alpha+\beta\neq 0$.

المعادلة: $\alpha AM^2+\beta BM^2=\lambda$ تكافئ:

$$\alpha\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM}\right)^2+\beta\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GM}\right)^2=\lambda$$

حيث: G مرجح الجملة: $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$.

بعد النشر والتبسيط نجد:

$$\alpha AG^2+\beta BG^2+(\alpha+\beta)GM^2=\lambda$$

نضع: $\dfrac{\lambda-\alpha AG^2-\beta BG^2}{\alpha+\beta}=k$

فتصبح المعادلة من الشكل: $GM^2=k$

إذن: مجموعة النقط M من الفضاء هي:

إما سطح كرة وإما المجموعة $\{G\}$ وإما المجموعة الخالية.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

مثال: A ، B نقطتان من الفضاء حيث: $AB=1$.

عين المجموعة (E) للنقط M من الفضاء بحيث:

$$2AM^2-BM^2=3$$

الحل: بما أن: $2+(-1)=1\neq 0$

فإنه: توجد نقطة G مرجح للجملة $\{(A,2),(B,-1)\}$

أي: $2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

لدينا: $2AM^2-BM^2=3$

ومنه: $2\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM}\right)^2-\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GM}\right)^2=3$

بعد النشر والتبسيط نجد: $GM^2=3-2AG^2+BG^2$

■ لنحسب AG و BG :

لدينا: $2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

ومنه: ($\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{BA}$)

إذن: $AG=AB=1$ ، $BG=2AB=2$

المعادلة: $GM^2=3-2AG^2+BG^2$

تكافئ: $GM^2=5$ أي: $GM=\sqrt{5}$.

إذن: مجموعة النقط (E) سطح كرة مركزها G ونصف قطرها $\sqrt{5}$.

التمثيل الوسيطي لمستقيم:

الفضاء منسوب إلى معلم $(O;I,J,k)$ و (Δ) مستقيم من الفضاء يشمل النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ و $\vec{u}(a,b,c)$ شعاع توجيه له.

تنتمي نقطة M من الفضاء إحداثياتها (x,y,z) إلى المستقيم (Δ) إذا وفقط إذا كان:

الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ ، $\vec{u}$ مرتبطين خطيا

معناه: يوجد عدد حقيقي t حيث: $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$

وهذا يعني أن: $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$ مع: t عدد حقيقي.

تسمى الجملة السابقة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ).

مثال: نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم $(O;I,J,k)$ النقاط:

$$A(1,2,3)\ ،\ B(2,0,1)\ ،\ C(1,1,1)$$

أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).

الحل: لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(AB)$ تكافئ: $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ حيث: t عدد حقيقي.

وهذا يعني أن: $\begin{cases}x-1=t\\y-2=-2t\\z-3=-2t\end{cases}$ أي: $\begin{cases}x=1+t\\y=2-2t\\z=3-2t\end{cases}$

التمثيل الوسيطي لمستو: A، B، C ليست في استقامة

المستوي (ABC) هو مجموعة النقط M من الفضاء حيث:

$\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$ مع: t ، λ عددان حقيقيان.

مثال: التمثيل الوسيطي للمستوي (p) الذي يشمل النقاط:

$A(1,0,1)$ ، $B(2,1,1)$ ، $C(3,1,0)$ هو:

$\begin{cases}x-1=t+2\lambda\\y=t+\lambda\\z-1=-\lambda\end{cases}$ أي: $\begin{cases}x=1+t+2\lambda\\y=t+\lambda\\z=1-\lambda\end{cases}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

(Δ)، (Δ') مستقيمان من الفضاء موجهان بالشعاعين $\vec{u}$، $\vec{v}$ على الترتيب.

(P)، (P') مستويان و $\vec{n}$، $\vec{m}$ ناظميان لهما على الترتيب.

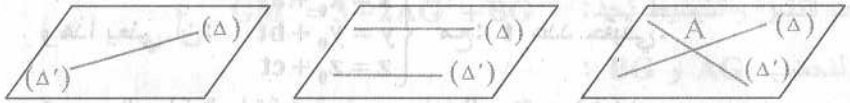
1: **لمستقيمين:** لدراسة الوضع النسبي للمستقيمين (Δ)، (Δ') نميز مايلي:

أ) $\vec{u}$، $\vec{v}$ مرتبطان خطيا:

(Δ)، (Δ')متوازيان ومختلفان أو منطبقان.

ب) $\vec{u}$، $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا:

(Δ)، (Δ') متقاطعان في نقطة أو ليسا من نفس المستوي.



التقاطع نقطة — التقاطع خال — التقاطع مستقيم

مثال: أدرس الوضع النسبي للمستقيمين (Δ_1)، (Δ_2) حيث:

$$(\Delta_1):\begin{cases}x=1+2t\\y=-t\\z=3+2t\end{cases} \quad ، \quad (\Delta_2):\begin{cases}x=2-t'\\y=3+t'\\z=1+2t'\end{cases}$$

الحل: شعاعا توجيه (Δ_1)، (Δ_2) هما على الترتيب $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$، $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$.

بما أن: $(2)(1)\neq(-1)(-1)$

فإن: $\vec{u}$، $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا.

وبالتالي: (Δ_1)، (Δ_2) متقاطعان أو لا ينتميان لنفس المستوي.

- نحل الجملة: $\begin{cases}1+2t=2-t'\\-t=3+t'\end{cases}$ فنجد: $\begin{cases}t=4\\t'=-7\end{cases}$

من أجل $t=4$ نجد:

$A(9,-4,11)$ نقطة من (Δ_1).

ومن أجل $t'=-7$ نجد:

$B(9,-4,-13)$ نقطة من (Δ_2).

بما أن: $A\neq B$ فإن: (Δ_1)، (Δ_2) ليسا من نفس المستوي.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

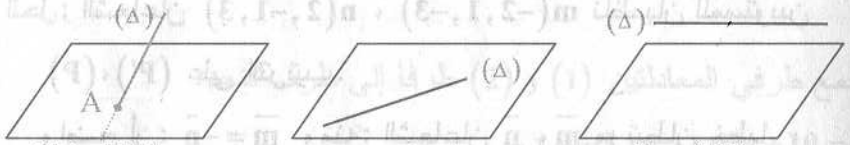
2: **لمستقيم ومستو:** لدراسة الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (P) نميز الحالتين التاليتين:

أ) $\vec{u}$، $\vec{n}$ متعامدان:

(Δ) يوازي (P) أو (Δ) محتوى في (P).

ب) $\vec{u}$، $\vec{n}$ غير متعامدين:

(Δ) يقطع المستوي (P) في نقطة.



التقاطع نقطة — التقاطع مستقيم — التقاطع خال

مثال: أدرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (P) حيث:

$$(\Delta):\begin{cases}x=1-2t\\y=t\\z=1-3t\end{cases};\ t\in IR \quad ; \quad (P):\ 2x+y-z-1=0$$

الحل: لدينا: $\vec{u}(-2,1,-3)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و $\vec{n}(2,1,-1)$ شعاع ناظم للمستوي (P).

لدينا: $\vec{u}.\vec{v}=(2)(-3)+(1)(1)+(-1)(-3)=0$

ومنه: $\vec{u}$، $\vec{n}$ متعامدان وعليه: (Δ) يوازي (P) أو (Δ) محتوى في (P)

بما أن: النقطة $A(1,0,1)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) والمستوي (P)

فإن: المستقيم (Δ) محتوى في المستوى (P).

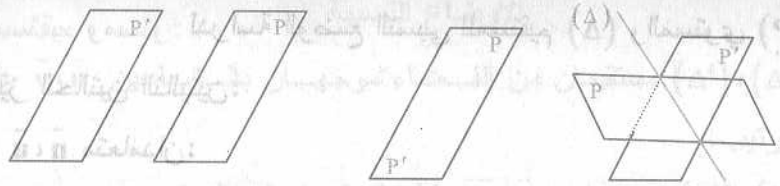
3: **لمستويين:** لدراسة الوضع النسبي للمستويين (P)، (P') نميز مايلي:

أ) $\vec{n}$، $\vec{m}$ مرتبطان خطيا:

المستويان (P)، (P') متوازيان ومختلفان أو منطبقان.

ب) $\vec{n}$، $\vec{m}$ غير مرتبطين خطيا:

المستويان (P)، (P') متقاطعان وفق مستقيم.



التقاطع مستقيم　　التقاطع مستو　　التقاطع خال

مثال: أدرس الوضع النسبي للمستويين (P)، (P') المعرفين بالمعادلتين:

$(P): \ 2x-y+3z+1=0$ ، $(P'): \ -2x+y-3z+2=0$

الحل: الشعاعان $\vec{n}(2,-1,3)$ ، $\vec{m}(-2,1,-3)$ ناظميان للمستويين (P)، (P') على الترتيب.

واضح أن: $\vec{m}=-\vec{n}$ ومنه: الشعاعان $\vec{n}$ ، $\vec{m}$ مرتبطان خطيا.

وبالتالي: (P)، (P') منطبقان أو متوازيان ومختلفان.

بما أن: النقطة $A(1,0,-1)$ تنتمي إلى (P) ولا تنتمي إلى (P')

فإن: المستويين (P)، (P') متوازيان ومختلفان.

خاصية: يعرف المستقيم في الفضاء بجملة معادلتين ديكارتيتين لمستويين متقاطعين.

4: لثلاث مستويات: لدراسة الوضع النسبي لثلاث مستويات ندرس الوضع النسبي لمستويين من هذه المستويات ونميز الحالات التالية.

أ) تقاطع المستويين خال: تقاطع المستويات الثلاثة خال.

ب) تقاطع المستويين مستقيم: تؤول الدراسة إلى دراسة الوضع النسبي لمستقيم ومستو

ج) تقاطع المستويين مستو: تؤول الدراسة إلى دراسة الوضع النسبي لمستويين.

مثال: حل في IR^3 الجملة:
$$\begin{cases} 4x+y+z+10=0 \\ 2x+y+z=0 \\ 2x+y+2z-1=0 \end{cases}$$

استنتج الوضع النسبي للمستويات (P_1)، (P_2)، (P_3) المعرفة بالمعادلات:

$4x+y+z+10=0$ ، $2x+y+z=0$ ، $2x+y+2z-1=0$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الحل:

الجملة: $\begin{cases} 4x+y+z+10=0 \\ 2x+y+z=0 \\ 2x+y+2z-1=0 \end{cases}$ تكافئ:

$$\begin{cases} 4x+y+z+10=0 & (1) \\ -2x-y-z=0 & (2) \\ 2x+y+2z-1=0 & (3) \end{cases}$$

نجمع طرفي المعادلتين (1) و (2) طرفا إلى طرف فنجد:

$2x+10=0$ ومنه: $x=-5$.

نجمع أيضا طرفي المعادلتين (2) و (3) طرفا إلى طرف فنجد:

$z-1=0$ ومنه: $z=1$.

نعوض عن قيمة كل من x ، z في المعادلة (3) فنجد: $y=9$.

إذن: الجملة تقبل حلا وحدا هو: $(1, 9, -5)$.

بما أن: الجملة تقبل حلا وحيدا فإن:

المستويات (P_1)، (P_2)، (P_3) تتقاطع في نقطة A إحداثياتها $(1, 9, -5)$.

تمارين ومسائل محلولة

الجداء السلمي:

1: نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$ الشعاعين $\vec{u}(0,3,4)$ ، $\vec{v}(2,2,1)$

أحسب جيب تمام الزاوية $(\vec{u},\vec{v})$.

2: نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$ الأشعة: $\vec{u}(1,1,0)$ ، $\vec{v}(0,1,1)$ ، $\vec{w}(1,a,b)$

1) حدد قيسا للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$.

2) عين قيمة كل من العددين a ، b بحيث يكون الشعاع $\vec{w}$ عموديا على كل من الشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ثم احسب طويلة الشعاع $\vec{w}$.

3: نعتبر في فضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس النقاط:

$A(3,0,3)$ ، $B(1,4,-3)$ ، $C(1,0,3)$ ، $D(1,0,-3)$

1) أحسب $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{DC}$ ثم استنتج نوع المثلث BCD واحسب مساحته.

2) أثبت أن المستقيم (AC) عمودي على المستوي (BCD) ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

4: $(O;I,J,k)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

عين الأشعة $\vec{w}(a,b,c)$ العمودية على كل من الشعاعين $\vec{u}(1,2,3)$ ، $\vec{v}(2,3,1)$.

5: $ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول ضلعه a.

أحسب: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}$ ثم استنتج قيمة $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ وأعط تفسيرا للنتيجة.

6: $ABCDE$ هرم قاعدته مربع ورأسه E ، أضلاعه متقايسة حيث طول كل منها $4\,cm$.

1) أحسب $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}$.

2) بين أن المستقيمين (EA) ، (EC) متعامدان.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تطبيقات الجداء السلمي:

المعادلة الديكارتية لسطح كرة:

7: نعتبر في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس النقطتين:

$A(1,2,0)$ ، $B(3,0,1)$.

أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي قطرها $[AB]$.

8: $(O;I,J,k)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي تشمل المبدأ O والنقاط:

$A(1,0,0)$ ، $B(3,0,2)$ ، $C(1,2,2)$.

9: نعتبر في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس النقطة $A(1,-1,1)$ والمستوي (P) المعرف بالمعادلة: $x+y+z-4=0$.

أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها A وتمس المستوي (P).

10: $(O;I,J,k)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء و (S) سطح كرة معادلتها: $x^2+y^2+z^2-2x-3=0$ و (Δ) مستقيم معادلاته الوسيطية هي:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2t \\ z=2-2t \end{cases}$$ مع: t عدد حقيقي.

عين إحداثيات نقاط تقاطع المستقيم (Δ) وسطح الكرة (S).

11: الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس.

(S) سطح كرة معرفة بالمعادلة: $x^2+y^2+z^2-3x=0$ و (P) المستوي المعرف بالمعادلة: $x+y+z-1=0$

بين أن المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة (C) يطلب تعيين مركزها A وطول نصف قطرها r.

12: في فضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس يعطى المستوى (P) المعرف بالمعادلة: $x-2y+2z-1=0$ والنقطة A التي إحداثياتها $(3,-1,2)$.

1) أحسب نصف قطر سطح الكرة (S) التي مركزها A وتمس (P).

2) حدد إحداثيات نقطة التماس B لسطح الكرة (S) والمستوى (P).

13: الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$.

حدد في كل حالة من الحالات التالية المجموعة (S) للنقط M من الفضاء التي إحداثياتها (x,y,z) تحقق:

1) $x^2+y^2+z^2-8x=0$

2) $x^2+y^2+z^2-4x+2z+5=0$

3) $x^2+y^2+z^2-2y+2=0$

14: A ، B نقطتان من الفضاء حيث: $AB=2$ و O منتصف القطعة $[AB]$.

عين المجموعة S للنقط M من الفضاء حيث: $\overline{BM}\cdot\overline{AM}=4$.

15: نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$ النقطة $A(3,2,5)$ والمستوى (P) المعرف بالمعادلة: $4x-3z+3=0$.

بين أنه توجد كرتان تمسان المستوي (P) في النقطة A طول نصف قطر كل منهما 5 ، حدد مركزيهما.

المعادلة الديكارتية لمستو:

في كل ما يأتي نزود الفضاء بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$.

16: اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(1,0,1)$ وشعاع ناظم له $\vec{u}(2,1,3)$.

17: تعطى النقطتان $A(-3,2,1)$ ، $B(9,4,3)$.

أكتب معادلة المستوي (P) العمودي على القطعة $[AB]$ في منتصفها.

18: تعطى النقاط $A(1,0,2)$ ، $B(1,1,1)$ ، $C(-1,2,0)$.

عين بطريقتين مختلفتين معادلة المستوي (P) الذي يشمل A ، B ، C.

19: أكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل كل من النقطة $A(2,-3,1)$ والمستقيم (Δ) المعرف بالمعادلتين: $\begin{cases}x+2y+3=0\\3x-2z-5=0\end{cases}$

20: أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(-1,2,3)$ ويوازي المستوي المعرف بالمعادلة: $-x+2y+z-3=0$.

21: نعتبر النقطة $A(-6,2,-1)$ والمستوي (P) المعرف بالمعادلة:

$$5x-y+z+6=0$$

بين أن المسقط العمودي للنقطة A على (P) هو النقطة $B(-1,1,0)$.

22: أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(1,0,-2)$ والعمودي على كل من المستويين المعرفين بالمعادلتين التاليتين:

$$2x+y-z-2=0 \quad ، \quad -x+y+z+3=0$$

23: تعطى النقاط: $A(2,-3,4)$ ، $B(1,0,2)$ ، $C(2,-1,2)$ ، $D(1,-1,3)$.

بين أن النقاط A ، B ، C ، D تنتمي إلى مستو واحد.

24: (Δ) ، (Δ') مستقيمان من الفضاء حيث:

$$(\Delta):\begin{cases}3x-2y-17=0\\4x-2z-10=0\end{cases} \quad ، \quad (\Delta'):\begin{cases}x+2z-4=0\\y-z-2=0\end{cases}$$

أكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المستقيم (Δ') ويوازي المستقيم (Δ).

25: حدد المجموعة (P) للنقط $M(x,y,z)$ التي إحداثياتها تحقق المعادلة: $|x-y+2z|=|2x-y+z+2|$.

26: m وسيط حقيقي و (P_m) مجموعة النقط M من الفضاء التي إحداثياتها (x,y,z) تحقق المعادلة:

$x+(2m+1)y+(3m+2)z-1=0$.

1: بين أن المجموعة (P_m) مستو من الفضاء .

2: أثبت أن (P_m) تشمل مستقيما ثابتا يطلب تعيينه.

3: عين في كل حالة من الحالتين التاليتين المستوي الذي:

أ) يشمل النقطة $A(3,1,1)$.

ب) يعامد المستوي (P') المعرف بالمعادلة: $2x-y+z+5=0$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

بعد نقطة عن مستو:

في كل ما يأتي $(O;I,J,k)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

27: نعتبر في الفضاء المستوي (P) المعرف بالمعادلة:

$2x-3y+z+9=0$.

أحسب بعد النقطة $A(-1,3,2)$ عن المستوي (P) ثم فسر النتيجة.

28: 1) عين إحداثيات المركز A وطول نصف القطر R لسطح الكرة (S) المعرفة بالمعادلة: $x^2+y^2+z^2-2x+2z-7=0$.

2) أحسب بعد النقطة A عن المستوي (P) الذي معادلته:

$x+y-2z+3=0$

ثم استنتج الوضع النسبي لسطح الكرة (S) والمستوي (P).

29: ليكن المستويان (P_1)، (P_2) المعرفين بالمعادلتين التاليتين على الترتيب:

$x-y+3z+1=0$ ، $-x+2y+z+5=0$

1) بين أن المستويين (P_1)، (P_2) متعامدان.

2) أحسب بعد النقطة $A(1,2,-1)$ عن كل من المستويين (P_1)، (P_2) ثم استنتج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) تقاطع (P_1)، (P_2).

المرجح في الفضاء

30: $ABCD$ رباعي وجوه حيث: G مركز ثقل المثلث ABC و E مرجح الجملة: $\{(A,1),(B,1),(C,1),(D,3)\}$

بين أن النقطة E هي منتصف $[DG]$.

31: $ABCD$ ، $EFGH$ رباعيا وجوه لهما نفس مركز الثقل K.

برهن أن: $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DH}=\vec{0}$.

32: A، B، C ثلاث نقاط من الفضاء ليست على استقامة واحدة.

E، F، G مراجح الجمل التالية على الترتيب:

$\{(A,-1),(B,2)\}$ ، $\{(C,1),(B,2)\}$

$\{(A,-1),(B,2),(C,1)\}$.

برهن أن المستقيمين (AE)، (CF) متقاطعان في النقطة G.

33: A، B نقطتان من الفضاء و G مرجح الجملة: $\{(A,2),(B,-3)\}$.

عين المجموعة (S) للنقط M من الفضاء حيث: $\left\|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right\|=4$.

34: نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم $(O;I,J,k)$ النقاط:

$A(4;1,-2)$ ، $B(-1,3,1)$ ، $C(1,0,3)$.

1) عين إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

2) حدد إحداثيات النقطة D منتصف $[AB]$ ثم تحقق أن: $3\overrightarrow{CG}-2\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

ماذا تمثل النقطة C بالنسبة إلى النقطتين D، G ؟

35: $(O;I,J,k)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

نعتبر النقاط $A(a,0,0)$ ، $B(0,b,0)$ ، $C(0,0,c)$

حيث: a، b، c أعداد طبيعية غير معدومة و $ab+bc+ac=0$

1) عين بدلالة a، b، c الإحداثيات (x,y,z) للنقطة G مرجح الجملة: $\{(A,b+c),(B,a+c),(C,a+b)\}$

2) أحسب المجموع: $x+y+z$ ثم استنتج مجموعة النقط G.

36: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$ النقاط: $A(3,0,0)$ ، $B(0,4,0)$، $C(7,3,0)$.

1) عين إحداثيات النقطة G مرجح الجملة:

$\{(A,-1),(B,1),(C,1)\}$

2) حدد المجموعة (P) للنقط M من الفضاء التي تحقق:

$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}\right\|=OM$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

37: A ، B نقطتان متمايزتان من الفضاء.

حدد المجموعة (P) للنقط M من الفضاء حيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}$ ، $\overrightarrow{AB}$ متعامدين.

38: ABC مثلث حيث: $AB=16\,cm$ ، $AC=20\,cm$ ، $BC=28\,cm$

نضع: $\overrightarrow{V_1}=7\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}$ ، $\overrightarrow{V_2}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$

حيث: M نقطة كيفية من الفضاء.

1) أعط عبارة بسيطة للشعاع $\overrightarrow{V_1}$.

2) بين أن الشعاع $\overrightarrow{V_2}$ مستقل عن النقطة M ثم احسب $\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|$.

3) عين مجموعة النقط M من الفضاء حيث يكون: $\left\|\overrightarrow{V_1}\right\|=\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|$.

39: ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث: $AB=AC=BC=2Cm$.

1: (S_1) هي مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق:

$$2AM^2+BM^2+CM^2=8$$

أ) تحقق أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (S_1).

ب) حدد المجموعة (S_1) وعناصرها المميزة.

2: عين المجموعة (S_2) للنقط M من الفضاء التي تحقق:

$$-2AM^2+BM^2+CM^2=8$$

المعادلات الوسيطية لمستقيم:

في كل ما يأتي الفضاء مزود بالمعلم $(O;I,J,k)$.

40: بين أن الشعاعين $\vec{u}(1,0,2)$ ، $\vec{v}(2,0,4)$ مرتبطان خطيا.

41: بين أن الأشعة $\vec{u}(-2,1,3)$ ، $\vec{v}(2,-1,1)$ ، $\vec{w}(6,-3,-1)$ مرتبطة خطيا.

42: 1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(1,0,2)$ وشعاع توجيه له $\vec{u}(2,1,-1)$.

2) بين أن النقطة $B(5,2,1)$ لا تنتمي إلى المستقيم (Δ).

43: عين معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(1,-1,2)$ وشعاع توجيه له $\vec{u}(3,2,1)$.

44: عين شعاع توجيه للمستقيم (Δ) المعرف بجملة المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases}x-y+z-5=0\\x-3y+6=0\end{cases}$$

45: تعطى النقطتان: $A(1,3,2)$ ، $B(3,2,5)$.

أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) ثم القطعة $[AB]$.

46: عين إحداثيات النقطة A نقطة تقاطع المستوي (OIK) والمستقيم (Δ) المعرف بجملة المعادلات الوسيطية التالية:

$$\begin{cases}x=2-t\\y=1+t\\z=1-3t\end{cases}$$ ، مع t عدد حقيقي.

47: t وسيط حقيقي حيث: $-1\le t\le 3$.

عين مجموعة النقط M من الفضاء التي إحداثياتها (x,y,z) تحقق:

$$\begin{cases}x=1+t^2\\y=2-3t^2\\z=2+2t^2\end{cases}$$

بعد نقطة عن مستقيم:

في كل ما يأتي الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;I,J,k)$.

48: يعطى المستقيم (Δ) حيث:

$$\begin{cases}x=1+t\\y=-t\\z=-2+t\end{cases}$$ ، مع: t عدد حقيقي.

1) عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة $A(1,0,1)$ على المستقيم (Δ).

2) أحسب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ).

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

49: نعتبر في الفضاء النقطة $A(0,1,1)$ والمستقيم (Δ) حيث:

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=-1 \\ z=t \end{cases}$$ مع: t عدد حقيقي.

لتكن M نقطة من المستقيم (Δ) و f الدالة المعرفة على IR كما يلي:

$f(t)=AM^2$.

1) شكل جدول تغيرات f ثم عين أصغر قيمة تبلغها الدالة f.

2) استنتج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ).

50: لتكن النقطتان $A(1,2,1)$ ، $B(2,-2,-1)$ والمستقيم (Δ) حيث:

$$\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=1-t \end{cases}$$ مع: t عدد حقيقي.

1) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A ويعامد (Δ) ثم احسب بعد النقطة B عن المستوي (P).

2) تحقق أن B تنتمي إلى المستقيم (Δ) ثم استنتج بعد A عن (Δ).

الأوضاع النسبية: في كل ما يأتي الفضاء مزود بالمعلم $(O;I,J,k)$.

51: نعتبر المستقيمين (Δ)، (Δ'):

$$(\Delta):\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases} \quad ، \quad (\Delta'):\begin{cases} x=1+t' \\ y=3-t' \\ z=2+t' \end{cases}$$

حيث: t ، t' عددان حقيقيان.

بين أن المستقيمين (Δ)، (Δ') متقاطعان في نقطة يطلب تحديدها.

52: بين أن المستقيمين (Δ)، (Δ') لا ينتميان إلى نفس المستوي حيث:

$$(\Delta):\begin{cases} x=2 \\ y=3+t \\ z=t \end{cases} \quad ، \quad (\Delta'):\begin{cases} x=3+t' \\ y=1+2t' \\ z=3-t' \end{cases}$$

حيث: t ، t' عددان حقيقيان.

51: أثبت أن المستقيمين (Δ)، (Δ') متوازيان ومختلفان حيث:

$$(\Delta):\begin{cases} x-y+z-5=0 \\ x-3y+6=0 \end{cases} \quad ، \quad (\Delta'):\begin{cases} 2y+z-5=0 \\ 4x-2y+5z-4=0 \end{cases}$$

54: عين نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (OIK) حيث:

$$(\Delta):\begin{cases} x=4-t \\ y=2+t \\ z=1+2t \end{cases} \quad ; \quad t\in IR$$

55: بين أن المستقيم (Δ) يقطع المستوي (P) في نقطة يطلب تحديدها.

$$(P):\ -2x+y-z+4=0 \quad ; \quad (\Delta):\begin{cases} x=t \\ y=4-3t \\ z=2+t \end{cases} \quad ; \ t\in IR$$

56: (Δ) مستقيم يشمل النقطة $A(0,2,1)$ وشعاع توجيه له $\vec{u}(1,0,2)$.

أدرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (P) المعرف بالمعادلة:

$2x+y-z+3=0$.

57: نعتبر المستويين (P)، (P') المعرفين بالمعادلتين التاليتين على الترتيب:

$2x+y-z+1=0$ ، $x-3y+2z-4=0$

بين أن (P)، (P') متقاطعان ثم عين شعاع توجيه مستقيم تقاطعهما.

58: m وسيط حقيقي و (P_1)، (P_2) مستويان معرفان بالمعادلتين التاليتين على الترتيب:

$2x-y+z+3=0$ ، $(m+1)x+(m-2)y+(3m-2)z+1=0$

عين في كل حالة من الحالتين التاليتين قيمة الوسيط m حيث يكون:

أ) المستويان (P_1)، (P_2) متوازيين.

ب) المستويان (P_1)، (P_2) متعامدين.

59: حل الجملة التالية ثم أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة:

$$\begin{cases} 2x-3y-z=5 \\ -4x+6y+2z=1 \end{cases}$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

60: نعتبر المستويات (P_1)، (P_2)، (P_3) حيث:

$(P_1): x+3y+z-1=0$ ، $(P_2): -3x+5y-z-2=0$

$(P_3): -x+25y+3z-9=0$

1) بين أن المستويين (P_1)، (P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب إعطاء شعاع توجيه له.

2) أدرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (P_3).

3) استنتج مجموعة حلول الجملة التالية وأعط تفسيرا هندسيا للنتيجة:

$$\begin{cases} x+3y+z=1 \\ -3x+5y-z=2 \\ -x+25y+3z=9 \end{cases}$$

61: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;I,J,k)$ النقطة $A(1,-1,2)$ والشعاع $\vec{u}(-2,1,3)$

1: أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل A وشعاع توجيه له $\vec{u}$.

2: ليكن (D) المستقيم المعرف بجملة المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} 4x+y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$$

أ) عين مركبات شعاع توجيه المستقيم (D).

ب) بين أن المستقيمين (Δ)، (D) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

3: أ) أكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المبدأ O ويعامد (Δ).

ب) بين أن المستقيم (D) محتوى في المستوي (P).

62: بكالوريا المغرب دورة 2008 شعبة العلوم التجريبية.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$ النقطتين: $A(0,-1,1)$، $B(1,-1,0)$ وسطح الكرة (S) التي معادلتها:

$x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$.

1: بين أن مركز سطح الكرة (S) هو $w(1,0,2)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$

تحقق أن النقطة A تنتمي إلى سطح الكرة (S).

2: بين أن معادلة المستوي (OAB) هي: $x+y+z=0$.

3: أثبت أن المستوي (OAB) مماس لسطح الكرة (S) في النقطة A.

63: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$ المجموعة (S) للنقط M التي إحداثياتها (x,y,z) تحقق المعادلة:

$x^2+y^2+z^2+2x-2y-2=0$

1: أثبت أن المجموعة (S) سطح كرة يطلب تعيين مركزها w وطول نصف قطرها R.

2: m وسيط حقيقي و (P_m) المستوي المعرف بالمعادلة: $3x-4z+m=0$

أ) بين أن المستوي (P_0) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة (C) يطلب تحديد مركزها A وطول نصف قطرها r.

ب) أدرس حسب قيم m الوضع النسبي للمستوي (P_m) والكرة (S).

تمارين ومسائل متنوعة:

64: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$ النقاط: $A(1,0,2)$ ، $B(1,1,4)$ ، $C(-1,1,1)$.

1: أ) أثبت أن النقاط A، B، C ليست على استقامة واحدة.

ب) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(3,4,-2)$ ناظم للمستوي (ABC).

ج) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2: ليكن المستويان (P_1) ، (P_2) المعرفين بالمعادلتين التاليتين على الترتيب: $2x+y+2z+1=0$ ، $x-2y+6z=0$

أ) بين أن المستويين متقاطعان وفق مستقيم (Δ).

ب) أكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم (Δ).

ج) أدرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (ABC).

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3: t عدد حقيقي موجب.

G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,2),(C,t)\}$

أ) تحقق أن G موجودة.

ب) لتكن النقطة I المعرفة بالعلاقة: $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

حدد احداثيات النقطة I.

ج) أكتب الشعاع $\overrightarrow{IG}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{IC}$.

د) بين أن مجموعة النقط G عندما يتغير t في المجال $]0,+\infty[$ هي مجموعة نقاط القطعة $[IC]$ ما عدا النقطة C.

ه) حدد قيمة t حتى تكون G منتصف $[IC]$.

65: A، B، C ثلاث نقاط من الفضاء ليست على استقامة واحدة و G_K مرجح الجملة: $\{(A,K^2+1),(B,K),(C,-K)\}$

حيث: K عدد حقيقي من المجال $[-1,1]$.

1: أ) مثل النقاط A، B، C، I حيث: I منتصف القطعة $[BC]$.

ب) بين أن: $\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{CI}$ ، $\overrightarrow{AG_{-1}}=\overrightarrow{BI}$

ج) استنتج أن: A منتصف $[G_1G_{-1}]$ وأن: $\overrightarrow{G_1G_{-1}}=\overrightarrow{BC}$

ثم أنشئ النقطتين G_1، G_{-1}.

2: أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي K من المجال $[-1,1]$:

$$\overrightarrow{AG_K}=\frac{-K}{K^2+1}\overrightarrow{BC}$$

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f المعرفة على المجال $[-1,1]$ كما يلي: $f(x)=\frac{-x}{x^2+1}$

ج) استنتج مجموعة النقط G_K عندما يتغير K في المجال $[-1,1]$.

3: حدد مجموعة النقط M من الفضاء حيث:

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

66: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2008 شعبة العلوم التجريبية.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$ النقاط: $A(2,0,1)$ ، $B(3,2,0)$ ، $C(-1,-2,2)$

والمستوي (P) المعرف بالمعادلة: $x+2y-z+7=0$.

1: تحقق أن النقاط A، B، C ليست على استقامة واحدة ثم بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $y+2z-2=0$.

2: أ) تحقق أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان ثم عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (ABC).

ب) أحسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ).

3: لتكن G مرجحا للجملة المثقلة: $\{(A,1),(B,\alpha),(C,\beta)\}$

حيث α، β عددان حقيقيان يحققان: $\alpha+\beta\neq-1$

عين قيمة العدد α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ).

67: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2008 شعبة الرياضيات.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$ النقاط : $A(0,2,1)$ ، $B(-1,1,-3)$ ، $C(1,0,-1)$.

1: أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها C وتشمل النقطة A.

2: ليكن المستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي:

$$\begin{cases}x=-1-t\\y=1+2t\\z=-3+2t\end{cases}$$ مع: t عدد حقيقي.

أ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل C ويعامد (Δ).

ب) أحسب المسافة بين النقطة C والمستقيم (Δ).

ج) استنتج الوضع النسبي للمستقيم (Δ) وسطح الكرة (S).

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

68: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2008 شعبة التقني رياضيات.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$ النقاط: $A(1,2,2)$ ، $B(3,2,1)$ ، $C(1,3,3)$.

1) أثبت أن النقاط A، B، C تعين مستويا يطلب إعطاء معادلة ديكارتية له.

2) نعتبر المستويين (P_1)، (P_2) المعرفين بالمعادلتين الديكارتيتين التاليتين على الترتيب: $x-2y+2z-1=0$ ، $x-3y+2z+2=0$.

أثبت أن المستويين (P_1)، (P_2) متقاطعان وفق مستقيم وليكن (Δ).

3) بين أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ).

4) بين أن $\vec{u}(2,0,-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

5) استنتج أن التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) هو:

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=3 \\ z=3-t \end{cases}$$ مع: t عدد حقيقي.

6) لتكن M نقطة كيفية من المستقيم (Δ).

أوجد قيمة الوسيط t حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ ، $\vec{u}$ متعامدين ثم استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ).

69: نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد المتجانس $(O;I,J,k)$ النقطة $A(1,-2,1)$ والشعاع $\vec{u}(-2,1,5)$.

1: أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A وشعاع ناظم له الشعاع $\vec{u}$.

2: بين أن المستوي (P) عمودي على المستوي (P') المعرف بالمعادلة: $x+2y-7=0$.

3: ليكن المستقيم (Δ) الناتج من تقاطع المستويين (P) و (P').

بين أن المستقيم (Δ) يشمل النقطة $B(-1,4,-1)$ وشعاع توجيه له $\vec{v}(2,-1,1)$.

4: أحسب بعد النقطة $C(5,-2,-1)$ عن كل من المستويين (P)، (P') ثم استنتج بعد النقطة C عن المستقيم (Δ).

5: من أجل كل عدد حقيقي t نعتبر النقطة M التي إحداثياتها $(1+2t,3-t,t)$.

أ) تحقق أن النقطة M تنتمي إلى المستقيم (Δ).

ب)لتكن الدالة f المعرفة على IR كما يلي: $f(t)=CM^2$.

بين أن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى يطلب تحديدها ثم استنتج بعد النقطة C عن المستقيم (Δ).

70: نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$ النقاط: $A(1,1,0)$ ، $B(1,2,1)$ ، $C(3,-1,2)$

1: أ) أثبت أن النقاط A، B، C ليست على استقامة واحدة.

ب) بين أن معادلة المستوي (ABC) هي: $2x+y-z-3=0$.

2: نعتبر المستويين (P)، (P') المعرفين بالمعادلتين التاليتين على الترتيب: $x+2y-z-4=0$ ، $2x+3y-2z-5=0$.

أثبت أن المستويين (P)، (P') متقاطعان وفق مستقيم (Δ) تمثيله الوسيطي:

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \end{cases} \quad ; \quad t\in IR$$

3: حدد تقاطع المستويات (ABC)، (P)، (P').

4: أحسب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ).

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

71: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$

النقاط: $A(2,-3,-1)$ ، $B(1,0,2)$ ، $C(0,1,3)$

1: بين أن النقاط A ، B ، C تعين مستويا.

2: أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3: θ عدد حقيقي حيث: $-\pi \le \theta < \pi$.

نعرف المجموعة (S) للنقط M من الفضاء التي إحداثياتها (x,y,z)

تحقق المعادلة: $x^2+y^2+z^2-2\theta x-2(\sin\theta)y+2z+\theta^2-\cos^2\theta=0$

أ) بين أن (S) سطح كرة يطلب تعيين إحداثيات مركزها ω وطول نصف قطرها R.

ب) أدرس حسب قيم θ عدد نقاط تقاطع (ABC) وسطح الكرة (S).

ج) في حالة المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S).

عين إحداثيات نقطة التماس H.

72: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$

النقاط: $A(3,-2,2)$ ، $B(6,1,5)$ ، $C(6,-2,-1)$ ، $D(0,4,-1)$.

1) برهن أن المثلث ABC قائم في A.

2) بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

3) أحسب الحجم V لرباعي الوجوه ABCD.

4) عين قيسا بالراديان للزاوية $\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$.

5) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) العمودي على (AC) في A.

6) ليكن (P') المستوي المعرف بالمعادلة: $x+y+z-3=0$.

برهن أن المستوي (P') عمودي على المستقيم (AB) في A.

7) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P)، (P').

71: بكالوريا تونس دورة 2008 شعبة العلوم التجريبية.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$

النقاط: $A(3,2,6)$ ، $B(1,2,4)$ ، $C(4,-2,5)$.

1: بين ان الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ متعامدان.

2: أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3: عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC) ثم أحسب حجم رباعي الوجوه OABC.

4: لتكن (S) سطح الكرة التي مركزها O وتشمل النقطة A.

أ) بين أن تقاطع (S) مع المستوي (ABC) هو دائرة (C) مركزها H.

ب) احسب طول نصف قطر الدائرة (C).

5: لتكن G مرجح الجملة $\{(C,1),(B,1),(A,1),(O,3)\}$.

أ) عين إحداثيات النقطة G ثم احسب بعد G عن المستوي (ABC).

ب) بين أن المجموعة (S') للنقط M من الفضاء حيث:

$\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4$ هي سطح كرة يطلب تحديد مركزها وطول نصف قطرها R.

ج) استنتج أن المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S').

74: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$

المستويين (P_1)، (P_2) المعرفين بالمعادلتين التاليتين على الترتيب:

$2y+z-6=0$ ، $y-2z+12=0$

1) برهن أن المستويين (P_1)، (P_2) متعامدان.

2) تعطى النقطتان $A(3,0,6)$ ، $B(0,0,6)$.

بين أن المستويين (P_1)، (P_2) متقاطعان وفق المستقيم (AB).

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3) عين إحداثيات النقطتين D ، C نقطتي تقاطع المحور $(O\,;\,J)$ مع كل من المستويين (P_1) ، (P_2) على الترتيب.

4) أكتب معادلة للمستوي (P_3) الذي يشمل C وشعاع ناظم له $\overrightarrow{AD}$.

5) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (OA) ثم عين إحداثيات النقطة E نقطة تقاطع المستقيم (OA) والمستوي (P_3).

6) ماذا تمثل النقطة E بالنسبة إلى المثلث ACD ؟

75: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\,;I\,,J\,,k)$ النقاط: $A(1,-1,3)$ ، $B(1,1,3)$ ، $C(1,1,-3)$ ، $D(19,-1,3)$ ، $E(19,1,3)$ ، $F(19,1,-3)$.

1: أحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ ثم استنتج نوع المثلث ABC.

2: بين أن الشعاع $\overrightarrow{AD}$ ناظم للمستوي (ABC) ثم أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3: بين أن الشعاعين $\overrightarrow{CE}$ ، $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطيا وأعط تفسيرا للنتيجة

4: عين إحداثيات النقطة G حيث يكون الرباعي $ABCG$ مستطيل.

5: تحقق أن النقاط D ، E ، F ليست على استقامة واحدة.

6: أدرس الوضع النسبي للمستويين (ABC) ، (DEF).

7: أ) احسب الأطوال a ، b ، c للقطع $[AB]$ ، $[BC]$ ، $[AD]$ على الترتيب.

ب) بين أن المتتالية $(a\,,b\,,c)$ هندسية ثم حدد أساسها q.

76: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\,;I\,,J\,,k)$ النقاط: $A(1,2,3)$ ، $B(0,1,4)$ ، $C(-1,-3,2)$ ، $D(4,-2,5)$

1: بين أن النقاط A ، B ، C تعين مستويا.

2: أوجد إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

3: أ) تحقق أن الشعاع $\vec{u}(2,-1,1)$ يعامد كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$

ب) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

4: (Δ) مستقيم يشمل النقطة D وشعاع توجيه له $\vec{v}(-2,1,-1)$

بين أن المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC).

5: أثبت أن النقطة G هي المسقط العمودي للنقطة D على (ABC).

77: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\,;I\,,J\,,k)$ النقاط: $A(6,-6,6)$ ، $B(-6,0,6)$ ، $C(-2,-2,11)$

1) أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها B وتشمل النقطة A.

2) أكتب معادلة للمستوي (P) المماس لسطح الكرة (S) في A.

3) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي على (P) ويشمل C.

4) حدد إحداثيات النقطة D نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (P).

5) أدرس الوضع النسبي للمستقيمين (AD)، (BC).

78: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2008 شعبة الرياضيات.

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\,;I\,,J\,,k)$

نعتبر المستقيمين (Δ)، (Δ') المعرفين بالتمثيلين الوسيطيين التاليين على الترتيب:

$$\begin{cases} x=6+\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=5+\alpha \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=2+0.5\lambda \\ z=-2-2\lambda \end{cases}$$

حيث: λ ، α عددان حقيقيان.

1: بين أن المستقيمين (Δ)، (Δ') لا ينتميان إلى نفس المستوي.

2: M ، N نقطتان متغيرتان من (Δ)، (Δ') على الترتيب.

أ) عين إحداثيات M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من المستقيمين (Δ)، (Δ').

ب) أحسب الطول MN.

3: عين معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل (Δ) ويوازي (Δ').

4: أحسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') والمستوي (P)، ماذا تلاحظ ؟

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

79: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$ المستويين (P_1)، (P_2) المعرفين بالمعادلتين التاليتين على الترتيب: $2x-y+2z-5=0$ ، $2x+2y-z-4=0$

1: بين أن المستويين (P_1)، (P_2) متعامدان.

2: أحسب بعد النقطة $A(1,2,-1)$ عن كل من المستويين (P_1) و (P_2).

3: أ) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1)، (P_2).

ب) أحسب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ).

4: M نقطة متغيرة من (Δ)، عين إحداثيات النقطة M حيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن ثم استنتج بعد النقطة A عن (Δ).

80: $(O;I,J,k)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء و SABCD هرم رأسه S وقاعدته ABCD حيث: $S(0,0,5)$ ، $A(0,2,0)$ ، $B(2,0,0)$ ، $C(0,-2,0)$ ، $D(-2,0,0)$.

1: بين أن الرباعي ABCD مربع.

2: حدد دون حساب معادلة المستوي (P) الذي يشمل النقاط A، B، C، D

3: أ) تحقق أن الشعاع $\vec{u}(5,5,2)$ ناظم للمستوي (ABS).

ب) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABS).

4: تحقق أن معادلة المستوي (BCS) هي: $5x-5y+2z-10=0$.

5: أ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P') الذي يشمل النقطة $E(0,1,0)$ ويوازي المستوي (BCS).

ب) حدد نقاط تقاطع المستوي (P') مع كل من المستقيمات: (OI) ، (OJ) ، (OK).

81: $(O;I,J,K)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

نعتبر المجموعة (S_m) للنقط M من الفضاء التي إحداثياتها (x,y,z) تحقق المعادلة: $x^2+y^2+z^2-2mx+2my-4mz-1=0$.

1) أثبت أن (S_m) سطح كرة ثم حدد مركزها ω ونصف قطرها R.

2) بين أنّ مجموعة النقط ω هي مستقيم يطلب تحديد مركبات شعاع توجيه له.

3) أثبت أنّ المجموعة (S_m) تشمل دائرة ثابتة (C) يطلب إعطاء مركزها وطول نصف قطرها.

4) ليكن (P) المستوي المعرف بالمعادلة: $x-y-z+\sqrt{3}=0$.

حدد قيمة m التي من أجلها يكون (P) مماسا لسطح الكرة (S_m).

82: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2009 شعبة العلوم التجريبية.

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;I,J,K)$

نعتبر النقاط: $A(1,0,2)$ ، $B(0,2,1)$ ، $C(2,1,3)$

1: (P) مستو معادلة له من الشكل $x-z+1=0$

أ) بين أن المستوي (P) هو المستوي (ABC).

ب) ما طبيعة المثلث ABC ؟

2: أ) تحقق من أن النقطة $D(2,3,4)$ لا تنتمي إلى (ABC).

ب) حدد طبيعة الرباعي ABCD ؟

3: أ) أحسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).

ب) أحسب حجم الرباعي ABCD.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

83: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2009 شعبة الرياضيات.

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,K)$.

نعتبر النقطتين $A(2,1,2)$ ، $B(0,2,-1)$ والمستقيم (D) ذو التمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$ حيث: $t\in IR$

1: أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).

أثبت أن (D) و (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

2: نعتبر المستوي (P) الذي يشمل المستقيم (AB) ويوازي (D).

أ) بين أن الشعاع $\vec{n}(1,5,1)$ عمودي على المستوي (P).

ب) أكتب معادلة للمستوي (P).

ج) بين أن المسافة بين نقطة كيفية M من المستقيم (D) والمستوي (P) مستقلة عن موضع النقطة M.

د) عين تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطع المستوي (P) مع المستوي (yoz)

84: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2009 شعبة الرياضيات.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,K)$ المستويين (P_1)، (P_2) حيث: $x+2y-z-2=0$ معادلة للمستوي (P_1)

و $(\alpha,\beta)\in IR^2$; $\begin{cases} x=1+2\alpha+\beta \\ y=1+\alpha \\ z=5+\alpha+\beta \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستوي P_2

1: أكتب معادلة للمستوي (P_2).

2: عين شعاعا ناظميا $\vec{n_1}$ للمستوي (P_1) وشعاعا ناظميا $\vec{n_2}$ للمستوي P_2

3: بين أن المستويين (P_1)، (P_2) متعامدان.

4: أ) $A(3,1,1)$ نقطة من الفضاء، عين المسافة d_1 بين النقطة A والمستوي (P_1) والمسافة d_2 بين النقطة A والمستوي (P_2)

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ب) استنتج المسافة d_3 بين النقطة A والستقيم (Δ) تقاطع (P_1) و (P_2).

5: أ) عين تمثيلا وسيطيا بدلالة λ للستقيم (Δ) حيث: λ عدد حقيقي.

ب) M نقطة كيفية من المستقيم (Δ).

أحسب AM^2 بدلالة λ مستنتجا ثانية المسافة بين A و (Δ).

85: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2009 شعبة التقني رياضيات.

1: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,K)$ النقاط: $A(1,1,2)$ ، $B(-1,0,-2)$ ، $C(-1,0,-6)$

بين أن مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق: $AM^2-BM^2=1$ هي مستو (P) عمودي على المستقيم (AB) يطلب تعيين معادلة له.

2: لتكن (S) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق المعادلة:

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$$

برهن أن (S) سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها R.

3: G نقطة من الفضاء معرفة بالعلاقة: $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

أ) عين احداثيات النقطة G ثم تأكد أنها تنتمي إلى (S).

ب) أكتب معادلة للمستوي (Q) الذي يمس سطح الكرة (S) في النقطة G.

86: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2008 شعبة العلوم التجريبية.

- توجد إجابة واحدة فقط صحيحة يطلب تعيينها مع التعليل.

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,K)$.

نعتبر المستوي (P) المعرف بالمعادلة: $x-3z-4=0$ والنقاط:

$A(1,3,-1)$ ، $B(4,1,0)$ ، $C(-2,0,-2)$ ، $D(3,2,1)$.

1: المستوي (P) هو:

أ) (BCD) ، ب) (ABC) ، ج) (ABD).

4) التمثيل الوسيطي للمستقيم (CD) هو:

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=1-t \end{cases}$$ مع: t عدد حقيقي

5) النقطة E تنتمي إلى المستقيم (CD).

حلول التمارين والمسائل

الجداء السلمي:

1: حساب جيب تمام الزاوية $\left(\vec{u}\,,\vec{v}\right)$.

لدينا: $\vec{u}(0,3,4)$ ، $\vec{v}(2,2,1)$ ومنه: $\|\vec{u}\|=5$ ، $\|\vec{v}\|=3$.

لدينا من جهة: $\vec{u}.\vec{v}=(2)(0)+(2)(3)+(1)(4)=10$

ومن جهة أخرى: $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u}\,,\vec{v}\right)$

أي: $10=5\times3\times\cos\left(\vec{u}\,,\vec{v}\right)$ إذن: $\cos\left(\vec{u}\,,\vec{v}\right)=\frac{2}{3}$

2: 1) تحديد قيس للزاوية $\left(\vec{u}\,,\vec{v}\right)$.

لدينا: $\vec{u}(1,1,0)$ ، $\vec{v}(0,1,1)$ ومنه: $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=\sqrt{2}$

لدينا من جهة: $\vec{u}.\vec{v}=(0)(1)+(1)(1)+(1)(0)=1$

ومن جهة أخرى: $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u}\,,\vec{v}\right)$

أي: $1=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\cos\left(\vec{u}\,,\vec{v}\right)$ معناه: $\cos\left(\vec{u}\,,\vec{v}\right)=\frac{1}{2}$

إذن: قيس الزاوية $\left(\vec{u}\,,\vec{v}\right)$ هو: $\frac{\pi}{3}$ أو $-\frac{\pi}{3}$.

2) تعيين قيمة كل من العددين a ، b.

بما أن: $\vec{w}$ عمودي على $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ فإن: $\vec{w}.\vec{u}=0$ و $\vec{w}.\vec{v}=0$

ومنه: $\begin{cases} 1+a=0 \\ a+b=0 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} a=-1 \\ b=-a=1 \end{cases}$

إذن: مركبات الشعاع $\vec{w}$ هي $(1,-1,1)$.

لدينا: $\|\vec{w}\|^2=(1)^2+(-1)^2+(1)^2=3$ ومنه: $\|\vec{w}\|=\sqrt{3}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3: 1) حساب $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{DC}$ واستنتاج نوع المثلث BCD.

لدينا: $\overrightarrow{BD}(0,-4,0)$ ، $\overrightarrow{DC}(0,0,6)$

ومنه: $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{DC}=0$ إذن: المثلث BCD قائم في النقطة D.

المساحة S للمثلث BCD تعطى بالعلاقة: $S=\frac{1}{2}\times BD\times DC$

لدينا: $BD=4$ و $DC=6$ ومنه: $S=\frac{1}{2}\times(4)\times(6)=12$

2) إثبات ان (AC) عمودي على المستوي (BCD).

▪ نعلم أنه إذا كان مستقيم عموديا على مستقيمين متقاطعين من مستو فانه عمودي على هذا المستوي.

لدينا: $\overrightarrow{AC}(-2,0,0)$ ، $\overrightarrow{BD}(0,-4,0)$ ، $\overrightarrow{DC}(0,0,6)$

ومنه: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$ و $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DC}=0$

ومنه: الشعاع $\overrightarrow{AC}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{BD}$ ، $\overrightarrow{DC}$.

معناه: المستقيم (AC) عمودي على كل من المستقيمين (BD) و(DC).

إذن: المستقيم (AC) عمودي على المستوي (BCD).

▪ الحجم V لرباعي الوجوه ABCD يعطى بالعلاقة: $V=\frac{1}{3}\times S\times h$

حيث: h الارتفاع و S مساحة القاعدة BCD.

لدينا: $h=AC=2$ ومنه: $V=\frac{1}{3}(12)(2)=8$

4: تعيين الأشعة $\vec{w}$ العمودية على $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

بما أن: $\vec{w}$ عمودي على $\vec{u}$ و $\vec{v}$ فإن: $\vec{w}.\vec{v}=\vec{w}.\vec{u}=0$

ومنه: $\begin{cases}a+2b+3c=0\\2a+3b+c=0\end{cases}$ معناه: $\begin{cases}-2a-4b-6c=0\\2a+3b+c=0\end{cases}$

بالجمع نجد: $-b-5c=0$ معناه: $b=-5c$

نعوض عن b في المعادلة: $a+2b+3c=0$ فنجد: $a=7c$

ومنه: مركبات الأشعة العمودية على $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هي:

$(7c,-5c,c)$ مع: c عدد حقيقي

إذن: الأشعة $\vec{w}$ هي الأشعة المرتبطة خطيا مع الشعاع $\vec{m}(7,-5,1)$

5: حساب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}$

نعلم أن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB\times AD\times\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$

ومنه: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=a\times a\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}a^2$

لدينا: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

ومنه: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}=-a\times a\times\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}a^2$

استنتاج قيمة $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$:

لدينا: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

ومنه: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2=0$

بما أن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$ فإن: المستقيمين (AB) ، (CD) متعامدان.

6: 1) حساب $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD}$.

نعلم أن: $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}=EA\times EB\times\cos(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB})$

ومنه: $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}=4\times4\times\cos\frac{\pi}{3}=16\left(\frac{1}{2}\right)=8$

بالمثل نجد: $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD}=8$

2) تبيين أن: (EA) ، (EC) متعامدان.

لدينا: $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}.(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC})$

ومنه: $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{BC}$

بما أن: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{AE}$

فإن: $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD}=8-8=0$

وهذا يعني أن: المستقيمين (EA) ، (EC) متعامدان.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تطبيقات الجداء السلمي:

المعادلة الديكارتية لسطح كرة:

7: كتابة معادلة لسطح الكرة (S):

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.

تنتمي النقطة M الى سطح الكرة (S) إذا وفقط إذا كان: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$.

لدينا: $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-3\\y\\z-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ تكافئ: $(x-3)(x-1)+y(y-2)+z(z-1)=0$

بعد النشر والتبسيط نجد: $x^2+y^2+z^2-4x-2y-z+3=0$

8: كتابة معادلة لسطح الكرة (S).

بما أن: سطح الكرة (S) يشمل المبدأ O فإن: معادلة (S) من الشكل:

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz=0$$

وبما أن: النقاط A، B، C تنتمي إلى (S) فإن إحداثياتها تحقق المعادلة:

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz=0$$

$$\begin{cases}a+1=0\\3a+2c+13=0\\a+2b+2c+9=0\end{cases}$$ ومنه: $$\begin{cases}a=-1\\c=\dfrac{-13-3a}{2}=-5\\b=\dfrac{-9-a-2c}{2}=1\end{cases}$$

إذن: معادلة سطح الكرة (S) هي: $x^2+y^2+z^2-x+y-5z=0$

9: كتابة معادلة لسطح الكرة (S).

نصف قطر سطح الكرة (S) هو البعد بين المركز A والمستوي (P)

ومنه: $r=\dfrac{|1-1+1-4|}{\sqrt{3}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

إذن: معادلة سطح الكرة (S) هي: $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=3$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

10: تعيين إحداثيات نقط تقاطع (Δ) و (S).

لدينا: $x^2+y^2+z^2-2x-3=0$

ومنه: $(1)^2+(2t)^2+(2-2t)^2-2(1)-3=0$

نجد: $8t^2-8t=0$ أي: $8t(t-1)=0$ ومنه: $t=0$ أو $t=1$

إذن: إحداثيات نقطتا تقاطع المستقيم (Δ) وسطح الكرة (S) هما:

$(1,2,0)$ ، $(1,0,2)$

11: تعيين المركز A وطول نصف القطر r للدائرة (C).

لدينا معادلة سطح الكرة (S) هي: $x^2+y^2+z^2-3x=0$

أي: $(x-1.5)^2+y^2+z^2=2.25$.

إذن: مركز سطح الكرة (S) هو $\omega(1.5\ ,0\ ,0)$ وطول نصف قطرها $R=\sqrt{2.25}=1.5$.

بعد المركز ω عن المستوي (P) هو: $\dfrac{|1.5+0+0-1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

بما أن: $\dfrac{\sqrt{3}}{6}<1.5$ فإن: المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة (C) مركزها النقطة A المسقط العمودي للمركز ω على المستوي (P).

المستقيم (ωA) يشمل النقطة ω وشعاع توجيه له $\vec{u}(1,1,1)$.

ومنه: المعادلات الوسيطية للمستقيم (ωA) هي:

$$\begin{cases}x=1.5+t\\y=t\\z=t\end{cases}$$ مع: t عدد حقيقي.

لدينا: معادلة المستوي (P) هي: $x+y+z-1=0$

ومنه: $1.5+t+t+t-1=0$ نجد: $t=-\dfrac{1}{6}$

من أجل: $t=-\dfrac{1}{6}$ نجد: $(x,y,z)=\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{1}{6},-\dfrac{1}{6}\right)$

إذن: إحداثيات النقطة A مركز الدائرة (C) هي: $\left(\frac{4}{3},\frac{-1}{6},\frac{-1}{6}\right)$.

نصف القطر r للدائرة (C) هو:

$r^2=R^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2=(1.5)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2=\frac{13}{6}$ إذن: $r=\sqrt{\frac{13}{6}}$

12: 1) حساب طول نصف قطر سطح الكرة (S).

طول نصف القطر r لسطح الكرة (S) هو بعد المركز A عن (P).

ومنه: $r=\frac{|2-2(-1)+2(3)-1|}{\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(2)^2}}=\frac{9}{3}=3$

2) تحديد إحداثيات نقطة التماس B.

الشعاع $\vec{u}(1,-2,2)$ ناظم للمستوى (P) وشعاع توجيه للمستقيم (AB).

ومنه: المعادلات الوسيطية للمستقيم (AB) هي:

$$\begin{cases}x=2+t\\y=-1-2t\\z=3+2t\end{cases}$$ مع: t عدد حقيقي.

لدينا: معادلة المستوي (P) هي: $x-2y+2z-1=0$

ومنه: $(2+t)-2(-1-2t)+2(3+2t)-1=0$ أي: $t=-1$

من أجل: $t=-1$ نجد: $(x,y,z)=(1,1,1)$

إذن: إحداثيات نقطة التماس B هي $(1,1,1)$.

13: تحديد مجموعة النقط (S).

1) $x^2+y^2+z^2-8x=0$

لدينا: $a=-8$ ، $b=c=d=0$ ومنه: $\Delta=64>0$

إذن: (S) سطح كرة مركزها $A(4,0,0)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{\Delta}}{2}=4$.

2) $x^2+y^2+z^2-4x+2z+5=0$

لدينا: $a=-4$ ، $b=0$ ، $c=2$ ، $d=5$

ومنه: $\Delta=(-4)^2+(0)^2+(2)^2-(4)(5)=0$

إذن: المجموعة (S) تشمل نقطة واحدة A إحداثياتها $(2,0,-1)$.

3) $x^2+y^2+z^2-2y+2=0$

لدينا: $a=0$ ، $b=-2$ ، $c=0$ ، $d=2$

ومنه: $\Delta=(0)^2+(-2)^2+(0)^2-4(2)=-4<0$

إذن:المجموعة (S) هي المجموعة الخالية.

14: تعيين المجموعة (S) للنقط M.

لدينا: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=4$ ومنه: $\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}\right)=4$

أي: $\overrightarrow{OM}^2-\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA}=4$

معناه: $\overrightarrow{OM}^2-\overrightarrow{OM}.\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right)=4$

بما أن: النقطة O منتصف [AB] فإن: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=\vec{0}$

وبالتالي: المعادلة $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=4$ تكافئ: $\overrightarrow{OM}^2=4$.

إذن: المجموعة (S) هي مجموعة نقاط سطح كرة مركزها المبدأ O وطول نصف قطرها 2.

15: تبيين أنه توجد كرتان تمسان المستوي (P).

نفرض $\omega(a,b,c)$ مركز سطح الكرة التي تمس المستوي (P).

بما أن: النقطة A تنتمي الى سطح هذه الكرة

فإن: $A\omega=5$ أي: $A\omega^2=25$

ومنه: $(a-3)^2+(b-2)^2+(c-5)^2=25$ (1)

لدينا: معادلة المستوي (P) هي: $4x-3z+3=0$

ومنه الشعاع $\vec{u}(4,0,-3)$ ناظم للمستوي (P).

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الشعاعان $\vec{u}$ ، $\overrightarrow{A\omega}$ مرتبطان خطيا.

ومنه: يوجد عدد حقيقي α حيث: $\overrightarrow{A\omega}=\alpha\vec{u}$

معناه: $\begin{cases}a-3=4\alpha\\b-2=0\\c-5=-3\alpha\end{cases}$ أي: $\begin{cases}a=4\alpha+3\\b=2\\c=-3\alpha+5\end{cases}$

نعوض عن الأعداد a ، b ، c في المعادلة (1) فنجد: $\alpha^2=1$

ومنه: $\alpha=1$ أو $\alpha=-1$.

إذن: توجد كرتان تمسان المستوي (P) في النقطة A مركزاهما:

$\omega_1(7,2,2)$ ، $\omega_2(-1,2,8)$.

المعادلة الديكارتية لمستو:

16: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: $\vec{u}(2,1,3)$ شعاع ناظم للمستوي (P)

فإن: معادلة المستوي (P) من الشكل: $2x+y+3z+d=0$

وبما أن: النقطة $A(1,0,1)$ تنتمي إلى المستوي (P)

فإن: $2(1)+(0)+3(1)+d=0$ ومنه: $d=-5$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $2x+y+3z-5=0$

17: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

احداثيات النقطة C منتصف القطعة $[AB]$ هي: $(3,3,2)$.

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء .

تنتمي النقطة M إلى المستوي (P) إذا وفقط إذا كان: $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB}=0$

لدينا: $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-3\\y-3\\z-2\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}12\\2\\2\end{pmatrix}$

ومنه: $12(x-3)+2(y-3)+2(z-2)=0$

معناه: $6x+y+z-23=0$

18: تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (P).

طريقة أولى: نفرض $\vec{u}(a,b,c)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

ومنه: $\vec{u}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$.

وبالتالي: $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{u}=0$

ومنه: $\begin{cases}b-c=0\\-2a+2b-2c=0\end{cases}$ أي: $\begin{cases}b-c=0\\-a+b-c=0\end{cases}$

نأخذ $c=1$ فنجد: $b=1$ ، $a=0$ إذن: $\vec{u}(0,1,1)$

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (P) إذا وفقط إذا كان: $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$

أي: $0(x-1)+(y-0)+(z-2)=0$ معناه: $y+z-2=0$

طريقة ثانية: تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (P) إذا وفقط إذا كانت الأشعة $\overrightarrow{AM}$ ، $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً.

أي: $\begin{vmatrix}x-1&0&2\\y&1&-2\\z-2&-1&2\end{vmatrix}=0$

ومنه: $(x-1)\begin{vmatrix}1&-2\\-1&2\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}0&2\\-1&2\end{vmatrix}+(z-2)\begin{vmatrix}0&2\\1&-2\end{vmatrix}=0$

وبالتالي: $(x-1)(0)-y(2)+(z-2)(-2)=0$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $-2y-2z+4=0$

أي: $y+z-2=0$

19: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: المستوي (P) يشمل المستقيم (Δ) فإن: معادلة المستوي (P) من الشكل: $x+2y+3+\alpha(3x-2z-5)=0$ حيث: α عدد حقيقي.

وبما أن: النقطة $A(2,-3,1)$ تنتمي إلى المستوي (P) فإن:

$2+2(-3)+3+\alpha[3(2)-2(1)-5]=0$ ومنه: $\alpha=-1$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $x+2y+3-(1)(3x-2z-5)=0$

أي: $-x+y+z+4=0$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الشعاعان $\vec{u}$ ، $\overrightarrow{A\omega}$ مرتبطان خطيا.

ومنه: يوجد عدد حقيقي α حيث: $\overrightarrow{A\omega}=\alpha\vec{u}$

معناه: $\begin{cases}a-3=4\alpha\\b-2=0\\c-5=-3\alpha\end{cases}$ أي: $\begin{cases}a=4\alpha+3\\b=2\\c=-3\alpha+5\end{cases}$

نعوض عن الأعداد a ، b ، c في المعادلة (1) فنجد: $\alpha^2=1$

ومنه: $\alpha=1$ أو $\alpha=-1$.

إذن: توجد كرتان تمسان المستوي (P) في النقطة A مركزاهما:

$\omega_1(7,2,2)$ ، $\omega_2(-1,2,8)$.

المعادلة الديكارتية لمستو:

16: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: $\vec{u}(2,1,3)$ شعاع ناظم للمستوي (P)

فإن: معادلة المستوي (P) من الشكل: $2x+y+3z+d=0$

وبما أن: النقطة $A(1,0,1)$ تنتمي إلى المستوي (P)

فإن: $2(1)+(0)+3(1)+d=0$ ومنه: $d=-5$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $2x+y+3z-5=0$

17: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

احداثيات النقطة C منتصف القطعة [AB] هي: $(3,3,2)$.

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.

تنتمي النقطة M إلى المستوي (P) إذا وفقط إذا كان: $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB}=0$

لدينا: $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-3\\y-3\\z-2\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}12\\2\\2\end{pmatrix}$

ومنه: $12(x-3)+2(y-3)+2(z-2)=0$

معناه: $6x+y+z-23=0$

18: تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (P).

طريقة أولى: نفرض $\vec{u}(a,b,c)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

ومنه: $\vec{u}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$.

وبالتالي: $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{u}=0$

ومنه: $\begin{cases}-a+b-c=0\\-2a+2b-2c=0\end{cases}$ أي: $\begin{cases}b-c=0\\-a+b-c=0\end{cases}$

نأخذ $c=1$ فنجد: $b=1$ ، $a=0$ إذن: $\vec{u}(0,1,1)$

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (P) إذا وفقط إذا كان: $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$

أي: $0(x-1)+(y-0)+(z-2)=0$ معناه: $y+z-2=0$

طريقة ثانية: تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (P) إذا وفقط إذا كانت الأشعة $\overrightarrow{AM}$ ، $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً.

أي: $\begin{vmatrix}x-1&0&2\\y&1&-2\\z-2&-1&2\end{vmatrix}=0$

ومنه: $(x-1)\begin{vmatrix}1&-2\\-1&2\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}0&2\\-1&2\end{vmatrix}+(z-2)\begin{vmatrix}0&2\\1&-2\end{vmatrix}=0$

وبالتالي: $(x-1)(0)-y(2)+(z-2)(-2)=0$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $-2y-2z+4=0$

أي: $y+z-2=0$

19: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: المستوي (P) يشمل المستقيم (Δ) فإن: معادلة المستوي (P) من الشكل: $x+2y+3+\alpha(3x-2z-5)=0$ حيث: α عدد حقيقي.

وبما أن: النقطة $A(2,-3,1)$ تنتمي إلى المستوي (P) فإن:

$2+2(-3)+3+\alpha[3(2)-2(1)-5]=0$ ومنه: $\alpha=-1$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $x+2y+3-(1)(3x-2z-5)=0$

أي: $-x+y+z+4=0$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

20: كتابة معادلة ديكارتية للمستوى (P).

بما أن: النقطة $A(-1,2,3)$ تنتمي إلى المستوي (P) فإن: معادلة المستوي (P) من الشكل: $a(x+1)+b(y-2)+c(z-3)=0$ حيث: a ، b ، c أعداد حقيقية ليست كلها معدومة.

وبما أن: المستوي (P) يوازي المستوي المعرف بالمعادلة:

$$-x+2y+z-3=0$$

فإن: شعاع ناظم المستوي (P) هو: $\vec{u}(-1,2,1)$

إذن: معادلة المستوي (P) هي:

$$(-1)(x+1)+(2)(y-2)+(z-3)=0$$

أي: $-x+2y+z-8=0$

21: تبيين أن المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) هو B.

تكون النقطة B المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) إذا وفقط إذا كان: ▪ النقطة B تنتمي الى المستوي (P).

▪ الشعاعان $\vec{u}$ ، $\overrightarrow{BA}$ مرتبطان خطيا حيث $\vec{u}$ ناظم للمستوي (P)

لدينا: $5(-1)-(1)+(0)+6=-6+6=0$

ومنه إحداثيات B تحقق المعادلة: $5x-y+z+6=0$

وهذا يعني أن: النقطة B تنتمي الى المستوي (P) (1)

لدينا معادلة المستوي (P) هي: $5x-y+z+6=0$

ومنه: الشعاع $\vec{u}(5,-1,1)$ ناظم للمستوي (P)

لدينا أيضا: مركبات الشعاع $\overrightarrow{BA}$ هي $(-5,1,-1)$

واضح أن: $\vec{u}=-\overrightarrow{BA}$

ومنه: الشعاعان $\vec{u}$ ، $\overrightarrow{BA}$ مرتبطان خطيا (2)

من (1) و (2) نستنتج أن: B هي المسقط العمودي للنقطة A على (P).

22: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: المستوى (P) يشمل النقطة $A(1,0,-2)$ فإن: معادلة (P) من الشكل: $a(x-1)+by+c(z+2)=0$ حيث: a ، b ، c أعداد حقيقية ليست كلها معدومة.

وبما أن: المستوي (P) عمودي على كل من المستويين المعرفين بالمعادلتين $2x+y-z-2=0$ ، $-x+y+z+3=0$

فإن: الشعاع الناظم $\vec{u}(a,b,c)$ للمستوي (P) عمودي على كل من الشعاعين $\vec{n}(2,1,-1)$ ، $\vec{m}(-1,1,1)$

ومنه: $\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{n}=0\\ \vec{u}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$ معناه: $\begin{cases}2a+b-c=0\\ -a+b+c=0\end{cases}$

نجد: $a=-2b$ و $c=-3b$

من أجل: $b=1$ مثلا نجد: $a=-2$ ، $c=-3$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $(-2)(x-1)+y+(-3)(z+2)=0$

أي: $-2x+y-3z-4=0$

23: تبيين أن النقاط A ، B ، C ، D من مستو واحد.

لإثبات أن النقاط A ، B ، C ، D من مستو واحد نشكل معادلة المستوي (ABC) ثم نبين أن النقطة D تنتمي إلى هذا المستوي.

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (ABC) إذا وفقط إذا كانت: الأشعة $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطيا أي: $\begin{vmatrix}x-2 & -1 & 0\\ y+3 & 3 & 2\\ z-4 & -2 & -2\end{vmatrix}=0$

معناه: $(x-2)\begin{vmatrix}3 & 2\\ -2 & -2\end{vmatrix}-(y+3)\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -2 & -2\end{vmatrix}+(z-4)\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}=0$

وبالتالي: $-2(x-2)-2(y+3)-2(z-4)=0$

إذن: معادلة المستوي (ABC) هي: $x+y+z-3=0$

واضح أن إحداثيات النقطة D تحقق المعادلة: $x+y+z-3=0$

إذن: النقاط A ، B ، C ، D تنتمي إلى مستو واحد.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

24: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: المستوي (P) يشمل المستقيم (Δ').

فإن: معادلة (P) تكتب من الشكل:

$x+2z-4+\alpha(y-z-2)=0$ حيث: α عدد حقيقي.

أي: $x+\alpha y+(2-\alpha)z-4-2\alpha=0$

وبما أن: المستوي (P) يوازي المستقيم (Δ)

فإن: شعاع ناظم المستوي (P) عمودي على شعاع توجيه (Δ).

مركبات شعاع ناظم المستوي (P) هي $(1,\alpha,2-\alpha)$ ومركبات شعاع توجيه (Δ) هي: $(1,1.5,2)$

ومنه: $1+1.5\alpha+2(2-\alpha)=0$ نجد: $\alpha=10$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $x+2z-4+10(y-z-2)=0$

أي: $x+10y-8z-24=0$.

25: تحديد المجموعة (P) للنقط M.

تذكير: $|x|=|y|$ تكافئ: $x=y$ أو $x=-y$

لدينا: $|2x-y+z+2|=|x-y+2z|$ ومنه:

$(2x-y+z+2)=(x-y+2z)$ أو $(2x-y+z+2)=-(x-y+2z)$

أي: $x-z+2=0$ أو $3x-2y+3z+2=0$

إذن: المجموعة (P) هي اتحاد مجموعة نقط المستويين المعرفين بالمعادلتين: $x-z+2=0$ ، $3x-2y+3z+2=0$

26: 1: تبيين أن المجموعة (P_m) مستو.

لدينا: $x+(2m+1)y+(3m+2)z-1=0$

بما أن: معامل المتغير x لا ينعدم فإن: (P_m) مستو من الفضاء.

2: إثبات أن (P_m) يشمل مستقيما ثابتا.

المعادلة: $x+(2m+1)y+(3m+2)z-1=0$

تكافئ: $x+y+2z-1+m(2y+3z)=0$

ومنه: المستوي (P_m) يشمل المستقيم المعرف بالمعادلتين:

$$\begin{cases} x+y+2z-1=0 \\ 2y+3z=0 \end{cases}$$

3: أ) تعيين المستوى الذي يشمل النقطة $A(3,1,1)$.

تنتمي النقطة A إلى المستوي (P_m) إذا كان:

$(3)+(2m+1)(1)+(3m+2)(1)-1=0$

أي: $5m+5=0$ معناه: $m=-1$.

إذن: المستوي الذي يشمل النقطة A هو (P_{-1}).

ب) تعيين المستوى الذي يعامد المستوي (P').

يتعامد المستويان (P_m) ، (P') إذا كان شعاعا ناظميهما متعامدين.

الشعاعان الناظميان للمستويين (P_m) ، (P') هما على التوالي:

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2m+1\\3m+2\end{pmatrix} \quad ، \quad \vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$\vec{u}.\vec{v}=0$ تكافئ: $(2)(1)+(2m+1)(-1)+(3m+2)(1)=0$

أي: $m+3=0$ وبالتالي: $m=-3$

إذن: المستوى الذي يعامد المستوي (P') هو: (P_{-3}).

بعد نقطة عن مستو:

27: حساب بعد النقطة A عن المستوي (P).

نفرض d بعد النقطة A عن المستوي (P) فيكون:

$$d=\frac{|2(-1)-3(3)+(2)+9|}{\sqrt{(2)^2+(-3)^2+(1)^2}}=\frac{0}{\sqrt{14}}=0$$

ومنه: A تنتمي إلى المستوي (P').

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

28: 1) تعيين إحداثيات المركز A وطول القطر R.

لدينا: $x^2+y^2+z^2-2x+2z-7=0$

ومنه: $a=-2$ ، $b=0$ ، $c=2$ ، $d=-7$

إذن: إحداثيات المركز A لسطح الكرة (S) هي:

$$\left(\frac{a}{-2},\frac{b}{-2},\frac{c}{-2}\right)=(1,0,-1)$$

طول نصف القطر R هو: $\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ حيث:

$\Delta=(-2)^2+(0)^2+(2)^2-4(-7)=36$ ومنه: $R=\frac{\sqrt{36}}{2}=3$

2) حساب بعد النقطة A عن المستوي (P).

نفرض d بعد النقطة A عن المستوي (P) فيكون:

$$d=\frac{|1+0-2(-1)+3|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-2)^2}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

لدينا: $\sqrt{6}<3$ أي: $d<R$

ومنه: المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة (C).

29: 1) تبيين أن المستويين (P_1)، (P_2) متعامدان.

المعادلتان الديكارتيتان للمستويين (P_1)، (P_2) هما على التوالي:

$x-y+3z+1=0$ ، $-x+2y+z+5=0$

ومنه: الشعاعان الناظميان للمستويين (P_1)، (P_2) هما:

$\vec{u_1}(1,-1,3)$ ، $\vec{u_2}(-1,2,1)$ على الترتيب.

بما أن: $\vec{u_1}.\vec{u_2}=(-1)(1)+(2)(-1)+(1)(3)=0$

فإن: المستويين (P_1)، (P_2) متعامدان.

2) حساب بعد النقطة A عن كل من (P_1)، (P_2).

لتكن H_1، H_2، H_3 المساقط العمودية للنقطة A على (P_1)، (P_2)، (Δ) على الترتيب

ومنه: $AH_1=\frac{|1-2+3(-1)+1|}{\sqrt{11}}=\frac{3}{\sqrt{11}}$

$AH_2=\frac{|-1+2(2)-1+5|}{\sqrt{6}}=\frac{7}{\sqrt{6}}$

إذن: بعد A عن (P_1) هو: $\frac{3}{\sqrt{11}}$ وبعد A عن (P_2) هو: $\frac{7}{\sqrt{6}}$.

استنتاج بعد A عن المستقيم (Δ):

الرباعي $AH_1H_3H_2$ مستطيل ومنه: $AH_3^2=AH_1^2+H_1H_3^2$

معناه: $AH_3^2=AH_1^2+AH_2^2$

أي: $AH_3^2=\frac{9}{11}+\frac{49}{6}=\frac{593}{66}$ ومنه: $AH_3=\sqrt{\frac{593}{66}}$

إذن: بعد A عن المستقيم (Δ) هو: $\sqrt{\frac{593}{66}}$.

المرجح في الفضاء:

30: تبيين أن E منتصف [DG].

بما أن: G مركز ثقل المثلث ABC فإنها مرجح للجملة:

$\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$.

لدينا: E مرجح للجملة: $\{(D,3),(A,1),(B,1),(C,1)\}$

ومنه: E مرجح للجملة $\{(D,3),(G,3)\}$

بما أن: معاملي النقطتين D، G متساويان فإن: E منتصف [DG].

31: برهان صحة: $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DH}=\vec{0}$.

بما أن: K مركز ثقل كل من رباعيي الوجوه ABCD ، EFGH فإن:

(1) $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=\vec{0}$

(2) $\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{KH}=\vec{0}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

من (1) و(2) وبالطرح نجد:

$$\left(\overrightarrow{KE}-\overrightarrow{KA}\right)+\left(\overrightarrow{KF}-\overrightarrow{KB}\right)+\left(\overrightarrow{KG}-\overrightarrow{KC}\right)+\left(\overrightarrow{KH}-\overrightarrow{KD}\right)=\vec{0}$$

أي: $\left(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KE}\right)+\left(\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KF}\right)+\left(\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KG}\right)+\left(\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{KH}\right)=\vec{0}$

معناه: $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DH}=\vec{0}$.

32: برهان أن (AE)، (CF) متقاطعان في النقطة G.

بما أن: G، E مرجحان للجملتين التاليتين على الترتيب:

$\{(C,1),(B,2)\}$ ، $\{(A,-1),(B,2),(C,1)\}$

فإن: G مرجح للجملة $\{(A,-1),(E,3)\}$

ومنه: G تنتمي إلى المستقيم (AE) (1)

بما أن: G، F مرجحان للجملتين التاليتين على الترتيب:

$\{(A,-1),(B,2)\}$ ، $\{(A,-1),(B,2),(C,1)\}$

فإن: G مرجح للجملة $\{(F,1),(C,1)\}$.

ومنه: G تنتمي إلى المستقيم (CF) (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المستقيمين (AE)، (CF) متقاطعان في G.

33: تعيين المجموعة (S) للنقط M من الفضاء:

لدينا: G مرجح للجملة $\{(A,2),(B,-3)\}$

ومنه: $2\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

لدينا أيضا: $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)-3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)$

ومنه: $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MG}+\left(2\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}\right)=\overrightarrow{GM}$

ومنه المعادلة: $\left\|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right\|=4$ تكافئ: $GM=4$

إذن: المجموعة (S) هي مجموعة نقط سطح الكرة التي مركزها G وطول نصف قطرها 4.

34: 1) تعيين إحداثيات النقطة G.

نفرض (x,y,z) إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC فيكون:

$x=\frac{4+(-1)+1}{3}=\frac{4}{3}$ ، $y=\frac{1+3+0}{3}=\frac{4}{3}$ ، $z=\frac{-2+1+3}{3}=\frac{2}{3}$.

2) تحديد إحداثيات النقطة D منتصف $[AB]$.

إحداثيات النقطة D منتصف القطعة $[AB]$ هي: $(1.5,2,-0.5)$

التحقق من صحة: $3\overrightarrow{CG}-2\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

مركبات كل من الشعاعين $2\overrightarrow{CD}$ ، $3\overrightarrow{CG}$ هما على التوالي:

$(1,4,-7)$ ، $(1,4,-7)$

ومنه: $3\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{CD}$ معناه: $3\overrightarrow{CG}-2\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

إذن: النقطة C هي مرجح الجملة: $\{(G,3),(D,-2)\}$

35: 1) تعيين الإحداثيات (x,y,z).

مجموع معاملات النقاط A، B، C هو:

$$(b+c)+(a+c)+(a+b)=2(a+b+c)\neq 0$$

ومنه: $x=\frac{a(b+c)}{2(a+b+c)}$ ، $y=\frac{b(a+c)}{2(a+b+c)}$ ، $z=\frac{c(a+b)}{2(a+b+c)}$

2) حساب المجموع $x+y+z$:

$$x+y+z=\frac{(ab+ac)+(ab+bc)+(ac+bc)}{2(a+b+c)}=\frac{2(ab+ac+bc)}{2(a+b+c)}=0$$

إذن: مجموعة النقط G محتواة في مجموعة نقاط المستوي المعرف بالمعادلة: $x+y+z=0$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

36: 1) تعيين إحداثيات النقطة G.

نفرض (x,y,z) إحداثيات النقطة G فنجد:

$x=-3+7=4$ ، $y=4+3=7$ ، $z=0$

2) تحديد المجموعة (P) للنقط M.

لدينا: $-\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ومنه:

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)-\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)$

أي: $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MG}+\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GA}\right)=\overrightarrow{MG}$

المعادلة: $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}\right\|=OM$ تكافئ: $GM=OM$.

إذن: مجموعة النقط (P) للنقط M من الفضاء هي مجموعة نقاط المستوي العمودي على القطعة [OG] في منتصفها.

37: تحديد مجموعة النقط (P) للنقط M.

نفرض G مرجح الجملة: $\{(A,1)،(B,-2)\}$ فيكون: $\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

ومنه: $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)-2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)$

أي: $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MG}+\left(\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}\right)=\overrightarrow{GM}$

يكون الشعاعان $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}$ ، $\overrightarrow{AB}$ متعامدين إذا كان:

$\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right)=0$ أي: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GM}=0$

إذن: مجموعة النقط (P) هي مجموعة نقط المستوي الذي يشمل النقطة G وشعاع ناظم له $\overrightarrow{AB}$.

38: 1) إعطاء عبارة بسيطة للشعاع $\overrightarrow{V_1}$.

لتكن G مرجح الجملة: $\{(A,7)،(B,5)،(C,4)\}$

ومنه: $7\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{GB}+4\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

ومنه: $\overrightarrow{V_1}=(7+5+4)\overrightarrow{MG}$ أي: $\overrightarrow{V_1}=16\overrightarrow{MG}$

2) تبيين أن الشعاع $\overrightarrow{V_2}$ مستقل عن النقطة M.

لدينا: $\overrightarrow{V_2}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$

بما أن: $2+(-1)+(-1)=0$ فإن: الشعاع $\overrightarrow{V_2}$ مستقل عن النقطة M

حيث: $\overrightarrow{V_2}=2\overrightarrow{MA}-\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)-\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

حساب $\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|$:

لدينا: $\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|^2=\left(-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2$

ومنه: $\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|^2=AB^2+AC^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

أي: $\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$

معناه: $\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|^2=AB^2+AC^2-\left[\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2-BA^2-AC^2\right]$

ومنه: $\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|^2=2AB^2+2AC^2-BC^2=2(16)^2+2(20)^2-(28)^2$

ومنه: $\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|^2=528$ إذن: $\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|=4\sqrt{33}$

3) تعيين مجموعة النقط M من الفضاء.

لدينا: $\left\|\overrightarrow{V_1}\right\|=\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|$ ومنه: $16\,MG=4\sqrt{33}$ أي: $MG=\frac{\sqrt{33}}{4}$

إذن: مجموعة النقط M من الفضاء هي مجموعة نقط سطح كرة مركزها النقطة G وطول نصف قطرها $\frac{\sqrt{33}}{4}$.

39: 1: أ) التحقق أن A من المجموعة (S_1).

لدينا: $2AA^2+BA^2+CA^2=2(0)+(2)^2+(2)^2=8$

ومنه: النقطة A تنتمي إلى المجموعة (S_1).

ب) تحديد المجموعة (S_1) وعناصرها المميزة.

نعتبر النقطتين G، D حيث:

G مرجح الجملة $\{(A,2)،(B,1)،(C,1)\}$

D منتصف الضلع [BC] أي: D مرجح الجملة $\{(B,1)،(C,1)\}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ومنه: G مرجح الجملة $\{(A,2),(D,2)\}$

إذن: G منتصف الضلع $[AD]$.

بما أن: $2+1+1=4\neq 0$ فإن: المجموعة (S_1) هي:

المجموعة الخالية أو المجموعة $\{G\}$ أو مجموعة نقط سطح كرة.

حسب نتيجة السؤال (أ).

وبما أن: النقطة A تنتمي إلى (S_1) فإن: المجموعة (S_1) هي مجموعة نقط سطح كرة مركزها النقطة G وتشمل النقطة A.

2: تعيين المجموعة (S_2):

$$-2AM^2+BM^2+CM^2=-2AM^2+\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right)^2+\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}\right)^2$$

ومنه: $$-2AM^2+BM^2+CM=2\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right)+BA^2+CA^2$$

ومنه: $$-2AM^2+BM^2+CM^2=2\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right)+(2)^2+(2)^2$$

أي: $$-2AM^2+BM^2+CM^2=2\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right)+8$$

معناه: $$-2AM^2+BM^2+CM^2=-4\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}+8$$

تنتمي النقطة M إلى المجموعة (S_2) إذا كان: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}=0$

إذن: مجموعة النقط (S_2) للنقط M من الفضاء هي مجموعة نقط المستوي الذي يشمل A وشعاع ناظم له $\overrightarrow{AD}$.

المعادلات الوسيطية لمستقيم:

40: تبيين أن الشعاعين $\vec{u}$، $\vec{v}$ مرتبطين خطيا

بما أنه: يوجد عدد حقيقي 2 حيث: $\vec{v}=2\vec{u}$

فإن: الشعاعين $\vec{u}$، $\vec{v}$ مرتبطان خطيا.

41: تبيين أن الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$، $\vec{w}$ مرتبطة خطيا.

تكون الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$، $\vec{w}$ مرتبطة خطيا إذا كان: محدد $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=0$

لدينا: $$\begin{vmatrix}6&2&-2\\-3&-1&1\\-1&1&3\end{vmatrix}=(6)\begin{vmatrix}-1&1\\1&3\end{vmatrix}-(2)\begin{vmatrix}-3&1\\-1&3\end{vmatrix}+(-2)\begin{vmatrix}-3&-1\\-1&1\end{vmatrix}$$

ومنه: $$\begin{vmatrix}6&2&-2\\-3&-1&1\\-1&1&3\end{vmatrix}=6(-4)-2(-8)-2(-4)=0$$

إذن: الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$، $\vec{w}$ مرتبطة خطيا.

42: 1) كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستقيم (Δ) إذا وفقط إذا كان:

الشعاعان $\vec{u}$ ، $\overrightarrow{AM}$ مرتبطين خطيا.

أي: إذا وجد عدد حقيقي t حيث: $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$

معناه: $\begin{cases}x-1=2t\\y-0=t\\z-2=-t\end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases}x=1+2t\\y=t\\z=2-t\end{cases}$ مع: t عدد حقيقي.

2) تبيين أن النقطة B لا تنتمي إلى المستقيم (Δ).

الشعاعان $\vec{u}(2,1,-1)$ ، $\overrightarrow{AB}(4,2,-1)$ غير مرتبطين خطيا

وذلك لأن: $(1)(-1)\neq(-1)(2)$

وهذا يعني أن: النقطة B لا تنتمي إلى المستقيم (Δ).

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

طريقة أخرى: بما أن: إحداثيات النقطة B لا تحقق الجملة: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=2-t \end{cases}$ فإن: النقطة B لا تنتمي إلى (Δ).

43: تعيين معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (Δ).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من (Δ) إذا وجد عدد حقيقي t حيث: $\overrightarrow{AM}=t\,\vec{u}$

أي: $\begin{cases} x-1=3t \\ y+1=2t \\ z-2=t \end{cases}$ معناه: $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=z-2$

معناه: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}=z-2 \\ \dfrac{y+1}{2}=z-2 \end{cases}$ إذن: $\begin{cases} x-3z+5=0 \\ y-2z+5=0 \end{cases}$

44: تعيين شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

النقطتان $A(-6,0,11)$ ، $B(-3,1,9)$ تنتميان إلى المستقيم (Δ).

ومنه: $\overrightarrow{AB}(3,1,-2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

طريقة أخرى: لدينا: $\begin{cases} x-y+z-5=0 \\ x-3y+6=0 \end{cases}$

ومنه:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}$$

إذن: مركبات شعاع توجيه للمستقيم (Δ) هي: $(-2,-1,-3)$.

45: كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) والقطعة $[AB]$.

تكون النقطة $M(x,y,z)$ من المستقيم (AB) إذا وجد عدد حقيقي t حيث: $\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AB}$

أي: $\begin{cases} x-1=2t \\ y-3=-t \\ z-2=3t \end{cases}$ معناه: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3-t \\ z=2+3t \end{cases}$

إذن: التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) هو: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3-t \\ z=2+3t \end{cases}$ مع: t عدد حقيقي.

التمثيل الوسيطي للقطعة $[AB]$ هو: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3-t \\ z=2+3t \end{cases}$ مع: $0\le t\le 1$.

46: تعيين إحداثيات النقطة A.

بما أن: النقطة A تنتمي إلى المستوي (OIK) فإن: $y=0$.

من أجل: $y=0$ نجد: $1+t=0$ أي: $t=-1$

إذن: إحداثيات نقطة التقاطع A هي: $(3,0,4)$

47: تعيين مجموعة النقط M.

لدينا: $-1\le t\le 3$ ومنه: $0\le t\le 3$ أو $-1\le t\le 0$

ومنه: $0\le t^2\le 9$ أو $0\le t^2\le 1$ إذن: $0\le t^2\le 9$

من أجل: $t^2=0$ نجد: $(x,y,z)=(1,2,2)$

من أجل: $t^2=9$ نجد: $(x,y,z)=(10,-25,20)$

إذن: مجموعة النقط M من الفضاء هي مجموعة نقط القطعة $[AB]$

حيث: $A(1,2,2)$ ، $B(10,-25,20)$

بعد نقطة عن مستقيم

48: 1) تعيين إحداثيات النقطة H.

بما أن: H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ)

فإن: H تنتمي إلى المستقيم (Δ) و $\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0$

حيث: $\vec{u}$ شعاع توجيه (Δ).

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

نفرض إحداثيات H هي: (a,b,c) فيكون:

$\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0$ ومنه: $(a-1)(1)+(b)(-1)+(c-1)(1)=0$

أي: $a-b+c-2=0$ (1)

النقطة H تنتمي إلى المستقيم (Δ) ومنه:

$a=1+t$ ، $b=-t$ ، $c=-2+t$ (2)

من (1) و (2) نجد: $(1+t)-(-t)+(-2+t)-2=0$

أي: $t=1$ إذن: إحداثيات H هي: $(a,b,c)=(2,-1,-1)$

2) حساب بعد A عن المستقيم (Δ).

بعد A عن المستقيم (Δ) هو البعد بين النقطتين A و H.

لدينا: $AH^2=(2-1)^2+(-1-0)^2+(-1-1)^2=6$ ومنه: $AH=\sqrt{6}$

49: 1) تشكيل جدول تغيرات الدالة f.

نفرض (x,y,z) إحداثيات M فيكون:

$f(t)=AM^2=x^2+(y-1)^2+(z-1)^2$

ومنه: $f(t)=(-1+t)^2+(-1-1)^2+(t-1)^2$

إذن: $f(t)=2t^2-4t+6$

الدالة f تقبل الإشتقاق على IR حيث: $f'(t)=4t-4$

ومنه: جدول تغيرات الدالة f

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	4	↗	

ومنه: أصغر قيمة تبلغها الدالة f هي: $f(1)=4$

2) استنتاج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ).

بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) هو: $AH=\sqrt{f(1)}=2$

50: 1) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: المستقيم (Δ) يعامد المستوي (P).

فإن: شعاع توجيه (Δ) هو شعاع ناظم للمستوي (P).

ومنه: $\vec{u}(1,-1,-1)$ شعاع ناظم للمستوي (P).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (P) إذا كان: $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$

أي: $x-y-z+2=0$

حساب بعد النقطة B عن المستوي (P).

بعد النقطة B عن (P) هو: $d=\dfrac{|2-(-2)-(-1)+2|}{\sqrt{3}}=\dfrac{7}{\sqrt{3}}$

2) التحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستقيم (Δ).

بما أن الجملة: $\begin{cases}2=t\\-2=-t\\-1=1-t\end{cases}$ تقبل حلا واحدا هو: $t=2$.

فإن: النقطة B تنتمي إلى المستقيم (Δ).

استنتاج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ).

نفرض H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) فيكون:

$AB^2=d^2+AH^2$ ومنه: $AH^2=AB^2-d^2$

لدينا: $AB^2=21$ و $d^2=\dfrac{49}{3}$ ومنه: $AH^2=21-\dfrac{49}{3}=\dfrac{14}{3}$

إذن: بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) هو: $AH=\sqrt{\dfrac{14}{3}}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الأوضاع النسبية:

51: تحديد نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) ، (Δ').

شعاعا توجيه (Δ)، (Δ') هما $\vec{u}(1,1,1)$ ، $\vec{v}(1,-1,1)$ على الترتيب.

بما أن: $(1)(-1)\neq(1)(1)$

فإن: الشعاعين $\vec{u}$، $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا

وهذا يعني أن: المستقيمين (Δ)، (Δ') غير متوازيين.

الجملة: $\begin{cases}1+t'=t\\3-t'=t\end{cases}$ تقبل حلا واحدا هو: $(t,t')=(2,1)$

من أجل: $(t,t')=(2,1)$ نجد: $(x,y,z)=(2,2,3)$

إذن: المستقيمان (Δ)، (Δ') متقاطعان في النقطة $A(2,2,3)$.

52: تبيين أن (Δ)، (Δ') ليسا من نفس المستوي.

شعاعا توجيه (Δ)، (Δ') هما $\vec{u}(0,1,1)$ ، $\vec{v}(1,2,-1)$ على الترتيب.

بما أن: $(0)(2)\neq(1)(1)$

فإن: الشعاعين $\vec{u}$، $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا

وهذا يعني أن: المستقيمين (Δ)، (Δ') غير متوازيين.

الجملة: $\begin{cases}3+t'=2\\3-t'=t\end{cases}$ تقبل حلا واحدا هو: $(t,t')=(4,-1)$

من أجل: $t=4$ نجد: $(x,y,z)=(2,7,4)$

من أجل: $t'=-1$ نجد: $(x,y,z)=(2,-1,4)$

بما أن: $(2,7,4)\neq(2,-1,4)$

فإن: المستقيمين (Δ)، (Δ') لا ينتميان إلى نفس المستوي.

53: إثبات أن المستقيمين (Δ)، (Δ') متوازيان ومختلفان.

- النقطتان $A(0,2,7)$ ، $B(3,3,5)$ تنتميان إلى المستقيم (Δ)

ومنه: شعاع توجيه للمستقيم (Δ) هو: $\overrightarrow{AB}(3,1,-2)$.

- النقطتان $C(0.75,2,1)$، $D(-2.25,1,3)$ تنتميان إلى المستقيم (Δ')

ومنه: شعاع توجيه للمستقيم (Δ')هو: $\overrightarrow{DC}(3,1,-2)$.

واضح أن: الشعاعين $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{DC}$ مرتبطان خطيا (1)

A تنتمي إلى المستقيم (Δ) ولا تنتمي إلى المستقيم (Δ') (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المستقيمين (Δ)، (Δ') متوازيان ومختلفان.

54: تعيين إحداثيات نقطة تقاطع (Δ) والمستوي (OIK).

نفرض $A(x,y,z)$ نقطة تقاطع (Δ) مع المستوي (OIK)

فتكون: $x=0$ ومنه: $0=4-t$ أي: $t=4$

إذن: إحداثيات نقطة التقاطع هي: $(0,6,9)$

55: تعيين نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (P).

لدينا: $\vec{u}(1,-3,1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

$\vec{v}(-2,1,-1)$ شعاع ناظم للمستوي (P)

لدينا: $\vec{u}.\vec{v}=-6\neq 0$ ومنه: الشعاعين $\vec{u}$، $\vec{v}$ غير متعامدين.

وهذا يعني أن: المستقيم (Δ) يقطع المستوي (P) في نقطة.

لدينا: $-2x+y-z+4=0$ ومنه: $-2(t)+(4-3t)-(2+t)+4=0$

أي: $-6t+6=0$ معناه: $t=1$

إذن: إحداثيات نقطة التقاطع هي: $(1,1,3)$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

56: دراسة الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (P).

لدينا: $2x+y-z+3=0$ ومنه: شعاع ناظم (P) هو $\vec{v}(2,1,-1)$

لدينا: $\vec{u}.\vec{v}=0$ ومنه: الشعاع $\vec{u}$ يعامد $\vec{v}$.

وهذا يعني أن: المستقيم (Δ) لا يقطع المستوي (P).

بما أن: النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ) ولا تنتمي إلى المستوي (P)

فإن: المستقيم (Δ) يوازي المستوي (P).

57: تبيين أن المستويين (P)، (P') متقاطعان.

الشعاعان $\vec{u}(2,1,-1)$ ، $\vec{v}(1,-3,2)$ ناظميان للمستويين (P)، (P') على الترتيب.

بما أن: $(2)(-3)(2)\neq(1)(1)(1)$ فإن: الشعاعين $\vec{u}$، $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا

وهذا يعني أن: المستويين (P)، (P') متقاطعان وفق مستقيم وليكن (Δ)

معرف بجملة المعادلتين: $\begin{cases}2x+y-z+1=0\\x-3y+2z-4=0\end{cases}$

تعيين شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

$$\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&-3&2\end{vmatrix}\quad\begin{matrix}2&1\\1&-3\end{matrix}$$

$-1 \quad -5 \quad -7$

ومنه: مركبات شعاع توجيه المستقيم (Δ) هي: $(-7,-5,-1)$

58: تعيين قيمة الوسيط m حيث يكون:

أ) المستويان (P_1)، (P_2) متوازيين.

الشعاعان $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}m+1\\m-2\\3m-2\end{pmatrix}$ ناظميان للمستويين (P_1)، (P_2) على الترتيب.

يتوازى المستويان (P_1)، (P_2) إذا كان الشعاعان $\vec{u}$، $\vec{v}$ مرتبطين خطيا

عالم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

أي: $\begin{cases}(m+1)(-1)=2(m-2)\\(m-2)(1)=(3m-2)(-1)\end{cases}$

معناه: $\begin{cases}-m-1=2m-4\\m-2=-3m+2\end{cases}$ نجد: $m=1$.

ب) المستويان (P_1)، (P_2) متعامدين.

يتعامد المستويان (P_1)، (P_2) إذا كان: $\vec{u}.\vec{v}=0$

أي: $(m+1)(2)+(m-2)(-1)+(3m-2)(1)=0$

معناه: $4m+2=0$ إذن: $m=-0.5$.

59: تعيين مجموعة حلول الجملة.

لدينا: $\begin{cases}2x-3y-z=5\\-4x+6y+2z=1\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}4x-6y-2z=10\\-4x+6y+2z=1\end{cases}$

بالجمع نجد: $11=0$ ومنه: الجملة لا تقبل أي حل.

التفسير الهندسي: المستويان المعرفان بالمعادلتين:

$2x-3y-z=5$ ، $-4x+6y+2z=1$ متوازيان ومختلفان.

60: 1) تبيين أن المستويين (P_1)، (P_2) متقاطعان.

لدينا: شعاع ناظم (P_1) هو: $\vec{u_1}(1,3,1)$

شعاع ناظم (P_2) هو: $\vec{u_2}(-3,5,-1)$.

بما أن: $(5)(1)\neq(3)(-3)$ فإن: الشعاعين $\vec{u}$، $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا.

وهذا يعني أن: المستويين (P_1)، (P_2) متقاطعان وفق مستقيم وليكن (Δ).

تعيين مركبات شعاع توجيه المستقيم (Δ).

المستقيم (Δ) معرف بجملة المعادلتين التاليتين:

$\begin{cases}x+3y+z-1=0\\-3x+5y-z-2=0\end{cases}$

النقطتان $A(-1.5,0,2.5)$ ، $B(2.5,1,-4.5)$ تنتميان إلى المستقيم (Δ)

ومنه: شعاع توجيه (Δ) هو: $\overrightarrow{AB}(4,1,-7)$

2) دراسة الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (P_3)

شعاع ناظم المستوي (P_3) هو: $\vec{u_3}(-1,25,3)$.

لدينا: $\overrightarrow{AB}.\vec{u_3}=(4)(-1)+(1)(25)+(3)(-7)=0$

ومنه: (Δ) يوازي المستوي (P_3) أو (Δ) محتوى في المستوي (P_3).

بما أن: النقطة $A(-1.5\ ,\ 0\ ,\ 2.5)$ تنتمي إلى كل من (P_3) و (Δ).

فإن: المستقيم (Δ) محتوى في المستوي (P_3).

3) استنتاج مجموعة حلول الجملة

حسب نتيجتي السؤالين الأول والثاني نستنتج أن الجملة تقبل عددا غير منته من الحلول وهي إحداثيات نقاط (Δ) تقاطع المستويين (P_1)، (P_2).

التفسير الهندسي:

الجملة: $\begin{cases} x+3y+z=1 \\ -3x+5y-z=2 \\ -x+25y+3z=9 \end{cases}$ تكافئ: $\begin{cases} x+3y+z-1=0 \\ -3x+5y-z-2=0 \\ -x+25y+3z-9=0 \end{cases}$

بما أن: حلول الجملة هي إحداثيات نقاط المستقيم (Δ).

فإن: المستويات (P_1)، (P_2)، (P_3) متقاطعة وفق المستقيم (Δ).

61: 1: كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ).

المستقيم (Δ) هو مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث:

$\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$ مع: t عدد حقيقي.

ومنه: $\begin{cases} x=1-2t \\ y=-1+t \\ z=2+3t \end{cases}$

2: أ) تعيين مركبات شعاع توجيه المستقيم (D).

نضع: $x=k$ فنجد: $\begin{cases} x=k \\ 4k+y=0 \\ 2k-z=0 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x=k \\ y=-4k \\ z=2k \end{cases}$

إذن: مركبات شعاع توجيه المستقيم (D) هي: $(1,-4,2)$.

ب) تبيين أن (Δ)، (D) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

موجها (Δ)، (D) غير مرتبطين خطيا لأن: $(4)(-2)\neq(1)(1)$

الجملة: $\begin{cases} k=1-2t \\ -4k=-1+t \\ 2k=2+3t \end{cases}$ لا تقبل أي حل.

إذن: المستقيمان (Δ)، (D) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

3: أ) كتابة معادلة للمستوي (P).

المستوي (P) هو مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث: $\overrightarrow{OM}.\vec{u}=0$

ومنه: معادلة للمستوي (P) $-2x+y+3z=0$

ب) إثبات أن المستقيم (D) محتوى في المستوي (P).

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستقيم (D)

ومنه: $x=k$ ، $y=-4k$ ، $z=2k$

لدينا: $-2(k)+(-4k)+3(2k)=0$

ومنه: النقطة M تنتمي إلى المستوي (P)

إذن: المستقيم (D) محتوى في المستوي (P).

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

62: بكالوريا المغرب دورة 2008 شعبة العلوم التجريبية.

1: تبيين أن مركز (S) هو $w(1,0,2)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

لدينا: $x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$

ومنه: $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=3$

إذن: مركز سطح الكرة (S) هو $w(1,0,2)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

التحقق أن النقطة A تنتمي إلى سطح الكرة (S).

لدينا: $(0-1)^2+(-1)^2+(1-2)^2=3$

ومنه: النقطة A تنتمي إلى سطح الكرة (S).

2: تبيين أن معادلة المستوي (OAB) هي: $x+y+z=0$.

بما أن: احداثيات النقاط O، A، B تحقق المعادلة: $x+y+z=0$

فإن: معادلة المستوي (OAB) هي: $x+y+z=0$.

3: إثبات أن (OAB) مماس لسطح الكرة (S) في A.

نفرض d بعد المركز w عن المستوي (OAB) فيكون:

$$d=\frac{|1+0+2|}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

بما أن: $d=\sqrt{3}=R$ فإن: المستوي (OAB) مماس لسطح الكرة (S).

وبما أن: النقطة A تنتمي إلى كل من سطح الكرة (S) والمستوي (OAB)

فإن: نقطة التماس هي A.

63: 1: إثبات أن المجموعة (S) سطح كرة.

لدينا: $x^2+y^2+z^2+2x-2y-2=0$

ومنه: $(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=4$

إذن: (S) سطح كرة مركزها $w(-1,1,0)$ ونصف قطرها $R=2$.

2: أ) تبيين أن (P_0) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة (C).

بعد المركز w عن المستوي (P_0) هو:

$$d=\frac{|3(-1)-4(0)|}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}}=\frac{3}{5}=0.6$$

بما أن: $0.6<2$ أي: $d<R$

فإن: المستوي (P_0) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة (C).

طول نصف القطر r للدائرة (C) هو: $r=\sqrt{R^2-d^2}$

أي: $r=\sqrt{4-0.36}=\frac{\sqrt{91}}{5}$.

المركز A للدائرة (C) هو نقطة تقاطع المستقيم (Δ) الذي يشمل المركز w لسطح الكرة (S) ويعامد المستوي (P_0).

المعادلات الوسيطية للمستقيم (Δ) هي:

$$\begin{cases}x=-1+t\\y=1\\z=t\end{cases}$$ مع: t عدد حقيقي.

ومنه: احداثيات المركز A هي حلول الجملة:

$$\begin{cases}x=-1+t\\y=1\\z=t\\3x-4z=0\end{cases}$$ نجد: $4t=-3+3t$ ومنه: $t=-3$.

إذن: احداثيات المركز A هي: $(-4,1,-3)$.

ب) دراسة الوضع النسبي للمستوي (P_m) والكرة (S).

بعد المركز w لسطح الكرة (S) عن المستوي (P_m) هو:

$$d=\frac{|3(-1)-4(0)+m|}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}}=\frac{|m-3|}{5}$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لندرس إشارة الفرق: $d-R=\frac{|m-3|}{5}-2$

المعادلة: $\frac{|m-3|}{5}-2=0$ تكافئ: $|m-3|=10$

ومنه: $m-3=10$ أو $m-3=-10$

إذن: $m=13$ أو $m=-7$

m	$-\infty$		-7		13		$+\infty$
$d-R$		$+$	0	$-$	0	$+$	

من هذا الجدول نستنتج أنه إذا كان:

$-7<m<13$: المستوي (P_m) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة.

$m\in\{-7,13\}$: المستوي (P_m) مماس لسطح الكرة (S).

$m>13$ أو $m<-7$: المستوي (P_m) لا يقطع سطح الكرة (S).

تمارين ومسائل متنوعة:

64: 1: أ) إثبات أن: A، B، C ليست في استقامية.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(0,1,2)$ ، $\overrightarrow{AC}(-2,1,-1)$

بما أن: $(1)(2)\neq(2)(-1)$

فإن: الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا.

معناه: النقاط A، B، C ليست في استقامية.

ب) التحقق أن $\vec{n}$ ناظم للمستوي (ABC).

بما أن: $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$

فإن: الشعاع $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$

إذن: الشعاع $\vec{n}$ ناظم للمستوي (ABC).

ج) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

المستوي (ABC) هو مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث: $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

أي: $3(x-1)+4(y)-2(z-2)=0$

معناه: $3x+4y-2z+1=0$.

2: أ) تبيين أن (P_1)، (P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ).

معادلة (P_1) هي: $2x+y+2z+1=0$

ومنه: الشعاع $\vec{n_1}(2,1,2)$ ناظم للمستوي (P_1).

معادلة (P_2) هي: $x-2y+6z=0$

ومنه: الشعاع $\vec{n_2}(1,-2,6)$ ناظم للمستوي (P_2).

بما أن: $(2)(-2)\neq(1)(6)$ فإن: $\vec{n_1}$ ، $\vec{n_2}$ غير مرتبطين خطيا.

وهذا يعني أن: المستويين (P_1)، (P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ).

ب) كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ).

المستقيم (Δ) معرف بجملة المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases}2x+y+2z+1=0\\x-2y+6z=0\end{cases}$$

نضع: $z=t$ فنجد:

$$\begin{cases}x=-0.4-2t\\y=-0.2+2t\\z=t\end{cases}\quad\text{أي:}\quad\begin{cases}2x+y=-2t-1\\x-2y=-6t\end{cases}$$

ج) دراسة الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (ABC).

الشعاع $\vec{u}(-2,2,1)$ موجه للمستقيم (Δ).

بما أن: $\vec{n}.\vec{u}=0$ فإن: الشعاعين $\vec{u}$، $\vec{n}$ متعامدان.

إذن: المستقيم (Δ) يوازي المستوي (ABC).

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3: أ) التحقق من وجود النقطة G.

لدينا: $1+2+t=3+t\neq 0$ ومنه: النقطة G موجودة.

ب) تعيين احداثيات النقطة I.

لدينا: $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

بما أن: $1+2=3\neq 0$ فإن: I مرجح للجملة $\{(A,1),(B,2)\}$

ومنه: احداثيات النقطة I هي: $\left(-\frac{2}{3},1,\frac{5}{3}\right)$

ج) كتابة الشعاع $\overrightarrow{IG}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{IC}$.

لدينا: G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,2),(C,t)\}$

ومنه: G مرجح الجملة $\{(I,3),(C,t)\}$

معناه: $3\overrightarrow{GI}+t\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ أي: $3\overrightarrow{GI}+t\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}\right)=\vec{0}$

نجد: $(3+t)\overrightarrow{GI}+t\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ إذن: $\overrightarrow{IG}=\frac{t}{3+t}\overrightarrow{IC}$.

د) إثبات أن مجموعة النقط G هي مجموعة نقاط [IC] ما عدا C.

نضع: $f(t)=\frac{t}{3+t}$ مع: $t\geq 0$.

الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$ حيث: $f'(t)=\frac{3}{(3+t)^2}$

جدول التغيرات:

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	+	
$f(t)$	0	1

بما أن: $\overrightarrow{IG}=\frac{t}{3+t}\overrightarrow{IC}$ و $0\leq\frac{t}{3+t}<1$

فإن: مجموعة النقط G عندما يتغير t في المجال $[0,+\infty[$ هي مجموعة نقاط القطعة [IC] ما عدا النقطة C.

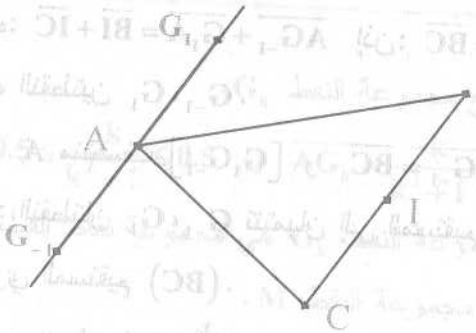
ه) تحديد قيمة العدد t.

تكون النقطة G منتصف [IC] إذا كان: $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$

بالمطابقة مع العلاقة: $\overrightarrow{IG}=\frac{t}{3+t}\overrightarrow{IC}$

نجد: $\frac{t}{3+t}=\frac{1}{2}$ ومنه: $t=3$.

65: 1: أ) تمثيل النقاط A، B، C، I.



ب) تبيين أن $\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{CI}$ و $\overrightarrow{AG_{-1}}=\overrightarrow{BI}$.

لدينا: G_1 مرجح الجملة: $\{(A,2),(B,1),(C,-1)\}$

ومنه: $2\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{G_1B}-\overrightarrow{G_1C}=\vec{0}$

أي: $2\overrightarrow{G_1A}+\left(\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{AB}\right)-\left(\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

معناه: $2\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

وبالتالي: $\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)$ إذن: $\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CI}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لدينا أيضا: G_{-1} مرجح الجملة: $\{(A,2),(B,-1),(C,1)\}$

ومنه: $2\overrightarrow{G_{-1}A}-\overrightarrow{G_{-1}B}+\overrightarrow{G_{-1}C}=\vec{0}$

بنفس الطريقة نجد: $\overrightarrow{AG_{-1}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BI}$.

ج) استنتاج أن A منتصف $[G_1G_{-1}]$.

لدينا: $\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{CI}$ ، $\overrightarrow{AG_{-1}}=\overrightarrow{BI}$

بالجمع نجد: $\overrightarrow{AG_1}+\overrightarrow{AG_{-1}}=\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}$

وهذا يعني أن: A منتصف $[G_1G_{-1}]$.

استنتاج أن: $\overrightarrow{G_1G_{-1}}=\overrightarrow{BC}$

من العلاقتين: $\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{CI}$ ، $\overrightarrow{AG_{-1}}=\overrightarrow{BI}$

وبالطرح نجد: $\overrightarrow{AG_{-1}}-\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{CI}$

معناه: $\overrightarrow{AG_{-1}}+\overrightarrow{G_1A}=\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}$ إذن: $\overrightarrow{G_1G_{-1}}=\overrightarrow{BC}$.

انشاء النقطتين G_1، G_{-1}.

لدينا: A منتصف $[G_1G_{-1}]$ و $\overrightarrow{G_1G_{-1}}=\overrightarrow{BC}$

ومنه: النقطتان G_1، G_{-1} تنتميان إلى المستقيم الذي يشمل النقطة A ويوازي المستقيم (BC).

2: أ) تبيين أن $\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$.

لدينا: $\overrightarrow{G_kA}+k\overrightarrow{G_kB}-k\overrightarrow{G_kC}=\vec{0}$ ومنه:

$(k^2+1)\overrightarrow{G_kA}+k(\overrightarrow{G_kA}+\overrightarrow{AB})-k(\overrightarrow{G_kA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

معناه: $(k^2+1)\overrightarrow{G_kA}+k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA})=\vec{0}$

إذن: $\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$.

ب) تشكيل جدول تغيرات الدالة f.

الدالة f حيث: $f(x)=\frac{-x}{x^2+1}$ تقبل الاشتقاق على المجال $[-1,1]$

حيث: $f'(x)=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

ومنه: جدول تغيرات الدالة f هو:

x	-1		1
$f'(x)$	0	−	0
$f(x)$	0.5	↘	-0.5

ج) استنتاج مجموعة النقط G_k.

لدينا: $\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$ و $-0.5\le\frac{-k}{k^2+1}\le 0.5$

ومنه: مجموعة النقط G_k هي مجموعة نقاط القطعة $[G_1G_{-1}]$.

3: تعيين مجموعة النقط M.

لدينا: $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG_1}$ و $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG_{-1}}$

ومنه: $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$

تكافئ: $2MG_1=2MG_{-1}$ أي: $MG_1=MG_{-1}$

إذن: مجموعة النقط M هي مجموعة نقط المستوي المحوري للقطعة $[G_1G_{-1}]$ أي: المستوي الذي يشمل النقطة A ويعامد (BC).

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

66: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2008 شعبة العلوم التجريبية.

1) التحقق أن النقاط $A، B، C$ ليست على استقامة واحدة.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(1,2,-1)$ ، $\overrightarrow{CB}(4,4,-2)$

بما أن: $(1)(4)\neq(4)(2)$ فإن: $\overrightarrow{AB}، \overrightarrow{CB}$ غير مرتبطين خطيا.

وهذا يعني أن: النقاط $A، B، C$ ليست على استقامة واحدة.

تبيين أن معادلة (ABC) هي: $y+2z-2=0$.

بما أن: إحداثيات النقاط $A، B، C$ تحقق المعادلة: $y+2z-2=0$

فإن: معادلة المستوي (ABC) هي $y+2z-2=0$.

2) أ: التحقق أن المستويين (P)، (ABC) متعامدان.

الشعاعان $\vec{u}(1,2,-1)$ ، $\vec{v}(0,1,2)$ ناظميان للمستويين (P)، (ABC) على الترتيب.

لدينا: $\vec{u}.\vec{v}=(0)(1)+(1)(2)+(2)(-1)=0$

ومنه: $\vec{u}، \vec{v}$ متعامدان.

إذن: المستويان (P) ، (ABC) متعامدان.

تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ):

المستقيم (Δ) معرف بجملة المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} x+2y-z+7=0 \\ y+2z-2=0 \end{cases}$$

النقطتان: $C(-1,-2,2)$ ، $D(-6,0,1)$ تنتميان إلى (Δ).

ومنه: شعاع توجيه (Δ) هو: $\overrightarrow{DC}(5,-2,1)$.

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستقيم (Δ) إذا وجد عدد حقيقي t حيث: $\overrightarrow{CM}=t\vec{u}$

معناه: $\begin{cases} x+1=5t \\ y+2=-2t \\ z-2=t \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x=-1+5t \\ y=-2-2t \\ z=2+t \end{cases}$

طريقة أخرى:

لدينا: $\begin{cases} x+2y-z+7=0 \\ y+2z-2=0 \end{cases}$ ، بوضع $z=t$ نجد:

معناه: $\begin{cases} x+2y-t+7=0 \\ y+2t-2=0 \\ z=t \end{cases}$ $\begin{cases} x=-11+5t \\ y=2-2t \\ z=t \end{cases}$

ب) حساب بعد النقطة A عن (Δ).

بما أن: المستويين (P) و (ABC) متعامدان و $(ABC)\cap(P)=(\Delta)$

فإن: بعد A عن (Δ) يساوي بعد A عن المستوي (P).

أي: $d=\dfrac{|2+2(0)-1+7|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{8}{\sqrt{6}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

3) تعيين قيمة العدد α:

لدينا: $\overrightarrow{GA}+\alpha\overrightarrow{GB}+\beta\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

نفرض (x,y,z) إحداثيات النقطة G فيكون:

$z=\dfrac{1+2\beta}{1+\alpha+\beta}$ ، $y=\dfrac{2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta}$ ، $x=\dfrac{2+3\alpha-\beta}{1+\alpha+\beta}$

تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ) إذا حققت إحداثياتها معادلة المستوي (P) لأن: المستقيم (Δ) محتوى في المستوي (P).

ومنه: $\dfrac{2+3\alpha-\beta}{1+\alpha+\beta}+\dfrac{4\alpha-4\beta}{1+\alpha+\beta}-\dfrac{1+2\beta}{1+\alpha+\beta}+7=0$

نضرب الطرفين في العدد: $1+\alpha+\beta$ فنجد:

$2+3\alpha-\beta+4\alpha-4\beta-(1+2\beta)+7(1+\alpha+\beta)=0$

أي: $14\alpha+8=0$ إذن: $\alpha=\dfrac{-4}{7}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

1: كتابة معادلة لسطح الكرة (S).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من سطح الكرة (S) إذا كان: $CM^2 = AC^2$

لدينا: $AC^2 = (1-0)^2 + (0-2)^2 + (-1-1)^2 = 9$

إذن: معادلة سطح الكرة (S) هي: $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$

2: أ) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: المستقيم (Δ) يعامد المستوي (P)

فإن: شعاع ناظم (P) هو شعاع توجيه المستقيم (Δ) أي: $\vec{u}(-1,2,2)$.

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (P) إذا كان: $\overrightarrow{CM}.\vec{u} = 0$

أي: $(-1)(x-1)+2(y)+2(z+1)=0$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $-x+2y+2z+3=0$

ب) حساب بعد النقطة C عن (Δ).

نفرض H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (Δ) فيكون:

$\overrightarrow{CH}.\vec{u} = 0$ و $H \in (\Delta)$

أي: $-(-1-t)+2(1+2t)+2(-3+2t)+3=0$

ومنه: $t=0$ إذن: إحداثيات H هي: $(-1,1,-3)$

لدينا: $CH^2 = (-1-1)^2 + (1-0)^2 + (-3+1)^2 = 9$

إذن: بعد النقطة C عن المستقيم (Δ) هو: $CH = 3$

ج) استنتاج الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والكرة (S).

المستقيم (Δ) مماس لسطح الكرة (S) لأن بعد مركزها C عن المستقيم (Δ) يساوي طول نصف قطرها.

1) إثبات أن النقاط A، B، C تعين مستويا.

تعين النقاط A، B، C مستويا إذا كانت ليست على استقامة واحدة أي:

إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(2,0,-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(0,1,1)$

بما أن: $(0)(1) \neq (-1)(1)$

فإن: الشعاعين $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

إذن: النقاط A، B، C تعين مستويا.

إعطاء معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (ABC) إذا وجد عددان حقيقيان α، β بحيث: $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

أي إذا كان: محدد $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ معدوما

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-2 & 0 & 1 \\ z-2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ومنه: $(1)(x-1)-(y-2)(2)+(z-2)(2)=0$

إذن: معادلة المستوي (ABC) هي: $x-2y+2z-1=0$

2) إثبات أن المستويين (P_1)، (P_2) متقاطعان.

شعاع ناظم المستوي (P_1) هو: $\vec{u_1}(1,-2,2)$

وشعاع ناظم المستوي (P_2) هو: $\vec{u_2}(1,-3,2)$

بما أن: $(1)(-2) \neq (-3)(1)$ فإن: الشعاعين $\vec{u_1}$، $\vec{u_2}$ غير مرتبطين خطيا.

وهذا يعني أن: المستويين (P_1)، (P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ).

3) تبيين أن النقطة C تنتمي إلى (Δ).

بما أن: إحداثيات النقطة C تحقق معادلتي المستويين (P_1)، (P_2)

فإن: النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ).

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4) تبيين أن $\vec{u}$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

يكون الشعاع $\vec{u}$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) إذا وفقط إذا كان:

الشعاع $\vec{u}$ عمودياً على كل من الشعاعين $\vec{u_1}$ ، $\vec{u_2}$.

لدينا: $\vec{u}.\vec{u_1}=0$ و $\vec{u}.\vec{u_2}=0$

ومنه: $\vec{u}$ عمودي على كل من الشعاعين $\vec{u_1}$ ، $\vec{u_2}$.

إذن: $\vec{u}(2,0,-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

5) استنتاج التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستقيم (Δ) إذا وجد عدد حقيقي t

حيث: $\overrightarrow{CM}=t\vec{u}$ أي:

$$\begin{cases} x-1=2t \\ y-3=0 \\ z-3=-t \end{cases}$$ معناه: $$\begin{cases} x=1+2t \\ y=3 \\ z=3-t \end{cases}$$

6) إيجاد قيمة الوسيط t:

يتعامد الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ ، $\vec{u}$ إذا كان: $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$

أي: $(2)(2t)+(0)(1)+(-1)(1-t)=0$ إذن: $t=0.2$.

استنتاج المسافة بين A و (Δ):

من أجل: $t=0.2$ نجد: $(x,y,z)=(1.4,3,2.8)$ وهي إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (Δ)

ومنه: بعد النقطة A عن (Δ) هو الطول AH حيث:

$$AH=\sqrt{(1.4-1)^2+(3-2)^2+(2.8-2)^2}=\sqrt{\frac{45}{25}}=\sqrt{1.6}$$

69: 1: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (P) إذا كان: $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$

أي: $-2(x-1)+(y+2)+5(z-1)=0$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $-2x+y+5z-1=0$

2: تبيين أن المستويين (P)، (P') متعامدان.

الشعاع $\vec{u'}(1,2,0)$ ناظم للمستوي (P').

لدينا: $\vec{u}.\vec{u'}=(1)(-2)+(2)(1)+(0)(5)=0$ ومنه: $\vec{u}$ ، $\vec{u'}$ متعامدان.

إذن: المستوي (P) يعامد المستوي (P').

3: تبيين أن النقطة B تنتمي إلى (Δ).

بما أن: النقطة B تنتمي إلى كل من المستويين (P)، (P') فإنها تنتمي إلى المستقيم (Δ).

وبما أن: الشعاع $\vec{v}$ عمودي على كل من الشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{u'}$ فإن:

الشعاع $\vec{v}(2,-1,1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

4: حساب بعد النقطة C عن كل من (P)، (P').

$$d_1=\frac{|-2(5)+(-2)+5(-1)-1|}{\sqrt{(-2)^2+(1)^2+(5)^2}}=\frac{18}{\sqrt{30}}=\frac{3\sqrt{30}}{5}$$

$$d_2=\frac{|5+2(-2)-7|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

استنتاج بعد النقطة C عن (Δ):

لتكن: H_1 المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P).

H_2 المسقط العمودي للنقطة H_1 على المستقيم (Δ).

المثلث CH_1H_2 قائم في H_1 ومنه: $CH_2^2=CH_1^2+H_1H_2^2$

لدينا: $CH_1^2=\left(\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2=10.8$ ، $H_1H_2^2=\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2=7.2$

ومنه: $CH_2^2=18$ إذن: $CH_2=3\sqrt{2}$

إذن: بعد النقطة C عن المستقيم (Δ) هو: $3\sqrt{2}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

5: أ) التحقق أن M تنتمي إلى (Δ).

لدينا: $\overrightarrow{BM}(2+2t,-t-1,t+1)$ و $\vec{v}(2,-1,1)$

بما أن: الشعاعين $\overrightarrow{BM}$ ، $\vec{v}$ مرتبطان خطيا وذلك لأن:

$(2)(-t-1)=(-1)(2+2t)$ و $(1)(-t-1)=(-1)(1+t)$

فإن: النقطة M تنتمي إلى المستقيم (Δ).

ب: تبيين أن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى.

لدينا: $f(t)=CM^2$

ومنه: $f(t)=(1+2t-5)^2+(3-t+2)^2+(t+1)^2$

بعد النشر والتبسيط نجد: $f(t)=6t^2-24t+42$

الدالة f تقبل الاشتقاق على IR حيث: $f'(t)=12t-24$

ومنه جدول تغيرات الدالة f:

t	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	18	↗	

ومنه: أصغر قيمة تبلغها الدالة f هي $f(2)=18$.

استنتاج بعد النقطة C عن المستقيم (Δ).

بعد النقطة C عن المستقيم (Δ) هو: $CM=\sqrt{f(2)}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

70: 1: أ) إثبات أن النقاط A، B، C ليست على استقامة واحدة.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(0,1,1)$ ، $\overrightarrow{AC}(2,-2,2)$

بما أن: $(0)(-2)\neq(1)(2)$

فإن: الشعاعين: $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

وهذا يعني أن: النقاط A، B، C ليست على استقامة واحدة

ب) تبيين أن معادلة المستوي (ABC) هي: $2x+y-z-3=0$

بما أن: إحداثيات النقاط A، B، C تحقق المعادلة: $2x+y-z-3=0$

فإن: معادلة المستوي (ABC) هي: $2x+y-z-3=0$

2: إثبات أن المستويين (P)، (P') متقاطعان.

شعاع ناظم المستوي (P) هو $\vec{u}(1,2,-1)$.

وشعاع ناظم المستوي (P') هو $\vec{v}(2,3,-2)$.

بما أن: $(2)(2)\neq(3)(1)$ فإن: الشعاعين $\vec{u}$، $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً

وهذا يعني أن: المستويين (P)، (P') متقاطعان وفق مستقيم (Δ) معرف بجملة المعادلتين التاليتين: $\begin{cases}x+2y-z-4=0\\2x+3y-2z-5=0\end{cases}$

أي: $\begin{cases}x=-2y+z+4\\2(-2y+z+4)+3y-2z-5=0\end{cases}$

معناه: $\begin{cases}x=-2y+z+4\\-y+3=0\end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases}x=-2+z\\y=3\end{cases}$

نضع: $z=t$ فنحصل على التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ):

$\begin{cases}x=-2+t\\y=3\\z=t\end{cases}$ مع: t عدد حقيقي.

3: تحديد تقاطع المستويات (ABC)، (P)، (P'):

لدينا: حسب نتيجة السؤال الثاني المستويان (P)، (P') متقاطعان وفق المستقيم (Δ) الذي شعاع توجيه له $\vec{w}(1,0,1)$.

لدينا أيضاً: $\vec{m}(2,1,-1)$ شعاع ناظم للمستوي (ABC).

بما أن: $\vec{w}.\vec{m}=1\neq 0$ فإن: الشعاعين $\vec{w}$، $\vec{m}$ غير متعامدين

وهذا يعني أن: المستقيم (Δ) يقطع المستوي (ABC) في نقطة ولتكن D إحداثياتها (x,y,z) تحقق الجملة:

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \\ 2x+y-z-3=0 \end{cases} \quad \text{أي:} \quad \begin{cases} x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \\ 2(-2+t)+3-t-3=0 \end{cases}$$

نجد: $\begin{cases} x=-2+4 \\ y=3 \\ z=4 \\ t=4 \end{cases}$ إذن: $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=4 \end{cases}$

إذن: المستويات (ABC)، (P)، (P') تتقاطع في النقطة $D(2,3,4)$

4: حساب بعد النقطة A عن (Δ).

لتكن $H(x,y,z)$ المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ)

ومنه: $H\in(\Delta)$ و $\overrightarrow{AH}.\vec{w}=0$.

$H\in(\Delta)$ معناه: $\begin{cases} x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$

$\overrightarrow{AH}.\vec{w}=0$ معناه: $(-3+t)(1)+(0)(3-1)+(1)(t-0)=0$

معناه: $2t-3=0$ ومنه: $t=1.5$.

إذن: إحداثيات النقطة H هي: $(-0.5,3,1.5)$

ومنه: بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) هو AH حيث:

$$AH=\sqrt{(1+0.5)^2+(1-3)^2+(0-1.5)^2}=\sqrt{8.5}$$

71: 1: تبيين أن النقاط A، B، C تعين مستوياً.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-1,3,3)$ ، $\overrightarrow{AC}(-2,4,4)$

بما أن: $(-1)(4)\neq(3)(-2)$ فإن: $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطتين خطياً.

معناه: النقاط A، B، C تعين مستوياً.

2: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (ABC) إذا وجد عددان حقيقيان α، β بحيث: $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ أي:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -1 & -2 \\ y+3 & 3 & 4 \\ z+1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=0$$

معناه: $(x-2)(0)-(y+3)(2)+(z+1)(2)=0$

إذن: معادلة المستوي (ABC) هي: $-y+z-2=0$

3: أ) تبيين أن المجموعة (S) سطح كرة.

لدينا: $\Delta=(-2\theta)^2+(-2\sin\theta)^2+(2)^2-4(\theta^2-\cos^2\theta)$

ومنه: $\Delta=4\theta^2+4\sin^2\theta+4-4\theta^2+4\cos^2\theta$

أي: $\Delta=4+4(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=4+4(1)=8$

بما أن: $\Delta>0$ فإن: (S) سطح كرة مركزها $w(\theta,\sin\theta,-1)$

وطول نصف قطرها $R=\frac{\sqrt{\Delta}}{2}=\sqrt{2}$.

ب) دراسة حسب قيم θ عدد نقاط تقاطع (ABC) و (S).

بعد المركز w عن المستوي (ABC) هو d حيث:

$$d=\frac{|-(\sin\theta)+(-1)-2|}{\sqrt{(0)^2+(-1)^2+(1)^2}}=\frac{|3+\sin\theta|}{\sqrt{2}}=\frac{3+\sin\theta}{\sqrt{2}}$$

لندرس إشارة الفرق $d-R$:

$$d-R=\frac{3+\sin\theta}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\frac{1+\sin\theta}{\sqrt{2}}$$

θ	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		π
$d-R$		+	0	+	

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

من هذا الجدول نستنتج أنه:

إذا كان: $\theta=-\frac{\pi}{2}$ عدد نقاط التقاطع هو 1.

معناه: المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S).

إذا كان: $-\frac{\pi}{2}<\theta\leq\pi$ أو $-\pi\leq\theta<-\frac{\pi}{2}$ عدد نقاط التقاطع هو 0.

ج) تعيين إحداثيات نقطة التماس H.

من أجل: $\theta=-\frac{\pi}{2}$ نجد: $w\left(-\frac{\pi}{2},-1,-1\right)$

ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة w والعمودي على (ABC)

ومنه: شعاع توجيه المستقيم (Δ) هو $\vec{u}(0,-1,1)$

إذن: التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) هو:

$$\begin{cases}x=-\frac{\pi}{2}\\ y=-1-t\\ z=-1+t\end{cases}$$ مع: t عدد حقيقي.

ومنه إحداثيات نقطة التماس H هي حلول الجملة:

$$\begin{cases}x=-\frac{\pi}{2}\\ y=-1-t\\ z=-1+t\\ -(-1-t)+(-1+t)-2=0\end{cases}$$ أي: $$\begin{cases}x=-\frac{\pi}{2}\\ y=-1-t\\ z=-1+t\\ -y+z-2=0\end{cases}$$

معناه: $$\begin{cases}x=-\frac{\pi}{2}\\ y=-1-t\\ z=-1+t\\ 2t-2=0\end{cases}$$ ومنه: $$\begin{cases}x=-\frac{\pi}{2}\\ y=-2\\ z=0\\ t=1\end{cases}$$

إذن: إحداثيات نقطة التماس H هي $\left(-\frac{\pi}{2},-2,0\right)$.

72: 1) برهان أن المثلث ABC قائم في A.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(3,3,3)$ ، $\overrightarrow{AC}(3,0,-3)$

ومنه: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ إذن: المثلث ABC قائم في A.

2) تبيين أن المستقيم (AD) عمودي على (ABC).

لدينا: $\overrightarrow{AD}(-3,6,-3)$ ومنه: $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=0$

وهذا يعني أن: المستقيم (AD) عمودي على كل من (AB) و (AC).

إذن: المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

3) حساب الحجم V لرباعي الوجوه ABCD.

حجم رباعي الوجوه ABCD يعطى بالعلاقة:

$V=\frac{1}{3}\times S\times AD$ حيث: S مساحة المثلث ABC.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(3,3,3)$ ، $\overrightarrow{AC}(3,0,-3)$ ، $\overrightarrow{AD}(-3,6,-3)$

ومنه: $AB=3\sqrt{3}$ ، $AC=3\sqrt{2}$ ، $AD=3\sqrt{6}$

إذن: $V=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}\times3\sqrt{2}}{2}\times3\sqrt{6}=27$

4) تعيين قيساً للزاوية $\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$.

نفرض θ قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$ فيكون:

$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=DB\times DC\times\cos\theta$

لدينا: $\overrightarrow{DB}(6,-3,6)$ ، $\overrightarrow{DC}(6,-6,0)$

ومنه: $54=9\times6\sqrt{2}\cos\theta$ أي: $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن: $\theta=\frac{\pi}{4}$ أو $\theta=-\frac{\pi}{4}$

5) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: المستقيم (AC) عمودي على المستوي (P) فإن: شعاع ناظم المستوي (P) هو: $\overrightarrow{AC}(3,0,-3)$.

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي إذا كان: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=0$

أي: $(x-3)(3)+(y+2)(0)+(z-2)(-3)=0$ نجد: $x-z-1=0$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $x-z-1=0$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

6) برهان أن المستوي (P') عمودي على (AB).

إحداثيات النقطة A تحقق المعادلة: $x+y+z-3=0$

ومنه: النقطة A تنتمي إلى المستوي (P') (1)

شعاع ناظم المستوي (P') هو: $\vec{u}(1,1,1)$ ومنه: $\overrightarrow{AB}=3\vec{u}$

ومنه: $\overrightarrow{AB}$ ، $\vec{u}$ مرتبطان خطياً (2)

من (1) و (2) نستنتج أن:

المستقيم (AB) عمودي على المستوي (P') في النقطة A.

7) تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ).

المستقيم (Δ) معرف بجملة المعادلتين التاليتين:

$\begin{cases} x-z-1=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases}$ ، نضع $z=t$ فنجد:

$\begin{cases} x-t-1=0 \\ x+y+t-3=0 \\ z=y \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=t \end{cases}$

73: بكالوريا تونس دورة 2008 شعبة العلوم التجريبية.

1: تبيين أن $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ متعامدان.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-2,0,-2)$ ، $\overrightarrow{AC}(1,-4,-1)$ ومنه: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

وهذا يعني أن: الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ متعامدان.

2: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (ABC) إذا وجد عددان حقيقيان α ، β بحيث: $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ أي:

$$\begin{vmatrix} x-3 & -2 & 1 \\ y-2 & 0 & -4 \\ z-6 & -2 & -1 \end{vmatrix}=0$$

ومنه: $(x-3)(-8)-(y-2)(4)+(z-6)(8)=0$

إذن: المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $2x+y-2z+4=0$

3: تعيين إحداثيات النقطة H.

نفرض (a,b,c) إحداثيات H.

بما أن: H هي المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC) فإن:

- $H\in(ABC)$ و $\overrightarrow{OH}$ ، $\vec{u}(2,1,-1)$ مرتبطان خطياً.
- $H\in(ABC)$ ومنه: $2a+b-c+4=0$ (1)
- $\overrightarrow{OH}$ ، $\vec{u}(2,1,-1)$ مرتبطان خطياً ومنه:

$a=2b$ و $c=-2b$ (2)

من (1) و (2) نجد: $2(2b)+b-(-2b)+4=0$ أي: $b=-\frac{4}{9}$

وبالتالي: $a=-\frac{8}{9}$ ، $c=\frac{8}{9}$.

إذن: إحداثيات النقطة H هي: $\left(-\frac{8}{9},-\frac{4}{9},\frac{8}{9}\right)$

حساب حجم رباعي الوجوه OABC.

حجم رباعي الوجوه OABC هو V حيث:

$V=\frac{1}{3}\times S\times OH$ حيث: S مساحة المثلث ABC.

لدينا: $OH^2=\left(\frac{-8}{9}\right)^2+\left(\frac{-4}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^2=\frac{144}{81}$ ومنه: $OH=\frac{4}{3}$

نعلم أن: $S=\frac{1}{2}\times AB\times AC$ ومنه: $S=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2}\right)=6$

إذن: حجم رباعي الوجوه OABC هو: $V=\frac{1}{3}(6)\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3}$.

4: أ) تبيين أن تقاطع (S) و (ABC) هو دائرة (C).

طول نصف قطر سطح الكرة (S) هو: $R=OA=7$.

بعد النقطة O عن المستوي (ABC) هو: $OH=\frac{4}{3}$

بما أن: $OH<R$ فإن: المستوي (ABC) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة (C) مركزها المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC) أي: النقطة H.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ب) حساب طول نصف قطر الدائرة (C).

طول نصف قطر الدائرة (C) هو r حيث:

$r^2 = R^2 - OH^2 = \frac{425}{9}$ أي: $r = \frac{5\sqrt{17}}{3}$.

5: أ) حساب إحداثيات النقطة G.

بما أن: G مرجح الجملة: $\{(O,3)،(A,1)،(B,1)،(C,1)\}$

فإن: $3\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

معناه: $6\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ أي: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$

نفرض (x,y,z) إحداثيات النقطة G فيكون:

$x = \frac{3+1+4}{6} = \frac{4}{3}$ ، $y = \frac{2+2-2}{6} = \frac{1}{3}$ ، $z = \frac{6+4+5}{6} = \frac{5}{2}$

- بعد النقطة G عن المستوي (ABC) هو d حيث:

$$d = \frac{\left|2\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{3} - 2\left(\frac{5}{2}\right) + 4\right|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}$$

ب) تبيين أن (S') سطح كرة:

لدينا: $3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG} + \left(3\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)$

ومنه: $3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG}$

المعادلة: $\left\|3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 4$

تكافئ: $6MG = 4$ أي: $MG = \frac{2}{3}$

إذن: المجموعة (S') سطح كرة مركزها G ونصف قطرها $R = \frac{2}{3}$.

ج) استنتاج أن (ABC) مماس لسطح الكرة (S').

بما أن: $d = \frac{2}{3} = R$ فإن: المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S').

74: 1) برهان أن (P_1)، (P_2) متعامدان.

شعاع ناظم (P_1) هو $\vec{u}(0,2,1)$ وشعاع ناظم (P_2) هو: $\vec{v}(0,1,-2)$

بما أن: $\vec{u}.\vec{v} = 0$ فإن: المستويين (P_1)، (P_2) متعامدان.

2) تبيين أن (P_1)، (P_2) متقاطعان وفق المستقيم (AB).

بما أن: إحداثيات النقطتين A، B تحققان معادلتي المستويين (P_1)، (P_2)

فإنهما تنتميان إلى كل من المستويين (P_1)، (P_2)

إذن: تقاطع المستويين (P_1)، (P_2) هو المستقيم (AB).

3) تعيين إحداثيات النقطتين C، D.

نفرض: (x,y,z) إحداثيات النقطة C.

بما أن: النقطة C تنتمي إلى المحور $(O;J)$ فإن: $x = z = 0$

وبما أن: النقطة C تنتمي إلى المستوي (P_1) فإن: $2y + 0 - 6 = 0$

أي: $y = 3$ إذن: إحداثيات النقطة C هي: $(0,3,0)$

وبنفس الطريقة نجد إحداثيات النقطة D هي: $(0,-12,0)$

4) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P_3).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (P_3) إذا كان: $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AD} = 0$

لدينا: $\overrightarrow{CM}(x,y-3,z)$ ، $\overrightarrow{AD}(-3,-12,-6)$

ومنه: المعادلة الديكارتية للمستوي (P_3) هي: $x + 4y + 2z - 12 = 0$

5) كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (OA).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستقيم (OA) إذا وجد عدد حقيقي t

حيث: $\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{OA}$ ومنه: $\begin{cases} x = 3t \\ y = 0 \\ z = 6t \end{cases}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تعيين إحداثيات النقطة E :

نفرض: (x,y,z) إحداثيات النقطة E فيكون:

$3t+4(0)+2(6t)-12=0$ ومنه: $t=0.8$

إذن: إحداثيات النقطة E هي: $(2.4\ ,0\ ,4.8)$.

6) تحديد علاقة النقطة E بالمثلث ACD .

الشعاعان $\overrightarrow{AE}$ ، $\overrightarrow{CD}$ متعامدان ومنه: E تنتمي إلى العمود المتعلق بالضلع [CD] في المثلث ACD (1)

النقطتان C ، E تنتميان إلى المستوي (P_3) الذي شعاع ناظمه $\overrightarrow{AD}$

ومنه: الشعاعان $\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{EC}$ متعامدان وبالتالي: E تنتمي إلى العمود المتعلق بالضلع [AD] في المثلث ACD (2)

من (1) و (2) نستنتج أن: E هي نقطة تقاطع أعمدة المثلث ACD .

75: 1: حساب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(0,2,0)$ ، $\overrightarrow{BC}(0,0,-6)$ ومنه: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0$

وبالتالي: $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ متعامدان إذن: المثلث ABC قائم في B .

2: تبيين أن الشعاع $\overrightarrow{AD}$ ناظم للمستوي (ABC).

لدينا: $\overrightarrow{AD}(18,0,0)$ ومنه: $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=0$

ومنه: $\overrightarrow{AD}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$.

إذن: الشعاع $\overrightarrow{AD}$ ناظم للمستوي (ABC).

كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (ABC) إذا كان:

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}=0$ أي: $x-1=0$.

إذن: المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $x-1=0$.

3: تبيين أن $\overrightarrow{CE}$ ، $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطيا.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(0,2,0)$ ، $\overrightarrow{CE}(18,0,6)$

بما أن: $(0)(0)\neq(2)(6)$ فإن: $\overrightarrow{CE}$ ، $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطيا.

وهذا يعني أن: النقطة E لا تنتمي إلى المستوي (ABC).

4: تعيين إحداثيات النقطة G .

حسب نتيجة السؤال الأول لدينا $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ متعامدان وبالتالي:

يكون الرباعي ABCG مستطيلا إذا كان: $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BC}$

نفرض (x,y,z) إحداثيات G فنجد:

$$\begin{cases}x-1=0\\y+1=0\\z-3=-6\end{cases} \quad \text{أي:} \quad \begin{cases}x=1\\y=-1\\z=-3\end{cases}$$

إذن: إحداثيات النقطة G هي: $(1,-1,-3)$.

5: التحقق أن النقاط D ، E ، F ليست في استقامية.

لدينا: $\overrightarrow{DE}(0,2,0)$ ، $\overrightarrow{DF}(0,2,-6)$

بما أن: $(0)(2)\neq(2)(-6)$ فإن: $\overrightarrow{DE}$ ، $\overrightarrow{DF}$ غير مرتبطين خطياً

وهذا يعني أن: النقاط D ، E ، F ليست في استقامية.

6: دراسة الوضع النسبي للمستويين (ABC) ، (DEF).

لدينا: $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DE}=0$ و $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DF}=0$

ومنه: الشعاع $\overrightarrow{AD}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{DE}$ ، $\overrightarrow{DF}$.

ومنه: الشعاع $\overrightarrow{AD}$ ناظم للمستوي (DEF) (1)

حسب نتيجة السؤال الثاني لدينا:

الشعاع $\overrightarrow{AD}$ ناظم للمستوي (ABC) (2)

من (1) و (2) نستنتج أن: المستويين (ABC) ، (DEF) متوازيان ومختلفان أو منطبقان.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

حسب نتيجة السؤال الثالث النقطة E لا تنتمي إلى المستوي (ABC) وتنتمي إلى المستوي (DEF).

إذن: المستويان (ABC)، (DEF) متوازيان ومختلفان.

7: أ) حساب الأطوال a، b، c.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(0,2,0)$ ، $\overrightarrow{BC}(0,0,-6)$ ، $\overrightarrow{AD}(18,0,0)$

ومنه: $AB=2$ ، $BC=6$ ، $AD=18$

وبالتالي: $(a,b,c)=(2,6,18)$

ب) تبيين أن المتتالية (a,b,c) هندسية

بما أن: $b^2=36=ac$ فإن: المتتالية $(a,b,c)=(2,6,18)$

هندسية أساسها: $q=\frac{b}{a}=3$.

76: 1: تبيين أن النقاط A، B، C تعين مستوياً.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-1,-1,1)$ ، $\overrightarrow{AC}(-2,-5,-1)$

بما أن: $(-1)(-5)\neq(-1)(-2)$ فإن: $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

معناه: النقاط A، B، C ليست على استقامة واحدة.

إذن: النقاط A، B، C تعين مستويا.

2: إيجاد إحداثيات النقطة G.

بما أن: G مركز ثقل المثلث ABC فإن: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

أي: $3\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

معناه: $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$ ومنه:

$x_G=\frac{1+0-1}{3}=0$ ، $y_G=\frac{2+1-3}{3}=0$ ، $z_G=\frac{3+4+2}{3}=3$

إذن: إحداثيات النقطة G هي: $(0,0,3)$

3: أ) التحقق أن $\vec{u}(2,-1,1)$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$.

بما أن: $\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{u}=0$.

فإن: الشعاع $\vec{u}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$.

ب) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

حسب نتيجة السؤال الثالث فرع (أ) فإن: $\vec{u}$ ناظم للمستوي (ABC).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (ABC) إذا كان: $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$

أي: $2x-y+z-3=0$.

4: تبيين أن (Δ) عمودي على المستوي (ABC).

لدينا: $\vec{v}(-2,1,-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

$\vec{u}(2,-1,1)$ شعاع ناظم للمستوي (ABC).

واضح أن: $\vec{u}=-\vec{v}$ ومنه: $\vec{u}$، $\vec{v}$ مرتبطان خطيا.

وهذا يعني أن: المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC).

5: إثبات أن G هي المسقط العمودي للنقطة D على (ABC).

بما أن: إحداثيات النقطة G تحقق معادلة المستوي (ABC)

فإن: G تنتمي إلى المستوي (ABC) (1)

لدينا: $\overrightarrow{DG}(-4,2,-2)$ ، $\vec{u}(2,-1,1)$ ومنه: $\overrightarrow{DG}=-2\vec{u}$

معناه: $\vec{u}$ و $\overrightarrow{DG}$ مرتبطان خطياً (2)

من (1) و (2) نستنتج أن:

G هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

77: 1) كتابة معادلة لسطح الكرة (S)

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من سطح الكرة (S) إذا كان: $BM^2=AB^2$

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-12,6,0)$ ، $\overrightarrow{BM}(x+6,y,z-6)$

ومنه: معادلة سطح الكرة (S) هي: $(x+6)^2+y^2+(z-6)^2=180$

2) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: المستوي (P) مماس لسطح الكرة (S) في النقطة A.

فإن: المستوي (P) هو مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء

حيث: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

أي: $-12(x-6)+6(y+6)+(0)(z-6)=0$

معناه: $-2x+y+18=0$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $-2x+y+18=0$.

3) تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

بما أن: المستقيم (Δ) يعامد المستوي (P).

فإن: شعاع ناظم (P) هو شعاع توجيه (Δ) أي: الشعاع $\vec{u}(-2,1,0)$

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستقيم (Δ) إذا وجد عدد حقيقي t

حيث: $\overrightarrow{CM}=t\vec{u}$

معناه: $\begin{cases} x+2=-2t \\ y+2=t \\ z-11=0 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x=-2-2t \\ y=-2+t \\ z=11 \end{cases}$

4) تحديد إحداثيات النقطة D.

بما أن: النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ) فإن:

إحداثياتها هي $(-2-2t,-2+t,11)$.

وبما أن: النقطة D تنتمي إلى المستوي (P).

فإن: إحداثياتها تحقق المعادلة: $-2x+y+18=0$

أي: $-2(-2-2t)+(-2+t)+18=0$

معناه: $5t+20=0$ ومنه: $t=-4$.

إذن: إحداثيات النقطة D هي: $(6,-6,11)$.

5) دراسة الوضع النسبي للمستقيمين (AD) ، (BC).

لدينا: $\overrightarrow{AD}(0,0,5)$ ، $\overrightarrow{BC}(4,-2,5)$

ومنه: الشعاعان $\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{BC}$ غير مرتبطين خطياً.

وهذا يعني أن: (AD)، (BC) متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي.

- التمثيلان الوسيطيان لكل من المستقيمين (AD)، (BC) هما على التوالي: $\begin{cases} x=6 \\ y=-6 \\ z=6+5t \end{cases}$ ، $\begin{cases} x=-6+4k \\ y=-2k \\ z=6+5k \end{cases}$

حيث: t ، k عددان حقيقيان.

الجملة: $\begin{cases} -2k=-6 \\ 6+5k=6+5t \end{cases}$ تقبل حلا واحدا هو: $(t,k)=(3,3)$

من أجل: $t=k=3$ نجد: $(x,y,z)=(6,-6,21)$

إذن: المستقيمان (AD)، (BC) متقاطعان في النقطة $E(6,-6,21)$.

78: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2008 شعبة الرياضيات.

1: تبيين أن: (Δ)، (Δ') لا ينتميان إلى نفس المستوي.

شعاع توجيه (Δ) هو $\vec{u}(1,0.5,-2)$

وشعاع توجيه (Δ') هو $\vec{v}(1,-2,1)$

بما أن: $(1)(0.5)\neq(-2)(1)$

فإن: الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً.

وهذا يعني أن: (Δ)، (Δ') متقاطعان أو لا ينتميان إلى نفس المستوي.

الجملة: $\begin{cases} 3+\lambda=6+\alpha \\ 2+0.5\lambda=1-2\alpha \end{cases}$ تقبل حلاً واحدا: $(\lambda,\alpha)=(2,-1)$

من أجل: $\lambda=2$ نجد: $(x,y,z)=(5,3,-6)$

من أجل: $\alpha=-1$ نجد: $(x,y,z)=(5,3,4)$

بما أن: $(5,3,-6)\neq(5,3,4)$

فإن: المستقيمين (Δ)، (Δ') لا ينتميان إلى نفس المستوي.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2: أ) تعيين إحداثيات M ، N.

بما أن: النقطتين M ، N من المستقيمين (Δ)، (Δ') على الترتيب.

فإن: $M(3+\lambda, 2+0.5\lambda, -2-2\lambda)$ ، $N(6+\alpha, 1-2\alpha, 5+\alpha)$

ومنه: $\overrightarrow{MN}(\alpha-\lambda+3\ ,\ -2\alpha-0.5\lambda-1\ ,\ \alpha+2\lambda+7)$

بما أن: المستقيم (MN) يعامد كل من (Δ)، (Δ') فإن:

أي: $\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\vec{u}=0\\ \overrightarrow{MN}.\vec{v}=0\end{cases}$ $\begin{cases}8\alpha+21\lambda+46=0\\ 3\alpha+\lambda+6=0\end{cases}$

ومنه: $(\lambda\ ,\ \alpha)=\left(-\frac{18}{11}, -\frac{16}{11}\right)$

ومنه: نستنتج أن: $M\left(\frac{15}{11}, \frac{13}{11}, \frac{14}{11}\right)$ ، $N\left(\frac{50}{11}, \frac{43}{11}, \frac{39}{11}\right)$

ب) حساب الطول MN.

لدينا: $\overrightarrow{MN}\left(\frac{35}{11}, \frac{30}{11}, \frac{25}{11}\right)$ ومنه: $MN=\frac{5\sqrt{110}}{11}$

3: تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (P).

نفرض: $\vec{n}(a\ ,\ b\ ,\ c)$ شعاع ناظم للمستوي (P) فيكون:

أي: $\begin{cases}\vec{n}.\vec{u}=0\\ \vec{n}.\vec{v}=0\end{cases}$ $\begin{cases}a+0.5b-2c=0\\ a-2b+c=0\end{cases}$

نضع: $b=6$ ثم نطرح طرفي المعادلتين فنجد: $c=5$ وبالتالي: $a=7$.

إذن: الشعاع $\vec{n}(7\ ,\ 6\ ,\ 5)$ ناظم للمستوي (P).

النقطة $A(3\ ,\ 2\ ,\ -2)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ).

ومنه: المستوي (P) هو مجموعة النقط $M(x\ ,\ y\ ,\ z)$ حيث:

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $7x+6y+5z-23=0$

4: حساب المسافة بين نقطة من (Δ') والمستوي (P).

لدينا: $N(6+\alpha, 1-2\alpha, 5+\alpha)$ نقطة كيفية من (Δ').

ومنه: بعد النقطة N عن المستوي (P) هو d حيث:

$$d=\frac{|7(6+\alpha)+6(1-2\alpha)+5(5+\alpha)-23|}{\sqrt{(7)^2+(6)^2+(5)^2}}=\frac{50}{\sqrt{110}}=\frac{5\sqrt{110}}{11}$$

نلاحظ أن: المسافة بين أي نقطة من (Δ') والمستوي (P) هي MN.

حيث: M ، N النقطتان المعرفتان في السؤال الثاني.

79: 1: تبيين أن المستويين (P_1)، (P_2) متعامدان

لدينا: شعاع ناظم المستوي (P_1) هو: $\overrightarrow{u_1}(2, -1, 2)$

شعاع ناظم المستوي (P_2) هو: $\overrightarrow{u_2}(2, 2, -1)$

بما أن: $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}=0$ فإن: الشعاعين $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ متعامدان.

وهذا يعني أن: المستويين (P_1)، (P_2) متعامدان

2: حساب بعد النقطة A عن كل من (P_1)، (P_2).

نفرض: A_1 المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P_1) فيكون:

$$AA_1=\frac{|2(1)-(2)+2(-1)-5|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(2)^2}}=\frac{7}{3}$$

نفرض: A_2 المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P_2) فيكون:

$$AA_2=\frac{|2(1)+2(2)-(-1)-4|}{\sqrt{(2)^2+(2)^2+(-1)^2}}=\frac{3}{3}=1$$

3: أ) تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

المستقيم (Δ) معرف بجملة المعادلتين: $\begin{cases}2x-y+2z-5=0\\ 2x+2y-z-4=0\end{cases}$

ومنه: $\begin{cases}3y-3z+1=0\\ 6x+3z-14=0\end{cases}$ معناه: $\begin{cases}x=\frac{7}{3}-\frac{1}{2}z\\ y=-\frac{1}{3}+z\end{cases}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

نضع $z=t$ فنجد: $\begin{cases} x=\frac{7}{3}-\frac{1}{2}t \\ y=-\frac{1}{3}+t \\ z=t \end{cases}$ وهي المعادلات الوسيطية للمستقيم (Δ).

ب) حساب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ).

نفرض: H المسقط العمودي للنقطة A_1 على المستقيم (Δ) فيكون:

الرباعي AA_1HA_2 مستطيل ومنه: $(AH)^2=(AA_1)^2+(A_1H)^2$

أي: $(AH)^2=(AA_1)^2+(AA_2)^2$

معناه: $(AH)^2=\left(\frac{7}{3}\right)^2+(1)^2=\frac{58}{9}$ ومنه: $AH=\frac{\sqrt{58}}{3}$

إذن: بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) هو: $\frac{\sqrt{58}}{3}$.

4: تعيين إحداثيات النقطة M.

بما أن: النقطة M تنتمي إلى المستقيم (Δ) فإن إحداثياتها هي:

$\left(\frac{7}{3}-\frac{1}{2}t,-\frac{1}{3}+t,t\right)$

ومنه: $AM^2=\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}t\right)^2+\left(-\frac{7}{3}+t\right)^2+(t+1)^2$

معناه: $AM^2=\frac{9}{4}t^2-4t+\frac{74}{9}$

نضع: $f(t)=\frac{9}{4}t^2-4t+\frac{74}{9}$ فيكون: $f'(t)=\frac{9}{2}t-4$

المعادلة: $f'(t)=0$ تكافئ: $\frac{9}{2}t-4=0$ ومنه: $t=\frac{8}{9}$.

تكون المسافة AM أصغر ما يمكن عندما يكون للدالة f قيمة حدية صغرى أي: عندما تكون $t=\frac{8}{9}$.

إذن: احداثيات النقطة H هي $\left(\frac{17}{9},\frac{5}{9},\frac{8}{9}\right)$.

استنتاج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ).

لدينا: $f\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{58}{9}$ ومنه: $AM^2=\frac{58}{9}$

إذن: بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) هو: $AM=\frac{\sqrt{58}}{3}$.

80: 1: تبيين أن الرباعي ABCD مربع.

يكون الرباعي ABCD مربعا إذا تعامد و تقايس وتناصف قطراه

القطعتان $[AC]$، $[BD]$ لهما نفس المنتصف O (1)

لدينا: $\overrightarrow{AC}(0,-4,0)$ ، $\overrightarrow{BD}(-4,0,0)$

ومنه: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$ معناه: (AC)، (BD) متعامدان (2)

لدينا أيضا: $AC=BD=4$ (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن: الرباعي ABCD مربع.

2: تحديد معادلة للمستوي (P) دون حساب:

بما أن: النقاط A، B، C، D لها نفس الراقمة $z=0$.

فإن: معادلة المستوي (P) الذي يشمل A، B، C، D هي: $z=0$.

3: أ) التحقق أن $\vec{u}(5,5,2)$ ناظم للمستوي (ABS).

لدينا: $\vec{u}(5,5,2)$ ، $\overrightarrow{AB}(2,-2,0)$ ، $\overrightarrow{AS}(0,-2,5)$

ومنه: $\overrightarrow{AS}.\vec{u}=0$ و $\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0$

معناه: الشعاع $\vec{u}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AS}$ ، $\overrightarrow{AB}$.

إذن: الشعاع $\vec{u}$ ناظم للمستوي (ABS).

ب) كتابة معادلة للمستوي (ABS).

المستوي (ABS) هو مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث: $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$

أي: $5(x)+5(y-2)+2(z)=0$ معناه: $5x+5y+2z-10=0$.

إذن: معادلة المستوي (ABS) هي: $5x+5y+2z-10=0$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4: التحقق أن معادلة (BCS) هي: $5x-5y+2z-10=0$

بما أن: إحداثيات النقاط $S\,،C\,،B$ تحقق المعادلة: $5x-5y+2z-10=0$

فإن: معادلة المستوي (BCS) هي: $5x-5y+2z-10=0$

5: أ) كتابة معادلة للمستوي (P').

الشعاع $\vec{v}(5,-5,2)$ ناظم لكل من (BCS) و (P') لأنهما متوازيان.

ومنه: المستوي (P') هومجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق:

$\overline{EM}\cdot\vec{v}=0$ أي: $5(x)-5(y-1)+2(z)=0$

معناه: $5x-5y+2z+5=0$

إذن: معادلة للمستوي (P') هي: $5x-5y+2z+5=0$

ب) تحديد نقاط تقاطع (P') مع كل من: $(OI)\,،(OJ)\,،(OK)$.

- من أجل: $y=z=0$ نجد:

$5x-5(0)+2(0)+5=0$ أي: $x=-1$

إذن: إحداثيات نقطة تقاطع (P') و (OI) هي: $(-1,0,0)$

- من أجل: $x=z=0$ نجد:

$5(0)-5y-2(0)+5=0$ أي: $y=1$

إذن: إحداثيات نقطة تقاطع (P') و (OJ) هي: $(0,1,0)$

- من أجل: $x=y=0$ نجد:

$5(0)-5(0)+2z+5=0$ أي: $z=-2.5$

إذن: إحداثيات نقطة تقاطع (P') و (OK) هي: $(0,0,-2.5)$

81: 1) إثبات أن المجموعة (S_m) سطح كرة.

لدينا: $x^2+y^2+z^2-2mx+2my-4mz-1=0$

ومنه: $a=-2m\ ،\ b=2m\ ،\ c=-4m\ ،\ d=-1$

لدينا: $\Delta=a^2+b^2+c^2-4d$ ومنه: $\Delta=24m^2+4>0$

إذن: المجموعة (S_m) سطح كرة مركزها هو: $\omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$

أي: $\omega(m,-m,2m)$ ونصف قطرها: $R=\frac{\sqrt{\Delta}}{2}=\sqrt{6m^2+1}$.

2) تبيين أن مجموعة النقط ω هي مستقيم:

نفرض: (x,y,z) إحداثيات النقطة ω فيكون: $\begin{cases}x=m\\y=-m\\z=2m\end{cases}$

بما أن: العدد m حقيقي فإن: مجموعة النقط ω هي مستقيم مركبات شعاع توجيهه $(1,-1,2)$

3) إثبات أن (S_m) تشمل دائرة ثابتة (C).

لدينا: $x^2+y^2+z^2-2mx+2my-4mz-1=0$

ومنه: $x^2+y^2+z^2-1-2m(x-y+2z)=0$

تتحقق هذه المعادلة من أجل جميع قيم m الحقيقية إذا كان:

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-1=0 & (1)\\x-y+2z=0 & (2)\end{cases}$$

المعادلة (1) هي معادلة سطح الكرة (S_0) التي مركزها O وطول نصف قطرها r حيث: $r=1$ والمعادلة (2) هي معادلة مستو (P).

بما أن: المركز O ينتمي إلى المستوي (P) فإن:

المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S_0) في دائرة (C) مركزها O وطول نصف قطرها $r=1$ لأن: بعد مركز سطح الكرة (S_0) عن المستوي (P) أصغر تماما من طول نصف قطرها.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4) تحديد قيمة العدد m.

يكون المستوي (P) مماسا لسطح الكرة (S_m) إذا كان:

بعد المركز ω عن المستوي (P) يساوي $R=\sqrt{6m^2+1}$

أي: $\frac{|m-(-m)-(2m)+\sqrt{3}|}{\sqrt{3}}=\sqrt{6m^2+1}$ معناه: $1=\sqrt{6m^2+1}$

بتربيع الطرفين نجد: $1=6m^2+1$ ومنه: $m=0$

إذن: قيمة m حيث يكون (P) مماساً لسطح الكرة (S_m) هي 0.

82: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2009 شعبة العلوم التجريبية.

1: أ) تبيين أن المستوي (P) هو المستوي (ABC).

بما أن: احداثيات النقاط A، B، C تحقق المعادلة: $x-z+1=0$

فإن: المستوي (P) هو المستوي (ABC).

ب) تحديد طبيعة المثلث ABC.

لدينا: $AB^2=6$ ، $AC^2=3$ ، $BC^2=9$

بما أن: $BC^2=9=AC^2+AB^2$ فإن: المثلث ABC قائم في A.

2: أ) التحقق أن النقطة $D(2,3,4)$ لا تنتمي إلى (ABC).

لدينا: $2-4+1=-1\neq 0$ ومنه: النقطة D لا تنتمي إلى (ABC).

ب) تحديد طبيعة الرباعي $ABCD$.

بما أن: النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC).

فإن: الرباعي $ABCD$ رباعي وجوه.

3: أ) حساب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).

نفرض d المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) فيكون:

$$d=\frac{|2-4+1|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ب) حساب حجم الرباعي $ABCD$.

نعلم أن: $V=\frac{1}{3}\times\frac{AB\times AC}{2}\times d$

ومنه: $V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$ نجد: $V=\frac{1}{2}uv$.

83: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2009 شعبة الرياضيات.

1: كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB).

تنتمي نقطة $M(x,y,z)$ إلى المستقيم (AB) إذا وجد عدد حقيقي α حيث: $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}$.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-2,1,-3)$ ، $\overrightarrow{AM}(x-2,y-1,z-2)$

إذن: التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) هو: $\begin{cases}x=2-2\alpha\\y=1+\alpha\\z=2-3\alpha\end{cases}$

إثبات أن (D) ، (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

لدينا: $\vec{u}(3,-1,2)$ ، $\overrightarrow{AB}(-2,1,-3)$ حيث: $\vec{u}$ موجه (D).

بما أن: $(3)(1)\neq(1)(-2)$

فإن: الشعاعين $\vec{u}$ ، $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطيا.

ومنه: المستقيمان (D) و (AB) غير متوازيين.

الجملة: $\begin{cases}2+3t=2-2\alpha\\1-t=1+\alpha\\2t=2-3\alpha\end{cases}$ لا تقبل حلولا.

ومنه: المستقيمان (D) و (AB) غير متقاطعين.

إذن: المستقيمان (D) و (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي

2: أ) تبيين أن الشعاع $\vec{n}(1,5,1)$ عمودي على المستوي (P).

لدينا: $\vec{n}.\vec{u}=(1)(3)+(5)(-1)+(1)(2)=0$

ومنه: $\vec{n}$ ، $\vec{u}$ متعامدان إذن: الشعاع $\vec{n}$ ناظم للمستوي (P).

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ب) كتابة معادلة للمستوي (P).

المستوي (P) هو مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث: $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

ومنه معادلة المستوي (P) هي: $x+5y+z-9=0$.

ج) تبيين أن بعد نقطة M من (D) و (P) مستقلة عن موضع M.

لتكن: H المسقط العمودي للنقطة M على المستوي (P).

ومنه: $HM=\dfrac{|2+3t+5(1-t)+2t-9|}{\sqrt{1+25+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{27}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

د) تعيين التمثيل الوسيطي لمستقيم تقاطع المستويين (P)، (yoz).

معادلة المستوي (yoz) هي: $x=0$ ومنه: مستقيم التقاطع معرف بجملة المعادلتين:

$\begin{cases}x=0\\x+5y+z-9=0\end{cases}$ أي: $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=9-5t\end{cases}$ مع: t عدد حقيقي.

84: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2009 شعبة الرياضيات.

1: كتابة معادلة للمستوي (P_2).

لدينا: $\begin{cases}x=1+2\alpha+\beta\\y=1+\alpha\\z=5+\alpha+\beta\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}x-2y=-1+\beta\\y-z=-4-\beta\end{cases}$

ومنه: $(x-2y)+(y-z)=-5$ نجد: $x-y-z+5=0$.

إذن: معادلة للمستوي (P_2) هي: $x-y-z+5=0$.

2: تعيين شعاع ناظم لكل من المستويين (P_1)، (P_2).

من المعادلتين الديكارتيتين للمستويين (P_1)، (P_2) نستنتج أن:

الشعاع $\vec{n_1}(1,2,-1)$ ناظم للمستوي (P_1)

والشعاع $\vec{n_2}(1,-1,-1)$ ناظم للمستوي (P_2).

3: تبين أن المستويين (P_1)، (P_2) متعامدان.

لدينا: $\vec{n_1}.\vec{n_2}=0$ ومنه: (P_1)، (P_2) متعامدان.

4: أ) حساب قيمة كل من d_1، d_2.

$$d_1=\frac{|3+2(1)-1-2|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$d_2=\frac{|3-1-1+5|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

ب) استنتاج المسافة d_3.

لدينا: $d_3^2=d_1^2+d_2^2$ ومنه: $d_3^2=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2=\dfrac{38}{3}$

ومنه: $d_3=\sqrt{\dfrac{38}{3}}=\dfrac{\sqrt{114}}{3}$.

5: أ) تعيين التمثيل الوسيطي للستقيم (Δ).

لدينا: $\begin{cases}x+2y-z-2=0\\x-y-z+5=0\end{cases}$ ، نضع: $z=\lambda$ فنجد:

$\begin{cases}x=-\dfrac{14}{3}+\lambda+2\\y=\dfrac{7}{3}\\z=\lambda\end{cases}$ أي: $\begin{cases}x+2y-\lambda-2=0\\x-y-\lambda+5=0\\z=\lambda\end{cases}$

إذن: التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) هو:

$\begin{cases}x=\dfrac{-8}{3}+\lambda\\y=\dfrac{7}{3}\\z=\lambda\end{cases}$ حيث: $\lambda\in IR$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ب) حساب AM^2 بدلالة λ.

لدينا: $AM^2=(x-3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$

ومنه: $AM^2=\left(\frac{-8}{3}+\lambda-3\right)^2+\left(\frac{7}{3}-1\right)^2+(\lambda-1)^2$

بعد النشر والاختزال نجد: $AM^2=\frac{2}{9}\left(9\lambda^2-60\lambda+157\right)$

نضع: $f(\lambda)=\frac{2}{9}\left(9\lambda^2-60\lambda+157\right)$

الدالة f تقبل الاشتقاق على IR حيث: $f'(\lambda)=\frac{2}{9}(18\lambda-60)$

المعادلة: $f'(\lambda)=0$ تكافئ: $\frac{2}{9}(18\lambda-60)=0$

ومنه: $\lambda=\frac{10}{3}$ وبالتالي: $AM^2=f\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{38}{3}$

إذن: $AM=\sqrt{\frac{38}{3}}=d_3$.

85 1: تبيين أن مجموعة النقط M هي مستو.

لدينا: $AM^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2$

ومنه: $AM^2=x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+6$

لدينا أيضا: $BM^2=(x+1)^2+(y)^2+(z+2)^2$

ومنه: $BM^2=x^2+y^2+z^2+2x+4z+5$

نعوض عن AM^2 و BM^2 في المعادلة: $AM^2-BM^2=1$

فنجد: $2x+y+4z=0$

وهي معادلة مستو (P) شعاع ناظم له $\vec{n}(2,1,4)$

لدينا: $\vec{n}=-\overrightarrow{AB}$ ومنه: الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ ، $\vec{n}$ مرتبطان خطيا.

وهذا يعني أن: المستوي (P) يعامد المستقيم (AB).

2: برهان أن المجموعة (S) سطح كرة.

لدينا: $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$

ومنه: $\Delta=(-2)^2+(-2)^2+(-2)^2-4(-6)=36>0$

ومنه: (S) سطح كرة مركزها $\Omega(1,1,1)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{36}}{2}=3$

3: أ) تعيين احداثيات النقطة G.

لدينا: $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ومنه: $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

ومنه: احداثيات النقطة G هي: $(1,1,-2)$.

واضح أن: احداثيات النقطة G تحقق معادلة (S)

ومنه: النقطة G تنتمي إلى (S).

ب) كتابة معادلة للمستوي (Q).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (Q) إذا كان: $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{G\Omega}=0$

لدينا: $\overrightarrow{GM}(x-1,y-1,z+2)$ ، $\overrightarrow{G\Omega}(0,0,3)$

ومنه: معادلة المستوي (Q) هي: $3(z+2)=0$ أي: $z=-2$.

86: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2008 شعبة العلوم التجريبية.

تعيين الأجوبة الصحيحة

1) بما أن: إحداثيات النقطة D لا تحقق المعادلة: $x-3z-4=0$

فإن: الإجابة الصحيحة هي (ب) أي: المستوي (P) هو (ABC)

2) بما أن: $\vec{n_2}$ مرتبط خطياً مع $\vec{u}(1,0,-3)$ ناظم المستوي (P)

فإن: الإجابة الصحيحة هي (ب) أي: $\vec{n_2}(-2,0,6)$ ناظم للمستوي (P)

3) بعد النقطة D عن المستوي (P) هو d حيث:

$$d=\frac{|3-3(1)-4|}{\sqrt{(1)^2+(0)^2+(-3)^2}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

إذن: الإجابة الصحيحة هي الإجابة (ج).

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

87: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2009 شعبة التقني رياضيات.

تحديد الاقتراحات الصحيحة.

1: لدينا: $z=1+t$ ومنه: $2=1+t$ معناه: $t=1$

من أجل $t=1$ نجد: $x=y=1$.

ومنه: $A(1,1,2)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ).

بالمثل نبين أن C ، B لا تنتميان إلى المستقيم (Δ).

إذن: الإقتراح الصحيح هو (أ).

2: شعاع توجيه المستقيم (Δ) هو: $\vec{v}(2,-1,1)$

بما أن: $\vec{v}=-2\vec{u}$ فإن: الشعاع $\vec{u}$ موجه للمستقيم (Δ).

إذن: الإقتراح الصحيح هو (ب).

3: لدينا: $\vec{u}.\vec{v}=0$ حيث: $\vec{v}$ ناظم المستوي (P) و $\vec{u}$ موجه (Δ).

ومنه: $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ متعامدان.

المعادلة: $(2t-1)+3(-t+2)+(t+1)+1=0$ لا تقبل أي حل.

ومنه: (Δ) يوازي المستوي (P).

إذن: الإقتراح الصحيح هو (ج).

4: شعاع ناظم المستوي (Q_3) هو: $\vec{n}(1,-1,2)$

لدينا: $\vec{n}.\vec{v}=0$ ومنه: المستوي (Q_3) يعامد (P).

إذن: الإقتراح الصحيح هو (ج).

5: باستعمال المسافة بين نقطة ومستو نجد كل الاقتراحات صحيحة.

بما أن: $(1)(-5)\neq(-1)(-3)$

فإن: النقاط A ، B ، C ليست في استقامية.

إذن: الجملة (1) خاطئة.

2) احداثيات النقاط A ، B ، D تحقق المعادلة: $25x-6y-z-33=0$.

إذن: الجملة (2) صحيحة.

3) لدينا: $\overrightarrow{CD}(-2,-1,0)$ ، $\vec{n}(2,-1,2)$ حيث:

$\vec{n}$ شعاع ناظم للمستوي (π).

بما أن: $(2)(-1)\neq(-1)(-2)$

فإن: الشعاعين $\overrightarrow{CD}$ ، $\vec{n}$ غير مرتبطين خطيا.

إذن: الجملة (3) خاطئة.

4) لدينا: $\overrightarrow{BH}(0,3,-5)$ ، $\vec{n}(2,-1,2)$

بما أن: $(2)(3)\neq(-1)(0)$

فإن: الشعاعين $\overrightarrow{BH}$ ، $\vec{n}$ غير مرتبطين خطيا.

إذن: الجملة (4) خاطئة.

89: تحديد الأجوبة الصحيحة والأجوبة الخاطئة:

1) النقاط: B ، C ، D على استقامة واحدة.

لدينا: $\overrightarrow{BC}(3,-3,0)$ ، $\overrightarrow{BD}(1,-4,1)$

بما أن: $(1)(-3)\neq(-4)(3)$

فإن: $\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{BD}$ غير مرتبطين خطيا.

إذن: الجملة (1) خاطئة.

2) معادلة المستوي (ABC) هي: $2x+2y-z-11=0$

إحداثيات النقاط A ، B ، C تحقق المعادلة: $2x+2y-z-11=0$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2) معادلة المستوي (ABC) هي: $2x+2y-z-11=0$

إحداثيات النقاط A ، B ، C تحقق المعادلة: $2x+2y-z-11=0$

ومنه: الجملة (2) صحيحة.

3) النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)

لدينا: شعاع ناظم المستوي (ABC) هو: $\vec{u}(2,2,-1)$

بما أن: $\overline{DE}(2,2,1)$ ، $\vec{u}(2,2,-1)$ غير مرتبطين خطيا

وذلك لأن: $(2)(1)\neq(1)(-2)$

فإن: الجملة (3) خاطئة.

4) التمثيل الوسيطي للمستقيم (CD) هو: $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=1-t \end{cases}$

بما أن: إحداثيات النقطة C لا تحقق معادلات الجملة السابقة

فإن: الجملة (4) خاطئة.

5) النقطة E تنتمي إلى المستقيم (CD).

إحداثيات النقطة E لا تحقق معادلات المستقيم (CD)

ومنه: الجملة (5) خاطئة.

محتويات الكتاب

الدرس	الموضوع	الصفحة
01	الجدار السلمي في المستوي	05
02	تطبيقات الجداء السلمي في المستوي	06
03	الجداء السلمي في الفضاء	09
04	المعادلة الديكارتية لمستو	12
05	معادلة سطح كرة	13
06	المرجح	14
07	مجموعات النقط في الفضاء	17
08	المستقيمات في الفضاء	19
09	الأوضاع النسبية	20
	تمارين ومسائل محلولة	24
	حلول التمارين والمسائل	52

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM