الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية

الرياضيات

السنة الثالثة من التعليم الثانوي العام
و التكنولوجي

كتاب الأستاذ

المؤلفون:
محمد فاتح مراد — مفتش التربية و التكوين
جمال تاوريرت — مفتش التربية و التكوين
محمد قورين — مفتش التربية و التكوين
عبد الحفيظ فلاح — أستاذ التعليم الثانوي
عبد المؤمن موس — أستاذ التعليم الثانوي
غريسي بلجيلالي — أستاذ التعليم الثانوي

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

كتاب الأستاذ

شعبة:

- **تسيير و اقتصاد**

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الباب الأول

المتتاليات العددية

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: التذكير بالمتتالية الحسابية و المتتالية الهندسية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " المتتالية الحسابية – المتتالية الهندسية " و يتم إنجازه ضمن أفواج.

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مفهوم المتتالية المحدودة.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " المتتالية المحدودة و المتتالية الرتيبة " و يتم إنجازه ضمن أفواج كما يتم استعمال جهاز الداتاشو.

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مبدأ الاستدلال بالتراجع.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " مبدأ الاستدلال بالتراجع " و يتم ضمن أفواج كما يتم استغلال جهاز الداتاشو.

الحل: يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

النشاط الرابع

تصحيح: /

الهدف: نمذجة وضعية و مقاربة المتتاليات من الشكل $u_{n+1}=au_n+b$.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " المتتاليات من الشكل $u_{n+1}=au_n+b$ " و يتم ضمن أفواج.

الحل: يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

الأعمال الموجهة

النمو الديموغرافي

تصحيح: /

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الهدف: توظيف المتتاليتين الهندسية و الحسابية في وضعيات لها دلالة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

تطور نسبة الزبناء

تصحيح: الزبائن عوض الزبناء

الهدف: توظيف المتتاليات من الشكل $u_{n+1}=au_n+b$ في وضعيات لها دلالة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

تخمين عبارة الحد العام لمتتالية ثم اثباتها

تصحيح: /

الهدف: التخمين ثم الإثبات باستعمال الاستدلال بالتراجع أو باستعمال متتالية مساعدة.

توجيهات: يقدم النشاط باستعمال جهاز الداتاشو و كذلك العمل ضمن أفواج لإنجاز البرهان المطلوب.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 ـ تذكير حول المتتاليات العددية .

ليكن n عددا طبيعيا : $v_{n+1}-v_n=(3u_{n+1}-1)-(3u_n-1)$

معناه $v_{n+1}-v_n=3u_{n+1}-3u_n=3(u_{n+1}-u_n)$ ومعناه $v_{n+1}-v_n=3r$ إذن (v_n) متتالية حسابية أساسها $3r$.

ليكن n عددا طبيعيا : $w_{n+1}-w_n=(u_{2n+2}+3)-(u_{2n}+3)=u_{2n+2}-u_{2n}$

لدينا : $u_{2n+2}=u_{2n}+(2n+2-2n)r=2r$ إذن $w_{n+1}-w_n=u_{2n}+2r-u_{2n}=2r$ ومنه (w_n) متتالية حسابية أساسها $2r$.

3 ـ اتجاه تغّير ورتابة متتالية .

1) لدينا $u_n=\frac{1-n^2}{n}=\frac{1}{n}-n$ و $u_{n+1}=\frac{1}{n+1}-n-1$ ومنه

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-n-1-\frac{1}{n}+n=\frac{-1}{n(n+1)}-1$.

لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ؛ $n(n+1)>0$, ومنه $\frac{-1}{n(n+1)}<0$ أي $\frac{-1}{n(n+1)}-1<-1$ إذن $\frac{-1}{n(n+1)}-1<0$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

وبالتالي من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ؛ $u_{n+1}-u_n<0$. ينتج من هذا أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

2) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{1-x^2}{x}$ ومنه $u_n=f(n)$.

لدينا $f(x)=\frac{1}{x}-x$ ومنه الدالة f هي مجموع دالتين ، التآلفية $x \mapsto -x$ والدالة مقلوب $x \mapsto \frac{1}{x}$ وكلتا هما متناقصتين تماما على $]0;+\infty[$ إذن الدالة f متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

1) لدينا $u_n=\frac{-2n^2+3n+1}{n}=-2n+3+\frac{1}{n}$ و $u_{n+1}=-2n-2+3+\frac{1}{n+1}$ ومنه

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}-2=\frac{-1}{n(n+1)}-2$.

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ؛ $n(n+1)>0$, ومنه $\frac{-1}{n(n+1)}<0$ أي $\frac{-1}{n(n+1)}-2<-2$ إذن $\frac{-1}{n(n+1)}-2<0$

وبالتالي من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ؛ $u_{n+1}-u_n<0$. ينتج من هذا أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

2) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{-2x^2+3x+1}{x}$ ومنه $u_n=f(n)$.

لدينا $f(x)=(-2x+3)+\frac{1}{x}$ ومنه الدالة f هي مجموع دالتين ، التآلفية $x \mapsto -2x+3$ والدالة مقلوب $x \mapsto \frac{1}{x}$ وكلتا هما متناقصتين تماما على $]0;+\infty[$ إذن الدالة f متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

استعمال التعريف : ليكن n عددا طبيعيا ,

$u_{n+1}-u_n=-3(n+1)^2-3(n+1)+3n^2+3n=-6n-6=-6(n+1)$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1}-u_n<0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

استعمال الدالة المرفقة: نعتبر الدالة $f : x \mapsto -3x^2-3x+\frac{5}{4}$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x)=-6x-3$ من اجل كل $x \in [0;+\infty[$ ، $f'(x)<0$ إذن الدالة f متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

1) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم، $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{4^{n+1}}{(n+1)^2}\times\frac{n^2}{4^n}=\frac{4n^2}{(n+1)^2}=\left(\frac{2n}{n+1}\right)^2$

2) من أجل كل $n \geq 1$ فإن $n+n \geq n+1$ معناه $2n \geq n+1$ أي $\frac{2n}{n+1} \geq 1$ ويكافئ $\left(\frac{2n}{n+1}\right)^2 \geq 1$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$

وبما أن كل الحدود موجبة تماما فإن المتتالية (u_n) متزايدة .

تمارين للتّعــمّــق

1 ــ تذكير حول المتتاليات العددية .

1) لدينا $u_1=500$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=u_n+50$ ومنه (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=50$.

ومنه $u_n=u_1+(n-1)r$ وبالتالي : $u_n=50n+450$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2) المبلغ الموضوع في أول ديسمبر 2007 هو u_n حيث $n=8\times12=96$ أي u_{96}

و $u_{96}=50\times96+450=5250\,DA$

3) المبلغ المجموع إلى غاية 31 ديسمبر 2007 هو $S=u_1+u_2+...+u_{96}=\frac{96}{2}(u_1+u_{96})$

ومنه $S=48(500+5250)=276000\,\text{DA}$.

نضع $u_1=5000$ الكمية التي تباع في اليوم الأول والكمية المخفضة في اليوم هي r .

ومنه $u_{n+1}=u_n-r$ هي متتالية حسابية حدها الأول $u_1=5000$ وأساسها $-r$.

الكمية التي تباع في اليوم العاشر هي u_{10} .

لدينا $32000=u_1+u_2+...+u_{10}$ معناه $32000=\frac{10}{2}(u_1+u_{10})$

بما أن $u_{10}=u_1+9(-r)$ فإن $32000=5(2u_1-9r)$

وبالتالي $r=\frac{10000-6400}{9}=400\,L$.

1) لدينا (v_n) متتالية حسابية حدها الأول $v_0=45,4$ وأساسها r حيث $v_{12}=52,6$ ، الوحدة مليون نسمة .

ومنه $v_{12}=v_0+12r$ إذن كل سنة يتزايد عدد السكان بِـ $0,6$ مليون نسمة $r=\frac{v_{12}-v_0}{12}=\frac{52,6-45,4}{12}=0,6$

2) في عام 2020 عدد السكان هو v_{30} مقدرا بالمليون نسمة ؛ $v_{30}=v_0+30r=45,4+30\times0,6=63,4$

ومنه عدد السكان في عام 2020 هو $63,4$ مليون نسمة .

1) لدينا $u_1=9000$ ، $u_2=u_1+0,03u_1=1,03u_1=9270\,DA$

2) من أجل n عدد طبيعي لدينا : $u_{n+1}=u_n+0,03u_n=1,03u_n$ إذن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=1,03$.

3) $u_{10}=u_1q^9=9000\times(1,03)^9\simeq11742.96\,\text{DA}$

4) ونجد $S=12\times9000\frac{(1,03)^{10}-1}{0,03}$ أي $S=12(u_1+u_2+...+u_{10})=12\times u_1\frac{q^{10}-1}{q-1}$

$S\simeq1238098.97\,\text{DA}$.

1) $p_1=p_0+0,05p_0=1,05p_0$ ؛ $p_2=p_1+0,05p_1=1,05p_1=(1,05)^2p_0$

وهذا من أجل كل عدد طبيعي n ، إذن (p_n) هي متتالية هندسية أساسها $1,05$ $p_{n+1}=p_n+0,05p_n=1,05p_n$

ومنه : $p_n=(1,05)^n\,p_0$.

$p_n\geq2p_0$ معناه $(1,05)^n\,p_0\geq2p_0$ ومعناه $(1,05)^n\geq2$ (لأن $p_0>0$)

أي $\ln(1,05)^n\geq\ln2$ ويكافئ $n\ln(1,05)\geq\ln2$ ومعناه $n\geq\frac{\ln2}{\ln(1,05)}$ بحساب نجد $\frac{\ln2}{\ln(1,05)}\simeq14.2$ ومنه

$n\geq15$ ، إذن بعد 15 يصبح سعر البضاعة أكثر من $2p_0$.

1) $u_1=u_0-0,02u_0=0,98u_0=515,48$

$u_2=u_1-0,02u_1=0,98u_1=505,17$

2) $u_{n+1}=u_n-0,02u_n=0,98u_n$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=0,98u_n$ إذن (u_n) متتالية هندسية أساسها $0,98$

ومنه $u_n=u_0(0,98)^n=526\times(0,98)^n$.

3) $u_{10}=526\times(0,98)^{10}=429.78$.

4) $u_n\le\frac{u_0}{2}$ معناه $526\times(0,98)^n\le\frac{526}{2}$ ومعناه $(0,98)^n\le 0,5$ ويكافئ $\ln(0,98)^n\le\ln 0,5$

ويكافئ $n\ln(0,98)\le\ln 0,5$ بما أن $\ln(0,98)<0$ فإن $n\ge\frac{\ln 0,5}{\ln(0,98)}$ أي $n\ge 34.3$

ومنه ابتداء من سنة 2035 (أي $n=35$) يكون عدد السكان أقل من النصف .

5) $u_{310}=526\times(0,98)^{310}=1.002$ ، $u_{311}=526\times(0,98)^{311}=0.98$. في عام 2311 تكون القرية فارغة من السكان .

1) أ) $u_2=u_1+150=5150\,DA$.

ب)من أجل n عدد طبيعي لدينا: $u_{n+1}=u_n+150$ إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها 150

ومنه $u_n=u_1+(n-1)150=150n+4850$ ، $u_8=150\times 8+4850=9600\,DA$.

ت) $S=u_1+u_2+...+u_8=\frac{8}{2}(u_1+u_8)=58400\,DA$.

2) أ) $v_2=v_1+0,03v_1=1,03v_1=5150\,DA$.

ب) من أجل n عدد طبيعي لدينا: $v_{n+1}=v_n+0,03v_n=1,03v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $1,03$

ومنه $v_n=v_1(1,03)^{n-1}=5000(1,03)^{n-1}$ ، $v_8=5000(1,03)^7=6149.37\,\text{DA}$.

ت) $T=v_1+v_2+...+v_8=v_1\frac{(1,03)^8-1}{1,03-1}=44461,68\,DA$.

3) العقد الثاني أقل تكلفة إذن عمر يختار هذا العقد .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الباب الثاني

الاستمرارية و النهايات

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: مقاربة المفهوم الحدسي للاستمرارية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " المفهوم الحدسي للاستمرارية " و يتم ضمن أفواج.

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: التمهيد لمبرهنة القيم المتوسطة.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الاستمرارية و المعادلات " .

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: التذكير بالمستقيمات المقاربة.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " المستقيمات المقاربة " و يتم ضمن أفواج.

الحل: بسيط.

النشاط الرابع

تصحيح: /

الهدف: التعرف بيانيا على المستقيمات المقاربة.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " المستقيمات المقاربة " و يتم ضمن أفواج.

الحل: بسيط

النشاط الخامس

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مفهوم نهاية دالة مركبة.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " مفهوم دالة مركبة – النهاية بالمقارنة " و يتم ضمن أفواج.

الحل: بسيط

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الأعمال الموجهة

تحديد حلول المعادلة $f(x)=k$

تصحيح: /

الهدف: توظيف دوال الكلفة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

على نهج عمر الخيام

تصحيح: /

الهدف: توظيف مبرهنة القيم المتوسطة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

وجود مستقيم مقارب

تصحيح: /

الهدف: التخمين ثم الإثبات باستعمال تعريف المستقيم المقارب المائل.

توجيهات: يقدم النشاط باستعمال جهاز الداتاشو و كذلك العمل ضمن أفواج لإنجاز البرهان المطلوب.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

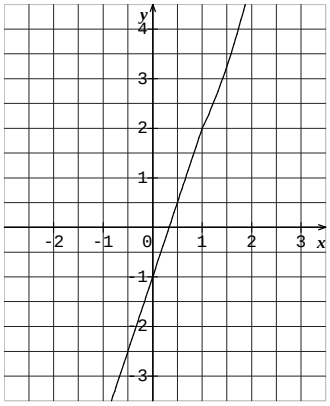
1 - الاستمرارية

$(m\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} f(x)=3x+m \;;\; x\in]-\infty;1[\\ f(x)=x^2+1 \;\;;\;\; x\in [1;+\infty[\end{cases}$

1) نعم الدالة f مستمرة على $]-\infty;1[$، نعم الدالة f مستمرة على $[1;+\infty[$

2) لكي يختار العدد m بحيث تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$، يجب أن تكون مستمرة عند 1 أي $3+m=2$ و بالتالي $m=-1$

3) رسم المنحني الممثل للدالة f :

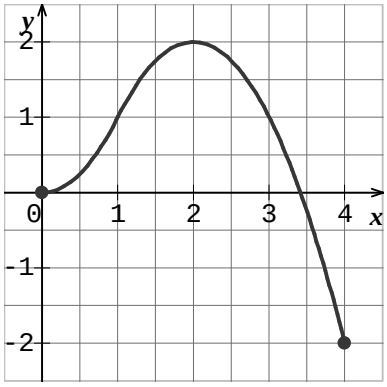


قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2 ـ الاستمرارية و المعادلات

1) أ) جدول التغيرات

x	0		2		4
$f(x)$	0	↗	2	↘	-2



ب) نعم الدالة f مستمرة على المجال $[0;4]$.

2) أ) على المجال $[2;4]$ المعادلة $f(x)=\frac{3}{2}$ تقبل حلا واحدا.

ب) بقراءة بيانية نلاحظ أن حل المعادلة $f(x)=\frac{3}{2}$ هو بالتقريب $0,7$.

1) $f(x)=2x^3+2x+3$. الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=6x^2+2$

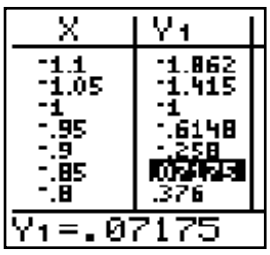
من اجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)>0$

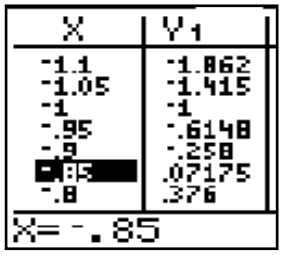
f مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

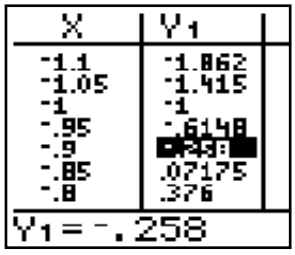
إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا واحدا α . $f(-1)=-1$ و $f(0)=3$ و بالتالي $\alpha\in]-1;0[$

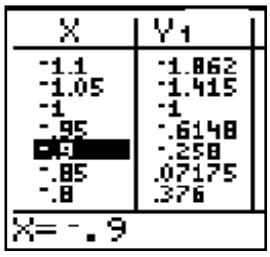
2) نستعمل جدول القيم في الحاسبة فنلاحظ أن :

$f(-0,9)\approx-0,258$ و $f(-0,85)\approx0,7175$









لتكن $P(x)$ دالة كثير حدود . بما أن درجته فردية فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=+\infty$

أو $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=-\infty$ ، الدالة P مستمرة على $\mathbb{R}$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $P(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{R}$.

لتكن الدالة g المعرفة على $[0;1]$ بـ : $g(x)=f(x)-x$

الدالة g مستمرة على $[0;1]$ لأنها مجموع دالتين مستمرتين على $[0;1]$

$g(0)=f(0)$ و $g(1)=f(1)-1$.

$g(0)\geq0$ و $g(1)\leq0$ لأن $f(x)\in[0;1]$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في $[0;1]$.

3 ـ تتمات على النهايات

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1}\frac{5x+3}{2x-2}=+\infty \quad ، \quad \lim_{x\xrightarrow{<}1}\frac{5x+3}{2x-2}=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}3}\frac{-2x+1}{3-x}=+\infty \quad ، \quad \lim_{x\xrightarrow{<}3}\frac{-2x+1}{3-x}=-\infty$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -2} \frac{x^2-3}{x+2} = +\infty \text{ ، } \lim_{x \xrightarrow{<} -2} \frac{x^2-3}{x+2} = -\infty$$

$$\text{ ، } \lim_{x \xrightarrow{>} 2} \frac{5-2x^2}{x^2-4} = -\infty \text{ ، } \lim_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{5-2x^2}{x^2-4} = +\infty \text{ ، } \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{(2x-1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+5x-6}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+6)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+6)}{(x+1)} = \frac{7}{2}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{2x^2-3x-4}{x^2-x-2} = +\infty \text{ ، } \lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{2x^2-3x-4}{x^2-x-2} = -\infty \text{ ، } \lim_{x \xrightarrow{<} -1} \frac{2x^2-3x-4}{x^2-x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 3} \frac{x^2}{x^2-4x+3} = +\infty \text{ ، } \lim_{x \xrightarrow{<} 3} \frac{x^2}{x^2-4x+3} = -\infty \text{ ، } \lim_{x \xrightarrow{>} 2} \frac{2x^2-3x-4}{x^2-x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x+6}{x^2+x-2} = \lim_{x \to -2} \frac{3(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \to -2} \frac{3}{(x-1)} = -1$$

4 ـ المستقيمات المقاربة

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

2) أ) من أجل كل $x \in]1;+\infty[$: $f(x) = -x+3+\frac{2}{x-1}$

ب) $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x)-(-x+3)\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x-1} = 0$.نستنتج أن المنحني (C_f) يقبل المستقيم D الذي معادلته $y = -x+3$ كمستقيم مقارب عند $+\infty$.

3) $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{-x^2+4x-1}{x-1} = +\infty$.

تفسير النتيجة هندسيا : المنحني (C_f) يقبل المستقيم الذي معادلته $x=1$ كمستقيم مقارب .

2) $\lim_{x \to -\infty} f(x)-(x-2) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x+2}{(x+1)^2} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)-(x-2) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x+2}{(x+1)^2} = 0$ ،

3) ندرس حسب قيم x إشارة $\frac{3x+2}{(x+1)^2}$

4) يكفي أخذ $n = 33$

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = x - \frac{2}{(x-1)^2}$$

1) $\lim_{x \to -\infty} f(x)-x = \lim_{x \to -\infty} -\frac{2}{(x-1)^2} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)-x = \lim_{x \to +\infty} -\frac{2}{(x-1)^2} = 0$

إذن المنحني (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ معادلته $y = x$

2) $f(x)-x = -\frac{2}{(x-1)^2}$ و من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 ، $-\frac{2}{(x-1)^2} < 0$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

إذن المنحنى (C) أسفل المستقيم Δ.

5 ـ الدالة المركبة

1) الدالة u متزايدة تماما على $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$. $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{1}{2}} u(x)=+\infty$

2) الدالة u متناقصة تماما على $]1;+\infty[$. $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} u(x)=+\infty$

تصويب: نفس أسئلة التمرين 51:

1) الدالة u متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} u(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$

2) الدالة u متناقصة تماما على $]-\infty;-1[$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=0$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} u(x)=-\infty$

2) أ) الدالة h معرفة إذا كان $(x\in\mathbb{R})$ و $\left(\left(1-x^2\right)\in\mathbb{R}\right)$ أي $D_h=\mathbb{R}$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$

1) $D_g=\mathbb{R}-\{-2\}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2} g(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} g(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$

1) $D_h=\left\{x\in\mathbb{R}:\left(x\in\mathbb{R}^*\right)\text{و}\left(g(x)>0\right)\right\}$ ، $D_h=\left\{x\in\mathbb{R}:\left(x\in\mathbb{R}^*\right)\text{و}\left(x\in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[\right)\right\}$

إذن $D_h=]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} h(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} h(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f\circ f)(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\circ f)(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(g\circ f)(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}(g\circ f)(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\circ g)(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}=1$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\sqrt{\frac{2x}{1-x}}=+\infty$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الباب الثالث

الإستفاقية

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تذكير حول المشتقات.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " الإشتقاقية – تذكير ". و يتم ضمن أفواج.

الحل: يكفي تعيين معامل التوجيه ثم تطبيق المبرهنات حول المشتقات.

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: توظيف دوال الكلفة.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " دراسة دالة "

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مشتقة دالة مركبة.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " اشتقاق دالة مركبة دالتين " و يتم ضمن أفواج مع استعمال جهاز الداتاشو.

الحل: يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

الأعمال الموجهة

استعمال دالة مساعدة

تصحيح: /

الهدف: استعمال دالة مساعدة لدراسة تغيرات دالة معطاة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط.

دراسة دالة ناطقة

تصحيح: /

الهدف: التذكير بمنهجية دراسة اتجاه تغير دالة وكذا البحث عن المستقيمات المقاربة .

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

مربع، مكعب، مقلوب و الجذر التربيعي لدالة

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تصحيح: /

الهدف: استنتاج تغيرات الدوال مربع، مكعب، مقلوب و الجدر التربيعي لدالة.

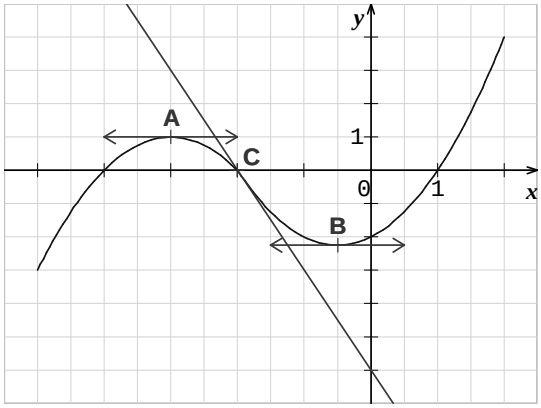
توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج أو كواجب منزلي.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 ـ الاشتقاقية



1. مجموعة تعريف الدالة f هي $[-5;2]$

2. جدول تغيرات الدالة f :

x	-5		-3		$-\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	1	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	4
	-3						

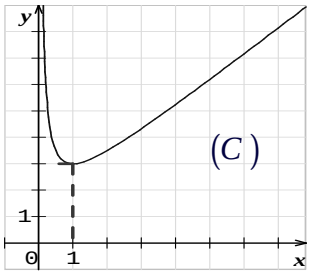
3. $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ ، $f'(-3)=0$ ، $f'(-2)=\frac{-6-0}{0-(-2)}=-3$

عين بقراءة بيانية العدد المشتق للدالة f عند كل من $-\frac{1}{2}$، 3- و 2- علما أن ترتيب النقطة B هو $-\frac{9}{4}$.

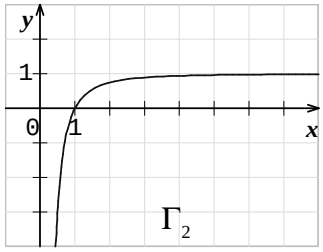
4. معادلة المماس للمنحني (C_f) عند النقطة A هي $y=1$. معادلة المماس للمنحني (C_f) عند النقطة B هي $y=-\frac{9}{4}$. معادلة المماس للمنحني (C_f) عند النقطة C هي $y=-3x-6$.

5. لا توجد مماسات أخرى موازية للمماس عند النقطة C.

2 ـ دراسة دالة

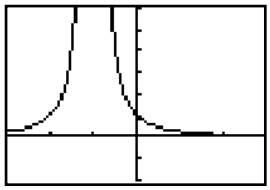


منحني الدالة f



منحني الدالة f'

1. تصويب: الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	−
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$	‖ $+\infty$	↘ 0

2. الدالة f_1 متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ و متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ $(f_1=-2f)$

الدالة f_2 متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ و متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ $(f_2=2-f)$

3 ـ اشتقاق دالة مركب دالتين

1) $g=\sqrt{f}$. الدالة g معرفة على $[-2;0]\cup[2;3]$

و من أجل كل عدد حقيقي x من $[-2;0]\cup[2;3]$ لدينا: $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ و منه جدول تغيرات g هو التالي:

x	-2	-1	0	2	3
$g'(x)$	+	0	−	+	
$g(x)$	1 ↗	$\sqrt{2}$ ↘	0	0 ↗	3

2) $g=f^2$. الدالة g معرفة على $[-2;3]$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $[-2;3]$ لدينا:

$g'(x)=2f'(x)f(x)$ و منه جدول تغيرات g هو التالي:

x	−2	-1	0	1	2	3
$g'(x)$	+	0	− 0	+ 0	−	0 +
$g(x)$	1 ↗	4 ↘	0 ↗	4 ↘	0 ↗	9

3) $g=\dfrac{1}{f}$. الدالة g معرفة على $[-2;0[\cup]0;2[\cup]2;3]$.

و من أجل كل عدد حقيقي x من $[-2;0[\cup]0;2[\cup]2;3]$: $g'(x)=-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$ و منه جدول تغيرات g هو التالي:

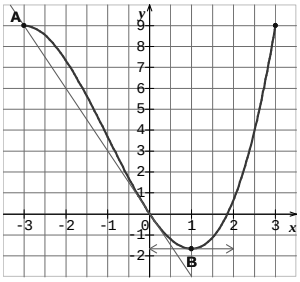
x	-2	-1	0	1	2	3
$g'(x)$	−	0	+ ‖	+	0 − ‖	−
$g(x)$	1 ↘	$\frac{1}{2}$ ↗ $+\infty$	‖ $-\infty$ ↗	$-\frac{1}{2}$ ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘ $\frac{1}{3}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تمارين للتعمق

1. معامل توجيه المستقيم (OA) هو $\frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{9}{-3} = -3$

2. أ- باستعمال الشروط التالية : $f(-3) = 9$ و $f'(0) = -3$ و $f(0) = 0$



و $f'(1) = 0$ نجد : $a = \frac{1}{3}$ ، $b = 1$ ، $c = -3$ و $d = 0$

ب- $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$ و منه $f'(x) = x^2 + 2x - 3$

$f'(x) = 0$ إذا كان $(x = 1)$ أو $(x = -3)$. $f'(x) < 0$ إذا كان $x \in]-3;1[$

و $f'(x) > 0$ إذا كان $x \in]1;3]$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على $[1;3]$ و متناقصة تماما على $[-3;1]$.

مسائل

1) أ) $C_M(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{q^2}{3} - 6q + 40$

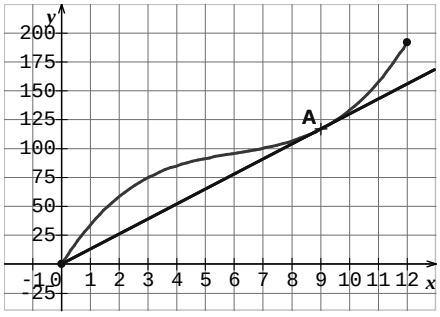
ب) دالة الكلفة المتوسطة هي الاقتصار على المجال $]0;12]$ لدالة كثير حدود من الدرجة الثانية يأخذ قيمته الحدية الصغرى عند $q_0 = -\frac{-6}{2 \times \frac{1}{3}} = 9$.إذن الكلفة المتوسطة للإنتاج تكون صغرى عند إنتاج 9000 وحدة .

2) أ) من أجل $q \in [0;12]$: $C_m(q) = C'(q) = q^2 - 12q + 40$

ب) $C_M(9) = \frac{9^2}{3} - 6 \times 9 + 40 = 13$ و $C_m(9) = 9^2 - 12 \times 9 + 40 = 13$

إذن من أجل إنتاج 9000 وحدة تكون الكلفة الهامشية تساوي الكلفة المتوسطة.

3) عين معادلة للمماس T للمنحني (Γ) عند النقطة A التي فاصلتها 9 :



$y = C'(9)(q-9) + C(9) = 13q$

إذن المماس T للمنحني (Γ) عند النقطة A هو المستقيم (OA)

4) أ) تكون المؤسسة رابحة من أجل إنتاج q حيث $B(q) > 0$

أي من أجل $q \in]0;12]$: $-\frac{1}{3}q^3 + 2q^2 + 21q > 0$

$-\frac{1}{3}q^3 + 2q^2 + 21q > 0$ تكافئ $-\frac{1}{3}q^2 + 2q + 21 > 0$ لأن q موجب تماما

من اجل $q \in]0;3+6\sqrt{2}]$ ، $3+6\sqrt{2} \simeq 11,485$ $-\frac{1}{3}q^2 + 2q + 21 > 0$

و بالتالي تكون المؤسسة رابحة من أجل إنتاج أقل من 11485 وحدة

ب) عين عدد الوحدات التي تصنع حتى يكون الربح أعظميا ؟

من أجل $q \in]0;12]$ $B'(q) = -q^2 + 4q + 21$. $B'(q) = 0$ يكافئ $(q = 7)$ أو $(q = -3)$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

q	0		7		12
$B'(q)$		+	0	−	
$B(q)$		↘		↗	

الدالة B تقبل قيمة حدية عظمى من أجل $q=7$ و هذه القيمة هي $B(7)=-\frac{7^3}{3}+2\times7^2+21\times7=\frac{392}{3}$

يكون الربح أعظميا إذا كان DA 130666 و يكون أعظميا من أجل إنتاج 7000 وحدة .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الباب الرابع

الدوال الأصلية

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مفهوم الدالة الأصلية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " الدوال الأصلية ". " الدالة الأصلية لدالة على مجال ".

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: تقديم مفهوم الدالة الأصلية التي تحقق شرطا معينا.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الدالة الأصلية التي تحقق شرطا معينا "

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الدالة الأصلية التي تحقق شرطا معينا "

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الدالة الأصلية التي تحقق شرطا معينا " و يتم ضمن أفواج.

الحل: بسيط.

الأعمال الموجهة

من الكلفة الهامشية إلى الكلفة الإجمالية

من الكلفة الهامشية إلى الكلفة المتوسطة

تصحيح: /

الهدف: توظيف دوال الكلفة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج.

الحل: بسيط

دوال الرضا و الرغبة

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدوال الأصلية في المجال الاقتصادي.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمارين

تمارين تطبيقية

1 ـ الدوال الأصلية

1. $f'(x)=\dfrac{2x^2+3-4x(x+5)}{(2x^2+3)^2}=\dfrac{-2x^2-20x+3}{(2x^2+3)^2}$

2. من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=-g(x)$ و منه $g(x)=-f'(x)$

نستنتج أن الدالة الأصلية للدالة g على $\mathbb{R}$ هي $-f$ أي الدالة $x\mapsto-\dfrac{x+5}{2x^2+3}$ أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

f دالة معرفة على $]-\infty;0[$ بـــ: $f(x)=-3x+4-\dfrac{1}{x^2}$

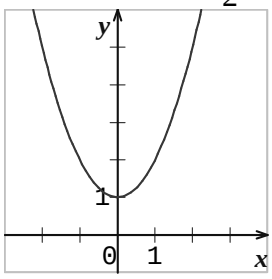
1. دالة أصلية للدالة f على $]-\infty;0[$ هي $x\mapsto-\dfrac{3}{2}x^2+4x+\dfrac{1}{x}$

2. مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $]-\infty;0[$ هي الدوال من الشكل $x\mapsto-\dfrac{3}{2}x^2+4x+\dfrac{1}{x}+k$

حيث k ثابت حقيقي

3. $F(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+4x+\dfrac{1}{x}+k$ و $F(-1)=5$

$F(-1)=5$ تعني $-\dfrac{3}{2}-4-1+k=5$ و منه $k=\dfrac{23}{2}$ و بالتالي $F(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+4x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{23}{2}$



منحني الدالة F هو المنحني المبين في الشكل المقابل لأن $F'(x)=f(x)$

بما أن f دالة تآلفية فإن الدالة F تكون دالة كثير حدود من الدرجة الثانية

و بما أن f متزايدة على $\mathbb{R}$ فهي تكون سالبة في مجال ثم موجبة في مجال آخر

و بالتالي F تكون متناقصة في مجال ثم متزايدة في مجال آخر.

2 ـ حساب الدوال الأصلية

أ) $f(x)=(2x+5)^3$ ، دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدالة $x\mapsto\dfrac{1}{8}\times(2x+5)^4$

ب) $f(x)=(2-7x)^4$ ، دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدالة $x\mapsto-\dfrac{1}{35}\times(2-7x)^5$

ج) $f(x)=\left(\dfrac{2}{3}x-4\right)^5$ ، دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدالة $x\mapsto\dfrac{3}{12}\left(\dfrac{2}{3}x-4\right)^6$

تصويب : الدوال الأصلية ليست كلها على المجال $]0;+\infty[$

أ) $f(x)=\dfrac{1}{(2x+1)^2}$ ، دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$ هي الدالة $x\mapsto-\dfrac{1}{2(2x+1)}$

ب) $f(x)=\dfrac{1}{(3x-2)^3}$ ، دالة أصلية للدالة f على $\left]\dfrac{2}{3};+\infty\right[$ هي الدالة $x\mapsto\dfrac{-1}{6(3x-2)^2}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ج) $f(x)=\dfrac{1}{(1-6x)^4}$ ، دالة أصلية للدالة f على $\left]\dfrac{1}{6};+\infty\right[$ هي الدالة $x\mapsto\dfrac{1}{18}\times\dfrac{1}{(1-6x)^3}$

تمارين للتعمق

f دالة معرفة على $\left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ بـــ: $f(x)=\sqrt{2x+3}$ ، $F(x)=(ax+b)\sqrt{2x+3}$

الدالة F أصلية للدالة f على $\left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ معناه $F'(x)=f(x)$

$$F'(x)=a\sqrt{2x+3}+(ax+b)\times\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}=a\sqrt{2x+3}+\frac{ax+b}{\sqrt{2x+3}}=\frac{a(2x+3)+ax+b}{\sqrt{2x+3}}$$

$$F'(x)=\frac{3ax+3a+b}{\sqrt{2x+3}}\text{ و }f(x)=\frac{2x+3}{\sqrt{2x+3}}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من $\left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ $F'(x)=f(x)$ معناه $3ax+3a+b=2x+3$

أي $\left(a=\dfrac{2}{3}\right)$ و $(b=1)$ و بالتالي $F(x)=\left(\dfrac{2}{3}x+1\right)\sqrt{2x+3}$

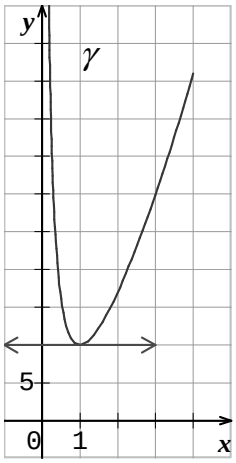
f دالة معرفة على $\mathbb{R}^+$ بـــ: $f(x)=\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)\times\dfrac{9}{(x+1)^2}$

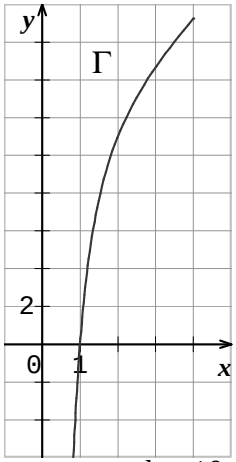
1. بوضع $u(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$، $u'(x)=\dfrac{3}{(x+2)^2}$

2. $f(x)=3\times\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)\times\dfrac{3}{(x+1)^2}$ و منه $f(x)=3u(x)u'(x)$

و بالتالي دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}^+$ هي $F:x\mapsto\dfrac{3}{2}u^2(x)$ أي $F:x\mapsto\dfrac{3}{2}\times\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^2$

الدالة " الكلفة الهامشية" C_m موجبة على المجال $[1;4]$ و سالبة على $[0;1[$ و بالتالي الدالة " الكلفة الإجمالية " C تكون متزايدة تماما على $[1;4]$ و متناقصة تماما على $[0;1[$.





2. $C_m(q)=aq+b-\dfrac{12}{q^2}$

المنحني Γ يقبل عند النقطة $A(2;11)$ مماسا معامل توجيهه 5 معناه أن

$C_m(2)=11$ و $C_m'(2)=5$

$$C_m'(q)=a+\frac{24}{q^3}$$

$C_m'(2)=5$ و منه $a+\dfrac{24}{8}=5$ ومنه $a=2$

$C_m(2)=11$ و منه $2a+b-3=11$ و منه $2a+b=14$ و منه $b=10$

3. $C_m(q)=2q+10-\dfrac{12}{q^2}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الباب الخامس

الحساب التكاملي

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تخمين العلاقة بين مساحة حيز تحت منحن و الدالة الأصلية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " تكامل دالة ".

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مفهوم الدالة الأصلية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " القيمة المتوسطة ... ".

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

مساحة حيز محدد بمنحنيين

تصحيح: /

الهدف: استنباط طريقة لحساب مساحة حيز محدد بمنحنيين.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

حصر تكامل

تصحيح: /

الهدف: توظيف خواص التكاملات.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 ـ تكامل دالة

1. $\int_0^3 (2x+3)dx = \left[x^2+3x\right]_0^2 = 10$

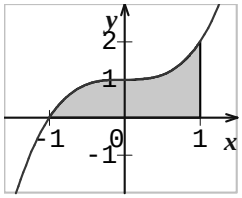
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2) $\int_{-2}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{3} - \left(\frac{-8}{3}\right) = 3$

3) $\int_{-5}^{5} (4-x)\,dx = \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_{-5}^{5} = \left[20 - \frac{25}{2}\right] - \left[-20 - \frac{25}{2}\right] = 40$

4) $\int_{0}^{2} (1-x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2} = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$

$f(x) = x^3 + 1$.



1. f موجبة على $[-1;+\infty[$ سالبة على $]-\infty;-1]$.

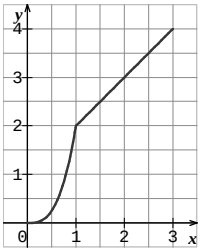
2. احسب بوحدة المساحة $(u.a)$ مساحة الحيز تحت المنحني بين العددين -1 و 1.

$$S = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (x^3+1)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{1}{4}+1\right] - \left[\frac{1}{4}-1\right] = 2$$

3. $S = 2 \times 1 \times 0,5cm^2 = 1cm^2$

2 ـ خواص التكامل

التمثيل البياني لتالي هو لدالة f معرفة مستمرة على $[0;3]$ كما يلي:



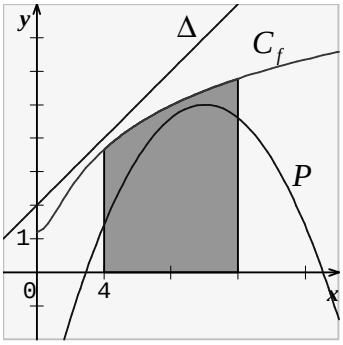
من أجل $f(x) = x^3$ ، $x \in [0;1]$

من أجل $f(x) = x+1$ ، $x \in [1;3]$

1. احسب $\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1} = \frac{1}{4}$

$$\int_{1}^{3} f(x)\,dx = \int_{1}^{3} (x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{1}^{3} = \left[\frac{9}{2}+3\right] - \left[\frac{1}{2}+1\right] = 6$$

2. $\int_{0}^{3} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3} f(x)\,dx = \frac{1}{4} + 6 = \frac{25}{4}$



1. تصويب: باستعمال الشكل بين أن: $-\frac{1}{10}x^2 + 2x - 5 \le f(x) \le \frac{1}{2}x + 2$

بقراءة بيانية المنحني C_f يقع أسفل Δ و أعلى P في المجال $[4;12]$،

نستنتج أن : $-\frac{1}{10}x^2 + 2x - 5 \le f(x) \le \frac{1}{2}x + 2$

2. على المجال $[4;12]$، المنحني C_f أعلى محور الفواصل، إذن: $A = \int_{4}^{12} f(x)\,dx$

بما أن $-\frac{1}{10}x^2 + 2x - 5 \le f(x) \le \frac{1}{2}x + 2$ فإن: $\int_{4}^{12}\left(-\frac{1}{10}x^2 + 2x - 5\right)dx \le \int_{4}^{12} f(x)\,dx \le \int_{4}^{12}\left(\frac{1}{2}x + 2\right)dx$

دالة أصلية للدالة g المعرفة بـ $g(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 2x - 5$ هي الدالة G المعرفة بـ: $G(x) = -\frac{1}{30}x^3 + x^2 - 5x$

دالة أصلية للدالة h المعرفة بـ $h(x) = \frac{1}{2}x + 2$ هي الدالة H المعرفة بـ: $H(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$\int_4^{12}\left(-\frac{1}{10}x^2+2x-5\right)dx = G(12)-G(4)=\frac{792}{30}-\left(-\frac{184}{30}\right)=\frac{976}{30}$$

$$\int_4^{12}\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx = H(12)-H(4)=60-12=48$$

إذن: $\frac{976}{30}\le A\le 48$

3 ـ القيمة المتوسطة

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2+1}{2x^2}$

1. $\int_1^4 f(x)dx=\int_1^4\frac{x^2+1}{2x^2}dx=\int_1^4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}\right]_1^4=\left[2-\frac{1}{8}\right]-\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right]=\frac{15}{8}$

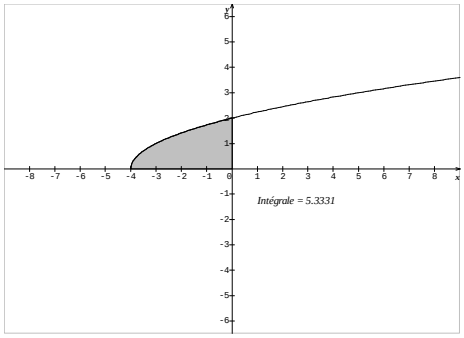
2. القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;4]$ هي $\mu=\frac{1}{4-1}\int_1^4 f(x)dx=\frac{1}{3}\times\frac{15}{8}=\frac{15}{24}$.

تمارين للتعمق

تصويب: 1.ادرس تغيرات الدالة f على $]-4;+\infty[$ (يمكن استنتاج تغيرات f انطلاقا من الدالة " الجذر التربيعي " بدلا من الدالة " مربع ").

الدالة f متزايدة تماما على $]-4;+\infty[$

2. رسم المنحني



3. $h(x)=\frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x+4}$

و منه $h'(x)=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+4}+(x+4)\frac{1}{2\sqrt{x+4}}\right)$

و منه $h'(x)=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+4}+\frac{1}{2}\sqrt{x+4}\right)$

و منه $h'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x+4}\right)=\sqrt{x+4}=f(x)$

4. مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و محوري الإحداثيات هي:

$$\int_{-4}^0 f(x)dx=\left[h(x)\right]_{-4}^0=h(0)-h(-4)=\frac{16}{3}$$

1) $I_1=\int_0^1\frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^3}=\left[-\frac{1}{4\left(1+x^2\right)^2}\right]_0^1=-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$

2. ليكن $I_2=\int_0^1\frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^3}dx$

$$I_1+I_2=\int_0^1\frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}dx+\int_0^1\frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^3}dx=\int_0^1\frac{x\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}dx=\int_0^1\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$I_1+I_2=\int_0^1\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\frac{1}{2}\times\int_0^1\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\left[\frac{-1}{2\left(1+x^2\right)}\right]_0^1=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$I_1+I_2=\frac{1}{4}$ و $I_1=\frac{3}{16}$ ومنه $I_2=\frac{3}{4}-I_1=\frac{1}{4}-\frac{3}{16}=\frac{1}{16}$

3. تصويب: استنتج حصرا للتكامل $\int_0^1\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3}dx$

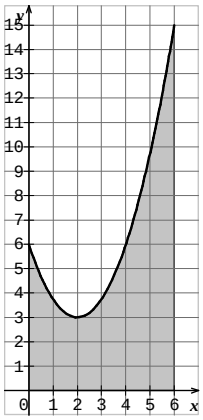
على المجال $[0;1]$، $x\geq x^2\geq x^3$.

$x^3\leq x^2\leq x$ و منه $\frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^3}\leq\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3}\leq\frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}$

و منه $\int_0^1\frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^3}dx\leq\int_0^1\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3}dx\leq\int_0^1\frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}dx$ أي $\frac{1}{16}\leq\int_0^1\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3}dx\leq\frac{3}{16}$

مسائل

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;6]$ كما يلي: $f(x)=\frac{3}{4}x^2-3x+6$



1. $S=\int_0^6f(x)dx=\int_0^6\left(\frac{3}{4}x^2-3x+6\right)dx$

دالة أصلية F للدالة f على $[0;6]$ معرفة بـــ: $F(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+6x$

$$S=\left[\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+6x\right]_0^6=\frac{1}{4}\times6^3-\frac{3}{2}\times6^2+6^2=36(u.a)$$

2. مساحة المستطيل $OHMK$ تساوي $OH\times HM$

من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;6]$، $OH=x$. من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;6]$، (C_f) يقع أعلى محور الفواصل. إذن الترتيب $f(x)$ للنقطة M من (C_f) موجب أو معدوم

و منه $HM=f(x)$ و منه $R(x)=OH\times HM=x\times f(x)=\frac{3}{4}x^3-3x^2+6x$.

3. أ- $R(x)=S$ معناه $\frac{3}{4}x^3-3x^2+6x=36$ أي $\frac{3}{4}x^3-3x^2+6x-36=0$

ب- $g'(x)=\frac{9}{4}x^2-6x+6$ ، $\Delta=-18$ ، $\Delta<0$ و منه من اجل كل عدد حقيقي x من $[0;6]$، $g'(x)>0$

x	0		6
$g'(x)$		+	
$g(x)$	36 -	↗	54

على المجال $[0;6]$، g قابلة للاشتقاق ومتزايدة تماما و 0 ينتمي إلى المجال $[-36;54]$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا واحدا α على $[0;6]$. باستعمال الحاسبة البيانية، نجد $g(4,555)\approx-0,034$ و $g(4,56)\approx0,93$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الباب السادس

دالة اللوغاريتم النيبيري

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تعريف الدالة اللوغاريتم النيبيري.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " دالة اللوغاريتم النيبيري ".

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: استنتاج الخواص الأولى و التعامل مع اللوغاريتمات و قيمها التقريبية.

توجيهات: يقدم النشاط بعد تعريف الدالة اللوغاريتم النيبيري.

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: تخمين الخواص الجبرية اللوغاريتم النيبيري و يتوج بتقديم الفقرة " الخواص الجبرية ".

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج.

الحل: يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

النشاط الرابع

تصحيح: /

الهدف: تخمين نهايات الدالة اللوغاريتم النيبيري .

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " دراسة الدالة اللوغاريتم النيبيري " و يتم ضمن أفواج.

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

دالة اللوغاريتم العشري

تصحيح: /

الهدف: تعريف و دراسة خواص الدالة اللوغاريتم العشري.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

دراسة دالة تتضمن لوغاريتم نيبيري

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

دراسة متتالية تتضمن لوغاريتم نيبيري

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 ـ دالة اللوغاريتم النيبيري

3) مجموعة التعريف هي: $D=]-\infty;-1[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

من أجل x من D، $\ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)=0$ يعني $\frac{2x-1}{x+1}=1$ أي $x=2$ و منه مجموعة الحلول هي $\{2\}$.

مجموعة التعريف هي: $D=]-\infty;0[\cup\left]0;\frac{3}{2}\right[$

3) $\ln\left(2x^2\right)>\ln\left(6-4x\right)$ يعني $2x^2>6-4x$ أي $x^2+2x-3>0$

$x^2+2x-3>0$ يعني $]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$ و منه مجموعة الحلول هي $D\cap\left(]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[\right)$

أي مجموعة الحلول هي $]-\infty;-3[\cup\left]1;\frac{3}{2}\right[$

2 ـ الخواص الجبرية

- $A=1$ • $B=\frac{5}{2}$ • $C=2\ln 2-1$ • $D=-3$ •
- $A=\ln\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)$ • $B=\ln 20000$ • $C=\ln\left(100000\right)$ •
- $A=\ln\left(\frac{ac^2}{b}\right)$ • $B=\ln a\sqrt{ab}$ • $C=\ln\left(\frac{(a+1)\sqrt{(a+b)^3}}{\sqrt{b}}\right)$ •

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

د) $21000(1+0,035)^n \geq 30000$ تعني $n \geq \dfrac{\ln\left(\frac{10}{7}\right)}{\ln(1,035)}$ و $\dfrac{\ln\left(\frac{10}{7}\right)}{\ln(1,035)} \approx 10,37$

أصغر عدد طبيعي n حيث $21000(1+0,035)^n \geq 30000$ هو $n=11$

3 ـ دراسة دالة اللوغاريتم النيبيري

أ) $f(x)=2x^2+\ln x$ معرفة على $]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2+\ln x=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2x^2+\ln x=-\infty$

ب) $f(x)=-1+2\ln x-(\ln x)^2$ معرفة على $]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} -1+2\ln x-(\ln x)^2=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -1+2\ln x-(\ln x)^2=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x\left(\dfrac{-1}{\ln x}+2-\ln x\right)=-\infty$

4 ـ دراسة الدالة $\ln u$

نعتبر الدالة f المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x-2}$

1. من أجل كل x من $]2;+\infty[$ ، $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x-2}=\dfrac{x-2+x+1}{(x+1)(x-2)}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}$.

2. دالة أصلية للدالة f على $]2;+\infty[$ هي الدالة F المعرفة بـ: $x\mapsto \ln(x+1)+\ln(x-2)$

5 ـ دالة اللوغاريتم العشري

1) $\log x=5$ تعني $\dfrac{\ln x}{\ln 10}=5$ و منه $\ln x=5\ln 10$ أي $x=e^{5\ln 10}$

تمارين للتعمق

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.

نضع من اجل كل عدد حقيقي من $]0;+\infty[$ $u(x)=\ln x$ و $v(x)=x^2$ على المجال $]0;+\infty[$ ، $v\neq 0$ و الدالتان u و v قابلتان للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا: $f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

على المجال $]0;+\infty[$ ، إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $1-2\ln x$

$1-2\ln x>0$ معناه $x<e^{\frac{1}{2}}$ ، $1-2\ln x<0$ معناه $x>e^{\frac{1}{2}}$ ، $1-2\ln x=0$ معناه $x=e^{\frac{1}{2}}$

إذن على المجال $]0;\sqrt{e}[$ ، f' موجبة تماما ومنه f متزايدة تماما على $]0;\sqrt{e}[$ و على المجال $]\sqrt{e};+\infty[$ f' سالبة تماما ومنه f متناقصة تماما على $]\sqrt{e};+\infty[$. إذن لدالة f تقبل قيمة حدية عظمى $f(\sqrt{e})$ عند $x=\sqrt{e}$.

$$f(\sqrt{e})=\frac{\ln\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2}=\frac{1}{2e}$$

ب- من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ ، إشارة $f(x)$ هي من نفس إشارة $\ln x$

إذا كان $x>1$ فإن $f(x)>0$ ، إذا كان $0<x<1$ فإن $f(x)<0$ و إذا كان $x=1$ فإن $f(x)=0$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2.لتكن F دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$ حيث $F(e)=\dfrac{2e-2}{e}$ و $F(\sqrt{e})=2-\dfrac{3}{\sqrt{e}}$

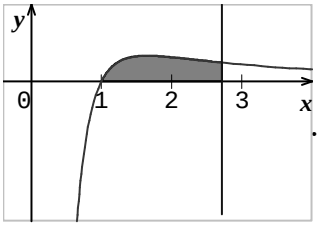
أ- لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $F'(x)=f(x)$

نستنتج أنه على المجال $]0;1]$: $F'(x)\le 0$ ومنه F متناقصة تماما على $]0;1]$.

و على المجال $[1;+\infty[$: $F'(x)\ge 0$ ومنه F متزايدة تماما على $[1;+\infty[$. و هذه النتائج تتوافق مع التمثيل البياني المعطى.

ب- $F'\left(\sqrt{e}\right)=f\left(\sqrt{e}\right)=\dfrac{\ln\sqrt{e}}{\left(\sqrt{e}\right)^2}=\dfrac{1}{2e}$

جـ- $A=\int_1^e f(x)dx=F(e)-F(1)=\dfrac{2e-2}{e}-1=\dfrac{e-2}{e}(u.a)$



د-من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $F(x)=G(x)+k$ حيث k ثابت حقيقي.

لدينا: $F(e)=G(e)+k$ و منه $\dfrac{2e-2}{e}=\dfrac{-1-\ln e}{e}+k$ و منه $k=2$

إذن من أجل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $F(x)=\dfrac{-1-\ln x}{x}+2$.

مسائل

$$C_T(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{9}{2}\ln(x+1)$$

الجزء A : دالة مساعدة: نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;5]$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{9x}{x+1}-9\ln(x+1)$

1. $f'(x)=x+\dfrac{9x}{(x+1)^2}-\dfrac{9}{x+1}=\dfrac{x(x+1)^2+9-9(x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{x^3+2x^2-8x}{(x+1)^2}=\dfrac{x(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$

2. إشارة $f'(x)$

x	0		2		5
$f'(x)$	0	−	0	+	

الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0;2]$ و متزايدة تماما على المجال $[2;5]$

x	0		2		5
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	0	↘	$6-9\ln 3$	↗	$20-9\ln 6$

3.على المجال $[0;2]$، f قابلة للاشتقاق و متناقصة و $f(2)<0$. إذن المعادلة $f(x)=0$ ليس لها حل على المجال $]0;2]$.

على المجال $[2;5]$ ، f قابلة للاشتقاق و متزايدة تماما و $f(2)\simeq -1,89$ و $f(5)\simeq 3,87$ و 0 ينتمي إلى $\left[f(2);f(5)\right]$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا α في المجال $[0;5]$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4.باستعمال الحاسبة البيانية $f(3)\approx -1,2$ ، $f(4)\approx 0,7$ ، إذن $3<\alpha<4$

$f(3,6)\approx -0,2$ ، $f(3,7)\approx 0,002$ إذن $3<\alpha<4$ ، إذن $3,6<\alpha<3,7$

$f(3,699)\approx -0,0001$ ، $f(3,7)\approx 0,002$ إذن $3<\alpha<4$ ، إذن $3,699<\alpha<3,7$

5. إشارة $f(x)$

x	0		α		5
$f(x)$	0	$-$	0	$+$	

الجزء B : دراسة الكلفة المتوسطة C_M : $C_M(x)=\frac{x}{4}+\frac{9}{2}\frac{\ln(x+1)}{x}$.

1. $C'_M(x)=\frac{1}{4}+\frac{9}{2}\left[\frac{\frac{1}{x+1}\times x-\ln(x+1)}{x^2}\right]=\frac{1}{4}+\frac{9}{2}\left[\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right]$

$\frac{f(x)}{2x^2}=\frac{\frac{x^2}{2}+\frac{9x}{x+1}-9\ln(x+1)}{2x^2}=\frac{1}{4}+\frac{9}{2}\left[\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right]$ ، إذن $C'_M(x)=\frac{f(x)}{2x^2}$

x	0		α		5
$C_M'(x)$		$-$	0	$+$	
$C_M(x)$		↘		↗	

2. $C'_M(x)$ لها نفس إشارة $f(x)$

على $]0;\alpha]$ ، $f(x)$ موجبة و منه $C'_M(x)$ موجبة ومنه C_M متزايدة.

3.على $[0;5]$ ،مشتقة الكلفة المتوسطة تنعدم مغيرة إشارتها (سالبة ثم موجبة)إذن الكلفة المتوسطة تقبل قيمة حدية صغرى و تأخذها عند α.و بما أن $3,699<\alpha<3,7$.

الإنتاج يضمن كلفة متوسطة صغرى بين 3699 طن و 3700 طن لأن x مقدر بآلاف الأطنان.

الكلفة المتوسطة $C_M(x)$ مقدرة بملايين الدنانير ، $C_M(3,699)\approx 2,80717$ و $C_M(3,7)\approx 2,80717$

إذن الكلفة المتوسطة تقدر بـــ 2807,17دينار للطن.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الباب السابع

الدالة الأسية

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تعريف الدالة الأسية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم الفقرة " الدالة الأسية ".

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: تخمين خواص الدالة الأسية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الخواص الجبرية "

الحل: يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: التعرف على الدالة الأسية كحل لمعادلة تفاضلية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الخواص الجبرية.

الحل: بسيط.

الأعمال الموجهة

دوال الكلفة و الدالة الأسية

تصحيح: /

الهدف: توظيف دوال الكلفة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

دراسة دالة تتضمن الدالة الأسية

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة السية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

دراسة متتالية تتضمن الدالة الأسية

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة الأسية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 ـ الدالة الأسية

1) $e^{x+3}\geq -2$. من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{x+3}>0$.إذن مجموعة حلول المتراجحة هي $\mathbb{R}$

4) $\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)>1$.مجموعة التعريف هي $D=]1;+\infty[$

$\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)>1$ تعني $\frac{1}{x-1}>e$ و منه $\frac{1-ex+e}{x-1}>0$ إذن مجموعة حلول المتراجحة هي $\left]1;1+\frac{1}{e}\right[$

2 ـ الخواص الجبرية

1. $t^2-2t-3=0$ تعني $(t=-1)$ أو $(t=3)$

2. أ- بوضع $t=e^x$: المعادلة $e^{2x}-2e^x-3=0$ تصبح $t^2-2t-3=0$

المعادلة $e^x=-1$ ليس لها حل لأن $e^x>0$

$e^x=3$ يعني $x=\ln 3$.إذن مجموعة حلول المعادلة $e^{2x}-2e^x-3=0$ هي $S=\{\ln 3\}$

ب) $e^{2x}-2e^x-3=0$ يعني $e^x-2-3e^{-x}=0$ (بضرب طرفي المعادلة في e^x).و هي نفس المعادلة السابقة.

3 ـ دراسة الدالة الأسية

f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{1}{2}x+1-e^{-x}$

1.أ- $f'(x)=\frac{1}{2}+e^{-x}$.من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$، $f'(x)>0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

ب- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x+1-e^{-x}=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

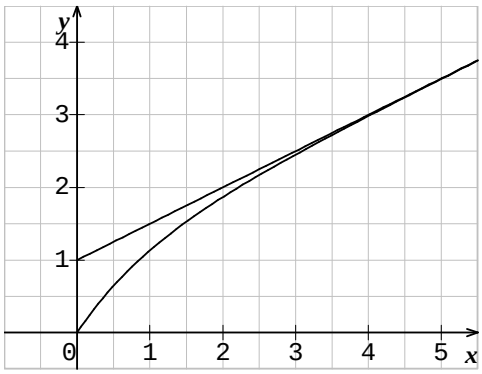
2. أ- لدينا $\lim_{x\to+\infty}f(x)-\left(\frac{1}{2}x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}-e^{-x}=0$

نستنتج أن المنحنى (C) الممثل للدالة f في معلم يقبل مستقيما مقاربا D عند $+\infty$ معادلة $y=\frac{1}{2}x+1$

ب- $f(x)-\left(\frac{1}{2}x+1\right)=-e^{-x}$ و $-e^{-x}<0$.إذن المنحنى (C) يقع أسفل المستقيم D.

3. رسم المستقيم D و المحنى (C) : (انظر الشكل الموالي)

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM



4 ـ دراسة الدالة $\exp\circ u$

1. g و f لهما نفس اتجاه التغير .إذن g متزايدة على $]-\infty;2]$ و متناقصة على $[2;+\infty[$.

2. القيمة الحدية المحلية هي $g(2)=e^{f(2)}=e^{\ln 4}=4$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ و بالتركيب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ ،

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و بالتركيب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ ،

و منه المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحني الممثل للدالة g عند $+\infty$ و محور الفواصل مقارب عند $-\infty$.

4. جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$g(x)$	0	1	$\ln 4$	1

تمارين للتعمق

1. من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^x(2e^x+a)$

2. أ- من جدول التغيرات لدينا: $f'(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$

و بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ فإن $b=-3$ ،زيادة على ذلك $f'(0)=2+a$ ، إذن $a=-2$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=e^x(e^x-2)-3$

ب- $f(0)=-4$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

جـ-

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	-3	-4	$+\infty$

1.احسب $f'(x)$ بدلالة a .

2.ا- عين a و b مستعينا بالمعلومات المتوفرة في جدول التغيرات.

ب- احسب $f(0)$ و عين نهاية f عند $+\infty$

جـ- أنقل ثم أكمل جدول التغيرات.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3. $f(x)=0$ تعني $\left(e^x\right)^2-2e^x-3=0$ و منه $\left(e^x+1\right)\left(e^x-3\right)=0$

$e^x+1=0$ ليس لها حل ، $e^x-3=0$ تعني $x=\ln 3$ و بالتالي مجموعة الحلول هي $S=\{\ln 3\}$

التفسير الهندسي: المنحني الممثل للدالة f يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $\ln 3$

4. أ) مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\geq -4$ هي $S=\mathbb{R}$

ب) مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\leq 0$ هي $S=]-\infty;\ln 3]$

مسائل

الجزء A :

1. لتكن h الدالة المعرفة على $[0;5]$ بـــ: $h(x)=f(x)-g(x)$

أ- $h'(x)=f'(x)-g'(x)=-0,7e^{-0,7x+2,1}-0,5$

ب- إشارة $h'(x)$: من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;5]$ لدينا: $e^{-0,7x+2,1}>0$ و منه $-0,7e^{-0,7x+2,1}<0$

و منه $-0,7e^{-0,7x+2,1}-0,5<-0,5<0$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;5]$، $h'(x)$ سالبة تماما و منه الدالة h متناقصة تماما على $[0;5]$.

جـــ- الدالة h قابلة للاشتقاق و رتيبة تماما على $[0;5]$ و $h(0)=f(0)-g(0)=e^{2,1}-0,7\approx 7,47$

و $h(5)=f(5)-g(5)=e^{-1,4}-3,2\approx -2,95$

أي $h(0)>0$ و $h(5)<0$ و 0 ينتمي إلى $\left[h(5);h(0)\right]$

إذن يوجد عدد حقيقي وحيد α ينتمي إلى $[0;5]$ بحيث $h(\alpha)=0$

الحاسبة البيانية تعطينا قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد α ، $\alpha\approx 2,172$

د-فاصلة إحداثيات نقطة التقاطع F لـــ (C_f) و (C_g) تحقق $f(x)=g(x)$ أي $h(x)=0$

في السؤال السابق وجدنا أن حل المعادلة $h(x)=0$ هو α ، إذن النقطة F فاصلتها α ، ترتيب F هو $g(\alpha)$.

نعلم أن $2,171\,5<\alpha<2,172\,5$ و أن الدالة g متزايدة تماما على $[0;5]$ ،

إذن $g(2,171\,5)<g(\alpha)<g(2,172\,5)$.

القيمة المقربة للترتيب $g(\alpha)$ للنقطة F هي $1,79$.

2. أ- مساحة المستطيل $OCFE$ هي : $A=OE\times OC=\alpha\times f(\alpha)$

ومنه $A\approx 2,17\times 1,79$ أي $A\approx 3,88(u.a)$

ب-على المجال $[0;\alpha]$ المنحني البياني (C_f) يقع أعلى محور الفواصل ، إذن التكامل $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$ يساوي مساحة جزء المستوي المحدد بـــ (C_f)، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\alpha$

جـــ- دالة أصلية للدالة f على $[0;\alpha]$ هي الدالة γ المعرفة بـــ $\gamma(x)=\frac{-1}{0,7}e^{-0,7x+2,1}+k$ حيث k ثابت حقيقي

إذن $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx=\left[\gamma(x)\right]_0^{\alpha}=\gamma(\alpha)-\gamma(0)=\frac{-1}{0,7}\left[f(\alpha)-f(0)\right]=\frac{-1}{0,7}\left[f(\alpha)-e^{2,1}\right]$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$\int_0^{\alpha} f(x)\,dx \approx 9{,}11 \text{ أي } \int_0^{\alpha} f(x)\,dx \approx \frac{-1}{0{,}7}[1{,}79-8{,}17]$$

الجزء B :

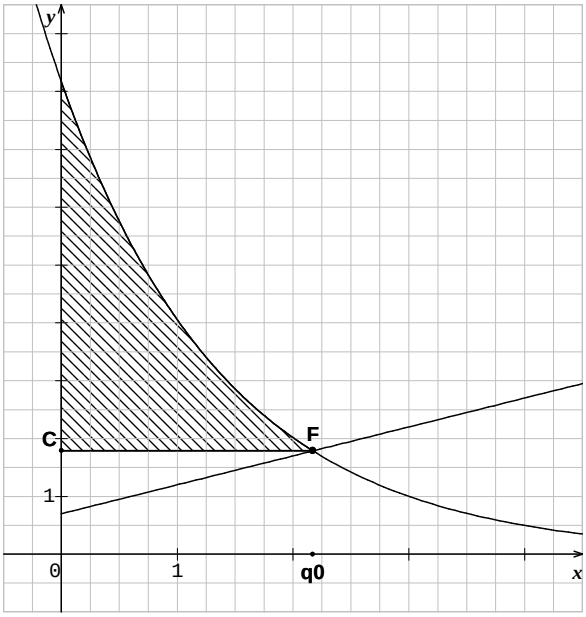
تصويب: $f(q_0)=g(q_0)$

$f(q_0)=g(q_0)$ ، إذن حسب الجزء A q_0 هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=g(x)$

أي هو الحل الوحيد للمعادلة $h(x)=0$ ، $q_0=\alpha$

العدد $p_0=f(q_0)=f(\alpha)=g(\alpha)$ ،

$q_0=\alpha$ و $p_0=f(\alpha)=g(\alpha)$



القيم المقربة لـــ q_0 و p_0 هي $q_0 \approx 2{,}172$ و $p_0 \approx 1{,}79$

2.أ- العددان q_0 و p_0 هما على الترتيب فاصلة و ترتيب النقطة F.النقطة E احداثياها $(q_0;0)$ و النقطة C احداثياها $(0;p_0)$.

ليكن Δ الحيز الذي مساحته $\int_0^{q_0} f(x)\,dx - p_0 \times q_0$

نلاحظ أن $\int_0^{q_0} f(x)\,dx = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$ و نلاحظ أيضا أن

$p_0 \times q_0 = \alpha \times f(\alpha)$ و هي مساحة المستطيل $OCFE$

إذن الحيز Δ هو الجزء من المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ، القطعة المستقيمة $[CF]$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\alpha=q_0$

ب- $\int_0^{q_0} f(x)\,dx - p_0 \times q_0 = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx - \alpha f(\alpha) = \frac{-1}{0{,}7}\left[f(\alpha)-e^{2{,}1}\right] - \alpha f(\alpha)$

و نجد حسب ما سبق $\int_0^{q_0} f(x)\,dx - p_0 \times q_0 \approx 9{,}11-3{,}88$ أي $\int_0^{q_0} f(x)\,dx - p_0 \times q_0 \approx 5{,}23$

فائض الإنتاج يرتفع إلى 5,23 آلاف دينار.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الباب الثامن

التزايد المقارن

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تعريف الدالة اللوغاريتم ذات أساس كيفي.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " دالة اللوغاريتم لأساس a ".

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: التمهيد لقوى عدد حقيقي موجب تماما.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " قوى عدد حقيقي موجب تماما "

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: التمهيد للدالة الجذر النوني.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الدالة الجذر النوني" .

الحل: بسيط.

النشاط الرابع

تصحيح: /

الهدف: مقارنة كل من $\ln x$ و e^x مع x^n .

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " التزايد المقارن " و يتم ضمن أفواج.

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

نموذج ديموغرافي

تصحيح: /

الهدف: توظيف قوى عدد حقيقي موجب تماما.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

فاتورة الهاتف

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدلالة الأسية و التزايد المقارن.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

دراسة دالة لوغاريتمية

تصحيح: /

الهدف: توظيف دالة اللوغاريتم النيبيري و التزايد المقارن.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

مسائل استمثال

تصحيح: /

الهدف: توظيف دالة اللوغاريتم النيبيري و التزايد المقارن.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

مقارنة الأعداد n^{n+1} **و** $(n+1)^n$

تصحيح: /

الهدف: توظيف دالة اللوغاريتم النيبيري و التزايد المقارن.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

الدوال $(\alpha \in \mathbb{R})\ x \mapsto x^{\alpha}$

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدوال الأسية و التزايد المقارن.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمارين

تمارين تطبيقية

1 ـ دالة اللوغاريتم للأساس a

1 . مجموعة التعريف هي $D=]0;+\infty[$

$\log_3(2x+5)+\log_3\left(\frac{1}{x}\right)=3$ تعني $\frac{\ln(2x+5)}{\ln 3}+\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln 3}=3$ و منه $\ln(2x+5)-\ln(x)=3\ln 3$

و منه $\ln\left(\frac{2x+5}{x}\right)=\ln 27$ و منه $\left(x=\frac{1}{5}\right)$. إذن مجموعة الحلول هي $S=\left\{\frac{1}{5}\right\}$

2. مجموعة التعريف : $D=]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$

$\log_3\left(\frac{x}{x-1}\right)>1$ تعني $\frac{\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}{\ln 3}>1$ و منه $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)>\ln 3$ أي $\frac{x}{x-1}-3>0$

أي $S=]-\infty;0[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ إذن مجموعة الحلول هي $x\in]-\infty;1[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$.

2 ـ قوى عدد حقيقي موجب تماما

1) مجموعة التعريف هي $\mathbb{R}$

$2^{2x+1}-10.2^x+12=0$ تعني $2\left(2^x\right)^2-10.2^x+12=0$ ومنه $\left(2^x\right)^2-5.2^x+6=0$

بوضع $X=2^x$ يكون لدينا $X^2-5X+6=0$

المعادلة $X^2-5X+6=0$ تقبل حلين هما $(X_1=2)$ و $(X_2=3)$

$(X=2)$ يعني $2^x=2$ و منه $x=1$

$(X=3)$ يعني $2^x=3$ و منه $x=\frac{\ln 3}{\ln 2}$. إذن مجموعة الحلول هي $S=\left\{1,\frac{\ln 3}{\ln 2}\right\}$

2) $2^{2x+1}-10.2^x+12>0$ تعني $X^2-5X+6>0$ مع $X=2^x$

$X^2-5X+6>0$ تعني $(X-2)(X-3)>0$

$(X-2)(X-3)>0$ تعني $\left(2^x-2\right)\left(2^x-3\right)>0$

x	$-\infty$		1		$\frac{\ln 3}{\ln 2}$		$+\infty$
2^x-2		$-$	0	$+$			$+$
2^x-3		$-$		$-$	0	$+$	
$\left(2^x-2\right)\left(2^x-3\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن مجموعة الحلول هي $S=]-\infty;1[\cup\left]\frac{\ln 3}{\ln 2};+\infty\right[$

3 ـ دراسة الدوال $x\mapsto a^x$ و $x\mapsto\sqrt[n]{x}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

1.معامل التناسب الإجمالي من 1980 إلى 1990 هو $k=\dfrac{972}{800}$

$$x=\left(\frac{972}{800}\right)^{\frac{1}{10}}-1\approx 0,0196$$

2. $$x=\left(\frac{1230}{1050}\right)^{\frac{1}{3}}-1\approx 0,0541$$

إذا بقي هذا التزايد على ما هو عليه ، عدد الطلاب عام 2007 هو $1230000\times(1,0541)^{7}\approx 1778598$

4 ـ التزايد المقارن

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{e^x}=0$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{1-x}=0$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)e^{1-x}=0$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x+1}=0$ و منه $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^2-x+1)e^{2x+1}=0$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{3x-1}=0$ و منه $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2-3)e^{3x-1}=0$

تمارين للتعمق

تصويب : لتكن الدالة f دالة المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ بـــ : $f(x)=\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}$

المجموعة $\mathbb{R}^*$ متناظرة بالنسبة للصفر أي $x\in\mathbb{R}^*$ إذا وفقط إذا كان $-x\in\mathbb{R}^*$

و من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $f(-x)=\dfrac{5^{-x}}{5^{-2x}-1}=\dfrac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1}{5^{2x}}-1}=\dfrac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1-5^{2x}}{5^{2x}}}=-\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}=-f(x)$

إذن الدالة f فردية ، و بالتالي مبدأ المعلم O هو مركز تناظر للمنحني (C)

2. أ- f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ ،

$$f'(x)=-\frac{5^x\ln 5\times\left(5^{2x}-1\right)-2\times5^{2x}\ln 5\times5^x}{\left(5^{2x}-1\right)^2}=-\frac{5^x\ln 5\times\left(5^{2x}+1\right)}{\left(5^{2x}-1\right)^2}$$

ب- بما أن $5^x>0$ فمن الواضح أن $f'(x)<0$ إذن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;0[$ و على $]0;+\infty[$

3. أ- $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}2x=0^+$ و $\lim\limits_{X\xrightarrow{>}0}5^X=1^+$ ومنه حسب نهاية مركب دالتين $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}5^{2x}=1^+$

و منه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(5^{2x}-1\right)=0^+$ و بالتالي $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}=+\infty$

التفسير الهندسي: المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=0$

ب- من أجل كل $x>0$ ، $f(x)=\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}=\dfrac{5^x}{5^{2x}\left(1-\frac{1}{5^{2x}}\right)}=\dfrac{1}{5^x\left(1-\frac{1}{5^{2x}}\right)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}5^X=+\infty$ ومنه حسب نهاية مركب دالتين $\lim\limits_{x\to+\infty}5^{2x}=+\infty$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

و نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{5^{2x}}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}5^x\left(1-\frac{1}{5^{2x}}\right)=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{5^x\left(1-\frac{1}{5^{2x}}\right)}=0$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ و هذا يبين أن المستقيم الذي معادلته $y=0$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$

الدالة f فردية ، لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

4. تصويب حل المعادلتين $f(x)=\frac{2}{3}$ و $f(x)=-\frac{2}{3}$

بوضع $X=5^x$ ، $f(x)=\frac{2}{3}$ تعني $\frac{X}{X^2-1}=\frac{2}{3}$

و منه $2X^2-3X-2=0$

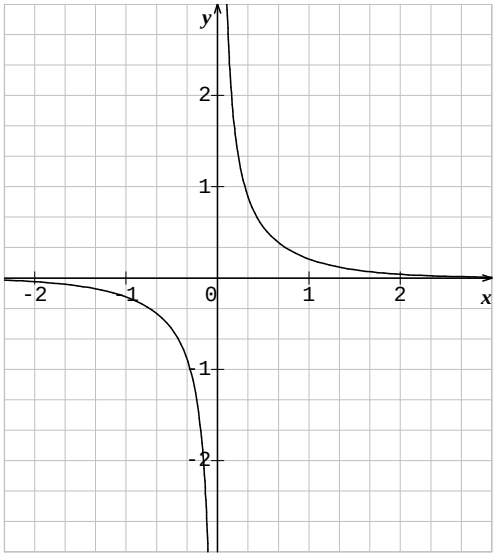
حلي المعادلة $2X^2-3X-2=0$ هما $X_1=-\frac{1}{2}$ و $X_2=2$.

الحل السالب مرفوض لأن $X>0$

$f(x)=\frac{2}{3}$ تعني $5^x=2$ و منه $x=\frac{\ln 2}{\ln 5}$

بما أن الدالة f فردية فإن $f(x)=-\frac{2}{3}$ تعني $x=-\frac{\ln 2}{\ln 5}$

5. رسم المنحني (C) (انظر الشكل المقابل)



مسائل

لتكن C_m الدالة المعرفة على $[0;6]$ بـــ : $C_m(q)=0,8+4(1-2q)e^{-2q}$

الدالة $q\mapsto -2q$ قابلة للاشتقاق على $[0;6]$ و الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و منه $q\mapsto e^{-2q}$ قابلة للاشتقاق على $[0;6]$. $q\mapsto 4(1-2q)$ قابلة للاشتقاق على $[0;6]$. إذن C_m قابلة للاشتقاق على $[0;6]$

من أجل كل q من $[0;6]$ $C_m'(q)=-8e^{-2q}(1+1-2q)$ أي $C_m'(q)=16e^{-2q}(q-1)$

من أجل كل q من $[0;6]$ $e^{-2q}>0$ و منه إشارة $C_m'(q)$ هي من نفس إشارة $q-1$ و نستنتج أن:

$C_m'(q)<0$ إذا وفقط إذا كان $0\le q<1$

$C_m'(q)>0$ إذا وفقط إذا كان $1<q\le 6$

$C_m'(q)=0$ إذا وفقط إذا كان $q=1$

C_m متناقصة تماما على $[0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;6]$.

q	0		1		6
$C_m'(q)$		−	0	+	
C_m	$C_m(0)$	↘	$C_m(1)$	↗	$C_m(6)$

لدينا $C_m(0)=4,8$ ، $C_m(1)\approx 0,26$ و $C_m(6)\approx 0,8$

C_m تقبل عند 1 قيمة حدية صغرى موجبة تماما إذن C_m موجبة تماما على المجال $[0;6]$

2. g قابلة للاشتقاق على $[0;6]$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $[0;6]$.

من أجل كل q من $[0;6]$: $g'(q)=4e^{-2q}+4q(-2)e^{-2q}=4(1-2q)e^{-2q}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ب- C_T هي دالة أصلية للدالة C_m على $[0;6]$ إذن $C'_T = C_m$

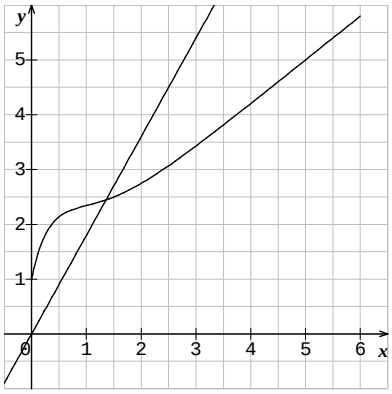
بما أن $C_m(q) = 0,8 + g'(q)$ فإن من أجل كل q من $[0;6]$ $C_T(q) = 0,8q + g(q) + k$ حيث k ثابت حقيقي

بما أن $C_T(0) = 1$ فإن $C_T(0) = g(0) + k = k$ و منه $k = 1$

إذن : $C_T(q) = 0,8q + 4qe^{2q} + 1$

3.أ- الدالة C_T هي دالة أصلية للدالة C_m على $[0;6]$ ، و سابقا رأينا أن C_m موجبة تماما على المجال $[0;6]$ ، إذن الدالة C_T متزايدة تماما على $[0;6]$.

q	0		6
$C_T'(q)$		+	
C_T	1	↗	$C_T(6)$



ب- التمثيل البياني للدالة " الكلفة الإجمالية " (انظر الشكل)

II . تصويب : ثمن البيع لهذا السائل هو 1,80 للتر الواحد

المصنع ينتج يوميا q آلاف لتر و الكمية المنتجة تباع كلها، إذن الدخل اليومي هو $1,80q$

1. أ- تمثيل دالة الدخل اليومي (انظر الشكل)

ب- الفائدة $B(q)$ تساوي قيمة الداخل منزوع منها الكلفة الإجمالية أي $B(q) = 1,80q - C_T(q)$

و منه $B(q) = 1,80q - 0,8q - 4qe^{-2q} - 1 = q - 1 - 4qe^{-2q}$

2.لتكن الدالة h المعرفة على $[0;6]$ بـــ : $h(q) = 1,8 - C_m(q)$

أ- من أجل كل q من $[0;6]$، $h'(q) = -C'_m(q)$ و نستنتج جدول تغيرات h كما يلي:

x	0		1		6
$h'(q)$		+	0	−	
$h(q)$	-3	↗	$h(1)$	↘	1

ب-h قابلة للاشتقاق و متزايدة على $[0;1]$ و $h(0) < 0$ و $h(1) \approx 1,54$

إذن المعادلة $h(q) = 0$ تقبل حلا واحدا α على $[0;1]$

جـــ- h متزايدة تماما على $[0;1]$ إذن إذا كان $0 \le q < \alpha$ فإن $h(q) < h(\alpha)$ أي $h(q) < 0$

و إذا كان $\alpha < q \le 1$ فإن $0 < h(q)$

إذا كان q ينتمي إلى $[1;6]$ فإن $h(q) > 0$

خلاصة: $h(q) < 0$ إذا وفقط إذا كان $q \in [0;\alpha[$

$h(q) > 0$ إذا وفقط إذا كان $q \in]\alpha;6]$ ، $h(q) = 0$ إذا وفقط إذا كان $q = \alpha$

3. $B'(q) = h(q)$ ومنه $B'(q)$ و $h(q)$ لهما نفس الإشارة

إذن الدالة B متناقصة تماما على $[0;\alpha]$ و متزايدة تماما على $[\alpha;6]$

ب- $\alpha \approx 0,28$ ، $B(\alpha) \approx -1,36$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الباب التاسع

الإحصاء

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الأنشطة

النشاط الأول :

- تعريف سلسلة احصائية لمتغيرين عددين .
- تمثيل سلسلة احصائية لمتغيرين عددين بسحابة نقط .
- إنشاء مستقيم تعديل خطي .

النشاط الثاني :

- تمثيل سلسلة احصائية لمتغيرين عددين بسحابة نقط .
- إنشاء مستقيم تعديل خطي .

الأعمال الموجهة

الأعمال الموجهة (1)

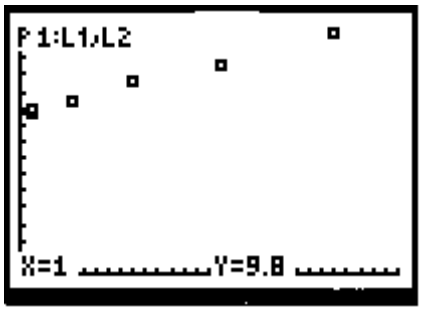
ا) تعديل بقطع مكافئ :

اتبع الخطوات الواردة و ذلك باستعمال الحاسبة البيانية TI83+ (يمكن استعمال آلات حاسبة بيانية أخرى)

الأعمال الموجهة (2) :

حتما ستظهر لك هذه الصور (لا تنس أن تعدل معلم الشاشة بالنقر على WINDOW)





السؤال 3 يطلب سحابة النقط $(z_i ; y_i)$

التمارين

1 **1)** أ) $y_i = x_i - 100$ ، $\overline{y} = 3,5$ **إذن** $\overline{x} = 103,5$

ب) $y_i = x_i - 23600$ ، $\overline{y} = 15$ **إذن** $\overline{x} = 23615$

ج) $y_i = 10000x_i$ ، $\overline{y} = 56,5$ **إذن** $\overline{x} = 0,00565$

د) $y_i = x_i - 10$ ، $\overline{y} = 2,5$ **إذن** $\overline{x} = 12,5$

16 **1)** $y = 0,175x + 0,973$

2) أ) $0,175 \times 10 = 1,75$ **إذن التزايد المتوسط هو** $0,75$ **سنة خلال 10 سنوات**

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ب) في سنة 2005 ، $x = 15$ إذن $0,175\times 15 + 0,973 \simeq 3,598$

و منه $80 + 3,6 = 83,6$ إذن متوسط العمر سنة 2005 هو $83,6$ سنة .

ج) بحل المتراجحة $0,75x + 0,973 \succ 5$ ينتج $x \succ \dfrac{4,027}{0,175} \simeq 23,01$

الجواب بعد 24 سنة أي سنة 2014

3) حسب التعديل ، في سنة 2004 متوسط العمر هو $83,6$

و بالتالي يوجد خطأ بنسبة 5 % فقط .

17 1) **معادلة مستقيم الإنحدار :**

بعد حساب قيم x_i و y_i نحسب $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 0$ ، $\overline{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = -2,8$

و $a = \dfrac{\sum x_i y_i - n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum x_i^2 - n\overline{x}^2}$

و بالتالي المعادلة المطلوبة هي $y - \overline{y} = a(x - \overline{x})$ أي $y = 13,5x - 2,8$

2) معامل التمدد k :

نعوض قيم كل من x و y في المعادلة السابقة نجد $100l - 100566 = 13,5\dfrac{\theta - 30}{10} - 2,8$

و منه $l = 13,5.10^{-3}\theta + 1005,227$

نعلم أن عبارة l من الشكل $l = l_0(1 + k\theta)$ حيث l_0 طول القضيب تحت درجة حرارة 0^0c

أي $l_0 = 1005,227$ و منه $l = l_0\left(1 + \dfrac{13,5.10^{-3}}{1005,227}\theta\right)$ أي $K \simeq 1,3.10^{-5} mm/^0C$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الباب العاشر

الاحتمالات

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الأنشطة

النشاط الأول :

- تعيين قانون احتمال مرفق بتجربة عشوائية لها عدد منته من الإمكانيات.
- حساب احتمال حادثة علما بحدوث حادثة أخرى و بناء شجرة متوازنة .
- استعمال أشجار متوازنة أو دستور الإحتمالات الكلية لحساب احتمالات و حل مشكلات .
- حساب الأمل الرياضياتي و التباين و الإنحراف المعياري المرفقة بقانون احتمال .

النشاط الثاني :

- حساب احتمال حادثة علما بحدوث حادثة أخرى و بناء شجرة متوازنة .
- استعمال أشجار متوازنة أو دستور الإحتمالات الكلية لحساب احتمالات و حل مشكلات .

النشاط الثالث :

- حساب احتمال حادثة علما بحدوث حادثة أخرى و بناء شجرة متوازنة .
- استعمال أشجار متوازنة أو دستور الإحتمالات الكلية لحساب احتمالات و حل مشكلات .
- تعريف قانون برنولي و قانون ثنائي الحد و استعمالهما لحساب احتمالات حوادث .

النشاط الرابع :

- قياس تلاؤم مع قانون منتظم .

الأعمال الموجهة

الأعمال الموجهة (1)

تتبع الخطوات المبينة في الكتاب علة الآلة الحاسبة البيانية TI83+

- خطأ مطبعي : الأسئلة الثلاثة الأخيرة غير معنية بهذا الموضوع

التمارين

1 1) يوجد 8 أحجار دومينو من الشكل | Z | Z | و $C_8^2 = 28$ من الشكل | X | Y |

و منه عدد الأحجار $8 + 28 = 36$

2) أ) $\frac{4+C_4^2}{36} = \frac{5}{18}$

ب) هذه الأحجار هي الأحجار السابقة بالإضافة الى الأحجار المشكلة من رقمين فرديين

و منه $\frac{5}{18} + \frac{C_4^2}{36} = \frac{4}{9}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3) يوجد 8 أحجار مضاعفة . من أجل كل حجر مضاعف مثل | 0 | 0 | يوجد 7 أحجار عادية أحد رقميها هو الرقم الموجود على الحجر المضاعف

مثل $\{(0;1);(0;2);(0;3);(0;4);(0;5);(0;6);(0;7)\}$

ينتج من هذا $8\times 7=56$ حالة ممكنة

الإحتمال المطلوب $\frac{56}{630}=\frac{4}{45}$ (و بالتالي التأكيد صحيح)

18 باتباع الخطوات الواردة في الدرس نجد :

$d^2\simeq 0,0173$ إذن $1000.d^2\simeq 17,3\prec d_9$

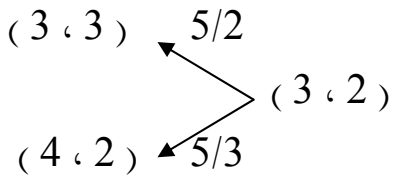
و بالتالي ، يمكن التأكيد بمجازفة بالخطأ مقدارها 10 % أن حجر النرد غير مزيف .

29 1) نمثل محتويات الصندوق بالثنائية (2 ، 3) التي تعني وجود كرتين سوداوين و ثلاث كرات بيضاء في الصندوق .

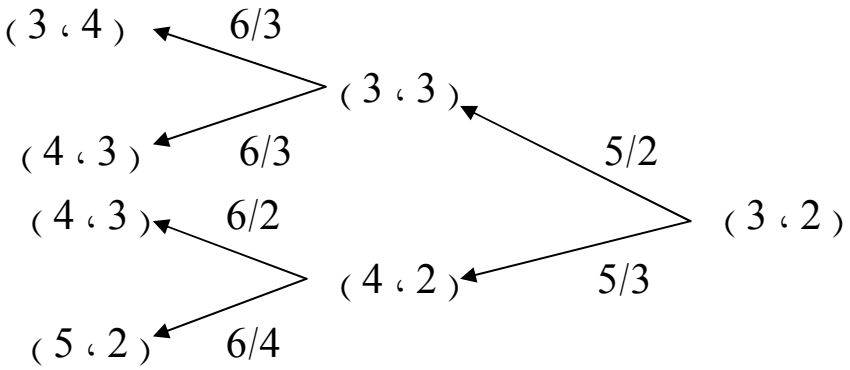
إحتمال سحب كرة سوداء في السحبة الأولى هو 5/2 . قبل السحبة الثانية يمثل الصندوق بالثنائية (3 ، 3) .

إحتمال سحب كرة بيضاء في السحبة الأولى هو 5/3 . قبل السحبة الثانية يمثل الصندوق بالثنائية (2 ، 4) .

نلخص العملية بالمخطط التالي :



بعد السحبة الثانية نحصل على :



2) أ) إذن (باستعمال المسارات المؤدية الى الثنائية (3 ، 4) لدينا

$$p(A)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{6}=\frac{2}{5}$$

ب) و بنفس الطريقة نجد :

$$p(B)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{5}$$

49 نضع R حدثة " نجاح تلميذ ما في البكالوريا " فيكون $p(R)=0,4$

1) $P_1=(1-p(R))^5\simeq 0,078$

2) $p_2=C_5^1(0,4)(0,6)^4\simeq 0,052$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$p_3 = C_5^2 (0,4)^2 (0,6)^3 = 0,3456$ (3

$p_4 = 1 - p_1 - p_2 \simeq 0,78$ (4

$P_5 = (p(R))^5 = 0,01024$ (5

59 I) (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6}$ و $U_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$

II) 1) $a_1 = p(A_1) = \frac{1}{2}$ ، $r_1 = \frac{7}{12}$

2) $r_n = p(A_n).p_{A_n}(R_n) + p(\overline{A_n}).p_{\overline{A_n}}(R_n)$

$= \frac{1}{2} p_{A_n}(R_n) + \frac{2}{3} p(\overline{A_n})$

$= \frac{1}{2} a_n + \frac{2}{3}(1 - a_n)$

$= -\frac{1}{6} a_n + \frac{2}{3}$

4) $a_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$

5) $r_n = \frac{-1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n} + \frac{3}{5}$ و منه $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = \frac{3}{5}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

كتاب الأستاذ

الشعب:

- **آداب وفلسفة**
- **لغات أجنبية**

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الباب الأول

القسمة الإقليدية
في مجموعة الأعداد الصحيحة

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: عدد تام عوض عدد كامل أو عدد مثالي.

عددان متحابان عوض عددان متراضيان.

الهدف: تعيين قواسم عدد طبيعي في مجموعة الأعداد الطبيعية تمهيدا لتعريف قواسم عدد صحيح في مجموعة الأعداد الصحيحة.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$ ".

الحل:

1. قواسم 28 هي 1؛ 2؛ 4؛ 7؛ 14؛ 28 و لدينا $28=14+7+4+2+1$. نستنتج أن 28 عددا تاما.
2. قواسم 220 هي 1؛ 2؛ 4؛ 5؛ 10؛ 11؛ 20؛ 22؛ 44؛ 55؛ 110 و 220.

لدينا: $284=110+55+44+22+20+11+10+5+4+2+1$.

قواسم 284 هي: ...

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: يهدف الجزء الأول إلى التمهيد الحدسي لمبرهنة القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$ و يهدف الجزء الثاني إلى مقاربة تعريف الموافقة في $\mathbb{Z}$.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الموافقات في $\mathbb{Z}$ ".

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: تخمين بعض خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$ " و يتم باستعمال جهاز الداتاشو.

الحل: يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

النشاط الرابع

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مفهوم الاستدلال بالتراجع.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الاستدلال بالتراجع " و يتم باستعمال جهاز الداتاشو و كذلك العمل ضمن أفواج لإنجاز البرهان المطلوب.

الحل: يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الأعمال الموجهة

التشفير التآلفي

تصحيح: /

الهدف: تعريف التشفير التآلفي و استعماله لتشفير رسائل و فك أخرى مشفرة باستعمال المفتاح المناسب.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

يوم الأسبوع الذي يصادف تاريخا معينا

تصحيح: /

الهدف: تعيين يوم الأسبوع الذي يصادف تاريخا معينا.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

تعيين بواقي قسمة قوى عدد طبيعي على آخر

تصحيح: /

الهدف: تعيين، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة العدد الطبيعي a^n على b.

توجيهات: يقدم النشاط باستعمال جهاز الداتاشو و كذلك العمل ضمن أفواج لإنجاز البرهان المطلوب.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 ــ قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$.

الأعداد التي تكون قاسمة للعدد 204 هي :2 ، 3 ، 4 ، 6 ،12.

- $(x-2)(y-3)=xy-3x-2y+6$.
- $xy=3x+2y$ يعني $(x-2)(y-3)=6$. و منه لدينا عدة حالات:

الحالة الأولى: $x-2=1$ و $y-3=6$ أي $(x;y)=(3;9)$.

الحالة الثانية: $x-2=6$ و $y-3=1$ أي $(x;y)=(8;4)$.

الحالة الثالثة: $x-2=-1$ و $y-3=-6$ أي $(x;y)=(1;-3)$.

الحالة الرابعة: $x-2=-6$ و $y-3=3$ أي $(x;y)=(-4;2)$.

الحالة الخامسة: $x-2=2$ و $y-3=3$ أي $(x;y)=(4;6)$.

الحالة السادسة: $x-2=3$ و $y-3=2$ أي $(x;y)=(5;5)$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الحالة السابعة: $x-2=-2$ و $y-3=-3$ أي $(x;y)=(0;0)$.

الحالة الثامنة: $x-2=-3$ و $y-3=-2$ أي $(x;y)=(-1;1)$.

2 ــ القسمة الأقليدية في $\mathbb{Z}$.

جـــ $-118=7(-17)+1$ ومنه الباقي 1 والحاصل -17.

د ــ $-152=7(-22)+2$ ومنه الباقي 2 والحاصل -22 .

$n=41k+5$ حيث $41k+5\leq 100$ أي $k=0$ أو $k=1$ أو $k=2$ ومنه $n=5$ أو $n=46$ أو $n=87$.

3 ــ الموافقات في $\mathbb{Z}$.

برر صحة العبارات التالية :

أ ــ $6\times 7=42=45-3$ معناه $45\equiv 3[7]$.

ب ــ $152-2=150=3\times 20$

معناه $152\equiv 2[3]$.

جـــ $5\times 6=30=29+1$ معناه $29\equiv -1[6]$.

د ــ $5\times 28=140=137+3$ معناه $137\equiv -3[5]$.

و ــ $5(-3)=-15=-13-2$ معناه $-13\equiv 2[5]$.

هـــ $-17+7=-10=10(-1)$

معناه $-17\equiv -7[10]$.

نعتبر الموافقة (1) التالية $x\equiv 37[4]$

2. العدد الطبيعي الأصغر تماما من 4 ويحقق (1) هو باقي القسمة الأقليدية لـــ 37 على 4 وهو 1.

4 ، 13 ، 20 ، 27 .

$a\equiv 4[n]$ ؛ $b\equiv 14[n]$ و $c\equiv -34[n]$.

5 ــ خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$.

$140\equiv 8[12]$ إذن $n\equiv 8[12]$، ومنه باقي قسمة العدد n على 12 هو 8.

باقي قسمة العدد 67 على 11 هو 1.

لدينا $67\equiv 1[11]$ ومنه $67^{13}\equiv 1[11]$ إذن باقي قسمة العدد 67^{13} على 11 هو 1.

4 ــ الاستدلال بالتراجع .

نسمي $p(n)$ الخاصية $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

$p(0)$ هي $0=\dfrac{0(0+1)}{2}$ وهذا صحيح

نفرض $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ولنبرهن صحة $p(n+1)$.

$1+2+3+...+n+(n+1)=\dfrac{n(n+1)}{2}+n+1=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ إذن حسب مبدأ التراجع ينتج من أجل كل عدد طبيعي n ، $p(n)$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

1 ــ قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$.

المسافة بين العمودين المتتاليين هي عدد طبيعي x حيث $2<x<5$

وبالتالي : إمّا $x=3$ وإما $x=4$. لدينا 4 لا يقسم 90 بينما 3 هو قاسم مشترك للعددين 90 و 156

ونأخذ قاسما مشتركا لأن كل زاوية القطعة يغرس عمود. إذن المسافة بين عموديين متتاليين هي $3m$.

محيط القطعة هو $2(90+156)=492m$ ولدينا عدد الأعمدة هو نفس عدد الفراغات الموجودة بين عمودين متتاليين أي $\frac{492}{3}=164$

1) $\frac{n+2}{n-1}=\frac{n-1+3}{n-1}=\frac{n-1}{n-1}+\frac{3}{n-1}=1+\frac{3}{n-1}$

وبالتالي لكي يكون $\frac{n+2}{n-1}$ عددا صحيحا يكفي أن يكون $\frac{3}{n-1}$ عددا صحيحا ولهذا يجب أن يكون العدد $(n-1)$ قاسما للعدد 3 .

قواسم العدد 3 هي -1 , -3 , 1 و 3 وبالتالي : $(n-1=-1)$, $(n-1=-3)$ ، $(n-1=1)$ أو $(n-1=3)$

معناه $(n=0)$, $(n=-2)$ ، $(n=2)$ أو $(n=4)$ وبما أن n عدد طبيعي فإن قيمه الممكنة هي : 0 ، 2 و 4 .

2) ليكن α و β عددين طبيعيين حيث : $a=2^{\alpha}\times 3^{\beta}$ ومنه $a^2=2^{2\alpha}\times 3^{2\beta}$ عدد قواسم a^2 هو $(2\alpha+1)(2\beta+1)$ و عدد قواسم a هو $(\alpha+1)(\beta+1)$

ومن المعطيات لدينا : $(2\alpha+1)(2\beta+1)=3(\alpha+1)(\beta+1)$ معناه $4\alpha\beta+2\alpha+2\beta+1=3\alpha\beta+3\alpha+3\beta+3$

ومعناه $\alpha\beta-\alpha=\beta+2$ يكافئ $\alpha(\beta-1)=\beta+2$ أي $\alpha=\frac{\beta+2}{\beta-1}$. وحسب السؤال السابق ينتج أن $\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=4\end{cases}$ أو $\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=2\end{cases}$ ؛ إذن $a=2^2\times 3^4=324$ أو $a=2^4\times 3^2=144$.

2 ــ القسمة الأقليدية في $\mathbb{Z}$.

ب ــ $a=-3475$ و $b=53$. حاصل قسمة العدد a على b هو -66 ، لدينا $53k\le -3475\le 53(k+1)$ ومنه

$k\le \frac{-3475}{53}=-65,56$ و $k\ge \frac{-3528}{53}=-66,56$ إذن $k=-66$ ، وبالتالي $-3498\le -3475\le -3445$

3 ــ الموافقات في $\mathbb{Z}$ وخواصها

أ ــ x عدد صحيح

$x\equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$2x\equiv$	0	2	4	1	3	[5]

ب ــ $2x\equiv 3[5]$ معناه $x\equiv 4[5]$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4 ــ تشفير الكلمات .

أ	ب	ت	ث	ج	ح	خ	د	ذ	ر	ز	س	ش	ص	ض
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

ط	ظ	ع	غ	ف	ق	ك	ل	م	ن	ه	و	ي
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

نقوم بعملية التشفير باستعمال التحويل $x \mapsto y$ حيث y هو باقي قسمة $x+3$ على 28 .

1) شفر الكلمة " **الجزائر**" هو" **ثهدصتثث** ".

2) ليكن y من المجموعة ***N*** ، $x+3 \equiv y\ [28]$ معناه $x \equiv y-3[28]$ ؛ إذا كان $y \geq 3$ فإن $x = y-3$ وإذا كان $y < 3$ فإن $x = y-3+28 = y+25$

3) حل تشفير: **تبضل:** يوسف ؛ **لثغوا ثهصاشثث:** فاطمة الزهراء ؛ **وذوز :** محمد.

5 ــ الاستدلال بالتراجع .

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بِـ $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$.

المطلوب إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 3$.

الخاصية الابتدائية صحيحة لأن $u_0 = 3$.

نفرض أن $u_n = 3$ ولدينا $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} = \sqrt{9} = 3$

إذن حسب مبدأ التراجع لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 3$ أي المتتالية (u_n) ثابتة .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الباب الثاني

المتتاليات العددية

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: التذكير بتوليد متتالية معرفة بعلاقة تراجعية أو بعبارة الحد العام بدلالة n .

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " المتتاليات ".

الحل:

1. $u_{n+1}=2u_n+1$
2. $v_n=3n-5$

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: التذكير بالمتتالية الحسابية و المتتالية الهندسية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرتين " المتتالية الحسابية و المتتالية الهندسية " و " المتتالية الرتيبة"

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: نمذجة وضعية و مقاربة المتتاليات من الشكل $u_{n+1}=au_n+b$.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " المتتاليات من الشكل $u_{n+1}=au_n+b$ " و يتم ضمن أفواج.

الحل: يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

النشاط الرابع

تصحيح: /

الهدف: توظيف المتتاليات من الشكل $u_{n+1}=au_n+b$.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " المتتاليات من الشكل $u_{n+1}=au_n+b$ " و يتم ضمن أفواج.

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

النمو الديموغرافي

تصحيح: /

الهدف: توظيف المتتاليتين الهندسية و الحسابية في وضعيات لها دلالة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الحل: بسيط

تطور نسبة الزبناء

تصحيح: الزبائن عوض الزبناء

الهدف: توظيف المتتاليات من الشكل $u_{n+1}=au_n+b$ في وضعيات لها دلالة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

تخمين عبارة الحد العام لمتتالية ثم اثباتها

تصحيح: /

الهدف: التخمين ثم الإثبات باستعمال الاستدلال بالتراجع أو باستعمال متتالية مساعدة.

توجيهات: يقدم النشاط باستعمال جهاز الداتاشو و كذلك العمل ضمن أفواج لإنجاز البرهان المطلوب.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 ــ المتتاليات العددية

أ ــ $u(0)=5$ ، $u(1)=3$ و $u(2)=-3$.

ب ــ $u(13)=-333$ ، $u(50)=-4995$ و $u(100)=-19995$.

جـ ــ $u(n+1)=-2n^2-4n+4$ ؛ $u(2n)=-4n^2+5$.

نعتبر المتتالية u المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$u_0=2$ و $u_{n+1}=3-2u_n$.

$u_1=-1$ ، $u_2=5$ و $u_3=-7$. $u_{10}=1025$.

2 ـ المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية .

$u_{13}=-32$.

$S=u_0+u_1+...+u_{13}=7(7-32)=-175$.

$u_{33}=48$

$S=u_0+u_1+...+u_{33}=17(-1,5+48)=790,5$.

3 ــ اتّجاه تغيّر ورتابة متتالية .

1) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم, $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{4^{n+1}}{(n+1)^2}\times\frac{n^2}{4^n}=\frac{4n^2}{(n+1)^2}=\left(\frac{2n}{n+1}\right)^2$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2) من أجل كل $n \geq 1$ فإن $n+n \geq n+1$ معناه $2n \geq n+1$ أي $\frac{2n}{n+1} \geq 1$ ويكافئ $\left(\frac{2n}{n+1}\right)^2 \geq 1$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$

وبما أن كل الحدود موجبة تماما فإن المتتالية (u_n) متزايدة .

1) لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $2^n > 0$ و $n^2 > 0$ إذن $\frac{2^n}{n^2} > 0$ أي $u_n > 0$

2) نعتبر كثير الحدود $P(x) = x^2 - 2x - 1$ ، $\Delta' = 2$ ، $x' = 1-\sqrt{2}$ ، $x'' = 1+\sqrt{2}$.

$P(x) > 0$ معناه $x \in]-\infty; 1-\sqrt{2}[\cup]1+\sqrt{2}; +\infty[$ ؛

ومنه إذا كان $n \geq 3$ فإن $n \in]1+\sqrt{2}; +\infty[$ ومنه $P(n) > 0$.

3) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{2^n} = \frac{2n^2}{(n+1)^2}$.

إذا كان $n \geq 3$ فإن $n^2 - 2n - 1 > 0$ وهذا يعني أن $n^2 > 2n+1$ أي $n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1$ ومعناه $2n^2 > (n+1)^2$

ويكافئ $\frac{2n^2}{(n+1)^2} > 1$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ وبما أن كل الحدود موجبة فإن $u_{n+1} > u_n$.

وبالتالي ابتداء من $n = 3$ أي من الحد الثالث u_3 تكون المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

4 ــ المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$.

أ ــ $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 3u_n - 3 = 3v_n$.

ب ــ من السؤال أ ــ ينتج أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 .

2) **تصحيح** نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = u_n + \frac{1}{2}$.

أ ــ $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3u_n + 1 + \frac{1}{2} = 3\left(u_n + \frac{1}{2}\right) = 3v_n$ ب ــ $v_n = v_0 \times 3^n$ ؛ $v_n = v_0 \times 3^n - \frac{1}{2}$.

تمارين للتّعــمّــق

1 ــ المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية .

1) $r = \frac{v_8 - v_4}{4} = \frac{1}{2}$ ؛ $v_0 = v_4 - 4r = 3$.

2) أحسب $v_n = 3 + \frac{1}{2}n$ ؛ $3 + \frac{1}{2}n = 50$ معناه $n = 94$.

3) $S = v_6 + v_7 + \ldots + v_{94} = \frac{89}{2}(v_6 + v_{94})$ ؛ $S = \frac{89}{2}(2v_0 + 100r) = 2492$.

2 ــ اتّجاه تغيّر ورتابة متتالية .

1) $u_1 - 11,2$ ، $u_2 = -23,08$ و $u_3 = -33,77$.

2) $u_{n+1} - u_n = 0,9$ ، $u_{n+1} - u_n > 0$ أي (u_n) متزايدة تماما.

3 ــ المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة بـ $u_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n-1)$.

1) $3u_0=u_0-1$ معناه $u_0=-\frac{1}{2}$.

2) نضع $u_0=4$ و $v_n=2u_n+1$.

أ ـ $v_{n+1}=2u_{n+1}+1=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}v_n$. $v_0=9$.

ب ـ $v_n=9\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ؛ $u_n=\frac{1}{2}\left(9\times\left(\frac{1}{3}\right)^n-1\right)$.

مسـائل

1) أ) $u_2=u_1+150=5150\,DA$.

ب)من أجل n عدد طبيعي لدينا: $u_{n+1}=u_n+150$ إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها 150

ومنه $u_n=u_1+(n-1)150=150n+4850$ ، $u_8=150\times8+4850=9600\,DA$.

ت) $S=u_1+u_2+...+u_8=\frac{8}{2}(u_1+u_8)=58400\,DA$.

2) أ) $v_2=v_1+0,03v_1=1,03v_1=5150\,DA$.

ب) من أجل n عدد طبيعي لدينا: $v_{n+1}=v_n+0,03v_n=1,03v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $1,03$

ومنه $v_n=v_1(1,03)^{n-1}=5000(1,03)^{n-1}$ ، $v_8=5000(1,03)^7=6149.37\,\text{DA}$.

ت) $T=v_1+v_2+...+v_8=v_1\frac{(1,03)^8-1}{1,03-1}=44461,68\,DA$.

3) العقد الثاني أقل تكلفة إذن عمر يختار هذا العقد .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الباب الثالث

اتجاه تفسيرالة

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: التذكير بإشارة ثنائي الحدين و ثلاثي الحدود.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " تذكير حول المعادلات و المتراجحات".

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: دراسة اتجاه تغير دالة.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " تذكير حول المشتقات ".

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

من جدول التغيرات إلى التمثيل البياني

تصحيح: /

الهدف: ربط جدول تغيرات بالمنحني المناسب.

توجيهات: يتم تقديم العمل في شكل أفواج.

الحل: بسيط

من التمثيل البياني إلى جدول التغيرات

تصحيح: /

الهدف: ربط منحن بجدول التغيرات المناسب.

توجيهات: يتم تقديم العمل في شكل أفواج.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 ـ تذكير حول المعادلات و المتراجحات

دراسة حسب قيم x إشارة كل من $f(x)$ و $g(x)$:

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$g(x)$		+	0	-	

$(C_4) \to f$ و $(C_3) \to k$ ، $(C_2) \to g$ ، $(C_1) \to h$

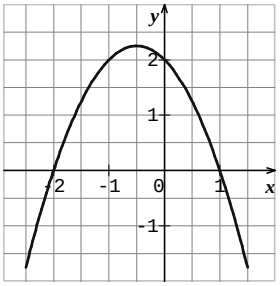
إشارة $f(x)$.

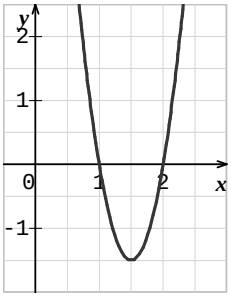
x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

f دالة معرفة على $[-2,5;2,5]$ حيث جدول تغيراتها هو التالي:

x	-2,5		-0,5		2,5
$f(x)$		↗	$\frac{9}{4}$	↘	

منحنى الدالة f هو : (1)





f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس هو التالي:

جدول تغيرات الدالة f هو

x	$-\infty$		1,5		$+\infty$
$f(x)$		↘	$-\frac{3}{2}$	↗	

2. تذكير حول المشتقات

1) $f'(x) = -2$ 2) $f'(x) = -4x + 3$ 3) $f'(x) = x^2 + x - 1$

1) $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ 2) $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ 3) $f'(x) = \frac{-40}{(4x-5)^2}$

1) $f'(3) = 2$ و $f'(-2) = 2$.

2) $f'(1) = -3$ و $f'(-\sqrt{2}) = -3$

3) $f'(x) = 2x$ ومنه $f'(-1) = -2$.

4) $f'(x) = 3x^2$ ومنه $f'(0) = 0$.

5) $f'(x) = 2x + \frac{1}{2}$ ومنه $f'(2) = \frac{9}{2}$.

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

1) $f'(3)=2\times3=6$.

2) معادلة المماس Δ لمنحني (C) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها0 هي $y=0$.

نسمي f الدالة المرفقة للمنحني (C). لمماس المنحني (C) عند النقطة A ، والذي يوازي المستقيم (Δ) معامل التوجيه $f'(2)=3$ هو نفس معامل توجيه (Δ) ولدينا $f(2)=4$ إذن معادلة المماس هي

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$ أي $y=3x-2$.

(C) منحن يشمل النقطة $A(-1;-3)$.

لمماس المنحني (C) عند النقطة A ، والذي شعاع توجيهه $\vec{i}$ ، معامل التوجيه معدوم وبالتالي معادلته $y=-3$.

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2-5x+4$ و $(\mathcal{P})$ منحنيها الممثل في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنا كثير حدود . $f'(x)=2x-5$.

2) معادلة لمماس المنحني $(\mathcal{P})$ عند نقطته $E(0;4)$ هي $y=-5x+4$

3) $f'(x)=\frac{1}{2}$ معناه $-5x+4=\frac{1}{2}$ أي $x=\frac{7}{10}$.

4) a عدد حقيقي . $y=(2a-5)x-a^2+4$.

5) $-a^2+4=0$ معناه $a=2$ أو $a=-2$.

1) $f(x)=x^2-x-6$ ؛ $f'(x)=2x-1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	↘		$-\frac{25}{4}$	↗	

1. $f(0)=-1$ ، $f(1)=2$ و $f(2)=-1$.

2. $f'(0)=-2$ ، $f'(1)=0$ و $f'(2)=2$.

3. معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة B هي $y=-2x-1$

4. $f(0)=-1$ معناه $c=-1$ و $f'(0)=-2$ معناه $b=-2$.

$f(x)=x^2-2x-1$ ؛ $f\left(1+\sqrt{2}\right)=\left(1+\sqrt{2}\right)^2-2\left(1+\sqrt{2}\right)-1=3+2\sqrt{2}-2-2\sqrt{2}-1=0$

x	-1		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		3
$f(x)$		+	0	-	0	+	

5. الدالة f هي مشتقة دالة F على المجال $[-1;3]$.

x	-1		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		3
$F'(x)$		+	0	-	0	+	
$F(x)$	↗			↘		↗	

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الباب الرابع

الدوال كثيرات الحدود

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تخمين نهاية دالة كثير حدود من الدرجة الأولى عند مالانهاية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتم باستعمال جهاز الداتاشو و يتوج بتقديم فقرة " الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الأولى ".

الحل: /

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: تخمين نهاية دالة كثير حدود من الدرجة الثانية عند مالانهاية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثانية " و يتم باستعمال جهاز الداتاشو.

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: تخمين نهاية دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة عند مالانهاية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة " و يتم باستعمال جهاز الداتاشو.

الحل: يكفي إتباع مختلف الخطوات الواردة في النشاط لبلوغ النتائج المتوخاة.

الأعمال الموجهة

مسائل استمثال

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدوال كثيرات الحدود من الدرتين الثانية و الثالثة لدراسة وضعية استمثال.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

الربط بين مساحة، دالة و منحن

تصحيح: /

الهدف: دراسة وضعية استمثال.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

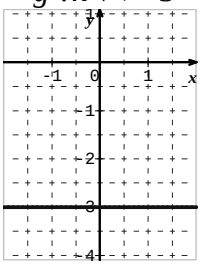
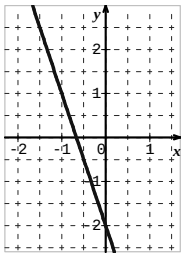
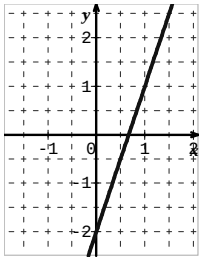
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمارين

تمارين تطبيقية

1 ــ الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الأولى .

$f : x \mapsto 3x - 2$ ؛ $g : x \mapsto -3x - 2$ ؛ $g : x \mapsto -3$

$g : x \mapsto -2x - 3$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$		-6	

$f : x \mapsto 2x - 3$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$		1	

$g : x \mapsto -3x$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$		-7	

1) جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

2) إحداثيتا نقطة تقاطع منحني الدالة f مع محور الفواصل $(2;0)$.

إحداثيتا نقطة تقاطع منحني الدالة f مع محور التراتيب $(0;-1)$.

3) إذا كان $x \in]-\infty;2]$ فإن $f(x) \leq 0$ وإذا كان $x \in [2;+\infty[$ فإن $f(x) \geq 0$

2 ــ الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثانية .

1.أ- $f(x) = g(x)$ معناه $2x^2 - 5x - 25 = 0$ ومعناه $x = -\frac{5}{2}$ أو $x = 5$.

ب- إحداثيات نقط تقاطع المنحنيين (C_f) و (C_g) هي $\left(-\frac{5}{2};\frac{65}{4}\right)$ ؛ $(5;20)$.

2.أ- إشارة $f(x) - g(x)$ حسب قيم x .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		5		$+\infty$
$2x^2-5x-25$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ب- إذا كان $x \in]-\infty;-\frac{5}{2}[\cup]5;+\infty[$ فإن (C_f) يقع فوق (C_g) وإذا كان $x \in]-\frac{5}{2};5[$ فإن (C_f) يقع تحت (C_g).

3 ــ الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة .

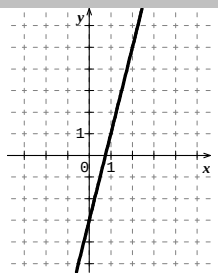
الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ؛ في المجالين $]-\infty;-1]$ و $[2;+\infty[$ الدالة f متزايدة تماما ؛ وفي المجال $[-1;2]$ الدالة f متناقصة تماما.

تمارين للتّعـمّـق

1 ــ الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الأولى .

$f: x \mapsto 4x-3$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

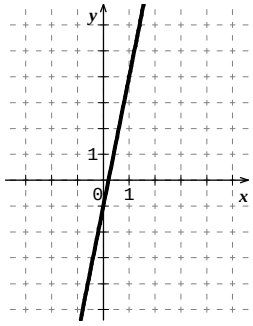


$f: x \mapsto 5x-1$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 5x=-\infty$ ؛

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 5x=+\infty$ ؛ $f'(x)=5$ ؛

ومن أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)>0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$



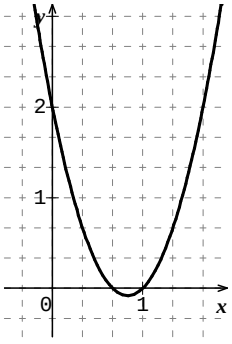
2 ــ الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثانية .

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=3x^2-5x+2$. C_f منحنيها البياني .

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2=+\infty$.

2. $f'(x)=6x-5$.

x	$-\infty$		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{12}$	↗	$+\infty$



3. أكتب معادلة لمماس المنحني C_f.

$3x^2-5x+2=0$ معناه $x=1$ أو $x=\frac{2}{3}$، معادلة المماسين المنحني C_f : $y=x-1$ ؛ $y=-x-\frac{2}{3}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4. التمثيل البياني

3 ــ الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة .

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

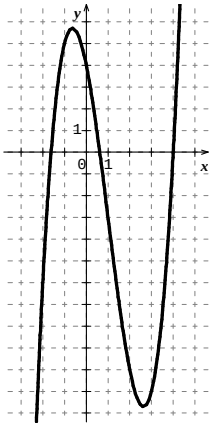
$f(x)=x^3-3x^2-5x+4$.

(C) المنحني البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

1) f معرفة على $\mathbb{R}$ ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.

$f'(x)=3x^2-6x-5$.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$



2) $f''(x)=6x-6$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

3) رسم (C) .

مسـائـل

نسمي X طول زجاجة الباب و x عرضها حيث $x>0$ ولدينا : $X\times x=20160\,cm^2$

أي : $X=\dfrac{20160}{x}$. نسمي f الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي موجب تماما x ، مساحة الباب ؛ أي :

$f(x)=(X+42)(x+30)$ ومعناه $f(x)=\left(\dfrac{20160}{x}+42\right)(x+30)$ الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ولدينا :

$$f'(x)=\left(\frac{-20160}{x^2}\right)(x+30)+\left(\frac{20160}{x}+42\right)$$

أي : $$f'(x)=42\left(\frac{-480x-14400+480x+x^2}{x^2}\right)$$

ومعناه $$f'(x)=42\left(\frac{x^2-14400}{x^2}\right)$$

x	0		120		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	31500	↗	

القيمة الحدية الصغر للدالة f (أصغر مساحة للباب) هي $31500\,cm^2$ وتبلغها عند $x=120$

إذن عرض الباب هو $x+30=150\,cm$ وطولها هو $X+42=\dfrac{20160}{x}+42=210\,cm$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الباب الخامس

الدوال التناظرية

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تخمين نهايات دالة تناظرية عند إطراف مجموعة تعريفها و مقاربة مفهوم الخط المقارب.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " نهايات دالة تناظرية " ويتم باستعمال جهاز الداتاشو.

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: تخمين نهايات دالة تناظرية عند إطراف مجموعة تعريفها و مقاربة مفهوم الخط المقارب.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " نهايات دالة تناظرية " ويتم باستعمال جهاز الداتاشو.

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

التعرف على المستقيمات المقاربة من جدول التغيرات

تصحيح: /

الهدف: اكتشاف كيف يمكن استخراج المستقيمات المقاربة من جدول التغيرات.

توجيهات: يتم تقديم العمل في شكل أفواج.

الحل: بسيط

المستقيم المقارب و قواسم عدد طبيعي

تصحيح: /

الهدف: تعيين نقط منحن التي إحداثياتها أعداد طبيعية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

الربط بين دالة، جدول تغيرات و منحن

تصحيح: /

الهدف: توظيف خواص الدوال التناظرية.

توجيهات: يتم تقديم العمل في شكل أفواج.

الحل: بسيط

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمارين

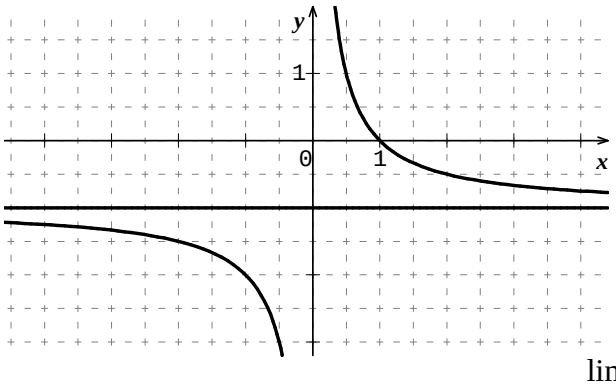
تمارين تطبيقية

1 ـ نهايات الدوال التناظرية

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1-x}{x}$ و ليكن (C_f) منحنيها البياني.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x}{x}=-1$ ، المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=-1$.

2. $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$



x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ -1

f الدالة " مقلوب " معرفة على $\mathbb{R}^*$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

3) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=1$ 4) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

5) $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=-\infty$ 6) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$

f دالة عددية معرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1$ وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1$ إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y=1$ مستقيم مقارب للمنحني (C) الممثل للدالة f بجوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$.

معادلتا لكل من المستقيمين المقاربين للمنحني هما : $x=\dfrac{1}{2}$ و $y=1$

x	$-\infty$	$\dfrac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$1\searrow -\infty$	$\|\|$	$+\infty\searrow 1$

2 ـ دراسة دالة تناظرية

1 ـ أ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2-\dfrac{2}{x+2}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ ، المنحني يقبل مستقيما معادلته $y=2$.

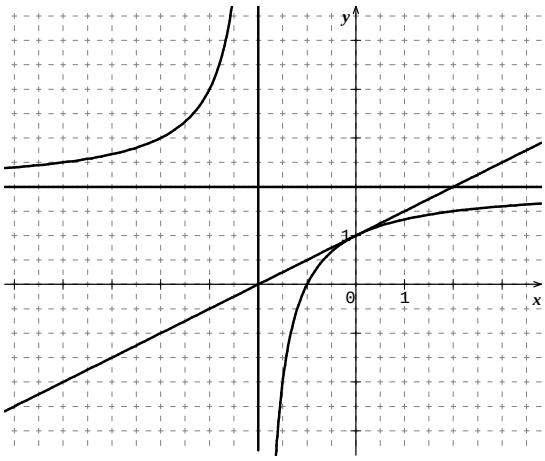
ب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=+\infty$ ، المنحني يقبل مستقيما معادلته $x=-2$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

جـ- $f'(x)=\dfrac{2}{(x+2)^2}$ ، من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-2\}$ ، $f'(x)>0$.

د- جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	2



2 ـ $(0;1)$ ؛ $(-1;0)$.

ـ $y=\dfrac{1}{2}x+1$.

ـ إنشاء المماس (Δ) والمنحنى (C) .

1.**تصحيح** أدرس تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	-1

معادلتا المستقيمين المقاربين للمنحني (C) : $x=1$ و $y=-1$.

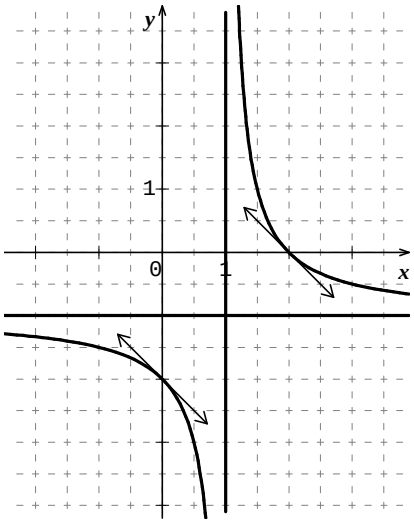
2.أ) $(0;-2)$ ؛ $(2;0)$.

ب) $f'(x)=-1$ معناه $\dfrac{-1}{(x-1)^2}=-1$

أي $(x-1)^2=1$ وهذا يعني أن $x=0$ أو $x=2$.

جـ) $y=-x-2$ ؛ $y=-x+2$.

3.الرسم.



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تمارين للتعمق

أرفق بكل منحن من المنحنيات المبينة في الشكل دالة من الدوال التالية:

C_1 هو منحني الدالة f_6 ، C_2 هو منحني الدالة f_5 ، C_3 هو منحني الدالة f_2 ، C_4 هو منحني الدالة f_4 ، C_5 هو منحني الدالة f_3 ، C_6 هو منحني الدالة f_1

الطريقة البيانية:

1.بين أن حل المعادلة $x^2=\dfrac{4x-5}{x-2}$ يعني $x^2(x-2)=4x-5$ أي $x^3-2x^2-4x+5=0$ حيث $(x\neq 2)$

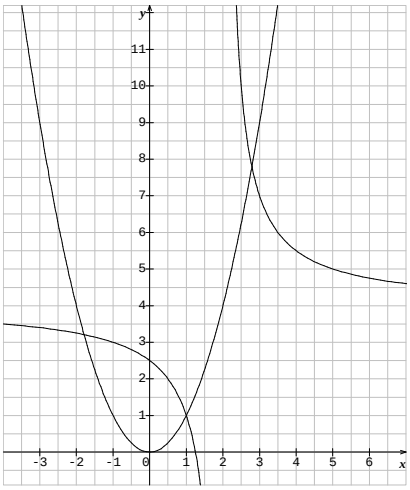
2. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـــ: $f(x)=\dfrac{5x-4}{x-2}$

أ- $f(x)=\dfrac{5x-10+6}{x-2}=\dfrac{5x-10}{x-2}+\dfrac{6}{x-2}=\dfrac{5(x-2)}{x-2}+\dfrac{6}{x-2}=5+\dfrac{6}{x-2}$

ب- الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;2[$ و متناقصة تماما على المجال $]2;+\infty[$.

3. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $g(x)=x^2$

رسم في نفس المعلم المنحني C_g الممثل للدالة g (انظر الشكل)



4.عدد حلول المعادلة $x^3-2x^2-4x+5=0$ هو عدد نقط تقاطع المنحني C_g مع المنحني (C) و هو ثلاثة حلول

الحل الأول $x_1=1$ ، الحل الثاني $x_2\in\left]-2;-\dfrac{3}{2}\right[$ ، الحل الثالث $x_3\in\left]\dfrac{5}{2};3\right[$

الطريقة الجبرية:

1.ننشر العبارة $(x-1)(x^2-x-5)$

2.نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=x^2-x-5$

أ- $h'(x)=2x-1$. الدالة h متزايدة تماما على $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ و متناقصة تماما على $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$

ب- حل في المعادلة $h(x)=0$ تعني $x^2-x-5=0$

مميز كثير الحدود x^2-x-5 هو $\Delta=21$ ، إذن المعادلة $x^2-x-5=0$ تقبل حلين هما $x'=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$

و $x''=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$

3. $x^3-2x^2-4x+5=0$ يعني $(x-1)(x^2-x-5)=0$ و منه $(x=1)$ أو $\left(x=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right)$ أو $\left(x=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$

مسائل

1. ثمن بضاعة هو $120DA$.إذا عرف هذا الثمن ارتفاعا بنسبة 25% يكون ثمنه

$$120+\left(120\times\frac{25}{100}\right)=120+\frac{3000}{100}=150$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

إذا عرف الثمن انخفاضا بنسبة غير معروفة $y\ \%$ ب حيث ثمن البضاعة هو من جديد $120DA$ فإن:

$150-\frac{150y}{100}=120$ و منه $\frac{1500-15y}{10}=120$ أي $1500-15y=1200$ أي $y=20$

2.بصفة عامة، ثمن P لبضاعة بالدينار يعرف ارتفاعا بنسبة $x\ \%$ يكون ثمنه $P+\left(P\times\frac{x}{100}\right)=\frac{100P+Px}{100}$

إذا عرف الثمن انخفاضا بنسبة $y\ \%$ ويعود إلى قيمته الأصلية P فإن:

$\frac{100P+Px}{100}-\left(\frac{100P+Px}{100}\times\frac{y}{100}\right)=P$ أي $\frac{100+x}{100}-\left(\frac{100+x}{100}\times\frac{y}{100}\right)=1$

$\left(\frac{100+x}{100}\times\frac{y}{100}\right)=\frac{100+x}{100}-1=\frac{x}{100}$ تعني $\frac{100+x}{100}-\left(\frac{100+x}{100}\times\frac{y}{100}\right)=1$

$y=\frac{100x}{x+100}$ ومنه $\frac{y}{100}=\frac{x}{100}\times\frac{100}{100+x}$ تعني $\left(\frac{100+x}{100}\times\frac{y}{100}\right)=\frac{x}{100}$

3. نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;100]$ بـــ: $f(x)=\frac{100x}{x+100}$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.الوحدة: $1cm$ من أجل 5 وحدات.

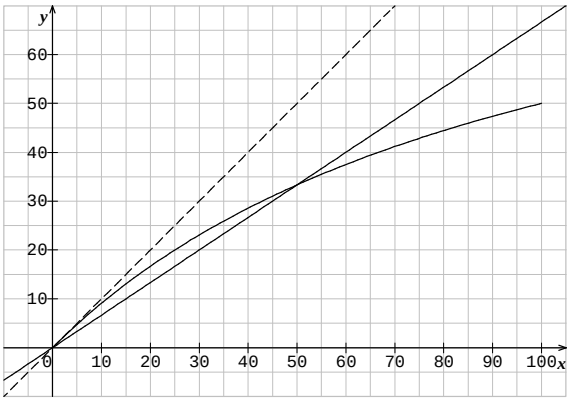
أ- $f(x)=\frac{100x+10000-10000}{x+100}=\frac{100(x+100)}{x+100}-\frac{10000}{x+100}=100-\frac{10000}{x+100}$

ب- الدالة f متزايدة تماما على $[0;100]$

x	0		100
$f(x)$	0	↗	50

جـــ- معادلة المماس T للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 0 هي : $y=1\times(x-0)+0$ أي $y=x$

د- رسم T و (C).



4. أ- $y=\frac{2}{3}x$ يعني $\frac{100x}{x+100}=\frac{2x}{3}$ و منه $2x(x+100)=300x$

أ- $2x(x+100)=300x$ يعني $2x(x-50)=0$ أي $(x=0)$ أو

- إذا كان $(x=0)$ فإن $(y=0)$

- إذا كان $(x=50)$ فإن $\left(y=\frac{100}{3}\right)$

ب- بيانيا منحني الدالة f يقطع المستقيم الذي معادلته $y=\frac{2}{3}x$ في نقطتين احداثياتهما $(0;0)$ و $\left(50;\frac{100}{3}\right)$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الباب السادس

الاحتمالات

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الأنشطة

النشاط الأول :

– إجراء محاكاة تجربة عشوائية بسيطة و ذلك بملاحظة تطور تواترات القيم المختلفة الناتجة

النشاط الثاني :

– إجراء محاكاة تجربة عشوائية بسيطة و ذلك بملاحظة تطور تواترات القيم المختلفة الناتجة

– قانون الاحتمال المتعلق بتجربة عشوائية لها عدد منته من الإمكانيات.

– الربط بين الوسط الحسابي و الأمل الرياضي و التباين التطبيقي و التباين النظري لسلسلة

النشاط الثالث :

– إجراء محاكاة تجربة عشوائية بسيطة و ذلك بملاحظة تطور تواترات القيم المختلفة الناتجة

– قانون الاحتمال المتعلق بتجربة عشوائية لها عدد منته من الإمكانيات.

– الربط بين الوسط الحسابي و الأمل الرياضي و التباين التطبيقي و التباين النظري لسلسلة

النشاط الرابع :

– حساب احتمال وقوع حدث شرط وقوع حدث آخر

النشاط الخامس :

– بناء شجرة الإمكانيات المرجحة .

– استعمال أشجار مرجحة للحصول على علاقة الاحتمالات الكلية .

– بناء شجرة الإمكانيات المرجحة و استعمالها في حالة تكرار تجارب متطابقة و مستقلة .

النشاط السادس :

– حساب احتمال وقوع حدث شرط وقوع حدث آخر

– التحقق من استقلال حادثتين

النشاط السابع :

– حساب احتمال وقوع حدث شرط وقوع حدث آخر

– التحقق من استقلال حادثتين

الأعمال الموجهة

الأعمال الموجهة (1)

I) 0.0117 –1 0.0351 –2 0.4035 –3 0.3991 –4

II) 0.0005 –1 0.055 –2 0.1425 –3 0.0025 –4

III) سلم التنقيط : العلوم الطبيعية (5) ، الرياضيات (4) ، الفيزياء (4) ، الأدب العربي (2) و الإجتماعيات (2) (يمكن أخذ أي سلم تنقيط آخر)

0.3474 –1 0.0316 –2 0.0105 –3

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4) أ)

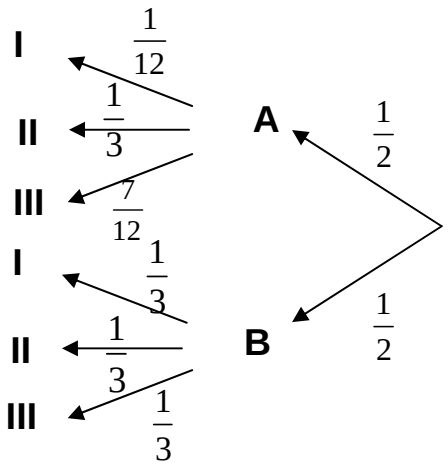
α	12	10	8	6	4	2	0
$\varphi(\alpha)$	0.0736	0.0947	0.1078	0.064	0.1964	0.0631	0.4

ب) $E(X) = 3.99$

الأعمال الموجهة (2) :

1) أ) 0.0006 ب) 0.1620 ج) 0.0486

2) أ)



إصابة المناطق

ب) $p(III) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = 0.4583$

ج) (احتمال شرطي) $p_{III}(A) = \frac{p(A \cap III)}{p(III)} = 0.6364$

التمارين

6 عدد الحالات الكلية هو $2^6 = 64$

1) $P = C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 . \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$

2) نعلم أن "P'" احتمال أن يكون عدد مرات ظهور الوجه أكبر من عدد مرات ظهور الظهر " هو نفسه "P''" إحتمال أن يكون عدد مرات ظهور الظهر أكبر من عدد مرات ظهور الوجه " أي $P' = P''$

و منه لدينا $P + P' + P'' = 1$ و $P' = P''$ ينتج $P' = P'' = \frac{1-P}{2} = \frac{11}{32}$

3) نعتبر الحادثة M " عدد مرات ظهور الظهر مضاعف لعدد مرات ظهور الوجه "

$$P(M) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 + C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 . \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_6^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 . \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1+20+15}{64} = \frac{9}{16}$$

4) قانوني الاحتمال يتبعان قانون ثنائي الحد و سيطاه 6 و $\frac{1}{2}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

16 نعتبر قانون الاحتمال X المعرف كمايلي :

α	1−	2	3	4
$P(X=\alpha)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	a

1) حدد قيمة العدد الحقيقي a

2) أحسب $P(X=2)$ و $P(X\geq\frac{5}{2})$ و $P(X\prec 1)$

17 1) النتائج الممكنة هي : 20 ، 25 ، 30

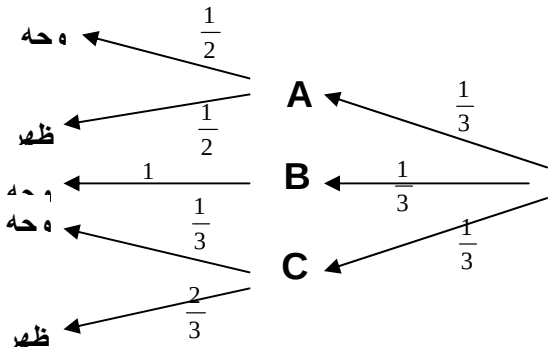
α	20	25	30
$P(X=\alpha)$	$\frac{3}{15}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{3}{15}$

4) $E(X)=\frac{60+225+90}{15}=\frac{375}{15}=25$

5) $V(X)=\frac{3}{15}(20-25)^2+\frac{9}{15}(25-25)^2+\frac{3}{15}(30-25)^2=10$

6) $P(X\geq 25)=\frac{9}{15}+\frac{3}{15}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$

27



$P=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{11}{18}$

28 $p(B_1)=\frac{5}{6}$ $p(B_2/B_1)=\frac{9}{11}$ $p(B_2\cap B_1)=p(B_2)\times p(B_2/B_1)=\frac{15}{22}$

34 هدف و مساحة :

α	1000	400	100	50
$P(X=\alpha)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

3) $E(X)=\frac{1000+1200+500+350}{16}=\frac{3050}{15}=\frac{610}{3}$

$V(X)=\frac{1}{16}\left(1000-\frac{610}{3}\right)^2+\frac{3}{16}\left(400-\frac{610}{3}\right)^2+\frac{5}{16}\left(100-\frac{610}{3}\right)^2+\frac{7}{16}\left(50-\frac{610}{3}\right)^2$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}\simeq 246.05$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM