دروس الدعم والتفوق في مادة الرياضيات -الجزائر

دفاتر التكوين في الرياضيات والاستعداد الجيد للتفوق في شهادة البكالوريا

السنة الثالثة ثانوي شعبة الرياضيات و تقني رياضي و العلوم التجريبية

Bac 2022

# الدفتر 01

## المحور : الدوال العددية لمتغير حقيقي

# النهايات والسلوك التقاربي لدالة

1/ ملخص شامل للدرس

2/ تمارين للتمكن من أساسيات الدرس

3/ نحو البكالوريا : نماذج امتحانات وبكالوريات وطنية وأجنبية

النجاح علم و هندسة

إعداد: الأستاذ حليلات عمار مكون ثانوي في مادة الرياضيات

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الدفتر 01 :النهايات و التفسيرات الهندسية

الدفتر 02 :الاستمرارية ومبرهنة القيم المتوسطة

الدفتر 03 : الاشتقاقية و تطبيقاتها

الدفتر 04 :الدالة الأسية النيبيرية و المعادلة التفاضلية $y \quad ay \quad b$

الدفتر 05 :دالة اللوغاريتم النيبيري والتزايد المقارن وتمات

الدفتر 06 :الدوال الأصلية والحساب التكاملي وتطبيقاته في حساب المساحات

الدفتر 07 :المتتاليات العددية و البرهان بالتراجع

الدفتر 08 :الاحتمالات و التحليل التوفيقي

الدفتر 09 :الأعداد المركبة و التحويلات النقطية

الدفتر 10 :بكالوريات تجريبية و مراجعات شاملة

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

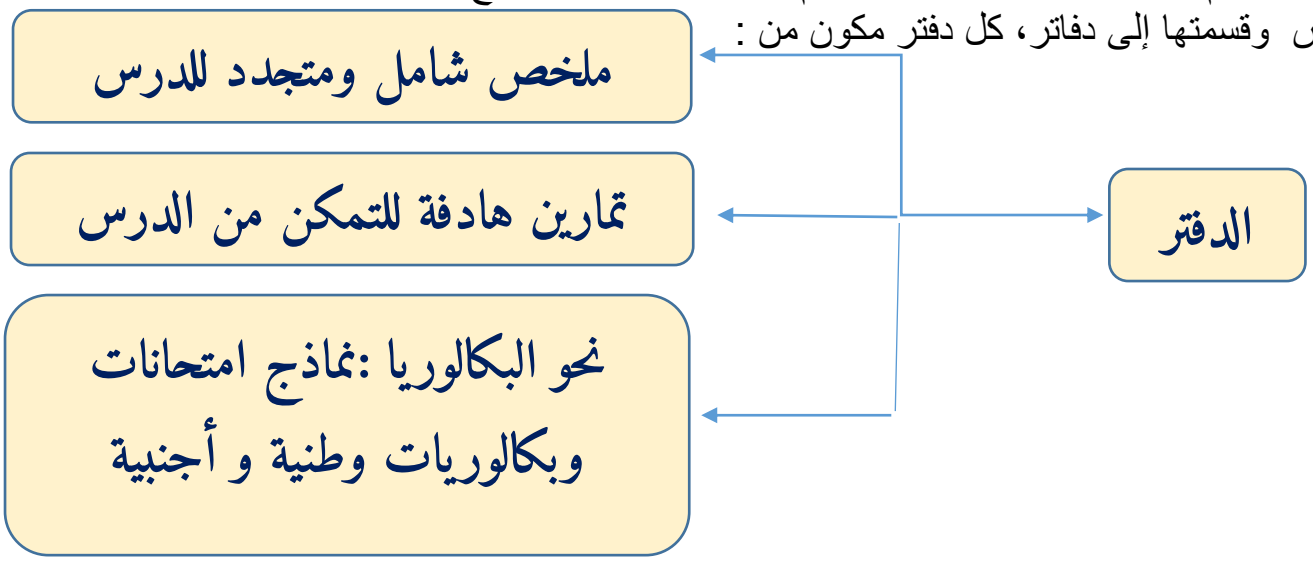
**بسم الله الرحمان الرحيم**

**الحمد لله والصلاة والسلام على سيدنا محمد خاتم الأنبياء والمرسلين**

## المقدمة

**بداية نتوجه إلى خالقنا بالحمد والثناء الذي وفقنا إلى تحقيق هذا العمل بكل ما وهبنا من قوة العقل والإرادة.**

وبتوفيق من الله وحده ، يسرني أن أضع هذا العمل المتواضع بين أيدي تلاميذنا الأعزاء و زملائنا الأساتذة الكرام ،راجيا أن يجدوا فيه ما يعينهم للاختيار تمارين ونماذج امتحانات وملخصات شاملة للدروس وقسمتها إلى دفاتر، كل دفتر مكون من :




**ووصيتي** :-إعادة الدرس والتمكن من المعارف والكفاءات

- المحاولة ثم المحاولة ثم المحاولة في التمارين ومراجعة الأستاذ في التصحيح

-**الجزء نحو البكالوريا** هام جدا اجتهد في حل جميع النماذج فهي تجعلك تكتسب كفاءة عالية ومميزة لمعالجة امتحان البكالوريا

-الملخص اجتهدت أن يكون شامل ومرجعي للطالب

- -صممت التمارين والتداريب وفقا للمناهج الجديدة لوزارة التربية الوطنية

و اختيرت التمارين من الكتاب المدرسي ونماذج بكالوريات وطنية وأجنبية .

**ونسعى إلى الوصول بالتلميذ إلى تحقيق الأهداف التالية:**

1-اكتساب معارف صحيحة والتدريب على الاستدلال المنطقي والتحرير الرياضي للوصول إلى النتائج المستهدفة

2-اختبار مكتسباته من خلال تمارين هادفة

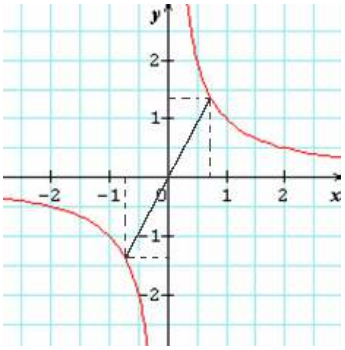
3-اكتساب كفاءة عالية ومميزة لمعالجة امتحان البكالوريا

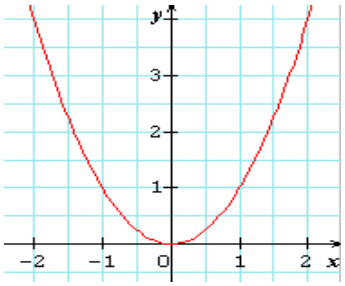
**أهدي هذا العمل المتواضع إلى روح والدي الطاهرة وإلى روح والدتي الطاهرة تغمدهما الله برحمته الواسعة و اسكنهما فسيح جنانه ولأفراد أسرتي وكل إخواني ولأسرة التربية الوطنية بالجزائر الحبيبة التي أعطتنا الكثير ونأمل أن نسدي لها ولو قليلا مما تستحقه جزائرنا العظيمة**

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

# ملخص هام وشامل لدرس النهايات

## 1 .نهايات الدوال المرجعية :يبرهن أن و حاول من التمثيلات البيانية للدوال المرجعية تستنبط مايلي :





$(C)$

0

$y = x^2$ $(C)$

$O$ $(C)$

يسمّى المنحنى الممثل للدّالة "مقلوب" قطعا زائدا

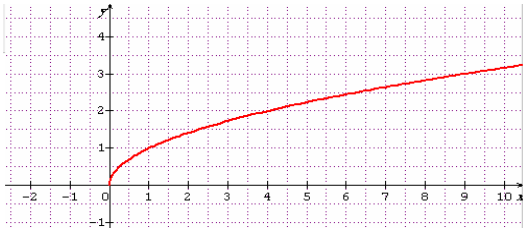
$$\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty \quad \lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

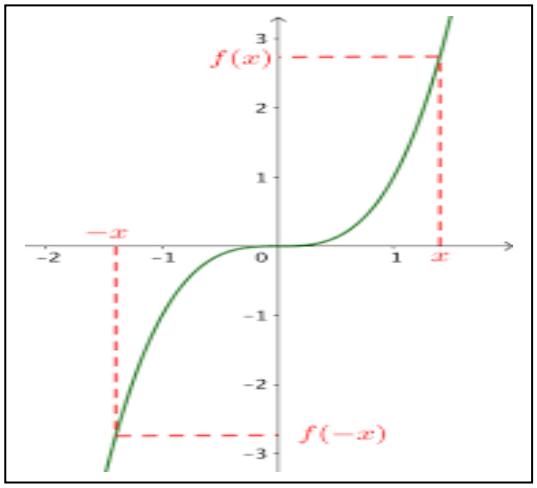
$$\lim_{x\to0^{>}}\frac{1}{x}=+\infty \quad \lim_{x\to0^{<}}\frac{1}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$$

$y=\sqrt{x}$



$$\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty \quad \lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$$




**نتيجة**

$$\lim_{x\to-\infty}x^n=\begin{cases}+\infty & n=2k\\ -\infty & n=2k+1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^n=+\infty$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## 2.تعاريـف :

- $f$ $+\infty$ $+\infty$ $A$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $f(x)>A$ $x>B$ $B$

**أي بمعنى : يمكننا جعل $f(x)$ كبيرا بالقدر الذي نريد بشرط $x$ كبير بالقدر الكافي .**

**مثال** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-2}=+\infty$

- $f$ $x_0$ $l$ $e$

$0<|x-x_0|<\alpha$ $0\le|f(x)-l|<e$ $\alpha$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$

**أي بمعنى : يمكننا جعل $f(x)$ قريبا من $l$ بالقدر الذي نريد بشرط $x$ قريب من $x_0$ بالقدر الكافي**

**مثال :** $\lim\limits_{x\to2}(4x-1)=7$

## 3.العمليات على النهايات : $f$ و $g$ دالتان. $a$ يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$. يبرهن أن:

- **نهاية مجموع دالتين:**

| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $l\in$ | $l\in$ | $l\in$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $l'\in$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ | $l+l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ح ع ت | $-\infty$ |

- **نهاية جداء دالتين:**

| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $l\in$ | $l\neq0$ | $\infty$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $l'\in$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x))$ | $l\times l'$ | $\infty$ | $\infty$ | ح ع ت |

- **نهاية حاصل قسمة دالتين:**

| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $l\in$ | $l$ | $\infty$ | $l\neq0$ | $0$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $l'\in$ * | $\infty$ | $l'$ | $0$ | $0$ | $\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ | $\frac{l}{l'}$ | $0$ | $\infty$ حسب قاعدة الإشارات | $\infty$ حسب قاعدة الإشارات | ح ع ت | ح ع ت |

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها المبرهنات السابقة من استنتاج النهاية بحالات "عدم التعيين "**
**( ح ع ت )** ومنه نستنتج في العمليات العادية الثلاثة (الجمع ، الجداء ، القسمة ) لدينا أربع حالات عدم التعيين وهي : $\frac{0}{0}$ , $\infty - \infty$ , $0 \times \infty$ ,

-وفي الحالة $f(x)^{g(x)}$ لدينا ثلاث حالات عدم تعيين وهي : $0^0$ , $1^\infty$ ,

## 4.نهايات دوال مألـوفة و قواعد إجرائية : قواعد إجرائية ( يبرهن و تستعمل مباشرة في التطبيقات)

1 النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة.

مثال : $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3+3x^2-4x+3)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)=+\infty$

2 النهاية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة.

مثال : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{x^2-3x+4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0$

3 $f$ دالة كثير حدود للمتغير الحقيقي $x$ ، $a$ عدد حقيقي . $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

4 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x = \sin x_0$ و $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x = \cos x_0$

5 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ( تبرهن بالحصر)

## 5.نهاية دالـة مركبة :

**1-4** مبرهنة: $a$ $b$ $c$ عدد حقيقي ، $u$ و $v$ دالتان بحيث $f=v\circ u$ و $f$ معرفة على مجال من الشكل $]\alpha;+\infty[$ أو $]-\infty;\alpha[$ أو $]\alpha;\beta[$ حيث $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان.

$\lim\limits_{x\to a} u(x)=b$ و $\lim\limits_{x\to b} v(x)=c$ فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$

أمثلة : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\right)=?$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+2x-3}{3x+1}}=?$

**2-4 نهاية الدالة الجذر التربيعي لدالة :** **$f$ دالة عددية موجبة في جوار لـ $x_0$ و $l$ عدد حقيقي موجب**

| إذاكانت $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ هي | تكون $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}$ هي |
|---|---|
| $l$ | $\sqrt{l}$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ |

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## 6.النهايات بالمقارنة :

$f$ ، $g$ و $h$ دوال عددية معرفة ،على الأقل ، على المجموعة $D=]x_0-\alpha;x_0[\ \cup\ ]x_0;x_0+\alpha[$ : يبرهن و نقبل

* **مبرهنة الحد من الأسفل :** إذا كان من أجل كل عنصر $x$ من $D$ : $g(x)\le f(x)$ و كانت $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

* **مبرهنة الحد من الأعلى :** إذا كان من أجل كل عنصر $x$ من $D$ : $f(x)\le g(x)$ و كانت $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

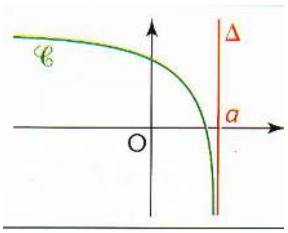
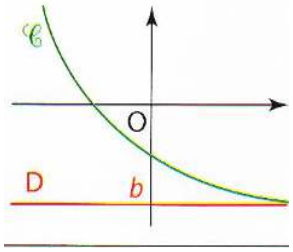
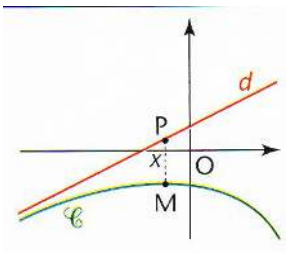
* **مبرهنة الحصر :** إذا كان من أجل كل عنصر $x$ من $D$ : $g(x)\le f(x)\le h(x)$

و كانت $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=l$ فإن : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$

مثال $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2.\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

## 7.التفسير البياني و السلوك التقاربي لدالة :

* $a$ و $b$ عددان حقيقيان. $f$ دالة معرفة على مجال $I$ و $(C)$ تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

| النهاية | المستقيم المقارب( تفسير بياني) | التمثيل البياني |
|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ <br> أو <br> $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ | المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $x=a$ <br> و الموازي لمحور التراتيب <br> مستقيم مقارب للمنحني $(C)$ |   |
| $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ <br> أو <br> $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ | المستقيم $(D)$ ذو المعادلة $y=b$ <br> و الموازي لمحور الفواصل <br> مستقيم مقارب <br> للمنحني $(C)$ عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ |   |
| $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ <br> أو <br> $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ <br> أو $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$ | المستقيم $(d)$ ذو <br> المعادلة $y=ax+b$ <br> هو مستقيم مقارب مائل <br> للمنحني $(C)$ عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ |   |

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**• ملاحظات :**

1 - $f$ $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$ $f(x)=ax+b+\varphi(x)$

$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ $y=ax+b$ $(a\neq 0)$

2 $f$ $(C)$ $y=ax+b$

$[f(x)-(ax+b)]$

$(C)$ $f(x)-(ax+b)<0$

$(C)$ $f(x)-(ax+b)>0$

3 - $(C_f)$ $f$ $(\Delta)$

$(a\neq 0)$ $y=ax+b$ $(\Delta)$ $(C_f)$ $+\infty$ $-\infty$

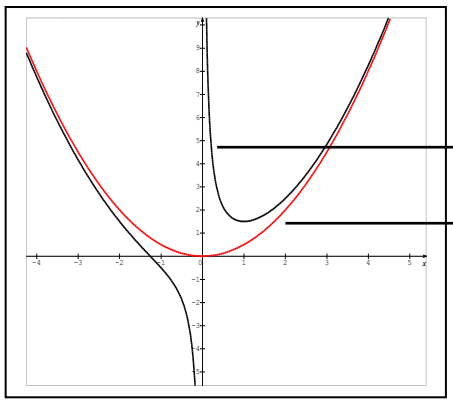
$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=b$

4 - $(C_f)$ $(C_g)$ $f$ $g$ $(C_f)$ $(C_g)$ **منحنيان متقاربان**

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$ $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=0$

**مثال** $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}$



C $y=f(x)$

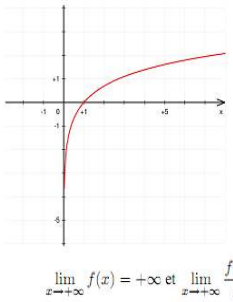
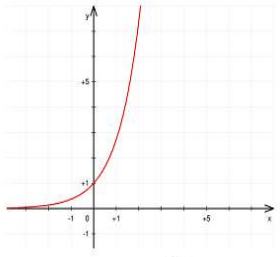
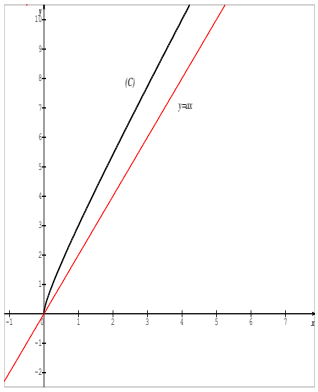
$\Omega$ $y=\frac{1}{2}x^2$

$+\infty$ $\Omega$ C

$-\infty$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## 5 ( إضافة حسنة ) - $(C_f)$ $f$

| النهاية | ( تفسير بياني) | التمثيل البياني |
|---|---|---|
| $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0$<br>$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$<br>$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=0$ | $(C_f)$<br>$+\infty$<br>$-\infty$ | <br>$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0$ |
| $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\infty$<br>$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$<br>$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=\infty$ | $(C_f)$<br>$+\infty$<br>$-\infty$ | <br>$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$ |
| $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ و<br>$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=a\in$ *<br>$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$<br>$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=\infty$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=a\in$ * | $(C_f)$<br>$y=ax$<br>$+\infty$<br>$-\infty$ |  |

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## 8.ملاحظات و طرائق

**1-التحكم في حساب النهايات و تعلم طرائق رفع حالات عدم التعيين**

**حساب نهاية**

**إذا كانت موجودة قاعدة إجرائية أو خاصية لحساب هذه النهاية تستعمل مباشرة**

$-\infty \quad +\infty$

**إذا كانت غير موجودة قاعدة إجرائية أو خاصية لحسابها**

**تستعمل المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات ( مجموع دالتين ، .....)**

**إذا كانت ليست حالة من حالات عدم التعيين نحصل على نتيجة النهائية**

**نفكر في رفعها بخبرة و حسب نوع الحالة**

**مثال :** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+3}{x^2+x-2}$

**من الطرائق لرفع حالة عدم تعيين**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2\sqrt{x}-3\right)$

**مثال :** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2}$

**مثال** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

**استعمال تعريف العدد المشتق** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$

**مثال** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\sqrt{4x+1}-6}{x-2}$ **مثال** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$

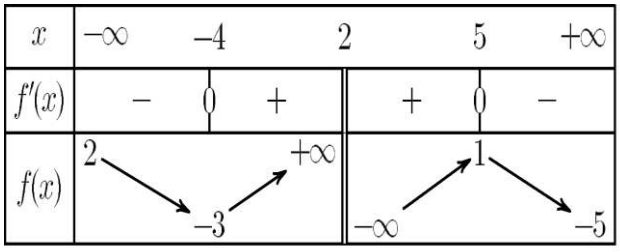
**مثال** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

**مثال** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x+\sin x}{x^2}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## 2 التفسير البياني و السلوك التقاربي وتعيين المستقيمات المقاربة لمنحني و القدرة على رسم المنحني الممثل لدالة اي ترجمة جداول التغيرات و القراءة البيانية

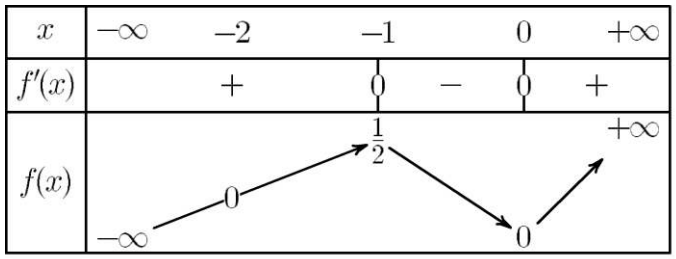
### مثال 01




اليك جدول تغيرات الدالة $f$ والمطلوب رسم المنحنـــي $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ومتجانس إذا علمت ان :

$C_f$ $y$ $0$ $6;0$ , $0;0$ , $4;0$ , $7;0$

### مثال02




اليك جدول تغيرات الدالة $f$ وليكن المنحني $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ومتجانس إذا علمت ان:

$0$ $y_D$ $f(x)$ $\lim_{|x|}$ و $D$ المستقيم الذي

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)-y_{(D)}$ | $+$ | $0$ | $-$ |

- **مستعينا بالنتائج السابقة ارسم بعناية** $D$ ، $(C_f)$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

# تمارين للتمكن من حساب النهايات و التفسيرات الهندسية

## التمرين 01

$f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+x-2}$ $-\{-2;1\}$ $f$

$x^2+x-2$ $x$ 1

2

3

$1$ $-2$

$-\infty$ $+\infty$ $f$

## التمرين 02

$f$

$f$

1) $f(x)$ $\dfrac{x^2}{x^2}$ $\dfrac{5x}{4x}$ $\dfrac{2}{}$ ، 2) $f(x)$ $\dfrac{x^2}{x}$ $\dfrac{4x}{1}$ $\dfrac{4}{}$ ، 3) $f(x)$ $\dfrac{4x}{x^2}$ $\dfrac{8}{4x}$ $\dfrac{}{5}$

4) $f(x)$ $\dfrac{x^2}{x}$ $\dfrac{x}{1}$ $\dfrac{2}{}^2$ $f(x)$ $2x$ 3 $\dfrac{1}{x}$ $\dfrac{}{1}^2$ 5 $f(x)$ $x$ $\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$ $\dfrac{}{4}$ 6

## التمرين 03

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2}$ 2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x+2}{x^3-3x^2-x+3}$ 3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{x-2}{4x+3}}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ 6) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-2\sqrt{x}\right)$ 7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}$

8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$ 9) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ 10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}\right)$

## التمرين 04

### تعريف العدد المشتق

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4+x^3-7x^2+8x-12}{x-2}$ ، 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{60}-1}{3x-3}$ ، 3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}$ ، 5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin x-1}{6x-\pi}$ ، 6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## التمرين 05

$f$

$C_f$ 1,3

$O;i,j$

**بقراءة بيانية**

1

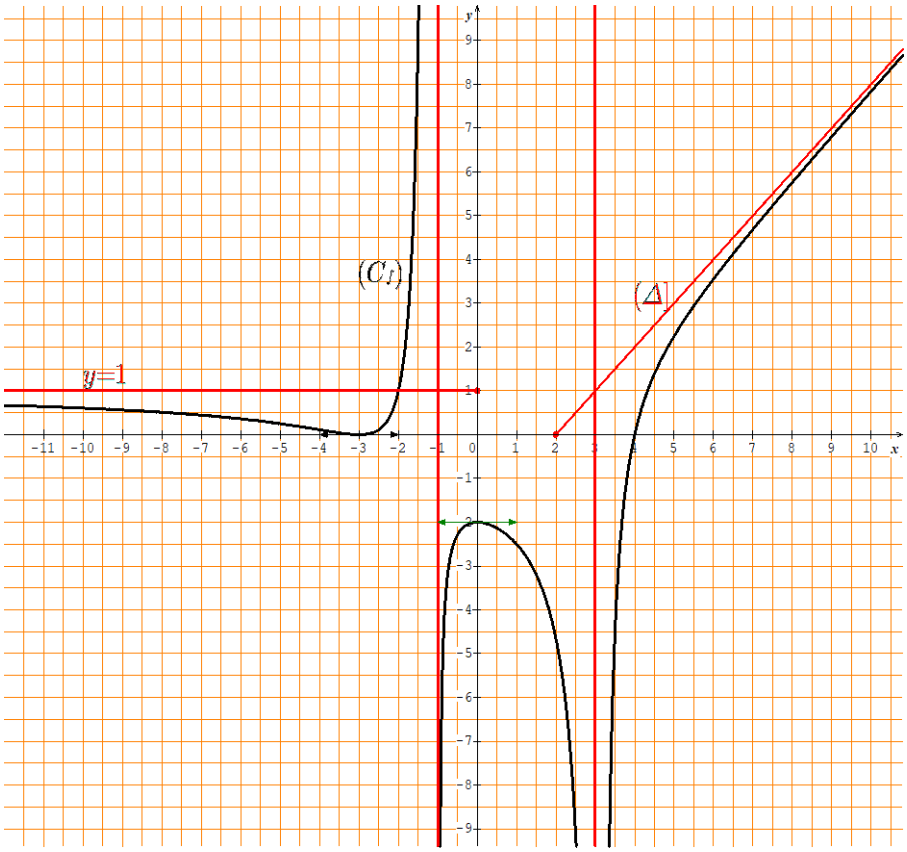
2

$f(x)$ $x$ 3

4

$g$ 5

$g(x)$ $f(x)$




---

## التمرين 06

$f$ الدالة العددية المعرفة على $-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{(x+1)^2}$

نسمي $C_f$ المنحني الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;i,j)$.

1/ احسب $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا

2/ احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

3/ أ) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية $\alpha$ ، $\beta$ و $\gamma$ بحيث يكون من أجل كل $x$ من $D_f$ :

$$f(x)=\alpha x+\frac{\beta}{x+1}+\frac{\gamma}{(x+1)^2}$$

ب) استنتج أن المنحني $C_f$ يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب إعطاء معادلة ديكارتيه له

جـ) ادرس وضعية المنحني $C_f$ بالنسبة للمستقيم المقارب المائل .

4/ أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يختلف عن 1 فإن : $f\ x\ \dfrac{x\ x^2\ 3x\ 4}{x\ 1^{\ 3}}$

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة ثم ارسم و $C_f$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## التمرين 07

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $\frac{3}{4}$ | ↗ | $\frac{7}{4}$ | ↘ | $0$ |

اليك جدول تغيرات الدالة $f$ وليكن المنحنـي $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ومتجانس

إذا علمت ان: 1 $0$ $f$ و $0$ $x^2$ $f(x)$ $\lim_x$

وليكن المنحني الممثل للدالة مربع : $x^2$ $x$

المماس $T$ للمنحني $(C_f)$ في النقطة التي

فاصلتها 3 معادلة ديكارتية له : $7$ $2x$ $y$ و

- **مستعينا بالنتائج السابقة ارسم**

**بعناية** $T$ ، **ثم** $(C_f)$

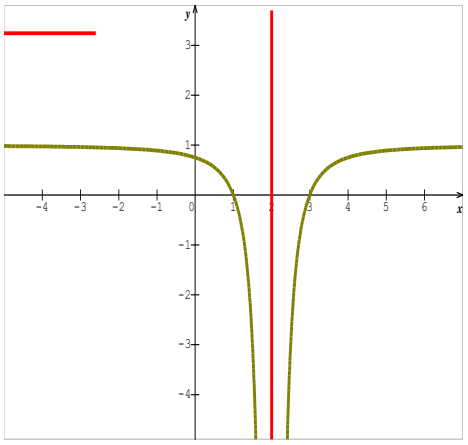
| $x$ | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

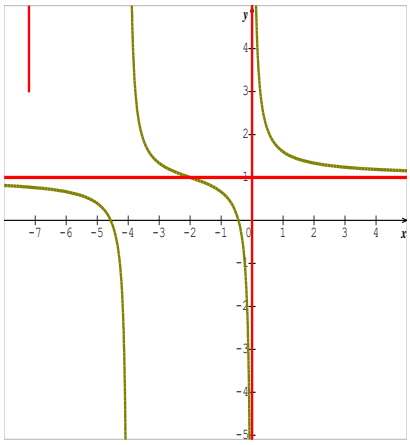
## التمرين 08

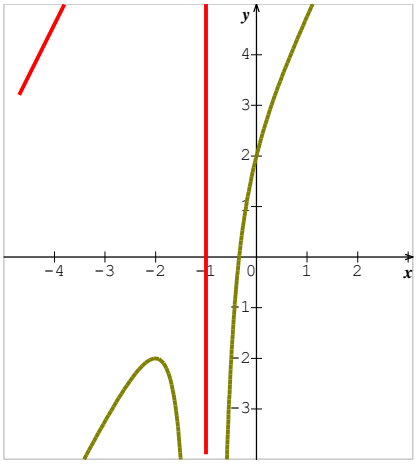
$D_f$

$D_f$

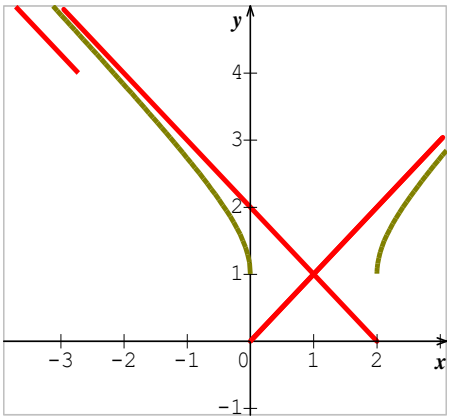
1 2 3

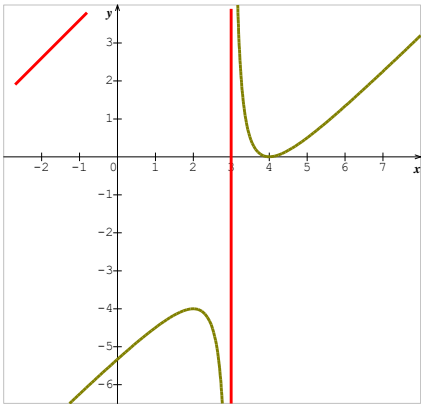


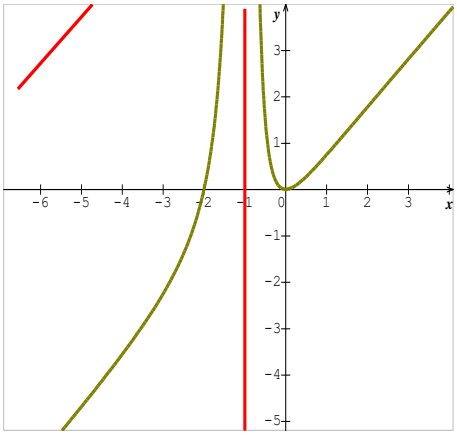




4 5 6







قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## التمرين 09

$f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x+1}}$ $D=[0;+\infty[$ $f$

1 $x$

$x^2\le x^2+x+1\le(x+1)^2$ $x\le\sqrt{x^2+x+1}\le x+1$

2 $x$ $1-\dfrac{1}{x+1}\le f(x)\le 1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

---

## التمرين 10

(1 ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2-\sin x}$ (2 ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x^2+1}$ (3 ، $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(4 ، $\lim\limits_{x}3x$ $E$ $x$ (5 ، $\lim\limits_{x}3x$ $E$ $x$ $E$

(6 ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin 3x-\cos 2x}{x}$ (7 ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}$

8 $\lim\limits_{x}\sqrt{x\quad 3}\quad\sqrt{x}$

---

## التمرين 11

(1 ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$ (2 ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{x}$ (3 ، $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ (4 ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$

(5 ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ (6 ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan ax}{bx}$ (7 ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$

(8 ، $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$ (9 ، $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{6\cos x-6\sqrt{3}\sin x}{6x-\pi}$ (10 $\lim\limits_{x\ 0}\dfrac{\sqrt{1\quad\cos x}}{2x}$

---

## التمرين 12(خاص بشعبة رياضيات و تقني

( I

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-2x\right)$ 2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+3}+x\right)$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$ 4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+3}-x\right)$

5 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}\ -1}{\sqrt{x+2}\ -\sqrt{3x+2}}$ 6 $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x+4}-3}$ 7 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}\right)$

II $b\quad a$ $ax\quad b\quad 0$ $\lim\limits_{x}\sqrt{x^2\quad 4x\quad 3}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## التمرين 13

1) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يكـون لدينا: $\frac{x}{x+1} \geq \frac{1}{2}$

2) استنتج النهايتين التاليتين: $\lim\limits_{x} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$ و $\lim\limits_{x} \frac{x}{x+1-\sqrt{x}}$

---

## التمرين 14

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \sqrt{4x^2+1} - x$

1) أثبت أن: $\sqrt{4x^2+1} - x > 0$ لكل $x$ ث استنتج $\lim\limits_{x} f(x)$

2) احسب بطريقة أخرى، $\lim\limits_{x} f(x)$

---

## التمرين 15

اليك جدول تغيرات الدالة $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $0$ |

والمطلوب رسم المنحنـي $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ومتجانس

إذا علمت ان: $1,3$ و $1,2$ و $0,3$ $f$ $0,2$

و $x$ $0$ و $\lim\limits_{x} f(x)$ و $D$ المستقيم الذي معادلته: $x$ $y$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-y_D$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

---

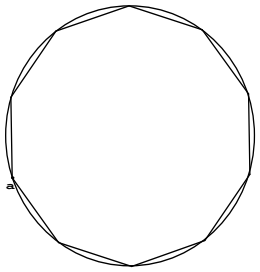
## التمرين 16 ( تمرين مسابقات )

**هل تساءلت يوما لماذا مساحة قرص نصف قطره $r$ هي: $r^2$**

**إليك برهان من بين البراهين: خذ قرص نصف قطره $r$** $o$

$o$ $n$ $o$

$r$



$\frac{1}{2} r^2 . n \sin\frac{2}{n}$ 1

2

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

# نحو البكالوريا :التدريب المبكر لحل نماذج امتحانات وبكالوريات

## التدريب 01

$f$ $x$ $f(x)=\dfrac{-x^2+4x}{x^2-4x+3}$

$C_f$ $(O;i,j)$

1 $D_f$ $1,3$ $f$

2 $D_f$

3 $f$ $D_f$ $f(x)$ $\dfrac{6x-12}{x^2-4x+3^2}$

4 $f$

$C_f$

5 $C_f$ $x=2$ $(\Delta)$

6 $C_f$ $T$ $C_f$ $x_0=4$

7 $g$ $g(x)=|f(x)|$

$(\Gamma)$ $g$ $C_f$ $(\Gamma)$

---

## التدريب 02

$f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

نسمي $C_f$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;i,j)$.

1/ أ) احسب $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا

ب) احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

2/ أ) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية $a$ ، $b$ و $c$ بحيث يكون من أجل كل $x$ من $D_f$ :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$$

ب) استنتج أن المنحنى $C_f$ يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب إعطاء معادلة ديكارتيه له

جـ) ادرس وضعية المنحنى $C_f$ بالنسبة للمستقيم المقارب المائل .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3/ أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يختلف عن 1 فإن: $f(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة $f$

4/ بيّن أن النقطة $I(1;1)$ مركز تناظر للمنحنى $C_f$

5/

6 الدالة العددية $h$ معرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=\frac{x^2-|x|-1}{|x|-1}$

أ) بيّن أن الدالة $h$ زوجية

ب) اشرح كيف يتم إنشاء المنحنى $C_h$ الممثل للدالة $h$ انطلاقا من $C_f$ ثم ارسم $C_h$

7 $x^2-(1+m)(x-1)=0$ $m$

## التدريب 03

$f$ $f(x)=-x+1+\frac{x-1}{(x-2)^2}$ 2

$(O;i,j)$ $C_f$

-1 أ) $\lim_{x\to 2} f(x)$ $\lim_{x} f(x)$ $\lim_{x} f(x)$

$(\Delta)$ $y=-x+1$ $C_f$ عند و

جـ) ادرس وضعية $C_f$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$

-2 $g$ $g(x)=x^3-6x^2+13x-8$

$g$

$g(1)$ $g(x)$ $x$

3 $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-2)^3}$ $D_f$ $x$

$f$

4 $C_f$ يقبل مماسا $T$ موازيا للمستقيم $(\Delta)$

5 $T$ ، $(\Delta)$ $C_f$

-6 الدالة العددية $h$ معرفة على $]2;+\infty[$ كما يلي: $h(x)$ $f(x)$

أ) اشرح كيف يتم إنشاء المنحنى $C_h$ الممثل للدالة $h$ انطلاقا من $C_f$

ب) ارسم $C_h$

-7 $f(x)$ $x$ $m$ $m$

$u^n$ $nu\,u^{n-1}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## التدريب 04

1 $x$ $f$

$$f(x)=\frac{-x^2-2x+7}{(x-1)^2}$$

$(O;i,j)$ $(C_f)$

1

2 بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يختلف عن 1 فإن: $f$ $x$ $\frac{4x\ \ 12}{x\ \ 1^{\ 3}}$

$f$

3 $(C_f)$ $(D)$

$(C_f)$

4 بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يختلف عن 1 فإن: $f$ $x$ $\frac{8x\ \ 32}{x\ \ 1^{\ 4}}$

ب) $I$ $C_f$

5-أ) $x_0$ 2 $C_f$ $T$

$B$ $C_f$ $T$

6 $C_f$ $T$

7- $f(x)$ $4x$ $m$ $m$

---

## التدريب 05

$f$ $f(x)=\frac{x^3+3x^2+10x+5}{(x+1)^2}$ $-\{-1\}$

$(O;i,j)$ $f$ $C_f$

1 أ) $\lim_{x} f(x)$ $\lim_{x} f(x)$ $\lim_{x} f(x)$

2 $D_f$ $x$ $\gamma$ $\beta$ $\alpha$

$$f(x)=x+\alpha+\frac{\beta}{x+1}+\frac{\gamma}{(x+1)^2}$$

$+\infty$ $-\infty$ $f$ $C_f$

$C_f$

3 بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يختلف عن 1 فإن: $f$ $x$ $\frac{x(x^2\ \ 3x\ \ 4)}{x\ \ 1^{\ 3}}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$f$

$C_f$ 4

$m$ $C_f$ 5

$$3x^2+(x-m)x^2+(10-2m)x+5-m=0$$

$$g(x)=\frac{|x|^3+3x^2+10|x|+5}{(|x|+1)^2}$$ $g$ 6

$g$

$(\Gamma)$ $C_f$ $g$ $(\Gamma)$

---

## التدريب 06

**الجزء الأول** : نعتبر الدالة $g$ المعرفة على كما يلي: $g(x)=x^3+3x-4$

1/احسب $g(1)$ وماذا تستنتج ؟

2/عيّن إشارة $g(x)$

**الجزء الثاني** :نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة على كما يلي : $f(x)=\frac{x^3-2x^2}{x^2+1}$

وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;i;j)$ .

1) أ) احسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ .

ب) بيّن انّ من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x)=\frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$ ،

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ وشكل جدول تغيراتها.

2) أ)بيّن ان المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ .

ب) أدرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة الى المستقيم $(\Delta)$ .

3) أ)عيّن نقاط تقاطع المنحني $(C_f)$ مع محوري الإحداثيات

ب) ارسم المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(C_f)$

**الجزء الثالث :**

$h$ الدالة العددية المعرفة على كما يلي : $h(x)=\frac{x^3-3x^2+3x+1}{x^2-2x+2}$

أ-بيّن أن : $f(x\ \ 1)\ \ 2$ $h(x)$

ب-اشرح كيفية يتم رسم المنحني $(C_h)$ الممثل للدالة $h$ انطلاقا من المنحني $(C_f)$

جـ-استنتج معادلة للمستقيم المقارب المائل للمنحني $(C_h)$

د- ارسم المستقيم والمنحنى $C_h$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## التدريب 07

$f$ الدالة العددية المعرفة على $*$ بـ: $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$

نسمي $C_f$ المنحني الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;i,j)$.

1/ أ) احسب $\lim_{x\to 0} f(x)$ و $\lim_{x\to 0} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا

ب) احسب النهايتين : $\lim_{x} f(x)$ و $\lim_{x} f(x)$

2/ أ) نسمي المنحني الممثل لدالة المربع ، احسب $x^2$ $\lim_{|x|} f(x)$ وفسّر النتيجة بيانيا

ب)ادرس وضعية المنحني $C_f$ بالنسبة للمنحني

2/ أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يختلف عن 0 فإن : $f$ $x$ $\frac{2(x\ \ 1)\ x^2\ \ x\ \ 1}{x^2}$

$f$

3 $f(\ 1)$ $f(\ 2)$ ارسم و $(C_f)$ في نفس المعلم

4/ أ)اشرح كيف يتم رسم المنحنيين الممثلين للدالتين $g$ و $h$ انطلاقا من المنحني $C_f$ حيث :

$h(x)$ $x|x|$ $\frac{2}{x}$ ، $g(x)$ $x^2$ $\frac{2}{|x|}$

ارسم المنحنيين $C_g$ و $C_h$

---

## التدريب 08

$f$ $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x^2+2x+2}$

$(O;i,j)$ $f$ $(C_f)$ $b$ $a$

1 $A\left(0;\frac{7}{2}\right)$ $(C_f)$ $b$ $a$

$f(x)=1+\frac{5x+5}{x^2+2x+2}$ $f(x)$

2 $(\Delta)$ $(C_f)$

$(\Delta)$ $(C_f)$

3 $f$

4 $(C_f)$

5 $\omega$ $(\Delta)$ $(C_f)$ $\omega$ $(C_f)$

6 $\omega$ $(T)$

$y_T$ $f(x)$ $\frac{5(x\ \ 1)^3}{x^2\ \ 2x\ \ 2}$ $x$

$(T)$ $(C_f)$

7 $(C_f)$ $(\Delta)$ $(T)$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## التدريب 09

$f$ $f(x)=\dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$

$b$ $a$ $(C_f)$ $f$ $(O;i,j)$

1 $a$ $b$ $A(0;3)$ $(C_f)$

$f(x)$ $f(x)=3+\dfrac{4x}{x^2+1}$

2 أ) احسب النهايتين : $\lim\limits_{x} f(x)$ و $\lim\limits_{x} f(x)$ وفسّر النتيجة بيانيا

$f$

3 $f(x)$ $f(-x)$

4 $(C_f)$ $(\Delta)$ $y=3$

5 بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يختلف عن 1 فإن : $f(x)-3=\dfrac{8x(x^2-3)}{(x^2-1)^3}$

ب) $C_f$

6 ارسم المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(C_f)$

7) $h$ الدالة العددية المعرفة على $h(x)=\dfrac{4|x|}{x^2+1}-3$ كما يلي :

أ) ادرس شفعية الدالة $h$

ب) اشرح كيفية يتم رسم المنحني $(C_h)$ الممثل للدالة $h$ انطلاقا من المنحني $(C_f)$

---

## التدريب 10

### بكالوريا شعبة تقني رياضي دورة 2010

$f$ $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

$(C_f)$ $(O;i,j)$

1 $f$

2 $f'(x)=1+\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ $x$

3 $f$

4 $(T)$ $(C_f)$ $0$

5 $(C_f)$ $(T)$ $(C_f)$

6 $(D)$ $y=x+1$ $(C_f)$ $+\infty$

$(D')$

7 $(C_f)$ $(D')$ $(D)$

$\sqrt{u}$ $\dfrac{u}{2\sqrt{u}}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$g(x)=|x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ $g$ 8

$g$

$g$ $(C_g)$ $(C_f)$

---

**الهدية**

- **تأمل في هذه المعادلــة :**

**رغبة + إرادة + ممارسة + جهد منظم = متــعة ونجاح بحول الله**

- أود أن أورد أمامك نص رسالة بعث بها بديع الزمان الهمذاني، الذي كان من أئمة عصره في الكتابة، إلى ابن أخت له كان ينفق عليه من ماله ليتعلم. كتب إليه:

" أنت ولدي ما دمت والدفتر أليفك والمحبرة حليفك، فإذا قصّرت، ولا أخالك، فغيري خالك، والسلام ".

- إذا كنتَ في قومٍ فصاحِب خِيارَهم *** ولا تصحبِ الأردى فتردى مع الرَّدِي

عن المرءِ لا تَسَلْ وسَلْ عن قرينهِ *** فكلُّ قريـنٍ بالمقارَن يقتدِي

قال علماؤنا :الآت العلم أربع :شيخ فتاح و عقل رجاح وكتب صحاح ومداومة وإلحاح

## اقـــــــــرأ وتـــــأمل

_____ _____

**لا توجد طريقة ملكية**

_____

_____

_____ _____ _____ _____

_____ _____

!

I believe that good thing come to those who work

A comfort zone is a beautiful place, but nothing ever grows there.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM