قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

سلسلة هبـــاج

الرياضيـــات

Mathématiques

حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
و نمـــاذج للبكالوريا

الجزء الأول

السنة 3 ثانوي

تقني رياضي ـ رياضيات ـ علوم تجريبية

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

سلسلة هبـــاج

يسرني أن أتقدم بهذه السلسلة لطلبتنا الأعزاء في المرحلة الثانوية لكـــل الشعب العلمية منها و التكنولوجية .

ـ محتـــوى هذه السلسلة ينطبق على البرنامج الرسمي الجديد المقرر من طرف وزارة التربية الوطنية .

ـ يشمل هذا الجزء من السلسلة على خمسة محاور من البرنامج :

- **الإستدلال بالتراجع**
- **النهايات و الإستمرارية**
- **القسمة في Z**
- **الجداء السلمي**
- **المستقيمات و المستويات في الفضاء**

ـ يعالج الكتاب الدروس النظرية معالجة تامة و قد حرصت على أن أضع لكل فكرة مثال توضيحي مفصل للتمكن من فهمها بشكل جيد .

ـ كما حرصت أن أعالج في نهايـــة كل درس ، مجموعة تطبيقـــات للتصحيح الذاتـــي محلولة بالتفصيل التي تعطي نظرة شاملة للدرس .

ـ كما حرصت أن أعالج في نهايـــة كل محور ، مجموعة نماذج بكالوريا محلولة بالتفصيل التي تساعد للتحضير لإمتحان البكالوريا و مختلف المسابقات .

آملا بهذا المجهود المتواضع أن أكون قد وفقت في عملي .

هبـــاج جمال
لصواني وهيب

الهاتف : 0773 26 52 81

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الإستدلال بالتراجع

مبدأ الإستدلال بالتراجع

لتكن $P(n)$ خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي n

و ليكن n_0 عدد طبيعي كيفي .

للبرهان على أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$. يكفي أن نتبع الخطوات التالية :

1 ــ نتأكد من صحة الخاصية من أجل $n = n_0$ أي $P(n_0)$

2 ــ نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من n_0 ونبرهن صحة هذه الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$

مثال ــ 1

لنثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n فان العدد $4^n + 2$ مضاعف 3

الحـل ــ 1

لاحظ أن $n_0 = 0$ لأن نريد إثبات الخاصية من أجل كل عدد طبيعي والخاصية المطلوبة هي : العدد $4^n + 2$ مضاعف 3

طريقة الحل :

نستعمل الاستدلال بالتراجع كما يلي :

1 ــ لنتأكد أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

هل العدد $4^0 + 2$ مضاعف 3 ؟

لدينا $4^0 + 2 = 1 + 2 = 3$ إذن : فعلا العدد $4^0 + 2$ مضاعف 3

و عليه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

2 ــ لنفرض أن الخاصية صحيحة من أجل $n > 0$

أي : العدد $4^n + 2$ مضاعف 3 (فرضية التراجع)

لنبرهن أن العدد $4^{n+1} + 2$ مضاعف 3

لدينا :

$$4^{n+1} + 2 = 4 \times 4^n + 2$$
$$= (1 + 3) \times 4^n + 2$$
$$= 4^n + 3 \times 4^n + 2$$
$$= (4^n + 2) + 3 \times 4^n$$

لكن حسب فرضية التراجع فإن العدد $4^n + 2$ مضاعف 3 أي يوجد عدد طبيعي k يحقق $4^n + 2 = 3k$

منه :
$$4^{n+1} + 2 = 3k + 3 \times 4^n$$

أي :
$$4^{n+1} + 2 = 3(k + 4^n)$$

نضع $k + 4^n = \ell$ حيث ℓ عدد طبيعي

إذن : $4^{n+1} + 2 = 3\ell$

منه : العدد $4^{n+1} + 2$ مضاعف 3

أي : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n العدد $4^n + 2$ مضاعف 3

مثال ــ 2

أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n فان العدد $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف 7

الحـل ــ 2

باستعمال الاستدلال بالتراجع

1 ــ هل العدد $3^{2(0)+1} + 2^{0+2}$ مضاعف 7 ؟

لدينا : $3^{2(0)+1} + 2^{0+2} = 3 + 2^2 = 7$ و 7 مضاعف 7

إذن : العدد $3^{2(0)+1} + 2^{0+2}$ مضاعف 7

2 ــ لنفرض أن العدد $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف 7 من أجل $n > 0$

هل العدد $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$ مضاعف 7 ؟

لدينا:

$$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 3^{2n+2+1} + 2^{n+1+2}$$
$$= 3^2 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} =$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2}$$
$$= (2+7) \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2}$$
$$= 2 \times 3^{2n+1} + 7 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2}$$
$$= 2 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} + 7 \times 3^{2n+1}$$
$$= 2(3^{2n+1} + 2^{n+2}) + 7 \times 3^{2n+1}$$

لكن حسب فرضية التراجع فإن العدد $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف 7

أي يوجد عدد طبيعي k حيث $7k = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

منه : $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 2(7k) + 7 \times 3^{2n+1}$

$$= 7(2k + 3^{2n+1})$$

نضع : $\ell = 2k + 3^{2n+1}$ حيث ℓ عدد طبيعي .

إذن : $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 7\ell$

أي : العدد $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$ مضاعف 7 .

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف 7

ملاحظة : في بعض الحالات لاثبات صحة خاصية نستعمل الاستدلال بالتراجع مرتين .

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين ــ 1

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

الحـل ــ 1

1 ــ من أجل $n = 0$ المجموع $0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ يساوي 0 (n ينطبق على 0)

و $\frac{0(0+1)}{2} = 0$ إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 0$

2 ــ لنفرض أن : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ من أجل $n > 0$

هل : $1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$ ؟

لدينا : $1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

لأن حسب فرضية التراجع $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

إذن : $1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = (n+1)(\frac{n}{2} + 1)$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
$$= \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

منه : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

التمرين ــ 2

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الحـل ــ 2

1ــ من أجل $n=0$ المجموع $0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2$ يساوي 0 (n ينطبق على0)

و $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=0$ لأن $n=0$ إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$

2 ــ نفرض أن : $0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ من أجل $n>0$

هل $0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$ ؟

لدينا : $0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$

لأن حسب فرضية التراجع : $0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

منه : $0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=(n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right]$

$=(n+1)\frac{2n^2+n+6n+6}{6}$

$=(n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6}$

$=(n+1)\frac{(2n+3)(n+2)}{6}$ لأن : $(2n+3)(n+2)=2n^2+7n+6$

$=\frac{(n+1)(2n+2+1)(n+1+1)}{6}$

$=\frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

التمرين ــ 3

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $\mathbf{0^3+1^3+2^3+\ldots.+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$

الحـل ــ 3

1 ــ من أجل $n=0$ المجموع : $0^3+1^3+2^3+\ldots.+n^3$ يساوي 0 لأن n ينطبق على 0 .

و $\frac{n^2(n+1)^2}{4}=0$ إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$

2 ــ نفرض أن : $0^3+1^3+2^3+\ldots.+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ من أجل $n>0$

هل : $0^3+1^3+2^3+\ldots.+n^3+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+1+1)^2}{4}$ ؟

لدينا : $0^3+1^3+2^3+\ldots.+n^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$

لأن حسب فرضية التراجع $0^3+1^3+2^3+\ldots.+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

إذن : $0^3+1^3+2^3+\ldots.+n^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)(n+1)^2$

$=(n+1)^2\left[\frac{n^2}{4}+n+1\right]$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= (n+1)^2 \frac{n^2+4n+4}{4}$$
$$= (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^2(n+1+1)^2}{4}$$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0^3+1^3+2^3+....+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

التمرين ــ 4

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $2^{3n}-1$ مضاعف 7

الحـل ــ 4

1 ــ من أجل $n=0$: $2^{3(0)}-1=1-1=0$ و 0 مضاعف 7

إذن : الخاصية محققة من أجل $n=0$

2 ــ نفرض أن العدد $2^{3n}-1$ مضاعف 7 من أجل $n>0$

هل $2^{3(n+1)}-1$ مضاعف 7 ؟

لدينا : $2^{3(n+1)}-1 = 2^{3n+3}-1$

$= 2^3 \times 2^{3n}-1$

$= 8 \times 2^{3n}-1$

$= (7+1) \times 2^{3n}-1$

$= 7 \times 2^{3n} + 2^{3n}-1$

لكن حسب فرضية التراجع فإن العدد $2^{3n}-1$ مضاعف 7

أي يوجد عدد طبيعي k حيث $2^{3n}-1 = 7k$

منه : $2^{3(n+1)}-1 = 7 \times 2^{3n}+7k$

$= 7(2^{3n}+k)$

$= 7\ell$ حيث $\ell = 2^{3n}+k$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $2^{3n}-1$ مضاعف 7

التمرين ــ 5

أثبت بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $3^{2n}-1$ مضاعف 8

الحـل ــ 5

1 ــ من أجل $n=0$: $3^{2(0)}-1=1-1=0$ و 0 مضاعف 8

إذن : الخاصية محققة من أجل $n=0$

2 ــ نفرض أن $3^{2n}-1$ مضاعف 8 من أجل $n>0$

هل $3^{2(n+1)}-1$ مضاعف 8 ؟ .

لدينا : $3^{2(n+1)}-1 = 3^{2n+2}-1$

$= 3^2 \times 3^{2n}-1$

$= 9 \times 3^{2n}-1$

$= (8+1) \times 3^{2n}-1$

$= 8 \times 3^{2n} + 3^{2n}-1$

لكن حسب فرضية التراجع فإن $3^{2n}-1$ مضاعف 8

أي يوجد عدد طبيعي k حيث $3^{2n}-1 = 8k$

منه : $3^{2(n+1)}-1 = 8 \times 3^{2n}+8k$

$= 8(3^{2n}+k)$

$= 8\ell$ حيث $\ell = 3^{2n}+k$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $3^{2n}-1$ مضاعف 8.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمرين ــ 6

هل الخاصية : من أجل كل عدد طبيعي n : $3^{2n+1} - 2^{2n+2}$ مضاعف 7 صحيحة ؟

الحـــل ــ 6

1 ــ من أجل $n = 0$: $3^{2(0)+1} - 2^{2(0)+2} = 3^1 - 2^2 = -1$

لكن (-1) ليس مضاعف 7

إذن : الخاصية ليست صحيحة من أجل $n = 0$

نتيجة : الخاصية $3^{2n+1} - 2^{2n+2}$ مضاعف 7 من أجل كل عدد طبيعي n ليست صحيحة .

التمرين ــ 7

لتكن P(n) الخاصية : $n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3 .

هل الخاصية P(n) صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ؟.

الحـــل ــ 7

لنحاول أن نبرهن عن صحة هذه الخاصية باستعمال الاستدلال بالتراجع كما يلي :

1 ــ من أجل $n = 0$: $0^3 + 2(0) = 0$ و 0 يقبل القسمة على 3

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

2 ــ نفرض أن : $n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3 من أجل $n > 0$

هل $(n+1)^3 + 2(n+1)$ يقبل القسمة على 3 ؟.

لدينا :

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = (n+1)[(n+1)^2 + 2]$$
$$= (n+1)(n^2 + 2n + 1 + 2)$$
$$= n^3 + 2n^2 + 3n + n^2 + 2n + 3$$
$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 2n + 3$$
$$= n^3 + 2n + 3(n^2 + n + 1)$$

لكن : حسب فرضية التراجع فإن $n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3

أي : يوجد عدد طبيعي k يحقق $n^3 + 2n = 3k$

منه :
$$(n+1)^3 + 2(n+1) = 3k + 3(n^2 + n + 1)$$
$$= 3(k + n^2 + n + 1)$$

3ℓ حيث $\ell = k + n^2 + n + 1$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : الخاصية $n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3 صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

التمرين ــ 8

1 ــ أثبت أن إذا وجد عدد طبيعي n حيث $10^n + 1$ يقسم 9 فإن $10^{n+1} + 1$ يقسم 9

2 ــ هل من أجل كل عدد طبيعي n : $10^n + 1$ مضاعف 9 ؟

الحـــل ــ 8

1 ــ ليكن $10^n + 1$ قابل للقسمة على 9

أي : يوجد عدد طبيعي k حيث $10^n + 1 = 9k$

لدينا :
$$10^{n+1} + 1 = 10 \times 10^n + 1$$
$$= (9+1) \times 10^n + 1$$
$$= 9 \times 10^n + 10^n + 1$$
$$= 9 \times 10^n + 9k \quad \text{لأن } 10^n + 1 = 9k$$
$$= 9(10^n + k)$$
$$= 9\ell \quad \text{حيث } \ell = 10^n + k$$

إذن : العدد $10^{n+1} + 1$ مضاعف 9

أي 9 يقسم العدد $10^{n+1} + 1$

2 ــ لاحظ أن : من أجل $n = 0$ فإن $10^0 + 1 = 2$ و لكن 2 ليس مضاعف 9

إذن : الخاصية ليست محققة من أجل $n = 0$

و عليه : العدد $10^n + 1$ ليس مضاعف 9 من أجل كل عدد طبيعي n .

التمرين ــ 9

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـــ : $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

1 ــ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n > 1$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2 ــ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$

الحـل ــ 9

1 ــ من أجل $n = 1$: $u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{4} = 2$

بما أن $2 > 1$ فإن $u_1 > 1$ إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 1$

نفرض أن $u_n > 1$ من أجل $n > 1$

هل $u_{n+1} > 1$ ؟

لدينا: $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

لكن : $u_n > 1$ إذن حسب خواص الحصر فإن $\sqrt{u_n} > \sqrt{1}$ أي $\sqrt{u_n} > 1$

منه : $u_{n+1} > 1$ أي الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n > 1$

2 ــ من أجل $n = 1$ لدينا $u_{n+1} = u_{1+1}$

$= u_2$

$= \sqrt{u_1}$

$= \sqrt{2}$

بما أن $\sqrt{2} \leq \frac{3}{2}$ فإن $u_2 \leq \frac{3}{2}$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض أن $u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$ من أجل $n > 1$

هل $u_{(n+1)+1} \leq \frac{3}{2}$ ؟

لدينا : $u_{(n+1)+1} = \sqrt{u_{n+1}}$

لكن : $u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$ حسب فرضية التراجع .

إذن $\sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$

أي : $u_{(n+1)+1} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$ $\left(\text{لاحظ أن } \sqrt{\frac{3}{2}} \leq \frac{3}{2}\right)$

إذن $u_{(n+1)+1} \leq \frac{3}{2}$

منه : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$

التمرين ــ 10

(u_n) متتالية معرفة على N بـ $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$

أثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة .

الحـل ــ 10

تكون المتتالية (u_n) ثابتة إذا و فقط إذا تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n = u_0$

إذن : لنبرهن صحة الخاصية من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = u_0$

باستعمال الاستدلال بالتراجع كما يلي :

1 ــ من أجل $n = 1$ لدينا : $u_1 = \sqrt{6 + u_0}$

$= \sqrt{6 + 3}$

$= \sqrt{9}$

$= 3$

إذن : $u_1 = 3 = u_0$ منه الخاصية محققة من أجل $n = 1$

2 ــ نفرض أن $u_n = u_0 = 3$ من أجل $n > 1$

هل $u_{n+1} = u_0 = 3$ ؟

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لدينا : $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$

لكن حسب فرضية التراجع $u_n = u_0 = 3$

إذن : $u_{n+1} = \sqrt{6+3} = \sqrt{9} = 3$

منه : $u_{n+1} = u_0 = 3$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n = u_0 = 3$

منه : المتتالية (u_n) ثابتة و كل حدودها تساوي 3

التمرين ــ 11

نضع $t_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + ... + n(n+1)$

1ــ أحسب t_1 ; t_2 ; t_3 ; t_4

2ــ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $t_n = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

الحـل ــ 11

1ــ

$t_1 = 1 \times 2 = 2$

$t_2 = 1 \times 2 + 2 \times 3 = 8$

$t_3 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 = 20$

$t_4 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 = 40$

2 ــ الإستدلال بالتراجع :

✓ من أجل $n = 1$ لدينا $\frac{1}{3} n(n+1)(n+2) = \frac{1}{3}(2)(3) = 2$ و $t_1 = 2$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 1$

✓ نفرض أن $t_n = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$ من أجل $n > 1$

هل $t_{n+1} = \frac{1}{3}(n+1)(n+1+1)(n+1+2)$ ؟

لدينا : $t_{n+1} = 1 \times 2 + 2 \times 3 + ... + n(n+1) + (n+1)(n+2)$

$= t_n + (n+1)(n+2)$

$= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)$ حسب فرضية التراجع $t_n = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

$= (n+1)(n+2)\left(\frac{1}{3} n + 1\right)$

$= \frac{1}{3}(n+1)(n+1+1)(n+1+2)$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $t_n = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

التمرين ــ 12

من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ نضع :

$S_n = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + ... + (n-1) \times 2^{n-2}$

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ فإن :

$S_n = (n-1)2^n - n \times 2^{n-1} + 1 = 1 + \left(\frac{1}{2} n - 1\right) \times 2^n$

الحـل ــ 12

لاحظ أن : $\left(\frac{1}{2} n - 1\right) \times 2^n = \frac{1}{2} n \times 2^n - 2^n = n 2^{n-1} - 2^n$

و $(n-1)2^n - n 2^{n-1} = n 2^n - 2^n - n 2^{n-1} = n 2^{n-1}(2-1) - 2^n = n 2^{n-1} - 2^n$

إذن : $(n-1)2^n - n \times 2^{n-1} + 1 = 1 + \left(\frac{1}{2} n - 1\right) 2^n$

منه : يكفي إثبات أن $S_n = \left(\frac{1}{2} n - 1\right) \times 2^n + 1$ بالتراجع كما يلي :

من أجل $n = 2$: $S_1 = 1$

و : $1 + \left(\frac{1}{2}(2) - 1\right) \times 2^2 = 1$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 2$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لنفرض أن $S_n = 1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right) \times 2^n$ من أجل $n > 2$

هل : $S_{n+1} = 1 + \left(\frac{1}{2}(n+1) - 1\right) \times 2^{n+1}$ ؟

لدينا : $S_{n+1} = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + ... + (n-1) \times 2^{n-2} + n \times 2^{n-1}$

$= S_n + n \times 2^{n-1}$

$= 1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right) \times 2^n + n \times 2^{n-1}$ حسب فرضية التراجع .

$= 1 + n \times 2^{n-1} - 2^n + n \times 2^{n-1}$

$= 1 + 2\,n \times 2^{n-1} - 2^n$

$= 1 + n \times 2^n - 2^n$

$= 1 + \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) \times 2^{n+1}$

$= 1 + \left(\frac{1}{2}(n+1) - 1\right) \times 2^{n+1}$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ فإن $S_n = 1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right) \times 2^n$

التمرين ــ 13

الرمز ! n يقرأ عاملي n حيث $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$ **من أجل** $n > 0$ ، $0! = 1$ **من أجل** $n = 0$

برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + n \times n! = (n+1)! - 1$$

الحـل ــ 13

من أجل $n = 1$ لدينا : $(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 1$

نفرض أن : $1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + n\,(n!) = (n+1)! - 1$

هل : $1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + n(n!) + (n+1)(n+1)! = (n+1+1)! - 1$ ؟

لدينا $1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + n(n!) + (n+1)(n+1)! = [(n+1)! - 1] + (n+1)(n+1)!$

$= (n+1)!\,(1 + n + 1) - 1$

$= (n+1)!\,(n+2) - 1$

$= (n+2)! - 1$

$= (n+1+1)! - 1$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + n(n!) = (n+1)! - 1$$

التمرين ــ 14

برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $n! \geq 2^{n-1}$

الحـل ــ 14

من أجل $n = 1$ لدينا $1! = 1$

$2^{1-1} = 2^0 = 1$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 1$

لنفرض أن $n! \geq 2^{n-1}$ من أجل $n > 1$

هل $(n+1)! \geq 2^{n+1-1}$ أي هل $(n+1)! \geq 2^n$

لدينا (1) .. .. $n! \geq 2^{n-1}$ حسب فرضية التراجع .

و (2)..... $n + 1 \geq 2$ لأن $n > 1$

بضرب المتباينتين (1) و (2) طرف لطرف نحصل على $n!\,(n+1) \geq 2^{n-1} \times 2$

أي $(n+1)! \geq 2^n$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $n! \geq 2^{n-1}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمرين ــ 15 " متباينة برنولي "

a عدد حقيقي موجب تماما .

1ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $(1+a)^n \geq 1+na$

2ــ استنتج أن إذا كان $q > 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

الحـــل ــ 15

1ــ الاستدلال بالتراجع :

من أجل $n = 1$: $(1+a)^n = (1+a)^1 = 1+a$

و $1+na = 1+a$

إذن : $(1+a)^n = 1+na$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض أن $(1+a)^n \geq 1+na$ من أجل $n > 1$

هل $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$ ؟

أي هل $(1+a)^{n+1} \geq 1+na+a$ ؟

لدينا حسب فرضية التراجع : $(1+a)^n \geq 1+na$ .....(1)

نضرب طرفي هذه المتباينة في نفس العدد الحقيقي الموجب $(1+a)$ فنحصل على :

$(1+a)(1+a)^n \geq (1+na)(1+a)$

أي : $(1+a)^{n+1} \geq 1+na+a+na^2$

لكن : $1+na+a+na^2 \geq 1+na+a$ لأن $na^2 > 0$

إذن : $(1+a)^{n+1} \geq 1+na+a$

أي : الخاصية محققة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $(1+a)^n \geq 1+na$

2 ــ إذا كان $q > 1$ فإن يوجد عدد حقيقي موجب تماما a حيث $q = 1+a$

منه : $q^n = (1+a)^n$

لكن $(1+a)^n \geq 1+na$

أي : $q^n \geq 1+na$

بما $\lim\limits_{n \to +\infty} 1+na = +\infty$ و $q^n \geq 1+na$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

التمرين ــ 16

(u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2u_n - 3$

1 ــ أحسب $u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5$

2 ــ استنتج عبارة $3 - u_n$ بدلالة n ثم برهن صحتها بالتراجع .

3 ــ استنتج عبارة u_n بدلالة n

الحـــل ــ 16

$u_1 = 2u_0 - 3 = 2(2) - 3 = 1$

$u_2 = 2u_1 - 3 = 2(1) - 3 = -1$

$u_3 = 2u_2 - 3 = 2(-1) - 3 = -5$

$u_4 = 2u_3 - 3 = 2(-5) - 3 = -13$

$u_5 = 2u_4 - 3 = 2(-13) - 3 = -29$

2 ــ لاحظ أن :

$3 - u_0 = 3 - 2 = 1 = 2^0$

$3 - u_1 = 3 - 1 = 2 = 2^1$

$3 - u_2 = 3 + 1 = 4 = 2^2$

$3 - u_3 = 3 + 5 = 8 = 2^3$

$3 - u_4 = 3 + 13 = 16 = 2^4$

$3 - u_5 = 3 + 29 = 32 = 2^5$

نستنتج أن $3 - u_n = 2^n$

لنبرهن هذه الخاصية بالتراجع :

لدينا الخاصية محققة من أجل $n = 0$ و $n = 1$ و $n = 2$ و $n = 3$ و $n = 4$ و $n = 5$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

نفرض أن $3 - u_n = 2^n$ من أجل $n > 5$

هل $3 - u_{n+1} = 2^{n+1}$ ؟

لدينا : $3 - u_{n+1} = 3 - (2\,u_n - 3)$

$= 6 - 2\,u_n$

$= 2(3 - u_n)$

$= 2 \times 2^n$ لأن $3 - u_n = 2^n$ حسب فرضية التراجع

$= 2^{n+1}$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $3 - u_n = 2^n$

3 ــ لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n : $3 - u_n = 2^n$ إذن $u_n = 3 - 2^n$

التمرين ــ 17

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2\,n - 1)$

1 ــ أحسب S_1 ; S_2 ; S_3 ; S_4

2 ــ استنتج عبارة S_n بدلالة n ثم برهن عن صحتها بالتراجع .

3 ــ برهن عن صحة عبارة S_n السابقة باستعمال قانون مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية .

الحـــل ــ 17

1 ــ من أجل $n = 1$ لدينا : $2\,n - 1 = 2(1) - 1 = 1$

إذن : $S_1 = 1$ لاحظ أن $S_1 = 1^2$

من أجل $n = 2$ لدينا : $2\,n - 1 = 2(2) - 1 = 3$

إذن : $S_2 = 1 + 3 = 4$ لاحظ أن $S_2 = 2^2$

من أجل $n = 3$ لدينا : $2\,n - 1 = 2(3) - 1 = 5$

إذن : $S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$ لاحظ أن $S_3 = 3^2$

من أجل $n = 4$ لدينا : $2\,n - 1 = 2(4) - 1 = 7$

إذن : $S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$ لاحظ أن $S_4 = 4^2$

2 ــ نلاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = n^2$

لنبرهن صحة هذه الخاصية بالتراجع .

✓ الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$; $n = 2$; $n = 3$; $n = 4$

✓ نفرض أن $S_n = n^2$ من أجل $n > 4$

هل $S_{n+1} = (n + 1)^2$ ؟

لدينا : $S_{n+1} = 1 + 3 + 5 + ... + (2\,n - 1) + (2(n + 1) - 1)$

$= S_n + 2\,n + 1$

$= n^2 + 2\,n + 1$ لأن $S_n = n^2$ حسب فرضية التراجع

$= (n + 1)^2$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $S_n = n^2$

3 ــ $S_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2\,n - 1)$

لاحظ أن S_n هو مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية حدها الأول 1 و أساسها 2 لتكن (u_n) هذه المتتالية .

نضع : $u_1 = 1$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $u_n = 1 + 2(n - 1)$

أي : $u_n = 2\,n - 1$

منه : $1 + 3 + 5 + ... + 2\,n - 1 = \dfrac{(1 + 2\,n - 1)}{2} \times n$ حيث n هو عدد الحدود

أي : $1 + 3 + 5 + .. + 2\,n - 1 = \dfrac{2\,n}{2} \times n = n^2$

أي : $S_n = n^2$ و هو المطلوب .

التمرين ــ 18

(u_n) متتالية معرفة بـــ $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + 2$

(v_n) متتالية معرفة بـــ $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = u_n + v_n$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

1 ــ عبرعن u_n بدلالة n

2 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 + n^2$

الحـل ــ 18

1 ــ لدينا : $u_{n+1} = u_n + 2$ إذن حسب التعريف (u_n) متتالية حسابية أساسها 2 و حدها الأول $u_0 = 1$ إذن : $u_n = 1 + 2\,n$

2 ــ لنبرهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 + n^2$

✓ من أجل $n = 0$: $1 + n^2 = 1 + 0^2 = 1$ و $v_0 = 1$ إذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$

✓ لنفرض أن $v_n = 1 + n^2$ من أجل $n > 0$

هل $v_{n+1} = 1 + (n+1)^2$ ؟

لدينا : $v_{n+1} = u_n + v_n$

لأن $\left.\begin{matrix} u_n = 1 + 2\,n \\ v_n = 1 + n^2 \end{matrix}\right\}$ حسب فرضية التراجع

$= 1 + 2\,n + 1 + n^2$

$= 1 + (n^2 + 2\,n + 1)$

$= 1 + (n+1)^2$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $v_n = 1 + n^2$

التمرين ــ 19

(u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le 2$

الحـل ــ 19

من أجل $n = 0$ لدينا : $0 \le 1 \le 2$ أي $0 \le u_0 \le 2$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

من أجل $n = 1$: $u_1 = \sqrt{u_0 + 2} = \sqrt{3}$

بما أن $0 \le \sqrt{3} \le 2$ فإن $0 \le u_1 \le 2$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض أن $0 \le u_n \le 2$ من أجل $n > 1$

هل $0 \le u_{n+1} \le 2$ ؟

لدينا $0 \le u_n \le 2$ إذن : $0 + 2 \le u_n + 2 \le 2 + 2$

أي : $2 \le u_n + 2 \le 4$

أي $\sqrt{2} \le \sqrt{u_n + 2} \le \sqrt{4}$

أي : $\sqrt{2} \le u_{n+1} \le 2$

أي : $0 \le u_{n+1} \le 2$ لأن $0 < \sqrt{2}$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0 \le u_n \le 2$

التمرين ــ20

p دالة كثير حدود معرفة على R بـ $p(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$

1 ــ تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $p(x+1) - p(x) = x^2$

2 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $p(n) \in \mathbb{N}$

3 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $p(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

الحـل ــ20

1 ــ ليكن $x \in \mathbb{R}$

لدينا : $p(x+1) - p(x) = \frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{6}(x+1) - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x\right]$

$= \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x$

$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

و هو المطلوب $= x^2$

لاحظ أن $N \subset R$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $p(n+1) - p(n) = n^2$

أي : $p(n+1) = p(n) + n^2$

2 ــ لتكن الخاصية : من أجل كل عدد طبيعي n : $p(n) \in N$

نبرهن عن صحة هذه الخاصية بالتراجع كما يلي :

✓ من أجل $n = 0$ لدينا $p(0) = \frac{1}{3}(0) - \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{6}(0) = 0$ و $0 \in N$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 0$

✓ نفرض أن $p(n) \in N$ من أجل $n > 0$

هل $p(n+1) \in N$ ؟

لدينا حسب السؤال (1) : $p(n+1) = p(n) + n^2$

و حسب فرضية التراجع : $p(n) \in N$

إذن : $(p(n) + n^2) \in N$

أي : $p(n+1) \in N$

أي : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $p(n) \in N$

3 ــ لتكن الخاصية : من أجل كل عدد طبيعي n : $p(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

✓ من أجل $n = 0$ لدينا : $p(0+1) = p(1) = \frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{6}(1)$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2-3+1}{6} = 0$$

و الكتابة $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ من أجل $n = 0$ تكتب $0^2 = 0$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

✓ نفرض أن : $p(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ من أجل $n > 0$

هل $p(n+1+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2$ ؟

لدينا حسب السؤال (1) : $p(n+1) = p(n) + n^2$

إذن : $p[(n+1)+1] = p(n+1) + (n+1)^2$

أي : $p(n+1+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2$

منه : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n : $p(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

التمرين ــ21

(u_n) متتالية معرفة على N^* بـ $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

1 ــ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_1 + u_2 + ...+ u_n = \frac{n}{n+1}$

2 ــ استنتج قيمة المجموع $\frac{1}{1427 \times 1428} + \frac{1}{1428 \times 1429} + ...+ \frac{1}{2007 \times 2008}$

الحـل ــ21

1 ــ الاستدلال بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$u_1 + u_2 + ...+ u_n = \frac{n}{n+1}$

✓ من أجل العنصرين u_1, u_2 لدينا :

$$u_1 + u_2 = \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{12}$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

في هذه الحالة $n=2$ و $\frac{n}{n+1}=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$

بما أن $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$ فإن الخاصية محققة من أجل العنصرين u_1 و u_2

✓ نفرض أن $u_1+u_2+....+u_n=\frac{n}{n+1}$

هل $u_1+u_2+....+u_n+u_{n+1}=\frac{n+1}{(n+1)+1}$ ؟

لدينا $u_1+u_2+....+u_n+u_{n+1}=\frac{n}{n+1}+u_{n+1}$ حسب فرضية التراجع .

$$=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+1+1)}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(n+\frac{1}{(n+1+1)}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(\frac{n^2+2n+1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{n+1}{n+2}$$

$=\frac{n+1}{n+1+1}$ منه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_1+u_2+....+u_n=\frac{n}{n+1}$

2 ــ لدينا من أجل $n=1426$ فإن : $\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}+....+\frac{1}{1426\times1427}=\frac{1426}{1426+1}=\frac{1426}{1427}$

و من أجل $n=2007$ فإن : $\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}+...+\frac{1}{1426\times1427}+\frac{1}{1427\times1428}+....+\frac{1}{2007\times2008}=\frac{2007}{2008}$

منه : $\frac{1426}{1427}+\frac{1}{1427\times1428}+....+\frac{1}{2007\times2008}=\frac{2007}{2008}$

أي : $\frac{1}{1427\times1428}+\frac{1}{1428\times1429}+....+\frac{1}{2007\times2008}=\frac{2007}{2008}-\frac{1426}{1427}=\frac{581}{2865416}$

التمرين ــ 22

(u_n) متتالية معرفة بـ $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{u_n+1}{u_n+3}$

أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le1$

الحـــل ــ 22

نستعمل الاستدلال بالتراجع كما يلي :

$u_0=1$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$

✓ من أجل $n=1$: $u_1=\frac{u_0+1}{u_0+3}=\frac{1+1}{1+3}=\frac{1}{2}$ و $0\le\frac{1}{2}\le1$

إذن : $0\le u_1\le1$ منه الخاصية محققة من أجل $n=1$.

✓ لنفرض أن $0\le u_n\le1$ من أجل $n>1$

هل $0\le u_{n+1}\le1$ ؟

لدينا : $0\le u_n\le1$ منه : $1\le u_n+1\le2$ (نضيف 1 إلى الطرفين)

و من جهة أخرى : $0\le u_n\le1$ منه : $3\le u_n+3\le4$ (نضيف 3 إلى الطرفين)

أي : $\frac{1}{4}\le\frac{1}{u_n+3}\le\frac{1}{3}$ (بتطبيق خاصية المقلوب)

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

إذن لدينا المتباينتين $\begin{cases} 1 \leq u_n + 1 \leq 2 \\ \frac{1}{4} \leq \frac{1}{u_n + 3} \leq \frac{1}{3} \end{cases}$

بإجراء الجداء طرف لطرف نحصل على : $\frac{1}{4} \leq \frac{u_n + 1}{u_n + 3} \leq \frac{2}{3}$

أي : $\frac{1}{4} \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}$

و خاصة : $0 \leq \frac{1}{4} \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3} \leq 1$

أي : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

أي الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 1$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

النهايات و الإستمرارية

1 ــ النهاية المنتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$:

تعريف : f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل $]x_0 ; +\infty[$ و ℓ عدد حقيقي القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي ℓ يعني أن كل مجال مفتوح يشمل العدد ℓ يشمل أيضا كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي .

و نكتب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ و نقرأ : نهاية $f(x)$ لما x يؤول إلى $+\infty$ هي ℓ

ملاحظة :

إذا كان $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ نقول أن المستقيم نو المعادلة $y = \ell$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f عند $+\infty$

أمثلة : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ؛ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

2 ــ النهاية غير المنتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$:

تعريف : f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0 ; +\infty[$

القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ (على الترتيب هي $-\infty$) يعني أن كل مجال من الشكل $]A ; +\infty[$ (على الترتيب $]-\infty ; A[$ حيث $A \in IR$ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي و نكتب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (على الترتيب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$)

و نقرأ نهاية $f(x)$ لما x يؤول إلى $+\infty$ هي $+\infty$ (على الترتيب نهاية $f(x)$ لما x يؤول إلى $+\infty$ هي $-\infty$)

أمثلة : $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

3 ــ المستقيم المقارب المائل :

تعريف : ليكن (C_f) المنحنى البياني لدالة f في معلم . و ليكن (Δ) المستقيم نو المعادلة $y = a x + b$. القول أن المستقيم (Δ) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) يعني أن $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (a x + b)] = 0$ (على الترتيب $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (a x + b)] = 0$)

مثال : f دالة معرفة على IR^* بـــ $f(x) = 2 x - 3 + \frac{1}{x^2}$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2 x - 3)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[2 x - 3 + \frac{1}{x^2} - (2 x - 3)\right]$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$

$= 0$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 2 x - 3$ هو مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة f عند $+\infty$

بنفس الطريقة لدينا : $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (2 x - 3)] = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 2 x - 3$ هو مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة f عند $-\infty$

4 ــ النهاية المنتهية لدالة عند عدد حقيقي :

تعريف : f دالة معرفة على مجال من الشكل $]a ; x_0[\cup]x_0 ; b[$ و $\ell \in R$

القول أن نهاية f عند x_0 هي ℓ يعني أن كل مجال مفتوح يشمل العدد ℓ يشمل أيضا كل قيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 و نكتب $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ و نقرأ نهاية $f(x)$ لما x يؤول إلى x_0 هي ℓ

مثال : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= \lim_{x \to 1} x + 1$$
$$= 2$$

إذن عندما يقترب x من 1 بالقدر الكافي فإن العدد $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ يقترب بالقدر الكافي من 2

5 ــ النهاية غير المنتهية عند عدد حقيقي :

تعريف : f دالة معرفة على مجال من الشكل $]a ; x_0[\cup]x_0 ; b[$.

القول أن نهاية f عند x_0 هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]A ; +\infty[$ حيث $A \in R$ يشمل كل قيم f(x) من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 و نكتب $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ و نقرأ نهاية f(x) لما x يؤول إلى x_0 هي $+\infty$

مثال : $\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$ لأن $\lim_{x \to 3} (x-3)^2 = 0$

حذار! في بعض الحالات يجب التمييز بين x يؤول إلى x_0 بقيم أكبر من x_0 أي $x - x_0 > 0$ و x يؤول إلى x_0 بقيم أصغر من x_0 أي $x - x_0 < 0$

مثال : لا يمكن حساب $\lim_{x \to 0} 1/x$ لأن نميز حالتين :

✓ لما $x \overset{>}{\to} 0$ فإن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} 1/x = +\infty$ لأن $1/x > 0$

✓ لما $x \overset{<}{\to} 0$ فإن $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} 1/x = -\infty$ لأن $1/x < 0$

ملاحظة : إذا كان (C_f) منحنى الدالة f في معلم و كلن (Δ) مستقيما معادلته $x = a$ و كانت $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ فإن المستقيم (Δ) مقارب للمنحنى (C_f) عند a .

6 ــ عمليات على النهايات : لتكن f و g دالتان عدديتان .

α يمثل إما عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$ و ℓ ؛ ℓ' أعداد حقيقية .

نهاية مجموع دالتين :

$\lim_{x \to \alpha} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to \alpha} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to \alpha} f(x) + g(x)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

نهاية جداء دالتين :

$\lim_{x \to \alpha} f(x)$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{x \to \alpha} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to \alpha} f(x) \times g(x)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

نهاية حاصل قسمة دالتين :

$\lim_{x \to \alpha} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to \alpha} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$	ℓ / ℓ'	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ملاحظة : الرمز ح ع ت يقرأ حالة عدم التعيين و معناه أنه لا يمكن إستنتاج قيم النهاية مباشرة لذالك نلجأ إلى إزالتها بطرق مختلفة بتطبيق خواص العمليات المعرفة على الأعداد الحقيقية كالعامل المشترك و الإختزال و الضرب في المرافق و تعريف العدد المشتق كما يلي :

الإختزال: نريد حساب $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$

لدينا $\lim\limits_{x \to -1} (x^2-1) = 0$ و $\lim\limits_{x \to -1} x+1 = 0$

إذن : حسب جدول نهاية حاصل قسمة دالتين فإن $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$ هي ح ع ت لإزالتها نلجأ إلى الإختزال كمايلي :

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)}$$

$$= \lim_{x \to -1} (x-1) = -2$$

العامل المشترك : نريد حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2x$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$ إذن حسب جدول نهاية مجموع دالتين فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2x$ هي ح ع ت

لإزالتها نلجأ إلى العامل المشترك كمايلي :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - 2x = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 - \frac{2}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^2$$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} 2/x = 0$

$$= +\infty$$

الضرب في المرافق : نريد حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$

إذن حسب جدول نهاية مجموع دالتين فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ هي ح ع ت

لإزالتها نلجأ إلى الضرب في المرافق كمايلي :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \times \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= 0$$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = +\infty$

خاصية العدد المشتق: نريد حساب $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$

لدينا : $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x - 1) = 0$ لأن $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

إذن: حسب جدول نهاية حاصل قسمة دالتين فإن $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$ هي ح ع ت

لإزالتها نلجأ إلى إستخدام العدد المشتق كمايلي :

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بـ $f(x) = \cos x$

نعلم أن f قابلة للإشتقاق على IR و دالتها المشتقة f ' هي الدالة المعرفة على IR بـ $f'(x) = -\sin x$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

إذن $f'(0) = -\sin 0 = 0$

لكن حسب تعريف العدد المشتق للدالة f عند 0 فإن :

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - f(0)}{x}$$

لأن $f(0) = 1$ $$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x} \right)$$

نتيجة : $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x} \right) = f'(0) = 0$ لأن $f'(0) = 0$

7 ــ نهاية دالة كثير حدود عند $+\infty$ أو $-\infty$

لحساب نهاية دالة كثير حدود عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ نأخذ نهاية الحد أعلى درجة فقط .

مثال : $\lim_{x \to +\infty} -x^3 + 2x^2 - \sqrt{2}x - 1 = \lim_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$

حذار! $\lim_{x \to a} -x^3 + 2x^2 - \sqrt{2}x - 1 = -a^3 + 2a^2 - \sqrt{2}a - 1$ من أجل $a \in IR$

8 ــ نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$

لحساب نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى درجة في البسط على الحد الأعلى درجة في المقام .

مثال : $\lim_{x \to +\infty} \frac{x - 2}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

نشاط :

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + x - 2}$

1 ــ عين مجموعة تعريف الدالة f .

2 ــ أحسب نهايات الدالة f على حدود مجموعة تعريفها .

الحـــل :

1 ــ تكون f معرفة إذا وفقط إذا كان $x^2 + x - 2 \neq 0$

لنحل في IR المعادلة $x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta = 1 - 4(-2) = 9$ إذن :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1 + 3}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-1 - 3}{2} = -2 \end{cases}$$

نتيجة : مجموعة تعريف الدالة f هي : $]-\infty ; -2[\cup]-2 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

2 ــ النهايات :

(نهاية دالة ناطقة عند $-\infty$) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{2x + 3}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \to -2} \frac{2(-2) + 3}{x^2 + x - 2}$$

لاحظ أن :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x^2 + x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن : $\lim_{x \to -2} (x^2 + x - 1) = 0^-$ و $\lim_{x \to -2} (x^2 + x - 1) = 0^+$

$\lim_{x \to 1} (x^2 + x - 1) = 0^+$ و $\lim_{x \to 1} (x^2 + x - 1) = 0^-$

منه : $\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{y \to 0} \frac{-1}{y} = -\infty$

ملاحظة : نقبل أن 0^+ يعني أن العدد يقترب من صفر بقيم موجبة و 0^- يعني أن العدد يقترب من صفر بقيم سالبة .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -2} f(x) = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{2(-2)+3}{y} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{-1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{2(1)+3}{y} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{5}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{2(1)+3}{y} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{5}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0 \quad \text{(نهاية دالة ناطقة عند } +\infty\text{)}$$

9 ــ نهاية دالة مركبة

مبرهنة :

a ; b ; c تمثل إما أعداد حقيقية أو $(+\infty)$ أو $(-\infty)$

u ؛ v ؛ f دوال عددية حيث $f = v \circ u$ ($\circ$ يرمز إلى مركب دالتين)

إذا كانت $\lim_{x \to a} u(x) = b$ و كانت $\lim_{x \to b} v(x) = c$ فإن $\lim_{x \to a} f(x) = c$

مثال : $u : x \mapsto \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}$ ؛ $v : x \mapsto \sin x$

لدينا : $\lim_{x \to +\infty} u(x) = \frac{\pi}{2}$ و $\lim_{x \to \pi/2} v(x) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

نتيجة : $\lim_{x \to +\infty} v \circ u(x) = 1$ أي $\lim_{x \to +\infty} v(u(x)) = 1$

أي $\lim_{x \to +\infty} v\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right) = 1$

أي $\lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right) = 1$

10 ــ حساب النهاية بالمقارنة :

مبرهنة (1)

f ؛ g ؛ h دوال عددية معرفة على مجال من الشكل $]A ; +\infty[$. ℓ عدد حقيقي .

إذا كانت $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \ell$ و $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \ell$ و إذا كان من أجل كل x كبير بالقدر الكافي $h(x) \le f(x) \le g(x)$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

مثال : لتكن f دالة معرفة على IR^* بـ $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

نعلم أن من أجل كل x من IR فإن $-1 \le \cos x \le 1$

إذن : من أجل $x > 0$ فإن $-1/x \le \frac{\cos x}{x} \le 1/x$

أي : من أجل $x \in]0 ; +\infty[$ فإن $-1/x \le f(x) \le 1/x$

لكن $\lim_{x \to +\infty} -1/x = 0$ $\lim_{x \to +\infty} 1/x =$

إذن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

مبرهنة (2)

f ؛ g دالتان معرفتان على مجال من الشكل $]A ; +\infty[$.

إذا كان $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ و من أجل كل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \ge g(x)$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

مبرهنة (3)

f ؛ g دالتان معرفتان على مجال من الشكل $]A ; +\infty[$.

إذا كان $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ و من أجل كل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \le g(x)$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ملاحظة : يمكن إستعمال المبرهنات **(1)** ، **(2)** و **(3)** إذا كانت النهايات عند ∞ - أو عند عدد حقيقي .

تعريف الإستمرارية

f دالة معرفة على مجموعة D_f و a عدد حقيقي غير معزول من D_f

القول أن الدالة f مستمرة عند a يعني أن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

ملاحظة : إذا كانت f دالة مستمرة عند كل عنصر من المجال I نقول أن f مستمرة على I

هندسيا : تكون دالة f مستمرة على مجال I إذا كان من الإمكان رسم منحناها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليد) أي لا يوجد إنقطاع لهذا المنحنى على المجال I .

نتائج :

- ✓ الدالة cos و الدالة sin مستمرة على IR
- ✓ الدوال كثيرات الحدود مستمرة على IR
- ✓ الدوال الناطقة مستمرة على مجموعات تعريفها .

نشاط :

f دالة معرفة على المجال [3 ; 2 -] كمايلي : $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 : x \in [-2 ; 0[& \text{إذا كان} \\ x : x \in [0 ; 3[& \text{إذا كان} \end{cases}$

1 ــ هل تقبل الدالة f نهاية عند 0 ؟

2 ــ هل الدالة f مستمرة على المجال [3 ; 2 -] ؟

3 ــ أعط مجالا جزئيا من المجال [3 ; 2 -] تكون فيه الدالة f مستمرة .

الحـــل :

1 ــ لاحظ أن الدالة f معرفة على المجال]0 ; 2 -[بـــ $f(x) = -x^2 + 2$ إذن يمكن حساب $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)$ كما يلي :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} -x^2 + 2 = -(0)^2 + 2 = 2$$

لاحظ أيضا أن الدالة f معرفة على المجال [3 ; 0] بـــ $f(x) = x$ إذن يمكن حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ كما يلي :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x = 0$$

من جهة أخرى الدالة f معرفة عند 0 لأن $0 \in [0 ; 3]$ و $0 \notin]-2 ; 0[$ إذن : $f(0) = 0$

خلاصة : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = 2$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0$ إذن : الدالة f لا تقبل نهاية محددة عند 0 و عليه فالدالة f ليست مستمرة عند 0 .

2 ــ العدد 0 عنصر من المجال [3 ; 2 -] و الدالة f ليست مستمرة عند 0 إذن فهي ليست مستمرة على المجال [3 ; 2 -]

3 ــ الدالة f معرفة على المجال [1 ; 1/2 -] بـــ $f(x) = -x^2 + 2$ إذن هي كثير حدود منه f مستمرة على المجال [1 ; 1/2 -] .

مبرهنة القيم المتوسطة

نص المبرهنة :

f دالة معرفة و مستمرة على مجال [a ; b]

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين f(a) و f(b) فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c) = k$

حالة خاصة : إذا كان $f(a) \times f(b) < 0$ فإن العدد $k = 0$ محصور بين f(a) و f(b)

إذن : يوجد c من المجال [a ; b] حيث $f(c) = 0$ أي المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا و هو c على المجال [a ; b] .

المعادلة $f(x) = k$

إذا كانت f دالة معرفة و مستمرة على مجال [a ; b] فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين f(a) و f(b) فالمعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلا c حيث $c \in [a ; b]$.

مثال : $f(x) = x^3 + x - 1$

f دالة كثير حدود إذن مستمرة على IR و خاصة فهي مستمرة على [1 ; 0]

لدينا : $f(0) = -1$ و $f(1) = 1$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي k من المجال [1 ; 1-] فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلا c حيث $c \in [0 ; 1]$

و خاصة $k = 0$ حيث $0 \in [1 ; 1-]$ إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل c من المجال [1 ; 0]

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

نشاط :

برهن أن المعادلة $x^3 - 2x = -2$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2 ; 1]$

الحـــل :

لتكن f دالة معرفة على $[-2 ; 1]$ بـــ $f(x) = x^3 - 2x$

- ✓ f دالة كثير حدود إذن f مستمرة على $[-2 ; 1]$
- ✓ $f(-2) = (-2)^3 - 2(-2) = -8 + 4 = -4$
- ✓ $f(1) = 1 - 2 = -1$

نتيجة : f تحقق شروط مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $[-2 ; 1]$ أي من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $[-4 ; -1]$ فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلا c في المجال $[-2 ; 1]$

بما أن $k = -2$ هو عنصر من المجال $[-4 ; -1]$ فإن المعادلة $f(x) = -2$ أي المعادلة $x^3 - 2x = -2$ تقبل على الأقل حلا c من المجال $[-2 ; 1]$

الدوال المستمرة و الرتيبة تماما على مجال [a ; b]

مبرهنة : إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a ; b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا c في المجال $[a ; b]$.

إيجاد حصر لحل معادلة بالتنصيف :

الهدف من هذا العنصر هو البحث عن حل معادلة من الشكل $f(x) = 0$ على مجال $[a ; b]$ حيث f دالة مستمرة على المجال $[a ; b]$ لذلك نلجأ إلى إستعمال مبرهنة القيم المتوسطة كما يلي :

إذا تحقق أن f رتيبة تماما و مستمرة على $[a ; b]$ حيث $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[a ; b]$ إذن لدينا حصرا أولا للعدد α حيث $a < \alpha < b$ و نبحث عن حصر آخر يكون أصغر من المجال $[a ; b]$ و ذلك بأخذ m_1 منتصف المجال $[a ; b]$ أي $m_1 = \frac{a+b}{2}$

نقوم بحساب $f(m_1)$ ثم نلجأ إلى النتيجة التالية :

إذا كان $f(m_1) \times f(a) < 0$ فإن $a < \alpha < m_1$ إذن المجال الثاني للحصر هو $[a ; m_1]$

إذا كان $f(m_1) \times f(b) < 0$ فإن $m_1 < \alpha < b$ إذن المجال الثاني للحصر هو $[m_1 ; b]$

نعيد نفس الخطوات على المجال الثاني لنحصل على المجال الثالث و هكذا حتى نحصل على أصغر مجال يشمل العدد α .

مثال : نريد تعيين حصرا لحل المعادلة $x^2 - x - 1 = 0$ على المجال $]-1 ; 0[$

نعتبر الدالة f معرفة على المجال $[-1 ; 0]$ بـــ $f(x) = x^2 - x - 1$

لدينا $f'(x) = 2x - 1$

منه :

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

إذن : f متناقصة تماما على $]-\infty ; 1/2[$ و خاصة على المجال $[-1 ; 0]$

نتيجة : f متناقصة تماما و مستمرة على المجال $[-1 ; 0]$ و $f(0) = -1$ و $f(-1) = 1$

إذن $f(-1) \times f(0) < 0$ منه المعادلة $f(x) = 0$ أي $x^2 - x - 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1 < \alpha < 0$

الخطوة الأولى : ليكن m_1 منتصف $[-1 ; 0]$ أي $m_1 = -1/2$

لدينا $f(m_1) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4}$

إذن : $f(m_1) \times f(-1) < 0$

منه : الحصر الجديد $-1 < \alpha < -1/2$

الخطوة الثانية : ليكن m_2 منتصف $[-1 ; -1/2]$ أي $m_2 = -3/4$

$$f(m_2) = f\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{9 + 12 - 16}{16} = \frac{5}{16}$$

لدينا: $f(-3/4) \times f(-1/2) < 0$

إذن : الحصر الجديد $-3/4 < \alpha < -1/2$

الخطوة الثالثة : ليكن m_3 منتصف $[-3/4 ; -1/2]$ أي $m_3 = -5/8$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$f(m_3) = f\left(-\frac{5}{8}\right) = \frac{25}{64} + \frac{5}{8} - 1 = \frac{25 + 40 - 64}{64} = \frac{1}{64}$$

لدينا: $f(-5/8) \times f(-1/2) < 0$

إذن : الحصر الجديد $-5/8 < \alpha < -1/2$

يمكن مواصلة الحصر بهذه الطريقة حتى نحصل على أصغر مجال ممكن و ذلك بالقيام بأكبر عدد من الخطوات .

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين ــ 1

f دالة معرفة على $]-1 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$

1 ــ أوجد عدد حقيقيا A حيث إذا كان $x > A$ فإن $f(x) \in]2,9 ; 3,1[$

2 ــ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 3$ مقارب للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f على IR .

3 ــ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم Δ .

الحـل ــ 1

1 ــ لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x-2}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x}{x} = 3$

إذن : من أجل x كبير بالقدر الكافي فإن $f(x) \in]2,9 ; 3,1[$

وعليه يمكن أخذ العدد A أكبر ما يمكن حيث إذا كان $x > A$ فإن $f(x) \in]2,9 ; 3,1[$

2 ــ بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ فإن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 3$ مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

3 ــ الوضعية :

$$f(x) - (3) = \frac{3x-2}{x+1} - 3 = \frac{3x-2-3x-3}{x+1} = \frac{-5}{x+1}$$

لندرس إشارة $f(x) - (3)$ على IR :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
-5		$-$	‖	$-$	
$x+1$		$-$	‖	$+$	
$\frac{-5}{x+1}$		$+$	‖	$-$	

نتيجة : لما $x \in]-1 ; +\infty[$ لدينا $f(x) - 3 < 0$ إذن : (C_f) تحت (Δ)

لما $x \in]-\infty ; -1[$ لدينا $f(x) - 3 > 0$ إذن : (C_f) فوق (Δ)

التمرين ــ 2

f دالة معرفة على $]-1 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

1 ــ أوجد عدد حقيقيا A حيث إذا كان $x < A$ فإن $f(x) \in]0,9 ; 1,1[$

2 ــ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 1$ مقارب للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f على IR .

3 ــ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم Δ .

الحـل ــ 2

1 ــ لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x} = 1$

إذن : من أجل x صغير بالقدر الكافي فإن $f(x) \in]0,9 ; 1,1[$

و عليه يمكن أخذ العدد A أصغر ما يمكن حيث إذا كان $x < A$ فإن $f(x) \in]0,9 ; 1,1[$

2 ــ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ إذن : المستقيم Δ ذو المعادلة $y = 1$ مقارب لمنحنى الدالة f

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3 ــ الوضعية :

$$f(x) - 1 = \frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{x+1-x+1}{x-1} = \frac{2}{x-1}$$

لندرس إشارة $f(x) - 1$ على IR :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
2	$+$		‖		$+$
$x-1$	$-$		‖		$+$
$\frac{2}{x-1}$	$-$		‖		$+$

نتيجة : لما $x \in]-\infty ; 1[$ لدينا $f(x) - 1 < 0$ إذن : C_f تحت Δ

لما $x \in]1 ; +\infty[$ لدينا $f(x) - 1 > 0$ إذن : C_f فوق Δ

التمرين ــ 3

f دالة معرفة على $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ بـــ $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$ و ليكن C_f تمثيلها البياني

1 ــ بين أن المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$.

2 ــ أدرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم Δ .

الحـــل ــ 3

1 ــ

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} x + \frac{1}{x-1} - x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-1}$$

$= 0$ إذن : المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$

2 ــ

$$f(x) - x = x + \frac{1}{x-1} - x = \frac{1}{x-1}$$

لندرس إشارة $f(x) - x$ كما يلي :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$	$-$		‖		$+$
$\frac{1}{x-1}$	$-$		‖		$+$

نتيجة : لما $x \in]-\infty ; 1[$ لدينا $f(x) - x < 0$ إذن : C_f تحت Δ

لما $x \in]1 ; +\infty[$ لدينا $f(x) - x > 0$ إذن : C_f فوق Δ

التمرين ــ 4

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = 2x - 1 - \frac{2}{x^2+1}$ و ليكن C_f تمثيلها البياني في معلم

1 ــ بين أن المستقيم Δ ذو المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

2 ــ أدرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم Δ .

الحـــل ــ 4

1 ــ

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (2x-1) = \lim_{x \to +\infty} 2x - 1 - \frac{2}{x^2+1} - (2x-1)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{x^2+1}$$

$= 0$ إذن : المستقيم Δ ذو المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب لمنحنى الدالة f عند $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (2x-1) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2}{x^2+1} = 0$$

إذن : المستقيم Δ ذو المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب لمنحنى الدالة f عند $-\infty$

2 ــ الوضعية :

$$f(x) - (2x-1) = \left(2x - 1 - \frac{2}{x^2+1}\right) - (2x-1) = \frac{-2}{x^2+1}$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

بما أن $x^2+1>0$ فإن $\frac{-2}{x^2+1}<0$ أي $f(x)-(2x-1)<0$

إذن : المنحنى C_f يقع تحت المستقيم Δ .

التمرين ــ 5

في كل حالة من الحالات التالية أوجد معادلة للمستقيم المقارب لمنحنى الدالة f_n عند $+\infty$ و عند $-\infty$

ــ 1 $f_1(x)=1+\frac{1}{\sqrt{|x|}}$

ــ 2 $f_2(x)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{x^2}$

ــ 3 $f_3(x)=2x+1+\frac{5}{x-3}$

ــ 4 $f_4(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2-1}$

ــ 5 $f_5(x)=x+3-\frac{2}{|x|}$

ــ 6 $f_6(x)=\frac{\sin x}{x}-x+1$

ــ 7 $f_7(x)=\frac{x^2+x-1}{1-2x}$

ــ 8 $f_8(x)=\frac{x^3+1}{x^2-1}$

الحل ــ 5

ــ 1
$$\lim_{x\to\infty} f_1(x)-1=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{|x|}}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{|x|}}$$
$$=0$$
إذن : المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب لمنحنى الدالة f_1 عند $+\infty$ و $-\infty$

ــ 2
$$\lim_{x\to\infty} f_2(x)-\left(-\frac{1}{3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{x^2}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x^2}$$
$$=0$$
إذن : المستقيم ذو المعادلة $y=-1/3$ مقارب لمنحنى الدالة f_2 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

ــ 3
$$\lim_{x\to\infty} f_3(x)-(2x+1)=\lim_{x\to\infty}\left(2x+1+\frac{5}{x-3}-(2x+1)\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x-3}$$
$$=0$$
إذن : المستقيم ذو المعادلة $y=2x+1$ مقارب لمنحنى الدالة f_3 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

ــ 4
$$\lim_{x\to\infty} f_4(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2-1}-\left(-\frac{1}{2}x\right)\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}$$
$$=0$$
إذن : المستقيم ذو المعادلة $y=-\frac{1}{2}x$ مقارب لمنحنى الدالة f_4 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

ــ 5
$$\lim_{x\to\infty} f_5(x)-(x+3)=\lim_{x\to\infty}\left(x+3-\frac{2}{|x|}-(x+3)\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{|x|}$$
$$=0$$
إذن : المستقيم ذو المعادلة $y=x+3$ مقارب لمنحنى الدالة f_5 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

6 ـ $\lim\limits_{x \to \infty} f_6(x) - (-x+1) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} - x + 1 - (-x+1)$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$

لكن : $-1 \leq \sin x \leq 1$

منه : $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ أو $\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{-1}{x}$ (حسب إشارة x)

بما أن $\lim\limits_{x \to \infty} 1/x = 0$ و $\lim\limits_{x \to \infty} -1/x = 0$ فإن بالحصر $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

نتيجة : $\lim\limits_{x \to \infty} f_6(x) - (-x+1) = 0$ إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب لمنحنى الدالة f_6

عند $+\infty$ و عند $-\infty$

7 ـ $f_7(x) = \frac{x^2+x-1}{1-2x}$ لنجري القسمة الإقليدية كما يلي :

$x^2 + x - 1$	$1 - 2x$
$x^2 - \frac{1}{2}x$	$-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$
$0 + \frac{3}{2}x - 1$	
$+\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$	
$0 - \frac{1}{4}$	

نتيجة : $x^2 + x - 1 = (1-2x)(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}) - \frac{1}{4}$

منه : $\frac{x^2+x-1}{1-2x} = (-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}) - \frac{1/4}{1-2x}$

أي : $f_7(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} - \frac{1/4}{1-2x}$

إذن : $\lim\limits_{x \to \infty} f_7(x) - (-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-1/4}{1-2x}$

$= 0$ منه المستقيم ذو المعادلة $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ مقارب لمنحنى الدالة f_7

عند $+\infty$ و عند $-\infty$

8 ـ $f_8(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}$ لنجري القسمة الإقليدية كما يلي :

$x^3 + 1$	$x^2 - 1$
$x^3 - x$	x
$x + 1$	

نتيجة : $x^3 + 1 = (x^2-1)(x) + (x+1)$

إذن : $\frac{x^3+1}{x^2-1} = x + \frac{x+1}{x^2-1}$

منه : $f_8(x) = x + \frac{x+1}{x^2-1}$

أي : $\lim\limits_{x \to \infty} f_8(x) - x = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{x^2-1}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x^2}$

$= 0$ منه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب لمنحنى الدالة f_8 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

التمرين ـ 6

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = 2x + 3$

1 ـ أحسب $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ثم إستنتج مجالا لقيم x حتى يكون f(x) ينتمي إلى]6,99 ; 7,01[

2 ـ α عدد حقيقي حيث $0 < \alpha < 1$. في أي مجال يجب إختيار x بحيث يكون f(x) ينتمي إلى المجال $]7 - \alpha ; 7 + \alpha[$ ؟

الحـل ـ 6

1 ـ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 2(2) + 3 = 7$ لأن f كثير حدود مستمر على IR

$6,99 < f(x) < 7,01$ يكافئ $6,99 < 2x + 3 < 7,01$

يكافئ $3,99 < 2x < 4,01$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

6 ـ $\lim\limits_{x \to \infty} f_6(x) - (-x+1) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} - x + 1 - (-x+1)$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$

لكن : $-1 \leq \sin x \leq 1$

منه : $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ أو $\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{-1}{x}$ (حسب إشارة x)

بما أن $\lim\limits_{x \to \infty} 1/x = 0$ و $\lim\limits_{x \to \infty} -1/x = 0$ فإن بالحصر $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

نتيجة : $\lim\limits_{x \to \infty} f_6(x) - (-x+1) = 0$ إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب لمنحنى الدالة f_6

عند $+\infty$ و عند $-\infty$

7 ـ $f_7(x) = \frac{x^2+x-1}{1-2x}$ لنجري القسمة الإقليدية كما يلي :

x^2+x-1	$1-2x$
$x^2 - \frac{1}{2}x$	$-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$
$0 + \frac{3}{2}x - 1$	
$+\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$	
$0 - \frac{1}{4}$	

نتيجة : $x^2+x-1 = (1-2x)(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}) - \frac{1}{4}$

منه : $\frac{x^2+x-1}{1-2x} = (-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}) - \frac{1/4}{1-2x}$

أي : $f_7(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} - \frac{1/4}{1-2x}$

إذن : $\lim\limits_{x \to \infty} f_7(x) - (-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-1/4}{1-2x}$

$= 0$ منه المستقيم ذو المعادلة $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ مقارب لمنحنى الدالة f_7

عند $+\infty$ و عند $-\infty$

8 ـ $f_8(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}$ لنجري القسمة الإقليدية كما يلي :

x^3+1	x^2-1
$x^3 - x$	x
$x+1$	

نتيجة : $x^3+1 = (x^2-1)(x) + (x+1)$

إذن : $\frac{x^3+1}{x^2-1} = x + \frac{x+1}{x^2-1}$

منه : $f_8(x) = x + \frac{x+1}{x^2-1}$

أي : $\lim\limits_{x \to \infty} f_8(x) - x = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{x^2-1}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x^2}$

$= 0$ منه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب لمنحنى الدالة f_8 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

التمرين ـ 6

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = 2x + 3$

1 ـ أحسب $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ثم إستنتج مجالا لقيم x حتى يكون f(x) ينتمي إلى $]6,99 ; 7,01[$

2 ـ α عدد حقيقي حيث $0 < \alpha < 1$. في أي مجال يجب إختيار x بحيث يكون f(x) ينتمي إلى المجال $]7 - \alpha ; 7 + \alpha[$ ؟

الحـل ـ 6

1 ـ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 2(2) + 3 = 7$ لأن f كثير حدود مستمر على IR

$6,99 < f(x) < 7,01$ يكافئ $6,99 < 2x + 3 < 7,01$

يكافئ $3,99 < 2x < 4,01$

قلم الجزائر

WWW.DZPEN.COM

يكافئ $1,995 < x < 2,005$

يكافئ $x \in]1,995 ; 2,005[$

2 ـ $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]7 - \alpha ; 7 + \alpha[$ هذا يعني أن $7 - \alpha < f(x) < 7 + \alpha$

أي : $7 - \alpha < 2x + 3 < 7 + \alpha$

أي : $7 - \alpha - 3 < 2x + 3 - 3 < 7 + \alpha - 3$

أي : $4 - \alpha < 2x < 4 + \alpha$

أي : $\frac{4 - \alpha}{2} < x < \frac{4 + \alpha}{2}$

منه : $x \in \left] \frac{4 - \alpha}{2} ; \frac{4 + \alpha}{2} \right[$ و هو المجال المطلوب .

التمرين ـ 7

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \frac{x + 2}{x - 2}$

1 ـ أحسب $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

2 ـ أوجد مجالا I يشمل 4 بحيث إذا كان $x \in I$ فإن $f(x) \in]2,99 ; 3,10[$

الحـل ـ 7

1 ـ $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \frac{4 + 2}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3$ (f معرفة عند 4)

2 ـ $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 3$ إذن : x يقترب بالقدر الكافي من 4 كما يلي :

$2,99 < f(x) < 3,10$ يكافئ $2,99 < \frac{x + 2}{x - 2} < 3,10$

يكافئ $2,99(x - 2) < x + 2 < (x - 2)3,10$ لأن $x - 2 > 0$.

يكافئ $2,99x - 5,98 < x + 2 < 3,10x - 6,20$

يكافئ $\begin{cases} x + 2 < 3,10x - 6,20 \\ x + 2 > 2,99x - 5,98 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} 8,20 < 2,10x \\ 7,98 > 1,99x \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x > \frac{8,20}{2,10} \\ x < \frac{7,98}{1,99} \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x > 3,904 \\ x < 4,01 \end{cases}$

يكافئ $x \in]3,904 ; 4,01[$ و هو المجال المطلوب .

التمرين ـ 8

1 ـ أدرس النهايات عند $+\infty$ ، $-\infty$ و عند 1 للدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{2x + 5}{x - 1}$

2 ـ حدد المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة f

الحـل ـ 8

1 ـ f معرفة على المجال $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x}{x} = 2$ (نهاية دالة ناطقة عند $-\infty$)

لأن لما $x \lesssim 1$ فإن $x - 1 \lesssim 0$: $\lim\limits_{x \lesssim 1} f(x) = \lim\limits_{x \lesssim 1} \frac{2(1) + 5}{x - 1} = \lim\limits_{y \lesssim 0} \frac{7}{y} = -\infty$

لأن لما $x \gtrsim 1$ فإن $x - 1 \gtrsim 0$: $\lim\limits_{x \gtrsim 1} f(x) = \lim\limits_{x \gtrsim 1} \frac{2(1) + 5}{x - 1} = \lim\limits_{y \gtrsim 0} \frac{7}{y} = +\infty$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

2 ـ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$ إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مقارب لمنحنى الدالة f عند $-\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مقارب لمنحنى الدالة f عند $+\infty$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب لمنحنى الدالة f على يسار 1

$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب لمنحنى الدالة f على يمين 1

التمرين ـ 9

فيما يلي عين مجموعة تعريف كل دالة ثم أدرس النهايات عند أطراف مجموعة التعريف :

1 ـ $f(x) = \frac{2x^2 + 5}{x - 2}$ 2 ـ $g(x) = \frac{-4x + 1}{3 - x}$

3 ـ $h(x) = \frac{x + 1}{(x - 2)^2}$ 4 ـ $\ell(x) = \frac{x + 1}{(x - 1)(4 - x)}$

الحـل ـ 9

1 ـ f معرفة على المجال $]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} 2x = -\infty$$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{2(2)^2 + 5}{x - 2} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{13}{y} = -\infty$ لأن لما $x \overset{<}{\to} 2$ فإن $x - 2 \overset{<}{\to} 0$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{2(2) + 5}{x - 2} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{13}{y} = +\infty$ لأن لما $x \overset{>}{\to} 2$ فإن $x - 2 \overset{>}{\to} 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$$

2 ـ g معرفة على المجال $]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-4x}{-x} = 4$$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 3} g(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 3} \frac{-4(3) + 1}{3 - x} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{-11}{y} = -\infty$ لأن لما $x \overset{<}{\to} 3$ فإن $3 - x \overset{>}{\to} 0$

$\lim_{x \overset{>}{\to}} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 3} \frac{-4(3) + 1}{3 - x} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{-11}{y} = +\infty$ لأن لما $x \overset{>}{\to} 3$ فإن $3 - x \overset{<}{\to} 0$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x}{-x} = 4$$

3 ـ h معرفة على المجال $]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} h(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{2 + 1}{(x - 2)^2} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{3}{y} = +\infty$ لأن لما $x \overset{<}{\to} 2$ فإن $(x - 2)^2 \overset{>}{\to} 0$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} h(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{2 + 1}{(x - 2)^2} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{3}{y} = +\infty$ لأن لما $x \overset{>}{\to} 2$ فإن $(x - 2)^2 \overset{>}{\to} 0$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4 ــ ℓ معرفة على المجال $]-\infty ; 1[\cup]1 ; 4[\cup]4 ; +\infty[$

ميز بين الحالات التالية :

x	$-\infty$		1		4	$+\infty$
$(x-1)(4-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

لما $x \overset{<}{\to} 1$ فإن $(x-1)(4-x) \overset{<}{\to} 0$

لما $x \overset{>}{\to} 1$ فإن $(x-1)(4-x) \overset{>}{\to} 0$

لما $x \overset{<}{\to} 4$ فإن $(x-1)(4-x) \overset{>}{\to} 0$

لما $x \overset{>}{\to} 4$ فإن $(x-1)(4-x) \overset{<}{\to} 0$

منه النتائج التالية :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \ell(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{1+1}{(x-1)(4-x)} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{2}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \ell(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1+1}{(x-1)(4-x)} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{2}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 4} \ell(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 4} \frac{4+1}{(x-1)(4-x)} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{5}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 4} \ell(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 4} \frac{4+1}{(x-1)(4-x)} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{5}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \ell(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{-x^2+5x-4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ell(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{-x^2+5x-4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{-x^2} = 0$$

التمرين ــ 10

نفس أسئلة التمرين 9 بالنسبة للدوال المعرفة كما يلي :

1 ــ $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2\sqrt{x}$

2 ــ $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-2}$

3 ــ $h(x) = (1-x)(2-\sqrt{-x})$

4 ــ $\ell(x) = \frac{2}{x} - \cos x$

الحـل ــ 10

1 ــ f معرفة من أجل : $\left.\begin{matrix} x-1 \neq 0 \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\}$

منه : $D_f = [0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{1}{x-1} + 2\sqrt{1} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{y} + 2 = -\infty$$ لأن لما $x \overset{<}{\to} 1$ فإن $x-1 \overset{<}{\to} 0$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1}{x-1} + 2\sqrt{1} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{y} + 2 = +\infty$$ لأن لما $x \overset{>}{\to} 1$ فإن $x-1 \overset{>}{\to} 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} = \lim_{x \to +\infty} 2\sqrt{x} = +\infty$$ لأن $\lim_{x \to +\infty} 1/x = 0$

2 ــ g معرفة من أجل : $\left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ \sqrt{x}-2 \neq 0 \end{matrix}\right\}$ أي : $\left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{matrix}\right\}$

منه : $D_g = [0 ; 4[\cup]4 ; +\infty[$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 4} g(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 4} \frac{4+1}{\sqrt{x}-2} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{5}{y} = -\infty$$ لأن لما $x \overset{<}{\to} 4$ فإن $(\sqrt{x}-2) \overset{<}{\to} 0$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$\lim\limits_{x \to 4} g(x) = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{4+1}{\sqrt{x}-2} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{5}{y} = +\infty$ لأن لما $x \to 4$ فإن $(\sqrt{x}-2) \to 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ لأن لما $x \to +\infty$ فإن $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \to 0$

3 ــ h معرفة من أجل : $-x \geq 0$ أي : $x \leq 0$

منه : $D_h =]-\infty ; 0]$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} 1-x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 2-\sqrt{-x} = -\infty \end{array}\right\}$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (1-x)(2-\sqrt{-x}) = -\infty$

4 ــ ℓ معرفة من أجل : $x \neq 0$ إذن : $D_\ell =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \ell(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x} - \cos x = \lim\limits_{x \to -\infty} -\cos x$ (غير معرفة) لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \lesssim 0} \ell(x) = \lim\limits_{x \lesssim 0} \dfrac{2}{x} - \cos(0) = -\infty$

$\lim\limits_{x \gtrsim 0} \ell(x) = \lim\limits_{x \gtrsim 0} \dfrac{2}{x} - \cos(0) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} - \cos x = \lim\limits_{x \to +\infty} -\cos x$ (غير معرفة)

التمرين ــ 11

نفس أسئلة التمرين 9 بالنسبة للدوال المعرفة كما يلي :

1 ــ $f(x) = \sin 2x + x$ **3 ــ** $h(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$

2 ــ $g(x) = \sqrt{x-1} - 2x$ **4 ــ** $\ell(x) = \sqrt{x^2-x+1} - x$

الحـل ــ 11

1 ــ f معرفة على $]-\infty ; +\infty[$ لأنها مجموع دالتين معرفتين على IR .

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ لأن $-1 \leq \sin 2x \leq +1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ لأن $-1 \leq \sin 2x \leq 1$

2 ــ g معرفة من أجل $x \geq 0$ إذن $D_g = [0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} - 2\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

3 ــ h معرفة من أجل $\left.\begin{array}{l} x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{array}\right\}$ أي : $x \geq 1$

منه $D_h = [1 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) \times \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ (خاصية الضرب في المرافق)

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - \left(\sqrt{x-1}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = +\infty$ لأن $= 0$

4 ـ ℓ معرفة من أجل $x^2 - x + 1 \geq 0$

لندرس إشارة كثير الحدود $x^2 - x + 1$ كما يلي :

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 - x + 1$	$+$	

إذن : $\Delta = 1 - 4 < 0$

منه : من أجل كل x من IR فإن $x^2 - x + 1 > 0$ إذن : $D_\ell =]-\infty ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$

لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} \ell(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - x = +\infty$

الضرب في المرافق $\lim\limits_{x \to +\infty} \ell(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - x\right) \times \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ لأن $= \frac{-1}{1+1}$

$= -1/2$

التمرين ـ 12

أحسب النهايات التالية :

1 ـ $\lim\limits_{x \geq 3} \sqrt{\frac{3x+4}{x-3}}$

2 ـ $\lim\limits_{x \geq 1} \sqrt{\frac{3-6x}{1-x}}$

3 ـ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1}$

4 ـ $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-x^3 + x - 3}$

الحـل ـ 12

1 ـ $\lim\limits_{x \geq 3} \sqrt{\frac{3x+4}{x-3}} = \lim\limits_{x \geq 3} \sqrt{\frac{3(3)+4}{x-3}} = \lim\limits_{y \geq 0} \sqrt{\frac{13}{y}} = +\infty$ لأن لما $x \geq 3$ فإن $(x-3) \geq 0$

2 ـ $\lim\limits_{x \geq 1} \sqrt{\frac{3-6x}{1-x}} = \lim\limits_{x \geq 1} \sqrt{\frac{3-6(1)}{1-x}} = \lim\limits_{y \leq 0} \sqrt{\frac{-3}{y}} = +\infty$ لأن لما $x \geq 1$ فإن $(1-x) \leq 0$

3 ـ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + x + 1 = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty$

4 ـ $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 + x - 3 = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-x^3 + x - 3} = +\infty$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمرين ــ 13

f دالة معرفة بـــ $f(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{4-x^2}}$

عين D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم أحسب النهايات على أطراف مجموعة التعريف :

الحـــل ــ 13

f معرفة من أجل $4-x^2 > 0$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إذن : $D_f =]-2\,;\,2[$

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{-3}{\sqrt{4-x^2}} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{-3}{\sqrt{y}} = -\infty$ لأن لما $x \to -2$ فإن $4-x^2 \to 0$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-3}{\sqrt{4-x^2}} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{-3}{\sqrt{y}} = -\infty$ لأن لما $x \to 2$ فإن $4-x^2 \to 0$

التمرين ــ 14

أحسب النهايات التالية :

1 ــ $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{x+4}{x^2-3}\right)$

2 ــ $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x - 1}{2x}\right)$

3 ــ $\lim\limits_{x \to -1} \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}x\right) + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

4 ــ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\pi \sin x}{x}$

الحـــل ــ 14

1 ــ $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{x+4}{x^2-3}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{x}{x^2}\right)$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+4}{x^2-3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \cos(0)$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2} = 0$

$= 1$

2 ــ $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x - 1}{2x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x}{2x}\right)$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\pi x - 1}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\pi x}{2x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \cos(\pi/2)$

$= 0$

3 ــ $\lim\limits_{x \to -1} \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}x\right) + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x \to -1} \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}x - 1\right) + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$= \lim\limits_{y \to 0} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{1}{y}$ لأن لما $x \to -1$ فإن $(x+1)^2 \to 0$

$= +\infty$ لأن $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ و $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{1}{y} = +\infty$

4 ــ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\pi \sin x}{x} = ?$

لنعتبر الدالة f المعرفة على IR بـــ $f(x) = \sin x$

f قابلة للإشتقاق على IR و $f'(x) = \cos x$ منه $f'(0) = \cos(0) = 1$

و حسب تعريف العدد المشتق عند 0 فإن : $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

إذن : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

منه : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\pi \sin x}{x} = \pi$ و هو المطلوب

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمرين ــ 15

برهن أن من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x > -1$ فإن : $\frac{-1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$

إستنتج نهاية الدالة $f : x \mapsto \frac{\cos x}{x+1}$ عند $+\infty$

الحـل ــ 15

لدينا : $x > -1$ إذن : $x + 1 > 0$ أي $\frac{1}{x+1} > 0$

من جهة أخرى لدينا : $-1 \leq \cos x \leq 1$ إذن : بضرب أطراف هذه المتباينة في نفس العدد الموجب $\frac{1}{x+1}$ نحصل على :

$$-1 \times \frac{1}{x+1} \leq \cos x \times \frac{1}{x+1} \leq 1 \times \frac{1}{x+1}$$

أي $\frac{-1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$ و هو المطلوب .

نتيجة : بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$ فإن حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x+1} = 0$ و هو المطلوب .

التمرين ــ 16

f دالة عددية حيث من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$ فإن $\frac{3x + \cos x}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x+7}{x-1}$

هل f تقبل نهاية عند $+\infty$ ؟

الحـل ــ 16

لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x+7}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x}{x} = 3$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x + \cos x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x}{x} + \frac{\cos x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 3 + \frac{\cos x}{x} = 3$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

نتيجة :

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x + \cos x}{x} = 3$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x+7}{x-1} = 3$ و $\frac{3x + \cos x}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x+7}{x-1}$

فإن حسب مبرهنة الحصر f تقبل نهاية عند $+\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

التمرين ــ 17

f دالة عددية حيث من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$: $|f(x) - 3| \leq \frac{1}{x^2+1}$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

الحـل ــ 17

من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$: $|f(x) - 3| \leq \frac{1}{x^2+1}$

أي : $\frac{-1}{x^2+1} \leq f(x) - 3 \leq \frac{1}{x^2+1}$ لأن $\frac{1}{x^2+1} > 0$

منه : $3 - \frac{1}{x^2+1} \leq f(x) \leq 3 + \frac{1}{x^2+1}$

بما أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 - \frac{1}{x^2+1}\right) = 3$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$

فإن حسب مبرهنة الحصر الدالة f تقبل نهاية عند $+\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

التمرين ــ 18

f دالة عددية حيث من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $f(x) \leq -2x^3$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

الحـل ــ 18

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3 = -\infty$ و $f(x) \leq -2x^3$ من أجل $x > 0$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

فإن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ (حسب مبرهنة الدرس)

التمرين ــ 19

f دالة عددية حيث من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $f(x) \geq \frac{1}{4}x^4 + x$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

الحـل ــ 19

بما أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4}x^4 + x = +\infty$ و $f(x) \geq \frac{1}{4}x^4 + x$ من أجل $x > 0$

فإن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (حسب مبرهنة الدرس)

التمرين ــ 20

1 ــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x يكون $1 \leq 3 + 2\cos x \leq 5$

2 ــ هل الدالة $f : x \mapsto \frac{x-1}{3+2\cos x}$ تقبل نهاية عند $+\infty$ ؟

الحـل ــ 20

1 ــ من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $-1 \leq \cos x \leq 1$

منه : $-2 \leq 2\cos x \leq 2$

منه : $3 - 2 \leq 3 + 2\cos x \leq 3 + 2$

منه : $1 \leq 3 + 2\cos x \leq 5$ و هو المطلوب

2 ــ حسب السؤال الأول فإن : $1 \leq 3 + 2\cos x \leq 5$

منه : $1/5 \leq \frac{1}{3+2\cos x} \leq 1/1$ ..... (1)

نضع $\alpha = \frac{1}{3+2\cos x}$ إذن : $1/5 \leq \alpha \leq 1$ أي $\alpha > 0$

منه : الدالة f معرفة بـ $f(x) = \alpha(x-1)$

أي $f(x) = \alpha x - \alpha$

إذن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \alpha x = +\infty$ لأن $\alpha > 0$

التمرين ــ 21

1 ــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $x^2 - 3\sin x \geq x^2 - 3$

2 ــ هل تقبل الدالة $f : x \mapsto x^2 - 3\sin x$ نهاية عند $+\infty$ ؟

الحـل ــ 21

1 ــ من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $\sin x \leq 1$

منه : $-3\sin x \geq -3$

منه : $x^2 - 3\sin x \geq x^2 - 3$ و هو المطلوب

2 ــ بما أن $\lim_{x \to +\infty} x^2 - 3 = +\infty$ و $f(x) \geq x^2 - 3$ من أجل $x > 0$ فإن

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (حسب مبرهنة الدرس)

التمرين ــ 22

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = x^2 + 2x\sin x$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟ و عند $-\infty$ ؟

الحـل ــ 22

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 + 2x\sin x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x(x + 2\sin x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} x + 2\sin x = +\infty \end{array}\right\} \text{لأن } = +\infty$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 + 2x \sin x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x(x + 2\sin x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x + 2\sin x = -\infty \end{array}\right\} \text{ لأن } = +\infty$$

لاحظ أن $-2 \leq 2\sin x \leq 2$ إذن يمكن وضع $\alpha = 2\sin x$ حيث $-2 < \alpha < 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x + 2\sin x = \lim\limits_{x \to +\infty} x + \alpha = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x + 2\sin x = \lim\limits_{x \to -\infty} x + \alpha = -\infty \end{array}\right\} \text{ منه :}$$

التمرين ــ 23

f دالة عددية معرفة على المجال $]-1/2 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{x + \sin x}{2x + 1}$

1 ــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي $x > -1/2$: $\dfrac{x-1}{2x+1} < f(x) < \dfrac{x+1}{2x+1}$

2 ــ هل الدالة f تقبل نهاية عند $+\infty$ ؟

الحـل ــ 23

1 ــ $x > -1/2$ إذن : $2x > -1$ أي $2x + 1 > 0$ منه $\dfrac{1}{2x+1} > 0$ ..... (1)

من جهة أخرى : من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $-1 \leq \sin x \leq 1$

إذن : $x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$ ..... (2)

بضرب أطراف المتباينة (2) في العدد الموجب $\dfrac{1}{2x+1}$ نحصل على :

$$\frac{x-1}{2x+1} \leq \frac{x+\sin x}{2x+1} \leq \frac{x+1}{2x+1}$$ من أجل $x > -1/2$ و هو المطلوب .

أي $\dfrac{x-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{x+1}{2x+1}$

2 ــ بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{2x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{2x+1} = \dfrac{1}{2}$ و $\dfrac{x-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{x+1}{2x+1}$

فإن حسب مبرهنة الحصر : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1/2$

التمرين ــ 24

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2 ; 4]$ بـ $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & : x \in [-2 ; 1[\\ x - 1 & : x \in [1 ; 4[\end{cases}$

1 ــ هل تقبل الدالة f نهاية عند 1 ؟

2 ــ هل الدالة f مستمرة على المجال $[-2 ; 4]$ ؟ علل .

3 ــ أذكر مجالا I تكون الدالة f مستمرة عليه .

الحـل ــ 24

1 ــ لما $x \in [-2 ; 1[$ فإن $f(x) = x^2 + x$ إذن : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \lesssim 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \lesssim 1}} x^2 + x = 1^2 + 1 = 2$

لما $x \in [1 ; +\infty[$ فإن $f(x) = x - 1$ إذن : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \gtrsim 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \gtrsim 1}} x - 1 = 1 - 1 = 0$

إذن : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \lesssim 1}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \gtrsim 1}} f(x)$ منه الدالة f لا تقبل نهاية عند 1

2 ــ الدالة f ليست مستمرة على المجال $[-2 ; 4]$ لأن يوجد عنصر و هو 1 من المجال $[-2 ; 4]$ حيث الدالة f ليست مستمرة عند 1 (الدالة لا تقبل نهاية عند 1)

3 ــ على المجال $[2 ; 3]$ الدالة f معرفة بـ $f(x) = x - 1$ و هي دالة كثير حدود .

إذن : فهي مستمرة على IR و خاصة على $[2 ; 3]$ و هو المجال المطلوب (مثلا) .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمرين ــ 25

لتكن f دالة معرفة على IR كمايلي : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & : x \leq 2 \\ x^2 + x - 5 & : x > 2 \end{cases}$

1 ــ أدرس إستمرارية الدالة f عند 2 .

2 ــ هل الدالة f مستمرة على IR ؟ علل .

الحـــل ــ 25

1 ــ من أجل $x \in]-\infty ; 2]$ فإن $f(x) = x^2 - 2x + 1$ إذن :

$$\lim_{x \leq 2} f(x) = \lim_{x \leq 2} x^2 - 2x + 1$$
$$= (2)^2 - 2(2) + 1$$
$$= 1$$

من أجل $x \in]2 ; +\infty[$ فإن $f(x) = x^2 + x - 5$ إذن :

$$\lim_{x \geq 2} f(x) = \lim_{x \geq 2} x^2 + x - 5$$
$$= (2)^2 + 2 - 5$$
$$= 1$$

بما أن $\lim_{x \leq 2} f(x) = \lim_{x \geq 2} f(x) = 1$ فإن $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$

من جهة أخرى لدينا الدالة f معرفة عند 2 بالعبارة $f(x) = x^2 - 2x + 1$

منه : $f(2) = (2)^2 - 2(2) + 1 = 1$

نتيجة : $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 1$ إذن : الدالة f مستمرة عند 2

2 ــ الدالة f مستمرة على IR لأنها مستمرة عند 2 و مستمرة على كل من المجالين $]-\infty ; 2[$ و $]2 ; +\infty[$ لأنها عبارة عن دالة كثير حدود معرفة على كل من المجالين على حدا .

التمرين ــ 26

أدرس إستمرارية الدالة f المعرفة على IR بـــ : $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 2 & : x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x + 1 & : x > 1 \end{cases}$

الحـــل ــ 26

$$\lim_{x \leq 1} f(x) = \lim_{x \leq 1} -x^2 + x + 2 = -1 + 1 + 2 = 2$$
$$\lim_{x \geq 1} f(x) = \lim_{x \geq 1} \frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

نتيجة : $\lim_{x \leq 1} f(x) \neq \lim_{x \geq 1} f(x)$ إذن : f ليست مستمرة عند 1

إذن : فهي ليست مستمرة على IR .

و لكن f مستمرة على $]-\infty ; 1]$ و على المجال $]1 ; +\infty[$ كل على حدا .

التمرين ــ 27

f دالة عددية معرفة كمايلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} & : x \neq 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$

1 ــ أدرس إستمرارية f عند 1 .

2 ــ هل الدالة f مستمرة على IR ؟

الحـــل ــ 27

1 ــ من أجل $x \in]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ فإن $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ بإجراء القسمة الإقليدية نحصل على :

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 1 & x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} & x^2 + x + 1 \\ x^2 - 1 & \\ \underline{x^2 - x} & \\ x - 1 & \\ \underline{x - 1} & \\ 0 & \end{array}$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

من أجل $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ $f(x) = x^2 + x + 1$ فإن $x \in]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

إذن : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} x^2 + x + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} x^2 + x + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$

بما أن : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ فإن $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = 3$

نتيجة : بما أن $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3 = f(1)$ فإن f مستمرة عند 1

2 ــ بما أن f دالة ناطقة على المجال $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ فهي مستمرة على هذا المجال و لكن f مستمرة أيضا عند 1 إذن f مستمرة عند كل عنصر من IR أي f مستمرة على IR .

التمرين ــ 28

أدرس إستمرارية الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـــ $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$

الحـــل ــ 28

f دالة ناطقة إذن معرفة و مستمرة على مجال تعريفها أي f مستمرة على المجال $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

التمرين ــ 29

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = (x^2 - x)\sin x$

لماذا الدالة f مستمرة على IR .

الحـــل ــ 29

لنعرف الدالتين u و v كمايلي : $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$ و $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - x$

الدالة u معرفة و مستمرة على IR

الدالة v معرفة و مستمرة على IR

إذن جداء الدالتين u و v هو دالة مستمرة على IR أي :

الدالة المعرفة بـــ $x \mapsto (x^2 - x)\sin x$ معرفة و مستمرة على IR

و منه f مستمرة على IR .

التمرين ــ 30

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + x^2}$. أدرس إستمرارية f على IR .

الحـــل ــ 30

لدينا f هو جداء الدالتين المستمرتين على IR و المعرفتين بـــ : $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2}$

إذن : f هي دالة مستمرة على IR .

التمرين ــ 31

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2 ; 1]$ كما يلي : $f(x) = x(x + E(x))$

حيث الدالة $x \mapsto E(x)$ هي الدالة جزء الصحيح للعدد x .

1 ــ عين عبارة f(x) على كل من المجالات التالية : $[-2 ; -1[$ ؛ $[-1 ; 0[$ ؛ $[0 ; 1[$

2 ــ هل الدالة f مستمرة على $[-2 ; -1]$ ؛ $[-2 ; 0[$ ؛ $[-2 ; 1[$

الحـــل ــ 31

1 ــ نعلم أن الدالة جزء صحيح معرفة كما يلي :

$$E(x) = \begin{cases} -2 & : x \in [-2 ; -1[\\ -1 & : x \in [-1 ; 0[\\ 0 & : x \in [0 ; 1[\end{cases}$$

إذن الدالة f معرفة كمايلي :

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2) & : x \in [-2 ; -1[\\ x(x-1) & : x \in [-1 ; 0[\\ x(x+0) & : x \in [0 ; 1[\end{cases}$$

أي

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & : x \in [-2 ; -1[\\ x^2 - x & : x \in [-1 ; 0[\\ x^2 & : x \in [0 ; 1[\end{cases}$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2 ــ الدالة f معرفة على المجال $]-1 ; -2[$ بـ $f(x) = x^2 - 2x$ إذن هي دالة كثير حدود
منه : f مستمرة على $]-1 ; -2[$
الدالة f معرفة على المجال $]0 ; -2[$ كمايلي : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & : x \in [-2 ; -1[\\ x^2 - x & : x \in [-1 ; 0[\end{cases}$

إذن : f مستمرة على $]-1 ; -2[$ و f مستمرة على $[-1 ; 0[$
لكن هل f مستمرة عند -1 ؟
لدينا $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} x^2 - 2x = (-1)^2 - 2(-1) = 3$
$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} x^2 - x = (-1)^2 - (-1) = 2$

إذن : الدالة f لا تقبل نهاية عند -1 إذن : f ليست مستمرة عند -1
نتيجة : f ليست مستمرة على $]0 ; -2[$ لأن f ليست مستمرة عند -1 .
بما أن الدالة f ليست مستمرة عند -1 و -1 عنصر من المجال $]1 ; -2[$ فإن f ليست مستمرة على المجال $]1 ; -2[$

التمرين ــ 32

باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة برهن أن المعادلة $x^3 - 4x = -2$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[-2 ; -3]$

الحـل ــ 32

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[-2 ; -3]$ بـ $f(x) = x^3 - 4x$
لدينا : $f(-3) = (-3)^3 - 4(-3) = -15$ و $f(-2) = (-2)^3 - 4(-2) = 0$
بما أن f مستمرة على المجال $[-2 ; -3]$ فإن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلا على المجال $[-2 ; -3]$ من أجل كل عدد حقيقي k حيث $k \in [f(-3) ; f(-2)]$ أي $k \in [-15 ; 0]$
بما أن $k = -2$ عنصر من المجال $[-15 ; 0]$ فإن المعادلة $f(x) = -2$ تقبل على الأقل حلا على المجال $[-2 ; -3]$
أي المعادلة $x^3 - 4x = -2$ تقبل على الأقل حلا على المجال $[-2 ; -3]$ و هو المطلوب

التمرين ــ 33

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0 ; 2]$ بـ $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & : 0 \le x < 1 \\ -2x + 3 & : 1 \le x \le 2 \end{cases}$

1 ــ هل يمكن تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلول في المجال $[0 ; 2]$ ؟
2 ــ تحقق أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا في المجال $[0 ; 2]$

الحـل ــ 33

1 ــ f معرفة على المجال $]1 ; 0]$ بـ $f(x) = 2x + 1$ (كثير حدود) إذن هي مستمرة على $]1 ; 0]$
f معرفة على المجال $[2 ; 1]$ بـ $f(x) = -2x + 3$ (كثير حدود) إذن هي مستمرة على $[2 ; 1]$
لكن هل f مستمرة عند 1 ؟
لدينا $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} 2x + 1 = 2(1) + 1 = 3$
$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} -2x + 3 = -2(1) + 3 = 1$

إذن : الدالة f لا تقبل نهاية عند 1 منه f ليست مستمرة عند 1
نتيجة : f ليست مستمرة عند 1 و 1 عنصر من المجال $[2 ; 0]$ إذن f ليست مستمرة على المجال $[2 ; 0]$
إذن : f لا تحقق شرط تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $[2 ; 0]$ و عليه لا يمكن تطبيق هذه المبرهنة

2 ــ حل المعادلة $f(x) = 0$
لدينا : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0 & : x \in [0 ; 1[\\ \text{أو} & \\ -2x + 3 = 0 & : x \in [1 ; 2] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/2 & [0 ; 1[\text{ مرفوض لا ينتمي إلى} \\ \text{أو} & \\ x = 3/2 & 3/2 \in [1 ; 2[\text{ مقبول لأن} \end{cases}$

نتيجة : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا هو $3/2$ على المجال $[2 ; 0]$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمرين ــ 34

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = 3x^3 - 2x - \frac{1}{4}$

1 ــ أحسب f(1) ؛ f(0) ؛ f(- 1/2) ؛ f(-1)

2 ــ إستنتج أن المعادلة f(x) = 0 تقبل على الأقل ثلاث حلول في المجال [-1 ; 1]

الحـــل ــ 34

1 ــ

$$f(1) = 3(1) - 2(1) - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$f(0) = 0 - 0 - \frac{1}{4} = \frac{-1}{4}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} = \frac{-3}{8} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{-3+8-2}{8} = \frac{3}{8}$$

$$f(-1) = 3(-1)^3 - 2(-1) - \frac{1}{4} = -3 + 2 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$$

2 ــ الدالة f كثير حدود إذن هي مستمرة على IR و خاصة فهي مستمرة على كل من المجالات [- 1 ; - 1/2] ؛ [- 1/2 ; 0] ؛ [0 ; 1] كل على حدا .

و من جهة أخرى : $f(-1) \times f(-1/2) < 0$

و $f(-1/2) \times f(0) < 0$

و $f(0) \times f(1) < 0$

إذن : المعادلة f(x) = 0 تقبل على الأقل حلا في كل مجال من المجالات [- 1 ; - 1/2] ؛ [- 1/2 ; 0] و [0 ; 1]

حسب مبرهنة القيم المتوسطة و عليه فإن المعادلة f(x) = 0 تقبل على الأقل ثلاث حلول على المجال [-1 ; 1]

التمرين ــ 35

f دالة معرفة على المجال [- 3 ; 6] بـــ : $f(x) = x^3 - 12x$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

2 ــ ماهو عدد حلول المعادلة f(x) = 30

الحـــل ــ 35

1 ــ f معرفة و قابلة للإشتقاق على [- 3 ; 6] و $f'(x) = 3x^2 - 12$

إشارة f '(x) : $3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$

x	-3		-2		2		6
$3(x^2-4)$	+	0	–	0	+		

منه : جدول إشارة f '(x) على المجال [- 3 ; 6] كما يلي :

x	-3		-2		2		6
f '(x)	+	0	–	0	+		

إذن جدول تغيرات الدالة f على [- 3 ; 6] :

x	- 3		- 2		2		6
f '(x)	+	0	–	0	+		
f(x)	9	↗	16	↘	-16	↗	144

$$f(-3) = (-3)^3 - 12(-3) = -27 + 36 = 9$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) = -8 + 24 = 16$$

$$f(2) = (2)^3 - 12(2) = 8 - 24 = -16$$

$$f(6) = (6)^3 - 12(6) = 36(6-2) = 36 \times 4 = 144$$

2 ــ حسب جدول تغيرات الدالة f على المجال [- 3 ; 6] فإن الدالة f تأخذ القيمة 30 من أجل عدد حقيقي وحيد k حيث $2 < k < 6$ لأن من أجل $x \in [2 ; 6]$ فإن $f(x) \in [-16 ; 144]$ و العدد 30 عنصر من المجال [- 16 ; 144]

منه المعادلة f(x)= 30 تقبل حلا وحيدا .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمرين ــ 36

بين أن كل دالة كثير حدود درجته فردية تقبل على الأقل جذرا حقيقيا

الحـل ــ 36

لتكن f دالة كثير حدود حيث $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$

حيث a_n ; a_{n-1} ; ..... ; a_1 ; a_0 معاملات حقيقية و n عدد طبيعي فردي حيث $a_n \neq 0$

نعلم أن f مستمرة على IR لأنها دالة كثير حدود .

و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} a_n x^n$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} a_n x^n$

إذن نميز حالتين كما يلي :

	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
$a_n > 0$	$-\infty$	$+\infty$
$a_n < 0$	$+\infty$	$-\infty$

نتيجة :

إذا كان $a_n < 0$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \times \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < 0$

إذا كان $a_n > 0$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \times \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < 0$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم a_n فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \times \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < 0$ و f مستمرة على IR

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا حقيقيا . و هو المطلوب

التمرين ــ 37

f دالة مستمرة على المجال $]-\infty ; -3[\cup]-3 ; +\infty[$ و جدول تغيراتها كما يلي :

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	↘		↗	4	↘		↗	$+\infty$
			$-\infty$				-2		

بين أن المنحنى C_f الممثل للدالة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين يطلب إعطاء حصرا لفاصلتيهما

الحـل ــ 37

f مستمرة على $]-\infty ; -3[\cup]-3 ; +\infty[$ إذن f مستمرة على $[0 ; 3[$ و مستمرة أيضا على $[0 ; 2]$

من جهة أخرى و حسب جدول التغيرات لدينا :

لما $x \in]-3 ; 0]$ فإن $f(x) \in [-2 ; +\infty[$

لما $x \in [0 ; 2]$ فإن $f(x) \in [-2 ; 4[$

لكن $0 \in [-2 ; +\infty[$ و $0 \in [-2 ; 4[$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن يوجد $x_0 \in]-3 ; 0]$ يحقق $f(x_0) = 0$ و يوجد $x_1 \in [0 ; 2]$ يحقق $f(x_1) = 0$

إذن النقط ذات الإحداثيات $A(x_0 ; 0)$ و $B(x_1 ; 0)$ تنتمي إلى المنحنى C_f و ترتيبها معدوم إذن فهي تنتمي إلى محور الفواصل.

منه C_f يقطع محور الفواصل في نقطتين متمايزتين A و B فواصلهما على الترتيب $-3 < x_0 \leq 0$ و $0 \leq x_1 \leq 2$

التمرين ــ 38

إليك جدول تغيرات دالة f معرفة على IR كما يلي :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	↗	$\frac{13}{6}$	↘	$-\frac{7}{3}$	↗	$+\infty$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

برر لماذا المعادلة $f(x) + 2 = 0$ تقبل ثلاثة حلول على الأقل في IR

الحـل ــ 38

المعادلة $f(x) + 2 = 0$ تكافئ $f(x) = -2$ و حسب جدول تغيرات الدالة f على IR لدينا :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	↗	$\frac{13}{6}$	↘	$-\frac{7}{3}$	↗	$+\infty$
$f(x) = -2$							

لما $x \in]-\infty ; -1]$ فإن $f(x) \in]-\infty ; 13/6]$

لما $x \in [-1 ; 2]$ فإن $f(x) \in [-7/3 ; 13/6]$

لما $x \in [2 ; +\infty[$ فإن $f(x) \in [-7/3 ; +\infty[$

بما أن f مستمرة على IR و العدد 2 - هو عنصر من المجالات $]-\infty ; 13/6]$ ؛ $[-7/3 ; 13/6]$ و $[-7/3 ; +\infty[$ فإن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = -2$ تقبل حلا على الأقل في كل مجال من المجالات $]-\infty ; -1]$ ؛ $[-1 ; 2]$ ؛ $[2 ; +\infty[$ أي المعادلة $f(x) = -2$ تقبل على الأقل ثلاثة حلول في IR منه المعادلة $f(x) + 2 = 0$ تقبل على الأقل ثلاثة حلول في IR

التمرين ــ 39

f دالة معرفة على المجال $[-1 ; 2]$ بـ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1 ــ أحسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

2 ــ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في $[1 ; 2]$

الحـل ــ 39

1 ــ $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة f على $[-1 ; 2]$

x	-1		0		1		2
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	-6	↗	-1	↘	-2	↗	3

$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 1 = -2 - 3 - 1 = -6$

$f(0) = -1$

$f(1) = 2(1) - 3(1) - 1 = -2$

$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 1 = 16 - 12 - 1 = 3$

2 ــ من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أنه لما $x \in [1 ; 2]$ فإن $f(x) \in [-2 ; 3]$

بما أن العدد 0 عنصر من المجال $[-2 ; 3]$ و f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[1 ; 2]$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1 < \alpha < 2$

التمرين ــ 40

f دالة معرفة على المجال $[0 ; \pi]$ بـ $f(x) = \cos^3 x - 3\cos x + 2$

بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0 ; \pi]$ حيث $f(\alpha) = \sqrt{2}$

الحـل ــ 40

لندرس تغيرات الدالة f على $[0 ; \pi]$

f قابلة للإشتقاق على $[0 ; \pi]$ و دالتها المشتقة :

$f'(x) = 3(-\sin x)(\cos^2 x) - 3(-\sin x)$

$= -3\sin x(\cos^2 x - 1)$

$= -3\sin x(-\sin^2 x)$

$= 3\sin x \times \sin^2 x$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sin x$ أي موجب تماما لأن $\sin x$ موجب على المجال $]0 ; \pi[$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	0		π
f '(x)		+	
f(x)	0	↗	4
		$\sqrt{2}$	

$f(0) = \cos^3(0) - 3\cos(0) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$

$f(\pi) = \cos^3(\pi) - 3\cos(\pi) + 2 = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = -1 + 5 = 4$

نتيجة :
- f مستمرة و متزايدة تماما على $[0 ; \pi]$
- لما $x \in [0 ; \pi]$ فإن $f(x) \in [0 ; 4]$
- العدد $\sqrt{2}$ عنصر من المجال $[0 ; 4]$

إذن المعادلة $f(x) = \sqrt{2}$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]0 ; \pi[$ أي يوجد $\alpha \in]0 ; \pi[$ حيث $f(\alpha) = \sqrt{2}$

التمرين ــ 41

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f .

2 ــ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على كل من المجالات $[-1 ; 0]$ ؛ $[0 ; 1]$ ؛ $[2 ; 3]$

الحـــل ــ 41

1 ــ f معرفة و قابلة للإشتقاق على IR .

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$$

$f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(2 - x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f '(x)		−	0	+	0	−	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f '(x)		−	0	+	0	−	
f(x)	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

$f(0) = -1$

$f(2) = -(2)^3 + 3(2)^2 - 1 = -8 + 12 - 1 = 3$

لنحسب f(-1) و f(1) و f(3) كما يلي :

$f(-1) = -(-1)^3 + 3(-1)^2 - 1 = 1 + 3 - 1 = 3$

$f(1) = -(1) + 3(1) - 1 = 1$

$f(3) = -(3)^3 + 3(3)^2 - 1 = -1$

نتائج :

(1)
- f مستمرة على $[-1 ; 0]$
- $f(-1) \times f(0) < 0$
- f متناقصة تماما على $[-1 ; 0]$

إذن : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على $[-1 ; 0]$

(2)
- f مستمرة على $[0 ; 1]$
- $f(0) \times f(1) < 0$
- f متزايدة تماما على $[0 ; 1]$

إذن : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على $[0 ; 1]$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

(3) $\left.\begin{array}{l} f \text{ مستمرة على } [2\,;\,3] \\ f(2)\times f(3)<0 \\ f \text{ متناقصة تماما على } [2\,;\,3] \end{array}\right\}$ إذن : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على $[2\,;\,3]$

التمرين ــ 42

f دالة معرفة على المجال $[0\,;\,\pi]$ بـــ $f(x)=2+\frac{1}{2}\sin x$

بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من $[0\,;\,\pi]$ بحيث $f(\alpha)=\alpha$

الحـــل ــ 42

نعرف الدالة g على المجال $[0\,;\,\pi]$ بـــ $g(x)=2+\frac{1}{2}\sin x-x$

لندرس تغيرات الدالة g على المجال $[0\,;\,\pi]$:

$$g(0)=2+\frac{1}{2}\sin(0)-0=2$$

$$g(\pi)=2+\frac{1}{2}\sin(\pi)-\pi=2-\pi$$

$$g'(x)=\frac{1}{2}\cos x-1$$

إشارة $g'(x)$:

$-1\le\cos x\le 1$ إذن : $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\cos x\le\frac{1}{2}$

إذن : $-\frac{1}{2}-1\le\frac{1}{2}\cos x-1\le\frac{1}{2}-1$

أي $-3/2\le g'(x)\le -1/2$

منه : $g'(x)<0$

إذن : جدول تغيرات الدالة g على المجال $[0\,;\,\pi]$:

x	0		π
g'(x)		−	
g(x)	2	↘	$2-\pi$

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن :

$\left.\begin{array}{l} g \text{ مستمرة على } [0\,;\,\pi] \\ g(0)\times g(\pi)<0 \\ g \text{ متناقصة تماما على } [0\,;\,\pi] \end{array}\right\}$

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0\,;\,\pi]$ حيث $g(\alpha)=0$

أي : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0\,;\,\pi]$ حيث $2+\frac{1}{2}\sin\alpha-\alpha=0$

أي : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0\,;\,\pi]$ حيث $2+\frac{1}{2}\sin\alpha=\alpha$

أي : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0\,;\,\pi]$ حيث $f(\alpha)=\alpha$ و هو المطلوب .

التمرين ــ 43

f دالة معرفة على $[0\,;+\infty[$ بـــ $f(x)=\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)^2$

1 ــ بين أن f متناقصة تماما على المجال $D=]0\,;2[$

لتكن g دالة معرفة على D بـــ $g(x)=f(x)-x$

2 ــ بين أن g متناقصة تماما على D .

3 ــ أحسب $g(0)$ و $g(2)$ ثم إستنتج أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في المجال D .

الحـــل ــ 43

1 ــ f قابلة للإشتقاق على المجال $]0\,;2[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x)=2\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)$$

إذن : $f'(x)$ من إشارة $\sqrt{x}-\sqrt{2}$

لكن : $0<x<2$ إذن : $0<\sqrt{x}<\sqrt{2}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

منه : $0 - \sqrt{2} < \sqrt{x} - \sqrt{2} < \sqrt{2} - \sqrt{2}$

أي : $-\sqrt{2} < \sqrt{x} - \sqrt{2} < 0$

أي : $f'(x) < 0$

إذن : f متناقصة تماما على المجال $]0 ; 2[$

2 ــ لدينا : f متناقصة تماما على D حسب السؤال (1)

و الدالة $x \mapsto -x$ متناقصة تماما على المجال D

إذن : الدالة g متناقصة تماما على المجال D لأنها مجموع دالتين متناقصتين .

3 ــ $g(0) = (\sqrt{0} - \sqrt{2})^2 - 0 = 2$

$g(2) = (\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 - 2 = -2$

نتيجة : g مستمرة على $[0 ; 2]$ ، $g(0) \times g(2) < 0$ ، g متناقصة تماما على $]0 ; 2[$

إذن : المعادلة $g(x) = 0$ أي $f(x) - x = 0$ أي $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في المجال D .

التمرين ــ 44

نعتبر الدالتين $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ و $g : x \mapsto -x^3$

بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين للدالتين f و g على الترتيب يتقطعان في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $-7/8 < x_0 < -3/4$

الحـل ــ 44

إذا وجدت نقطة تقاطع بين (C_f) و (C_g) فإن فاصلتها x تحقق المعادلة $f(x) = g(x)$ أي $f(x) - g(x) = 0$

لنعرف الدالة h كمايلي : $h : x \mapsto f(x) - g(x) = \sqrt{x+1} + x^3$

لندرس تغيرات الدالة h على IR :

h معرفة على $]-1 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

h قابلة للإشتقاق على $]-1 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة كما يلي :

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + 3x^2$$

لدينا : من أجل كل x من $]-1 ; +\infty[$ فإن $3x^2 \geq 0$ و $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$

إذن : $\frac{1}{\sqrt{x+1}} + 3x^2 > 0$ أي $h'(x) > 0$

أي h متزايدة تماما على $]-1 ; +\infty[$

منه جدول تغيرات الدالة h :

x	-1		$+\infty$
h'(x)		+	
h(x)	-1	↗	$+\infty$

$h(-1) = \sqrt{-1+1} + (-1)^3 = -1$

من جدول تغيرات الدالة h نستنتج أن لما $x \in]-1 ; +\infty[$ فإن $h(x) \in [-1 ; +\infty[$

بما أن العدد 0 عنصر من المجال $]-1 ; +\infty[$ و الدالة h مستمرة على المجال $[-1 ; +\infty[$ فإن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل على المجال $]-1 ; +\infty[$ و بما أن h متزايدة تماما فإن هذا الحل وحيد .

من جهة أخرى :

$$h\left(\frac{-7}{8}\right) = \sqrt{\frac{-7}{8} + 1} + \left(\frac{-7}{8}\right)^3 = \sqrt{\frac{1}{8}} - \left(\frac{7}{8}\right)^3 < 0$$

قلم الجزائر

WWW.DZPEN.COM

$$h\left(\frac{-3}{4}\right) = \sqrt{\frac{-3}{4} + 1} + \left(\frac{-3}{4}\right)^3 = \frac{1}{2} - \frac{27}{64} = \frac{32-27}{64} = \frac{5}{64}$$

إذن $\left\{\begin{array}{l} h \text{ مستمرة على } [-7/8 ; -3/4] \\ h(-7/8) \times h(-3/4) < 0 \end{array}\right.$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا على المجال $[-7/8 ; -3/4]$

أي يوجد $\alpha \in [-7/8 ; -3/4]$ حيث $h(\alpha) = 0$ أي $f(\alpha) = g(\alpha)$

منه النقطة ذات الفاصلة α مشتركة بين المنحنين (C_f) و (C_g) و هي وحيدة .

التمرين ــ 45

f دالة عددية معرفة على IR بـ $f(x) = a\,x + b + \frac{c}{x+d}$ حيث a ; b ; c ; d أعداد حقيقية. نسمي (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم .

عين الأعداد a ; b ; c ; d التي تحقق الشروط التالية في آن واحد :

- ✓ **المنحنى (C) يشمل النقطة A(0 ; 4)**
- ✓ **المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا عند $+\infty$ و $-\infty$ معادلته $y = 2x + 3$**
- ✓ **المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x = 1$**

الحـل ــ 45

تكون النقطة A(0 ; 4) تنتمي إلى المنحنى (C) إذا وفقط إذا كان

$$f(0) = 4 \quad \text{أي :} \quad a(0) + b + \frac{c}{0+d} = 4$$

$$b + \frac{c}{d} = 4 \quad \ldots\ldots (1) \quad \text{أي :} \quad d \neq 0 \text{ حيث}$$

يكون المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب للمنحنى (C) إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$ أي $\lim\limits_{x \to 1} x + d = 0$

أي $d = -1$

يكون المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 3$ مقاربا مائلا للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$ إذا كان $a\,x + b = 2x + 3$ من أجل كل x من IR . أي $a = 2$ و $b = 3$

إذن المساواة (1) تصبح : $3 + \frac{c}{-1} = 4$ أي : $3 - c = 4$

أي : $c = -1$

خلاصة : $a = 2 ; b = 3 ; c = -1 ; d = -1$ إذن : $f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{x-1}$

التمرين ــ 46

f دالة معرفة على $R - \{-1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{(x+1)^2}$

1 ــ عين الأعداد الحقيقية a ; b ; c ; d بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f(x) = a\,x + b + \frac{c\,x + d}{(x+1)^2}$

2 ــ إستنتج أن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ و $-\infty$ يطلب تعيين معادلته

3 ــ حدد وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

الحـل ــ 46

1 ــ $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{(x+1)^2}$ إذن $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{x^2 + 2x + 1}$

لنجري القسمة الإقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 + 6x + 3 & x^2 + 2x + 1 \\ \hline x^3 + 2x^2 + x & x + 1 \\ \hline x^2 + 5x + 3 & \\ x^2 + 2x + 1 & \\ \hline 3x + 2 & \end{array}$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

نتيجة :

$$x^3 + 3x^2 + 6x + 3 = (x+1)(x^2 + 2x + 1) + (3x + 2)$$

منه :
$$\frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{x^2 + 2x + 1} = x + 1 + \frac{3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$$

أي :
$$f(x) = x + 1 + \frac{3x + 2}{(x+1)^2}$$ و هو المطلوب .

إذن : $a = 1$; $b = 1$; $c = 3$; $d = 2$

2 ــ لدينا :
$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \to \infty} \frac{3x + 2}{(x+1)^2}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3x}{x^2}$$
$$= 0$$ إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مقاربا مائلا للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$

3 ــ لدينا
$$f(x) - (x+1) = \frac{3x + 2}{(x+1)^2}$$

إذن إ شارة $f(x) - (x+1)$ من نفس إ شارة $3x + 2$ لأن $(x+1)^2 > 0$

x	$-\infty$		$-2/3$		$+\infty$
$3x + 2$		$-$	0	$+$	

خلاصة :

x	$-\infty$		$-2/3$		$+\infty$
$f(x) - (x+1)$		$-$	0	$+$	

لما $x \in]-\infty ; -2/3[$: $f(x) - (x+1) < 0$ إذن : (C) تحت (Δ)
لما $x \in \{-2/3\}$: $f(x) - (x+1) = 0$ إذن : (C) يقطع (Δ)
لما $x \in]-2/3 ; +\infty[$: $f(x) - (x+1) > 0$ إذن : (C) فوق (Δ)

التمرين ــ 47

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ و (C) منحناها في معلم .

1 ــ أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x+2)]$

2 ــ إستنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحنى (C) عند $+\infty$

3 ــ أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

4 ــ عين العددان الحقيقيان α و β حيث $\alpha = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\beta = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - \alpha x]$

5 ــ إستنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ') عند $-\infty$ يطلب معادلته .

الحـل ــ 47

1 ــ لنتحقق أن f معرفة على IR :

f معرفة إذا كان $x^2 + 4x + 5 \geq 0$

$\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$ إذن : من أجل كل $x \in R$ فإن $x^2 + 4x + 5 > 0$

منه : f معرفة على IR .

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 5} - (x+2)$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2+4x+5} - (x-2)\right] \times \frac{\sqrt{x^2+4x+5} + (x+2)}{\sqrt{x^2+4x+5} + (x+2)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+4x+5-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x+5} + (x+2)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+4x+5-x^2-4x-4}{\sqrt{x^2+4x+5} + x + 2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5} + x + 2}$$

$$= 0$$

2 ـ حسب السؤال (1) : $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x+2)] = 0$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$

3 ـ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2} = +\infty$

4 ـ $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{x}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{x}$$

$\sqrt{x^2} = |x|$ لأن $= \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}$

$|x| = -x$ لأن لما x يؤول إلى $-\infty$ فإن $= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}$$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x^2} = 0$ لأن $= -1$

نتيجة : $\alpha = -1$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - \alpha x] = \lim_{x \to -\infty} f(x) + x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+4x+5} + x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[\sqrt{x^2+4x+5} + x\right] \times \frac{\sqrt{x^2+4x+5} - x}{\sqrt{x^2+4x+5} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+4x+5-x^2}{\sqrt{x^2+4x+5} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)} - x}$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(4 + \frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} - x}$$

$|x| = -x$ لأن في جوار $-\infty$ $= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(4 + \frac{5}{x}\right)}{-x\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} - x}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(4 + \frac{5}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4 + \frac{5}{x}}{-\left(\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + 1\right)}$$

لأن $\lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x} = 0$ $= \frac{4}{-2}$

$= -2$

نتيجة : $\beta = -2$

5 ــ لدينا : $\lim_{x \to -\infty} f(x) + x = -2$

إذن : $\lim_{x \to -\infty} f(x) + x + 2 = 0$

أي : $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-x - 2)] = 0$

منه : المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = -x - 2$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $-\infty$

التمرين ــ 48

f و g دالتان معرفتان على الترتيب على IR و IR^+ كما يلي :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$$

1 ــ أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

2 ــ أحسب $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right]$ و $\lim_{x \to +\infty} \left[g(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right]$

ماذا تستنتج بالنسبة للسلوك التقاربي للدالتين f و g عند $+\infty$.

الحـل ــ 48

1 ــ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2} = +\infty$

2 ــ $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + x + 1} - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right]$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + x + 1} - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right] \times \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + \left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

قلم الجزائر

WWW.DZPEN.COM

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2 - x - \frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3/4}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[g(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 4x} - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 4x} - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right] \times \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + \left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + 4x} + \left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4x - \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x - \frac{1}{4}}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{4}{x}\right)} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(3 - \frac{1}{4x}\right)}{x\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(3 - \frac{1}{4x}\right)}{x\left(\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1 + \frac{1}{2x}\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{4x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2x} = 0 \end{array}\right\} \text{ لأن } = \frac{3}{\sqrt{1} + 1} = \frac{3}{2}$$

نتيجة :

✓ عند $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right] = 0$ إذن منحنى الدالة f عند $+\infty$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = x + \frac{1}{2}$ أي في جوار $+\infty$ الدالة f تسلك سلوك دالة تألفية من الشكل $f(x) = x + \frac{1}{2}$

✓ عند $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[g(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right] \neq 0$ إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x + \frac{1}{2}$ ليس مقارب لمنحنى الدالةg عند $+\infty$ و للبحث عن سلوك تقاربي للدالة g عند $+\infty$ لدينا :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

أي : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} = 0$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

أي : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - \left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = 0$

أي : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - (x + 2) = 0$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب لمنحنى الدالة g عند $+\infty$

منه الدالة g تسلك سلوك دالة تألفية من الشكل $g(x) = x + 2$ عند $+\infty$

التمرين ــ 49

f دالة معرفة على $[0 ; +\infty[$ بـــ $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$

نسمي (C) منحناها البياني في مستوي منسوب إلى معلم .

1 ــ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 3$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.

2 ــ أدرس الوضعية النسبية لـــ (C) و (Δ)

الحـــل ــ 49

1 ــ $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x + 3)] = \lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} - (2x + 3)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2)\right] \times \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + (x + 2)}{\sqrt{x^2 + 4x} + (x + 2)}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4x - (x^2 + 4x + 4)}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2}$

$= 0$

نتيجة : المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 3$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$

2 ــ لندرس إشارة الفرق : $f(x) - (2x + 3)$ على $[0 ; +\infty[$:

$f(x) - (2x + 3) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} - (2x + 3)$

$= \sqrt{x^2 + 4x} - x - 2$

$= \sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2)$

لنبحث عن قيم x من المجال $[0 ; +\infty[$ حتى يكون $f(x) - (2x + 3) \geq 0$

$f(x) - (2x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2) \geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x} \geq (x + 2) \ldots (1)$

بما أن $\sqrt{x^2 + 4x} \geq 0$ و $x + 2 > 0$ لأن $x \in [0 ; +\infty[$

فإن المتباينة (1) تكافئ $\left(\sqrt{x^2 + 4x}\right)^2 \geq (x + 2)^2$

تكافئ $x^2 + 4x \geq x^2 + 4x + 4$

تكافئ $4 \geq 0$ و هذا مستحيل

نتيجة : المتراجحة $f(x) - (2x + 3) \geq 0$ لا تقبل حلول على $[0 ; +\infty[$

إذن : من أجل كل x من المجال $[0 ; +\infty[$ فإن $f(x) - (2x + 3) < 0$

أي : المنحنى (C) دائما تحت المستقيم (Δ) من أجل $x \in [0 ; +\infty[$

التمرين ــ 50

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = -\frac{1}{2}x + \sqrt{|x^2 - 1|}$

نسمي (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

1 ــ عين D مجموعة تعريف الدالة f

2 ــ أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3 ــ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x\right]$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) + \frac{3}{2}x\right]$

4 ــ إستنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') . يطلب تعيين معادلتيهما

5 ــ حدد وضعية (C) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ')

الحـــل ــ 50

1 ــ من أجل كل $x \in R$ فإن $|x^2 - 1| \geq 0$

إذن : f معرفة على IR أي $D = R$

2 ــ لنكتب f(x) دون القيمة المطلقة :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		+	0	−	0	+	

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2 - 1} & : x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[\\ -\frac{1}{2}x + \sqrt{1 - x^2} & : x \in [-1 ; 1] \end{cases}$$

إذن :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \quad \text{لأن } |x| = x \text{ في جوار } +\infty$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(-\frac{1}{2} + 1\right) \quad \text{لأن } \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2}x - x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \quad \text{لأن } |x| = -x \text{ في جوار } -\infty$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -x\left(\frac{1}{2} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= +\infty \quad \text{لأن } \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

3 ــ

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) + \frac{3}{2}x\right] = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2 - 1} + \frac{3}{2}x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 1} + x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} + x\right) \times \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{\sqrt{x^2 - 1} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x}$$

$$= 0 \quad \text{لأن } \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - x\right) \times \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$= 0$$

4 ــ نتائج :

❖ $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right)\right] = 0$ إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -\frac{3}{2}x$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $-\infty$

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x\right] = 0$ إذن المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$

5 ــ لندرس إشارة $f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right)$ على IR

$$f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x + \sqrt{|x^2-1|} + \frac{3}{2}x$$

$$= \sqrt{|x^2-1|} + x$$

منه : $f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x^2-1|} + x \geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{|x^2-1|} \geq -x \quad \ldots\ldots (1)$

إذن : نميز حالتين :

الحالة (1) $x > 0$ إذن المتراجحة (1) دائما محققة

الحالة (2) $x \leq 0$ إذن المتراجحة (1) تكافئ $\left(\sqrt{|x^2-1|}\right)^2 \geq (-x)^2$

تكافئ $|x^2-1| \geq x^2$

تكافئ
$\begin{cases} x \leq -1 \text{ و } x^2-1 \geq x^2 \\ \text{أو} \\ -1 \leq x \leq 0 \text{ و } 1-x^2 \geq x^2 \end{cases}$

تكافئ
$\begin{cases} x \leq -1 \text{ و } -1 \geq 0 \text{ مستحيل} \\ \text{أو} \\ -1 \leq x \leq 0 \text{ و } 2x^2 \leq 1 \end{cases}$

تكافئ $-1 \leq x \leq 0$ و $x^2 \leq 1/2$

تكافئ $-1 \leq x \leq 0$ و $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

تكافئ $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 0$

خلاصة : لما $x > 0$: $f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right) > 0$ إذن (C) فوق (Δ)

لما $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 0$: $f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right) > 0$ إذن (C) فوق (Δ)

لما $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$: $f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right) = 0$ إذن (C) يقطع (Δ)

لما $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$: $f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right) < 0$ إذن (C) تحت (Δ)

لندرس إشارة $f(x) - \frac{1}{2}x$ على IR

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$f(x) - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}x + \sqrt{|x^2 - 1|} - \frac{1}{2}x$$

$$= \sqrt{|x^2 - 1|} - x$$

إذن : $f(x) - \frac{1}{2}x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x^2 - 1|} - x \geq 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{|x^2 - 1|} \geq x \quad \ldots\ldots (1)$$

نميز حالتين :

الحالة (1) $x < 0$ إذن المتراجحة (1) دائما محققة

الحالة (2) $x \geq 0$ إذن المتراجحة (1) تكافئ $\left(\sqrt{|x^2 - 1|}\right)^2 \geq x^2$

تكافئ $|x^2 - 1| \geq x^2$

تكافئ $\begin{cases} x \geq 1 \quad و \quad x^2 - 1 \geq x^2 \\ \text{أو} \\ 0 \leq x \leq 1 \quad و \quad 1 - x^2 \geq x^2 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} -1 \geq 0 \quad و \quad x \geq 1 \quad \text{(مستحيل)} \\ \text{أو} \\ 0 \leq x \leq 1 \quad و \quad x^2 \leq 1/2 \end{cases}$

تكافئ $0 \leq x \leq 1 \quad و \quad \frac{-1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

تكافئ $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

خلاصة : لما $x < 0$: $f(x) - \frac{1}{2}x > 0$ إذن المنحنى (C) فوق المستقيم (Δ')

لما $0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}}$: $f(x) - \frac{1}{2}x > 0$ إذن المنحنى (C) فوق المستقيم (Δ')

لما $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$: $f(x) - \frac{1}{2}x = 0$ إذن المنحنى (C) يقطع المستقيم (Δ')

لما $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$: $f(x) - \frac{1}{2}x < 0$ إذن المنحنى (C) تحت المستقيم (Δ')

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمرين ــ 51

f دالة معرفة على المجال $]-2\,;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+1}{x+2}$

نسمي (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم .

1 ــ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x^2]$

ليكن (P) المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto x^2$ في نفس المعلم

2 ــ إشرح لماذا المنحنيان (C) و (P) يتقاربان عندما يؤول x إلى $+\infty$

الحـل ــ 51

1 ــ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x^2$$
$$=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x^2]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2+1}{x+2}-x^2$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2+1-x^2(x+2)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$$
$$=0$$

2 ــ بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x^2]=0$ فإن كلما إقتربت الفاصلة x من $+\infty$ إقترب العدد f(x) من x^2 أي نقط المنحنى (C) متقاربة من نقط المنحنى (P) و عليه يمكن القول أن المنحنيان (C) و (P) متقاربان عند $+\infty$

التمرين ــ 52

f دالة معرفة على $]1\,;+\infty[$ بـ $f(x)=3x^2-\dfrac{2}{x-1}$

نسمي (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم .

1 ــ أبحث عن منحنى (P) مقارب لمنحنى (C) عند $+\infty$ ثم حدد الوضعية النسبية لـ (C) و (P)

2 ــ هل المنحنيان (C) و (P) متقاربان عند $-\infty$ ؟

الحـل ــ 52

1 ــ بما أن :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 3x^2-\frac{2}{x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ لأن $=+\infty$

و

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(3x^2)]=\lim_{x\to+\infty}3x^2-\frac{2}{x-1}-3x^2$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{x-1}$$
$$=0$$

فإن المنحنى (C) يقترب من المنحنى (P) ذو المعادلة $y=3x^2$ عند $+\infty$

وضعية (P) بالنسبة لـ (C)

لندرس إشارة $f(x)-3x^2$ على IR :

$$f(x)-3x^2=\frac{-2}{x-1}=\frac{2}{1-x}$$

خلاصة : لما $x<1$: إذن $f(x)-3x^2>0$ (C) فوق (P)

لما $x>1$: إذن $f(x)-3x^2<0$ (C) تحت (P)

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2 ــ لدينا f معرفة على المجال $]-\infty ; 1[$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

و أيضا $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - 3x^2] = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2}{x-1} = 0$

إذن : فعلا المنحنيان (P) و (C) متقاربان أيضا عند $-\infty$.

التمرين ــ 53

f دالة معرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}$ و (C) منحناها .

أبحث عن منحنى (P) لدالة مرجعية مقارب لمنحنى (C) عند $-\infty$ و عند $+\infty$ ثم أدرس الوضعية النسبية لـ (C) و(P)

الحـل ــ 53

$$\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - \frac{1}{x}\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \quad (\infty \text{ يعني } +\infty \text{ أو } -\infty)$$

إذن : المنحنى (P) الممثل للدالة المرجعية $x \mapsto 1/x$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$

الوضعية النسبية : $f(x) - \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+1}$ من إشارة x كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) - \frac{1}{x}$		−	‖	+	

خلاصة : لما $x < 0$: $f(x) - \frac{1}{x} < 0$ إذن : (C) تحت (P)

لما $x > 0$: $f(x) - \frac{1}{x} > 0$ إذن : (C) فوق (P) .

التمرين ــ 54

f دالة معرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x^2+1}{x\sqrt{x}}$ و (C) منحناها .

أبحث عن منحنى (P) لدالة مرجعية مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$ ثم حدد الوضعية النسبية لـ (C) و (P)

الحـل ــ 54

بما أن :

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \sqrt{x}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x\sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1-x\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$= 0$$

فإن المنحنى (P) الممثل للدالة المرجعية $x \mapsto \sqrt{x}$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

الوضعية النسبية : $f(x) - \sqrt{x} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

بما أن $x > 0$ فإن $\frac{1}{x\sqrt{x}} > 0$ أي $f(x) - \sqrt{x} > 0$

منه : المنحنى (C) فوق المنحنى (P) من أجل $x > 0$

التمرين ــ 55

f دالة معرفة على المجال $\mathbb{R} - \{-1 ; 4\}$ بـ $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2-3x-4}$

1 ــ أوجد الأعداد الحقيقية a ; b ; c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{-1 ; 4\}$

يكون : $f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-4}$

2 ــ أحسب نهايات الدالة f على حدود مجموعة تعريفها .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الحـل ــ 55

1 ــ

$$a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-4}=\frac{a(x+1)(x-4)+b(x-4)+c(x+1)}{(x+1)(x-4)}$$

$$=\frac{a\,x^2-3\,a\,x-4\,a+b\,x-4\,b+c\,x+c}{x^2-3\,x-4}$$

$$=\frac{a\,x^2+(b+c-3\,a)\,x-4\,a-4\,b+c}{x^2-3\,x-4}$$

إذن : يكون $f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-4}$ من أجل كل عدد حقيقي x من $R-\{-1\ ;\ 4\}$ إذا وفقط

إذا كان :
$$\left.\begin{array}{r} a=1 \\ b+c-3\,a=2 \\ -4\,a-4\,b+c=0 \end{array}\right\}$$
أي
$$\left.\begin{array}{r} a=1 \\ (1)\ \ldots..\ b+c=2+3 \\ (2)\ \ldots.\ -4\,b+c=4 \end{array}\right\}$$

بطرح (2) من (1) نحصل على :

$$b+c-(-4\,b+c)=5-4$$

أي :

$$5\,b=1$$

أي :

$$b=1/5$$

منه حسب العلاقة (1)

$$c=5-b=5-\frac{1}{5}=\frac{24}{5}$$

نتيجة :

$$f(x)=1+\frac{1/5}{x+1}+\frac{24/5}{x-4}$$

2 ــ لدينا مجموعة تعريف الدالة f هي : $D=]-\infty\ ;\ -1[\ \cup\ ]-1\ ;\ 4[\ \cup\ ]4\ ;\ +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ 1+\frac{1/5}{x+1}+\frac{24/5}{x-4}=1$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}-1} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}-1}\ 1+\frac{1/5}{x+1}+\frac{24/5}{x-4}$$

$$=\lim_{y\overset{<}{\to}0}\ 1+\frac{1/5}{y}+\frac{24/5}{-1-4}$$

$$=-\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}-1}\ 1+\frac{1/5}{x+1}+\frac{24/5}{x-4}$$

$$=\lim_{y\overset{>}{\to}0}\ 1+\frac{1/5}{y}+\frac{24/5}{-1-4}$$

$$=+\infty$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}4} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}4}\ 1+\frac{1/5}{x+1}+\frac{24/5}{x-4}$$

$$=\lim_{y\overset{<}{\to}0}\ 1+\frac{1/5}{4+1}+\frac{24/5}{y}$$

$$=-\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}4} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}4}\ 1+\frac{1/5}{x+1}+\frac{24/5}{x-4}$$

$$=\lim_{y\overset{>}{\to}0}\ 1+\frac{1/5}{4+1}+\frac{24/5}{y}$$

$$=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ 1+\frac{1/5}{x+1}+\frac{24/5}{x-4}=1$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمرين ــ56

باستعمال تعريف العدد المشتق أحسب النهايات التالية :

1 ــ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

2 ــ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

3 ــ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

4 ــ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$

5 ــ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

6 ــ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

7 ــ $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

الحــل ــ 56

1 ــ نعرف الدالة f : $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$

f معرفة و قابلة للإشتقاق عند 0 و عددها المشتق $f'(0)$ هو كما يلي :

تعريفا :

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

الدالة المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

إذن :

$$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = 1/2$$

نتيجة :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = f'(0) = 1/2$$

2 ــ نفس الدالة f المعرفة في (1) قابلة للإشتقاق عند 3 و عددها المشتق $f'(3)$ هو :

تعريفا :

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3+1}}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

الدالة المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

إذن :

$$f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3+1}} = 1/4$$

نتيجة :

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = f'(3) = 1/4$$

3 ــ نعرف الدالة f : $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$

f معرفة و قابلة للإشتقاق عند 1 و عددها المشتق $f'(1)$ هو كما يلي:

تعريفا :

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{1+1}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1}$$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

إذن : $f'(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

نتيجة : $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1} = f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

4 ــ نعرف الدالة f : $f : x \mapsto x\sqrt{x+1}$

f معرفة و قابلة للإشتقاق عند 3 و عددها المشتق $f'(3)$ هو كما يلي :

تعريفا : $f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3}$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x\sqrt{x+1} - 3\sqrt{3+1}}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x\sqrt{x+1} - 6}{x-3}$$

الدالة المشتقة : $f'(x) = 1 \times \sqrt{x+1} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$

منه : $f'(3) = \frac{3(3)+2}{2\sqrt{3+1}} = 11/4$

نتيجة : $\lim_{x \to 3} \frac{x\sqrt{x+1} - 6}{x-3} = f'(3) = 11/4$

5 ــ نعرف الدالة f : $f : x \mapsto \sin x$

f معرفة و قابلة للإشتقاق عند 0 و عددها المشتق $f'(0)$ هو كما يلي :

تعريفا : $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \cos x$

إذن : $f'(0) = \cos 0 = 1$

نتيجة : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = f'(0) = 1$

6 ــ نعرف الدالة f : $f : x \mapsto 1 - \cos x$

f معرفة و قابلة للإشتقاق عند 0 و عددها المشتق $f'(0)$ هو كما يلي :

تعريفا : $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x) - (1 - \cos 0)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الدالة المشتقة :

$$f'(x) = -(-\sin x) = \sin x$$

منه :

$$f'(0) = \sin(0) = 0$$

نتيجة :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = f'(0) = 0$$

7 ــ نعرف الدالة f : $f : x \mapsto \cos x$

f معرفة و قابلة للإشتقاق عند $\pi/2$ و عددها المشتق $f'(\pi/2)$ هو كما يلي :

تعريفا :

$$f'(\pi/2) = \lim_{x \to \pi/2} \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

الدالة المشتقة :

$$f'(x) = -\sin x$$

إذن :

$$f'(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1$$

نتيجة :

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1$$

التمرين ــ 57

باستعمال تعريف العدد المشتق عند $\pi/3$ لكل من الدالتين $f : x \mapsto \sin 3x$; $g : x \mapsto 2\cos x - 1$

أحسب $\lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin 3x}{2\cos x - 1}$

الحـل ــ 57

لاحظ أن :

$$\lim_{x \to \pi/3} \sin 3x = \sin\left[3 \times \frac{\pi}{3}\right] = 0$$

و

$$\lim_{x \to \pi/3} 2\cos x - 1 = 2\cos\frac{\pi}{3} - 1 = 0$$

إذن : $\lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin 3x}{2\cos x - 1}$ هي حالة عدم التعيين

إذن لنحسب هذه النهاية باستعمال العدد المشتق للدوال f و g عند $\pi/3$ كما يلي :

تعريفا لدينا :

$$f'(\pi/3) = \lim_{x \to \pi/3} \frac{f(x) - f(\pi/3)}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$= \lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin 3x - \sin 3 \times \frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$= \lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin 3x}{x - \frac{\pi}{3}}$$

الدالة المشتقة :

$$f'(x) = 3\cos 3x$$

إذن :

$$f'(\pi/3) = 3\cos 3 \times \frac{\pi}{3} = 3\cos\pi = -3$$

نتيجة (1) :

$$\lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin 3x}{x - \frac{\pi}{3}} = f'(\pi/3) = -3$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تعريفا لدينا :

$$g'(\pi/3) = \lim_{x \to \pi/3} \frac{g(x) - g(\pi/3)}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$= \lim_{x \to \pi/3} \frac{(2\cos x - 1) - (2\cos\frac{\pi}{3} - 1)}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$= \lim_{x \to \pi/3} \frac{2\cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}}$$

الدالة المشتقة :

$$g'(x) = -2\sin x$$

إذن :

$$g'(\pi/3) = -2\sin\frac{\pi}{3} = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$$

نتيجة (2) :

$$\lim_{x \to \pi/3} \frac{2\cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}} = g'(\pi/3) = -\sqrt{3}$$

نرجع الآن إلى السؤال :

$$\lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin 3x}{2\cos x - 1} = \lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin 3x}{2\cos x - 1} \times \frac{\frac{1}{x - \frac{\pi}{3}}}{\frac{1}{x - \frac{\pi}{3}}}$$

$$= \lim_{x \to \pi/3} \frac{\frac{\sin 3x}{x - \frac{\pi}{3}}}{\frac{2\cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}}}$$

$$= \frac{f'(\pi/3)}{g'(\pi/3)}$$ حسب النتيجة (1) و النتيجة (2)

$$= \frac{-3}{-\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{3}$$ و هو المطلوب .

ملاحظة هامة : الدالتين f و g قابلتان للإشتقاق عند $\pi/3$ لذلك هذه النتيجة صحيحة و إلا فلا يمكن حساب النهاية بهذه الطريقة

التمرين – 58

أثبت أن $\lim_{x \geq 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos x}} = 2\sqrt{2}$

الحـل – 58

$$\lim_{x \geq 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \geq 0} \frac{2\sin x \cos x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$ لأن $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$$= \lim_{x \geq 0} \frac{2\sqrt{1 - \cos^2 x} \cdot \cos x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$ لأن لما $x \geq 0$: $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

$$= \lim_{x \geq 0} \frac{2\sqrt{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \cdot \cos x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

$$= \lim_{x \geq 0} \frac{2\sqrt{1 - \cos x} \cdot \sqrt{1 + \cos x} \cdot \cos x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

$$= \lim_{x \geq 0} 2\sqrt{1 + \cos x} \cdot \cos x$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$= 2\sqrt{1+\cos 0}\ .\ \cos 0$

$= 2\sqrt{2}$ و هو المطلوب

التمرين ــ 59

أحسب النهايات التالية :

1 ــ $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

2 ــ $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$

3 ــ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi x+3}{1+x}\right)$

4 ــ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi x+1}{2x+1}\right)$

5 ــ $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{\tan x}{\tan^2 x+1}$

الحـل ــ 59

1 ــ $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y \to 0} \cos y = 1$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

2 ــ $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ لأن $\lim\limits_{x \to \pi} x-\pi = 0$

3 ــ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi x+3}{1+x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sin \pi = 0$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\pi x+3}{1+x} = \pi$

4 ــ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi x+1}{2x+1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sin\frac{\pi}{2} = 1$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\pi x+1}{2x+1} = \frac{\pi}{2}$

5 ــ $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{\tan x}{\tan^2 x+1} = \lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{\tan x}{\tan x\left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)}$

$= \lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{1}{\tan x + \frac{1}{\tan x}}$

$= \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{1}{y+\frac{1}{y}}$ لأن $\lim\limits_{x \to \pi/2} \tan x = +\infty$

$= \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{1}{y}$ لأن $\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{1}{y} = 0$

$= 0$

التمرين ــ 60

أحسب $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x}$ علما أن $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

الحـل ــ 60

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x} \times \frac{3}{3}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{3}{2} \times \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ لأن $= \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$

التمرين ــ 61

f دالة معرفة على $]-1\ ;\ +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}}$

1 ــ بين أن إذا كان $x > 1$ فإن $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$

2 ــ إستنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الحـل ــ 61

1 ــ لدينا $x > 1$ إذن : $x + x > 1 + x$ (نضيف x إلى الطرفين)

أي : $2x > x + 1$

منه : $\sqrt{2x} > \sqrt{x+1}$

أي : $\frac{1}{\sqrt{2x}} < \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

أو : $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$ و هو المطلوب

2 ــ لدينا $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$ من أجل $x > 1$

بضرب هذه المتباينة في العدد الموجب $2x$ نحصل على :

$\frac{2x}{\sqrt{x+1}} > \frac{2x}{\sqrt{2x}}$ من أجل $x > 1$ أي $x >> 0$

أي $f(x) > \sqrt{2x}$ من أجل $x > 1$

نتيجة : $\left.\begin{array}{l} x > 1 \text{ لما } f(x) > \sqrt{2x} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x} = +\infty \end{array}\right\}$

إذن : حسب مبرهنة الحصر فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

التمرين ــ 62

1 ــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $-2 \leq \sin x + \cos x \leq 2$

2 ــ إستنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^2}$

الحـل ــ 62

1 ــ من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $-1 \leq \sin x \leq 1$ ..... (1)

و : $-1 \leq \cos x \leq 1$ ..... (2)

إذن : $-1-1 \leq \sin x + \cos x \leq 1+1$

أي : $-2 \leq \sin x + \cos x \leq 2$ ..... (3)

2 ــ من أجل x يؤول إلى $+\infty$ فإن $\frac{1}{x^2} > 0$ إذن : نضرب أطراف المتباينة (3) في $\frac{1}{x^2}$ فنحصل على

$$\frac{-2}{x^2} \leq \frac{\sin x + \cos x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$$

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{x^2} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^2} = 0$

التمرين ــ 63

1 ــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$: $1/2 \leq \frac{x}{x+1} < 1$

2 ــ إستنتج النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$

الحـل ــ 63

1 ــ $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} = \frac{2x - x - 1}{2(x+1)}$

$= \frac{x-1}{2(x+1)}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

بما أن $x \geq 1$ فإن $\left\{\begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{array}\right.$

منه : $\frac{x-1}{2(x+1)} \geq 0$ أي $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \geq 0$ أي $\frac{x}{x+1} \geq \frac{1}{2}$ ..... (1)

من جهة أخرى : $\frac{x}{x+1} - 1 = \frac{x-x-1}{x+1} = \frac{-1}{x+1}$

بما أن $x \geq 1$ فإن $x+1 > 0$ أي $\frac{-1}{x+1} < 0$ أي $\frac{x}{x+1} < 1$ .....(2)

من (1) و (2) فإن $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} < 1$

2 ـ لدينا $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} < 1$ إذن : $\frac{1}{2}\sqrt{x} \leq \frac{x\sqrt{x}}{x+1} < \sqrt{x}$ من أجل $x > 0$

لكن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\sqrt{x} = +\infty$ إذن : حسب مبرهنة الحصر $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1} = +\infty$

أيضا $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} < 1$ إذن : $\frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ من أجل $x > 0$

لكن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ إذن : حسب مبرهنة الحصر $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} = 0$

التمرين ـ 64

أدرس إستمرارية الدالة f عند 0 في كل حالة ممايلي :

1 ـ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

2 ـ $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \times \sqrt{|x|} & : x \neq 0 \\ 2 & : x = 0 \end{cases}$

الحـل ـ 64

1 ـ

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \times \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{0+1}+1}$$

$$= 0$$

بما أن $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right.$

فإن $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

أي الدالة f مستمرة عند 0 .

2 ـ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \times \sqrt{|x|}$

نميز حالتين :

الأولى : $\lim\limits_{x \geq 0} f(x) = \lim\limits_{x \geq 0} \frac{x}{x}\sqrt{x} = \lim\limits_{x \geq 0} \sqrt{x} = 0$

الثانية : $\lim\limits_{x \leq 0} f(x) = \lim\limits_{x \leq 0} \frac{-x}{x}\sqrt{-x} = \lim\limits_{x \leq 0} -\sqrt{-x} = 0$

منه : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

لكن $f(0) = 2$

أي $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$

منه : الدالة f ليست مستمرة عند 0 .

التمرين ـ 65

f دالة معرفة على IR بـ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 2 - \sqrt{4 + x^2}}{x} & : x \neq 0 \\ \alpha & : x = 0 \end{cases}$$

عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون الدالة f مستمرة عند 0 .

الحـل ـ 65

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x + 2 - \sqrt{4 + x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + 2 - \sqrt{4 + x^2}}{x} \times \frac{x + 2 + \sqrt{4 + x^2}}{x + 2 + \sqrt{4 + x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x + 2)^2 - (4 + x^2)}{x\left(x + 2 + \sqrt{x^2 + 4}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 4x + 4 - 4 - x^2}{x\left(x + 2 + \sqrt{x^2 + 4}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4x}{x\left(x + 2 + \sqrt{x^2 + 4}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4}{x + 2 + \sqrt{x^2 + 4}}$$

$$= \frac{4}{0 + 2 + \sqrt{0 + 4}}$$

$$= 1$$

نتيجة : تكون f مستمرة عند 0 إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ أي $f(0) = 1$

منه : $\alpha = 1$ و هو المطلوب

التمرين ـ 66

f دالة معرفة على IR بـ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - a & : x > 2 \\ \dfrac{2x^2 - a + b}{x} & : x \leq 2 \end{cases}$$

عين علاقة بين العددان الحقيقيان a و b حتى تكون الدالة f مستمرة عند 2 .

الحـل ـ 66

لدينا $f(2) = \frac{2(2)^2 - a + b}{2} = \frac{8 - a + b}{2}$

و $\lim\limits_{x \leq 2} f(x) = \lim\limits_{x \leq 2} \frac{2x^2 - a + b}{x} = \frac{2(2)^2 - a + b}{2} = \frac{8 - a + b}{2}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} x^2 + 2x - a = (2)^2 + 2(2) - a = 8 - a$ و

نتيجة : تكون f مستمرة عند 2 إذا وفقط إذا كان : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = f(2)$

أي : $\frac{8 - a + b}{2} = 8 - a$

أي : $8 - a + b = 16 - 2a$

أي : $2a - a + b = 16 - 8$

أي : $a + b = 8$ و هي العلاقة المطلوبة .

التمرين ــ 67

f دالة مستمرة على المجال [0 ; 1] حيث من أجل كل x من [0 ; 1] فإن $f(x) \in [0 ; 1]$
بين أن يوجد على الأقل عدد حقيقي α من [0 ; 1] حيث $f(\alpha) = \alpha$

الحـل ــ 67

لنعتبر الدالة g على المجال [0 ; 1] حيث $g(x) = f(x) - x$

لدينا g هي مجموع دالتين مستمرتين على [0 ; 1] هما : $f : x \mapsto f(x)$ و $x \mapsto -x$

إذن : g هي دالة مستمرة على [0 ; 1]

من جهة أخرى : $g(0) = f(0) - 0 = f(0)$

و $g(1) = f(1) - 1$

بما أن $f(x) \in [0 ; 1]$ من أجل $x \in [0 ; 1]$ فإن $\left.\begin{matrix} 0 \le f(0) \le 1 \\ 0 \le f(1) \le 1 \end{matrix}\right\}$

إذن : $\left.\begin{matrix} f(0) \ge 0 \\ f(1) - 1 \le 0 \end{matrix}\right\}$

أي $\left.\begin{matrix} g(0) \ge 0 \\ g(1) \le 0 \end{matrix}\right\}$

خلاصة : $\left.\begin{matrix} g \text{ مستمرة على } [0 ; 1] \\ g(0) \times g(1) \le 0 \end{matrix}\right\}$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل α من [0 ; 1]

حيث $g(\alpha) = 0$

أي $f(\alpha) - \alpha = 0$

أي $f(\alpha) = \alpha$ و هو المطلوب

التمرين ــ 68

f دالة معرفة على المجال $[-\pi ; 0]$ بـ $f(x) = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} x$

1 ــ تحقق أن f تقبل الإشتقاق على المجال $[-\pi ; 0]$ ثم أحسب دالتها المشتقة .

2 ــ شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-\pi ; 0]$

3 ــ ماذا تستنتج بالنسبة لحلول المعادلة $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} x$ على المجال $[-\pi ; 0]$

الحـل ــ 68

1 ــ f هي مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على $[-\pi ; 0]$ و هما : $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2} x$

إذن : f قابلة للإشتقاق على $[-\pi ; 0]$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = -\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2 ــ إشارة $f'(x)$ على $[-\pi ; 0]$

$$f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow -\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$ و هذا محقق دائما من أجل $x \in [-\pi ; 0]$ لأن $\sin x \le 0$

إذن : f متزايدة على المجال $[-\pi ; 0]$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

جدول التغيرات :

x	$-\pi$		0
f(x)	$-1-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	1

$$f(-\pi)=\cos(-\pi)+\frac{\sqrt{3}}{2}(-\pi)=-1-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f(0)=\cos(0)+\frac{\sqrt{3}}{2}(0)=1$$

3 ــ حسب جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-\pi\,;0]$ لدينا مايلي :

f مستمرة على $[-\pi\,;0]$
f متزايدة تماما على $[-\pi\,;0]$
$f(-\pi)\times f(0)<0$

إذن : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[-\pi\,;0]$

أي : المعادلة $\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}x=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[-\pi\,;0]$

أي : المعادلة $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}x$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[-\pi\,;0]$ و هو المطلوب .

التمرين ــ 69

n عدد طبيعي غير معدوم

1 ــ بين أن المعادلة $x^{n+1}-2x^n+1=0$ تقبل حلا محصورا بين $\frac{2n}{n+1}$ و 2 .

2 ــ هل المعادلة $x^8-2x^7+1=0$ تقبل حلا على IR ؟ إذا كان الجواب نعم عين حصرا لهذا الحل .

الحـل ــ 69

1 ــ نعرف الدالة f على IR بـ $f(x)=x^{n+1}-2x^n+1$ حيث $n\in N^*$.

لاحظ أن من أجل $n\in N^*$ فإن $2-\frac{2n}{n+1}=\frac{2n+2-2n}{n+1}=\frac{2}{n+1}>0$

إذن : $2>\frac{2n}{n+1}$

لندرس الآن تغيرات الدالة f على المجال $\left[\frac{2n}{n+1}\,;2\right]$

f كثير حدود إذن قابلة للإشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x)=(n+1)x^n-2nx^{n-1}$$
$$=x^{n-1}[(n+1)x-2n]$$

إشارة $f'(x)$ على المجال $\left[\frac{2n}{n+1}\,;2\right]$ حيث $n\in N^*$:

بما أن $x>0$ فإن $x^{n-1}>0$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(n+1)x-2n$ كما يلي :

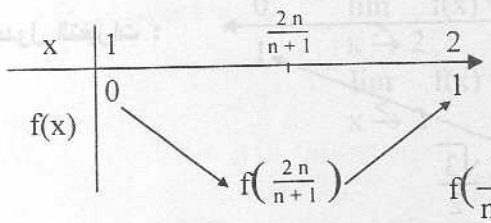
x	$-\infty$		$\frac{2n}{n+1}$		2		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$			

إذن على المجال $\left[\frac{2n}{n+1}\,;2\right]$ فإن $f'(x)>0$ أي f متزايدة .

ليكن $n>1$:

منه جدول تغيرات الدالة f على $\left[\frac{2n}{n+1}\,;2\right]$ كما يلي :

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM



لاحظ أن $f(1) = (1)^{n+1} - 2(1)^n + 1 = 0$

$f(2) = (2)^{n+1} - 2(2)^n + 1 = 2^{n+1} - 2^{n+1} + 1 = 1$

إذن : بما أن f متناقصة على $[1 ; \frac{2n}{n+1}]$ فإن $f(\frac{2n}{n+1}) < f(1)$

أي : $f(\frac{2n}{n+1}) < 0$

خلاصة : f مستمرة على $[\frac{2n}{n+1} ; 2]$

$f(\frac{2n}{n+1}) \times f(2) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا محصورا بين $\frac{2n}{n+1}$ و 2

أي المعادلة $x^{n+1} - 2x^n + 1 = 0$ تقبل حلا على المجال $[\frac{2n}{n+1} ; 2]$ من أجل $n > 1$

من أجل $n = 1$ فإن $f(x) = x^2 - 2x + 1$

إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا مضاعفا هو $x = 1$

2 ــ لاحظ أن المعادلة $x^8 - 2x^7 + 1 = 0$ تكتب من الشكل :

$x^{7+1} - 2x^7 + 1 = 0$

إذن : هي معادلة السؤال (1) من أجل $n = 7$

و عليه فالمعادلة $x^{7+1} - 2x^7 + 1 = 0$ تقبل على الأقل حلين أحدهما يساوي 1 و الأخر محصور بين $\frac{2(7)}{7+1}$ و 2

أي محصور بين 7/4 و 2

التمرين ــ70

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$ و ليكن (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد

$(O ; \vec{I} ; \vec{J})$ حيث $OI = 2$ cm و $OJ = 1$ cm

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f .

2 ــ عين الأعداد الحقيقية a ; b ; c ; d حيث : من أجل كل $x \in R - \{1\}$:

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x-1)^2}$$

ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيم (d) الذي معادلته $y = x - 2$

3 ــ أدرس وضعية (C) بالنسبة لـــ (d) و لتكن A نقطة تقاطعهما .

4 ــ أرسم كل من (C) و (d)

5 ــ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty ; 1[$.

6 ــ ناقش بيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = x + m$ حيث m وسيط حقيقي .

7 ــ ناقش تحليليا (دون إستعمال البيان) عدد حلول المعادلة $f(x) = x + m$.

الحـــل ــ 70

1 ــ **التغيرات :** f معرفة على $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$\lim_{x \to 1} (x-1)^2 = 0^+$ لأن $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{y \to 0} \frac{1-4+8-4}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{y} = +\infty$

$\lim_{x \to 1} (x-1)^2 = 0^+$ لأن $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{y \to 0} \frac{1-4+8-4}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{y} = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

f دالة ناطقة إذن قابلة للإشتقاق على مجموعة تعريفها و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 8x + 8)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3 - 4x^2 + 8x - 4)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(x-1)[3x^3 - 8x^2 + 8x - 3x^2 + 8x - 8 - 2x^3 + 8x^2 - 16x + 8]}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(x-1)(x^3 - 3x^2)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{x^2(x-3)(x-1)}{(x-1)^4}$$ من إشارة $x^2(x-1)(x-3)$

إشارة $f'(x)$ على $R - \{1\}$:

x	$-\infty$		0		1		3	$+\infty$
x^2	+	+	0	+	‖	+	+	
$x-1$	−	−	−	−	‖	+	+	
$x-3$	−	−	−	−	‖	−	0	+
الجداء	+	+	0	+	‖	−	0	+

منه جدول تغيرات الدالة f على $R - \{1\}$ كما يلي :

x	$-\infty$		0		1		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	+	‖	−	0	+
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$		$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{11}{4}$	↗ $+\infty$

$$f(3) = \frac{27 - 36 + 24 - 4}{4} = \frac{27 - 36 + 20}{4} = \frac{47 - 36}{4} = \frac{11}{4}$$

2 ــ تعيين الأعداد a ; b ; c ; d :

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2} = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1}$$

لنجري القسمة الإقليدية :

$x^3 - 4x^2 + 8x - 4$	$x^2 - 2x + 1$
$x^3 - 2x^2 + x$	$x - 2$
$-2x^2 + 7x - 4$	
$-2x^2 + 4x - 2$	
$3x - 2$	

نتيجة :
$$\frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1} = x - 2 + \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1}$$

أي :
$$f(x) = x - 2 + \frac{3x - 2}{(x-1)^2}$$

منه : $a = 1$; $b = -2$; $c = 3$; $d = -2$

بما أن
$$\lim_{x \to \infty} f(x) - (x-2) = \lim_{x \to \infty} \left[x - 2 + \frac{3x - 2}{(x-1)^2} - (x-2)\right]$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3x - 2}{(x-1)^2}$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3x}{x^2}$$
$$= 0$$

فإن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$ و عند $-\infty$

3 ــ وضعية (C) بالنسبة لـــ (d) :

$$f(x) - (x-2) = \frac{3x-2}{(x-1)^2}$$

إذن : إ شارة $f(x) - (x-2)$ هي إ شارة $3x - 2$ لأن المقام موجب .

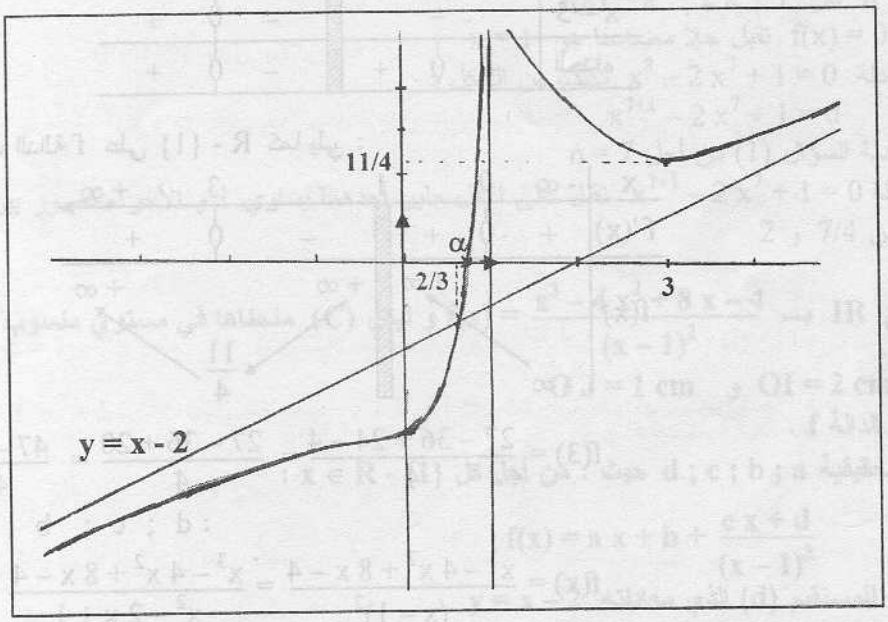
x	$-\infty$		$2/3$		1		$+\infty$
$3x-2$		$-$	0	$+$	‖	$+$	

خلاصة :

لما $x \in]-\infty ; 2/3[$: $f(x) - (x-2) < 0$ إذن (C) تحت (d)

لما $x = 2/3$: $f(x) - (x-2) = 0$ إذن (C) يقطع (d)

لما $x \in]2/3 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$: $f(x) - (x-2) > 0$ إذن (C) فوق (d)



ملاحظة : النقطة ذات الإحداثيات $(4 - ; 0)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C) (تنعدم المشتقة الأولى و لا تغير إشارتها)

5ــ حسب منحنى الدالة f على المجال $]-\infty ; 1]$ فإن المنحنى (C) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $2/3 < \alpha < 1$

إذن : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty ; 1[$

6 ــ ليكن (Δ_m) المستقيم ذو المعادلة $y = x + m$

لاحظ أن ميل المستقيم (Δ_m) ثابت يساوي 1

إذن لما الوسيط m يتغير فإن المستقيم (Δ_m) يوازي المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$ أي المستقيم المقارب منه المناقشة التالية:

(1) لما $m = -2$: (Δ_m) ينطبق على (d) إذن يقطع المنحنى (C) في نقطة واحدة فاصلتها $2/3$ إذن المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلا وحيدا هو $2/3$

(2) لما $m < -2$: (Δ_m) يمكن أن يكون مماس لـــ المنحنى (C) إذن لنبحث عن معادلة المماس ذات الميل الذي يساوي 1

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2(x-3)(x-1)}{(x-1)^4} = 1$$
$$\Leftrightarrow x^2(x-3) = (x-1)^3$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = (x^2 - 2x + 1)(x-1)$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1$$
$$\Leftrightarrow 3x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1/3$$

منه معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1/3 هي : $y = 1\left(x - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)$

لنحسب $f\left(\frac{1}{3}\right)$:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{27} - \frac{4}{9} + \frac{8}{3} - 4}{4/9}$$
$$= \frac{1 - 12 + 72 - 108}{27} \times \frac{9}{4}$$
$$= -\frac{47}{27} \times \frac{9}{4}$$
$$= -\frac{47}{12}$$

إذن معادلة المماس هي : $y = x - \frac{1}{3} - \frac{47}{12}$

أي : $y = x + \frac{-4 - 47}{12}$

أي : $y = x - \frac{51}{12}$

أي : $y = x - \frac{17}{4}$

إذن : لما $m = -17/4$: (Δ_m) مماس لـ (C) أي المعادلة تقبل حلا واحدا

لما $m < -17/4$: (Δ_m) تحت المماس إذن المعادلة لا تقبل حلول

لما $-17/4 < m < -2$: (Δ_m) فوق المماس إذن المعادلة تقبل حلين مختلفين

(3) لما $m > -2$: (Δ_m) يقع فوق (d) إذن يقطع المنحنى (C) في نقطتين مختلفتين ومنه المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلين مختلفين

7 ــ حل المعادلة $f(x) = x + m$ في $R - \{1\}$

$$f(x) = x + m \Leftrightarrow \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1} = x + m \quad \text{حيث } x \neq 1$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = (x + m)(x^2 - 2x + 1)$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = x^3 - 2x^2 + x + mx^2 - 2mx + m$$
$$\Leftrightarrow (m + 2)x^2 - (7 + 2m)x + 4 + m = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

المناقشة :

لما $m = -2$ المعادلة تكافئ : $-(7 - 4)x + 4 - 2 = 0$

أي : $-3x + 2 = 0$

أي : $x = 2/3$

إذن المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلا وحيدا $x = 2/3$

لما $m \neq -2$ المعادلة من الدرجة الثانية ذات الوسيط m و المجهول x

$$\Delta = (7 + 2m)^2 - 4(4 + m)(m + 2)$$
$$= 49 + 28m + 4m^2 - 4(4m + 8 + m^2 + 2m)$$
$$= 49 + 28m + 4m^2 - 24m - 4m^2 - 32$$
$$= 4m + 17$$

منه

x	$-\infty$		$-17/4$		-2		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	‖	$+$	

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

إذن : لما $m \in]-\infty ; -17/4[$: $\Delta < 0$ إذن المعادلة لا تقبل حلول في IR

لما $m = -17/4$: $\Delta = 0$ إذن المعادلة تقبل حل مضاعف .

لما $m \in]-17/4 ; -2[\cup]-2 ; +\infty[$: $\Delta > 0$ إذن المعادلة تقبل حلين مختلفين .

التمرين ــ 71

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = |x+1| + \dfrac{x}{x^2-1}$

نسمي (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

1 ــ أكتب f(x) دون رمز القيمة المطلقة .

2 ــ أدرس تغيرات الدالة f .

3 ــ بين أن المستقيمان $(\Delta) : y = x + 1$ و $(\Delta') : y = -x - 1$ مقاربين للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب .

4 ــ أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) و (Δ') .

5 ــ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1 ; 1[$

الحـل ــ 71

1 ــ

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 + \dfrac{x}{x^2-1} & : x+1 \geq 0 \\ -x - 1 + \dfrac{x}{x^2-1} & : x+1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x + 1 + \dfrac{x}{x^2-1} & : x \in [-1 ; +\infty[\\ -x - 1 + \dfrac{x}{x^2-1} & : x \in]-\infty ; -1[\end{cases}$$

2 ــ التغيرات :

$D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ أي f معرفة على $R - \{-1 ; 1\}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -x - 1 + \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} -x - 1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} -(-1) - 1 + \frac{-1}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} x + 1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} -1 + 1 + \frac{-1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} x + 1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} 1 + 1 + \frac{1}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} x + 1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} 1 + 1 + \frac{1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + 1 + \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} & : x \in]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[\\ -1 + \dfrac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} & : x \in]-\infty ; -1[\end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2} & : x \in]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[\\ -\left(1 + \dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}\right) & : x \in]-\infty ; -1[\end{cases}$$

إشارة $f'(x)$:

على المجال $]-\infty ; -1[$: لدينا $f'(x) = -\left(1 + \dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}\right)$ إذن : $f'(x) < 0$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$1 + \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} > 0 \quad \text{لأن}$$

على المجال $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ لدينا : $f'(x) = 1 - \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}$ لندرس إشارتها

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1+x^2 \leq (x^2-1)^2 \quad \text{لأن } 1+x^2>0 \text{ و } (x^2-1)^2>0$$

$$\Leftrightarrow 1+x^2 \leq x^4 - 2x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2-3) \geq 0$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2		+		+	‖	+	0	+		+	
x^2-3		+	0	−	‖	−	0	−	0	+	
الجداء		+	0	−	‖	−	0	−	0	+	

إذن على المجال $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ لدينا :

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	−	0	−	‖	−	0	+	

خلاصة : إشارة $f'(x)$ على مجموعة تعريف الدالة f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	−	0	−	‖	−	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة f على مجموعة تعريفها :

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	−	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	‖ $-\infty$	↘	$+\infty$	↘	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$	↗	$+\infty$
									$f(\sqrt{3})$		

3 –

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-x-1)] = \lim_{x \to -\infty} \left(-x - 1 + \frac{x}{x^2-1}\right) - (-x-1)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2-1}$$

$$= 0$$

إذن المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = -x - 1$ مقارب للمنحنى (C) عند $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \to +\infty} \left(x + 1 + \frac{x}{x^2-1}\right) - (x+1)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2-1}$$

$$= 0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4 – وضعية (Δ) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') :

على المجال $]-1 ; +\infty[$: $f(x) - (x+1) = \frac{x}{x^2-1}$

x	-1		0		1	$+\infty$
x		–	0	+		+
$x^2 - 1$		–		–		+
$\frac{x}{x^2-1}$		+	0	–		+

لما $x \in]-1 ; 0[\cup]1 ; +\infty[$: $f(x) - (x+1) > 0$ إذن (C) فوق (Δ)

لما $x = 0$: $f(x) - (x+1) = 0$ إذن (C) يقطع (Δ)

لما $x \in]0 ; 1[$: $f(x) - (x+1) < 0$ إذن (C) تحت (Δ)

على المجال $]-\infty ; -1[$ $f(x) - (-x-1) = \frac{x}{x^2-1}$

x	$-\infty$		-1
x		–	
$x^2 - 1$		+	
$\frac{x}{x^2-1}$		–	

لما $x \in]-\infty ; -1[$: $f(x) - (-x-1) < 0$ إذن (C) تحت (Δ')

5 – من جدول تغيرات الدالة f نستنتج مايلي :

f مستمرة على $]-1 ; 1[$

f متناقصة تماما على $]-1 ; 1[$

f تأخذ قيم موجبة ثم قيم سالبة إذن تمر بالعدد 0 .

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]-1 ; 1[$ حيث $f(\alpha) = 0$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM