كل ما تحتاج في هذا المحور

1) قوانين عامة:

احداثيات ومركبات نقطة في الفضـــاء	$M(x;y;z) \leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
مركبات شعاع في الفضاء	$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;\, y_B - y_A;\, z_B - z_A)$
طويلة شعاع في الفضاء	$\|\|\overrightarrow{AB}\|\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
منتصف قطعة	$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$
الجداء السلمي بين شعاعين	$\vec{U}.\vec{V} = xx' + yy' = \|\|\vec{U}\|\|.\|\|\vec{V}\|\|.\cos(\vec{U},\vec{V})$
توازي شعاعان	$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = k$ **(في حالة استقامية يتوجب وجود نقطة مشتركة بين الشعاعين)**
تعامد شعاعان	$x.x' + y.y' + z.z' = 0$
معادلة سطح كرة	$(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2 + (z+\gamma)^2 = \lambda$ $\Omega(-\alpha\,;\,-\beta\,;\,-\gamma)$ مركزها $r = \sqrt{\lambda}$ قطرها
المسافة بين نقطة ومستوي	$d((P);S) = \frac{\|a\alpha + b\beta + c\gamma + d\|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \dots (P) \\ S(\alpha;\beta;\gamma) \end{cases}$
حجم رباعي الوجوه	$V = \frac{1}{3} \times S \times h$ S مساحة القاعدة (المثلث) و h ارتفاع حجم رباعي الوجوه

2) المستوي في الفضاء:

المعادلة الديكارتية لمستوي	التمثيل الوسيطي لمستوي
$ax + by + cz + d = 0$	$\begin{cases} x = at + a't' + \alpha \\ y = bt + b't' + \beta \\ z = ct + c't' + \gamma \end{cases}$ $\{t,t'\} \in R$
له شعاع ناظمي $\vec{n}(a\,;\,b;\,c)$ يعامده ويشمل نقطة معلومة	حيث t و s وسيطان للمستوي ذو شعاعي توجيهه موازيان له $\vec{u}(a\,;\,b;\,c)$ و $\vec{v}(a'\,;\,b';\,c')$ يشمل النقطة $I(\alpha;\beta;\gamma)$
المستوي الذي يشمل النقطة A والشعاع $\vec{n}$ ناظمي له نفرض نقطة M(x,y,z) تنتمي له: $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$	المستوي الذي يشمل النقطة A والشعاعين $\vec{u}(a\,;\,b;\,c)$ و $\vec{v}(a'\,;\,b';\,c')$ توجيه له نفرض نقطة M(x,y,z) تنتمي له $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$

3) المستقيم في الفضاء:

التمثيل الوسيطي لمستقيم	المعادلة الديكارتية لمستقيم
$\begin{cases} x = at + \alpha \\ y = bt + \beta \\ z = ct + \gamma \end{cases}$ $t \in R$	$\frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} = \frac{z-\gamma}{c}$
حيث t وسيط للمستقيم شعاع توجيهه الذي يوازيه $\vec{u}(a\,;\,b;\,c)$ وشمل نقطة $I(\alpha;\beta;\gamma)$	
المستقيم الذي يشمل النقطة A والشعاع $\vec{v}$ توجيه له نفرض نقطة M(x ;y ;z) تنتمي له $\overrightarrow{AM}//\vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = t.\vec{v}$	انطلاقا من التمثيل الوسيطي نستخرج العبارات الثلاث لـt بدلالة كل من xوy وz ثم

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4) **تقاطع مستويان:** نأخذ z=t ونعوضه في معادلتي المستويان لاستخراج x وy وz بدلالة t

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \dots (P_1) \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \lambda = 0 \dots (P_2) \end{cases}$$

5) **المرجـح في الفضـاء:** G مرجح النقاط A، B وC المرفقة بالمعاملات α، β وγ يمكن كتابتها:

- **كتابة جملة:** $\{(A ; \alpha) ; (B ; \beta) ; (C ; \gamma)\}$
- **كتابة شعاعية:** $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
- **الشرط:** $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ وإلا فإن المرجح G غير موجود
- **احداثيات المرجح:**

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \; ; \; y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} ; z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

- **قانون لايبنز:** $\boldsymbol{\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}}$

ملاحظات: منتصف قطعة [AB] هو مرجح الجملة $\{(A ;1) ;(B ;1)\}$

مركز ثقل المثلث ABC هو مرجح الجملة $\{(A ;1) ;(B ;1) ;(C ;1)\}$

- **طبيعة مجموعة النقط في الفضـاء:**

$\|\|\overrightarrow{MG}\|\| = \alpha$			$\|\|\overrightarrow{MG}\|\| = \|\|\overrightarrow{MH}\|\|$
إذا كان $\alpha>0$	**إذا كان $\alpha=0$**	**إذا كان $\alpha<0$**	مجموعة النقط M هي المستوي المحور للقطعة المستقيمة [GH]
مجموعة النقط M هي سطح كرة مركزها G ونصف قطرها $r=\alpha$	مجموعة النقط M هي نقطة وحيدة G	مجموعة النقط M مجموعة خالية	

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

سلسلة التمارين

التمرين الأول: في الفضاء المزود بمعلم $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نسمي المستقيم (Δ) والمستوي (P) اللذان يحققان:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 - t \end{cases} \quad t\in IR \qquad\qquad x + 2y - 3z - 1 = 0$$

اختر الجواب الصحيح في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

رقم السؤال	الجواب (A)	الجواب (B)	الجواب (C)
1	النقطة $M(-1;3;2)$ تنتمي إلى (Δ)	النقطة $N(2;-1;-1)$ تنتمي إلى (Δ)	النقطة $R(3;1;-4)$ تنتمي إلى (Δ)
2	الشعاع $\vec{u}(1;2;-3)$ يمثل شعاع توجيه (Δ)	الشعاع $\vec{v}(-2;1;1)$ يمثل شعاع توجيه (Δ)	الشعاع $\vec{w}(3;1;-4)$ يمثل شعاع توجيه (Δ)
3	النقطة G ذات الاحداثية $G(1;3;-2)$ تنتمي إلى المستوي (P)	النقطة G ذات الاحداثية $G(1;3;2)$ تنتمي إلى المستوي (P)	النقطة G ذات الاحداثية $G(1;3;-1)$ تنتمي إلى المستوي (P)
4	المستوي الديكارتي (Q) ذو المعادلة: $x + 2y - 3z = 1$ عمودي على المستوي (P)	المستوي الديكارتي (Q) ذو المعادلة: $4x - 5y - 2z = -3$ عمودي على المستوي (P)	المستوي الديكارتي (Q) ذو المعادلة: $-3x + 2y - z = 1$ عمودي على المستوي (P)
5	المسافة بين النقطة $T(-1;-3;2)$ و المستوي (P) هي $\sqrt{14}$	المسافة بين النقطة $T(-1;-3;2)$ و المستوي (P) هي 14	المسافة بين النقطة $T(-1;-3;2)$ و المستوي (P) هي $2\sqrt{3}$

التمرين الثاني:

المستوي المنسوب إلى الفضاء $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقط:

$A(2;1;3)$ | $B(-3;-1;7)$ | $C(3;2;4)$

1) أثبت أن النقط ليست على استقامة واحدة
2) ليكن (d) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي:

$$\begin{cases} x = 2t - 7 \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad t\in IR$$

أ- أثبت أن (d) عمودي على المستوي (ABC)
ب- أعط المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC)
3) لتكن H النقطة المشتركة بين (d) والمستوي (ABC)
أ- أثبت النقطة H هو مرجح الجملة: $\{(A;-2);(B;-1);(C;2)\}$
ب- عين مجموعة النقط للمستوي التي يحقق الحالتين:

$$\left(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$$

$$\left\| -2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = \sqrt{29}$$

ج- نسمي (Γ) التي تمثل نقاط تقاطع الحالتين السابقتين، أثبت أن $S(-8;1;3)$ تنتمي إلى هذه المجموعة

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمرين الثالث:

المستوي المنسوب إلى الفضاء $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقط:

$I(\frac{3}{5};4;\frac{-9}{5})$ | $E(3;2;-1)$ | $D(1;0;-2)$ | $C(3;1;-3)$ | $B(0;4;-3)$ | $A(2;4;1)$

أجب بنعم أولا عن الأسئلة التالية مع التعليل لكل جواب:

1) المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $2x+2y-z=11$
2) النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)
3) المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان
4) المستقيم (CD) معرف لتمثيل وسيطي كما يلي:

$$\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t-1 \\ z = 1-t \end{cases} \quad t\in IR$$

5) النقطة I تنتمي إلى المستقيم (AB)

التمرين الرابع:

في كل سؤال من الأسئلة التالية عين إن كان السؤال صحيحا أما خاطئا مع التعليل

في الفضاء المزود بمعلم $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ تعطى النقاط:

$A(0;0;2)$ | $B(0;4;0)$ | $C(2;0;0)$

ولتكن I منتصف القطعة [BC]

G هي مرجح النقط المتساوية للنقط A, B و c

H المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (ABC)

1) النقط A, B وC على استقامة واحدة
2) مجموعة النقط M في الفضاء حيث: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0$ هي المستوي (AIO)
3) مجموعة النقط M في الفضاء حيث: $||\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}||=||\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}||$ هي الكرة التي قطرها [BC]
4) المستوي (ABC) له المعادلة الديكارتية: $2x+y+2z=4$
5) إحداثيات النقطة H هي: $H(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{8}{9})$
6) التمثيل الوسيطي للمستقيم (AG) يعطى بالجملة التالية

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2-2t \end{cases} \quad t\in IR$$

7) معادلة محور القطعة المستقيمة [BC] معرفة بالمعادلة $x-3y+z-1=0$

التمرين الخامس:

في الفضاء المزود بمعلم $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط:

$A(1;1;0)$ | $B(1;2;1)$ | $C(3;-1;2)$

1) بين أن النقط A, B وC تشكل مستوي
2) أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC)
3) نعتبر المستويان (P) و (Q) معرفين بالمعادلتين:

$$\begin{cases} x+2y-z-4=0 \dots (P) \\ 2x+3y-2z-5=0 \dots (Q) \end{cases}$$

4) أوجد التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) تقاطع المستويان (P) و (Q)
5) أحسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ)
6) حدد تقاطع المستويات (ABC) و (P) و (Q)

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمرين السادس:

نعتبر الفضاء المزود بمعلم $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن المستويان (P_1) و (P_2) المعرفين بالمعادلتين:

$$\begin{cases} 2x-y+2z-7=0 \dots (P_1) \\ 2x+2y-z+5=0 \dots (P_2) \end{cases}$$

1) بين أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان
2) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع (P_1) و (P_2)
3) أحسب بعد النقطة $A(1\ ;2\ ;-1)$ عن كل من المستويين (P_1) و (P_2)
4) استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ)
5) لتكن النقطة $M(t\ ;-1-2t\ ;3-2t)$ حيث t عدد حقيقي ولتكن f دالة معرفة على R حيث: $f(t)=AM^2$
   أ- أكتب عبارة $f(t)$ بدلالة t
   ب- استنتج قيمة العدد t التي تكون من أجلها المسافة AM أصغر ما يمكن
   ج- استنتج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ)

التمرين السابع:

المستوي المنسوب إلى الفضاء $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن المستقيمان (Δ) و (Δ'):

$$\begin{cases} x=6+\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=5+\alpha \end{cases} \dots(\Delta') \qquad \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=2+\frac{1}{2}\lambda \\ z=-2-2\lambda \end{cases} \dots(\Delta)$$

1) بين أن المستقيمان (Δ) و (Δ') لا ينتميان إلى نفس المستوي
2) عين احداثيتي M و N حتى يكون المستقيم (MN) عموديا على (Δ) و (Δ') علما أن:

$M\in(\Delta)$ | $N\in(\Delta')$

التمرين الثامن:

في الفضاء المزود بمعلم $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط:

$C(2\ ;2\ ;2)$ | $B(0\ ;4\ ;0)$ | $A(3\ ;0\ ;0)$

1) أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقاط A, B وC
2) عين معادلة ديكارتية للمستوي (P') مجموعة النقط $M(x\ ;y\ ;z)$ من الفضاء حيث: $AM=BM$
3) عين معادلة ديكارتية للمستوي (P'') محور القطعة المستقيمة [AC]
4) بين أن (P') و (P'') يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيينه
5) أحسب احداثيتي ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

التمرين التاسع:

في المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر m وسيط حقيقي حيث (S_m) مجموعة النقط $M(x\ ;y\ ;z)$ من الفضاء المعرفة بـ:

$$x^2+y^2+z^2+2(m-1)x-2my-6z+2m^2-2m+1=0$$

1) بين أن (S_m) سطح كرة مهما كان m من R يطلب تعيين عناصرها المميزة ونسمي Ω_m مركزها
2) حدد مجموعة النقط Ω_m عندما يتغير m في R
3) ليكن المستوي (P) ذو المعادلة: $2x+2y+z+4=0$
   أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي m يكون المستوي (P) مماسا لسطح الكرة (S_m)
   ب- عين احداثيتي النقطة H نقطة تماس المستوي (P) مع سطح الكرة (S_0)

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمرين الـعاشر:

(P) المستوي الذي معادلته : $-4x-3y+1=0$ معادلة ديكارتية له و (D) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي :

$$\begin{cases} x = k \\ y = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}k \\ z = \frac{3}{4}k - \frac{3}{4} \end{cases} \qquad k \in IR$$

1) تحقق أن المستقيم (D) محتوى في المستوي (P)
2) أ- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(1\ ;1\ ;0)$ و $\vec{u}(4;1;3)$ شعاع توجيه له
ب- عين احداثيات نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ)
3) بين أن: $3x-4z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيمين (D) و (Δ)
4) $M(x\ ;y\ ;z)$ نقطة من الفضاء:
أ- أحسب المسافة بين النقطة M وكل من (P) و (Q)
ب- أثبت أن مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية المسافة عن كل من (P) و (Q) هي اتحاد مستويين (P_1) و (P_2) متعامدين يطلب تعيينهما

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM