التمارين

تمارين تطبيقية

1 ـ الاشتقاقية

2 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=|x|$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{-x}{x}=-1$ إذن f لا تقبل الاشتقاق عند 0.

6 المنحني يقبل مماسا عند A إذن الدالة تقبل الاشتقاق عند -2 ومعامل توجيه المماس T هو $f'(-2)=\dfrac{3}{2}$ ولدينا $f(-2)=3$ وبالتالي معادلة المماس T هي $y=\dfrac{3}{2}(x+2)+3$.

2 ـ المشتقات والعمليات عليها

12 في كل حالة من الحالات المقترحة الدالة f تعتبر كثير حدود وبالتالي هي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

أ ـ $f'(x)=5x^4+4x^3-9x^2+2x+4$.

ب ـ $f'(x)=\dfrac{6x^2+2x-4}{4}$.

جـ ـ $f'(x)=6mx^2+6m^3x-m^2$.

د ـ $f(m)=2x^3+9m^2x^2-2mx+1$.

14 أ ـ $f(x)=x+x\cos x$ ؛ $D=\mathbb{R}$. $f'(x)=1+\cos x-x\sin x$

ب ـ $f(x)=\sin x\cos x$ ؛ $D=\mathbb{R}$. $f'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$.

جـ ـ $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ ؛ $D=\mathbb{R}^*$. $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.

3 ـ اتجاه تغير دالة

25 أ ـ $f(x)=2x^4-27x+7$ ؛ $f'(x)=8x^3-27=(2x-3)(4x^2+6x+9)$

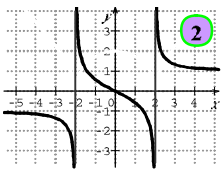
من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $4x^2+6x+9>0$ ومنه إذا كان $x\geq\dfrac{3}{2}$ فإن $f'(x)\geq 0$ ومنه f متزايدة تماما على $\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ ؛ إذا كان $x\leq\dfrac{3}{2}$ فإن $f'(x)\leq 0$ ومنه f متناقصة تماما على $\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right]$.

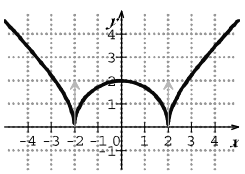
جـ ـ $f(x)=x+\cos x$. $f'(x)=1-\sin x$، من أجل كل عدد حقيقي x، $1\geq\sin x$ ومنه $f'(x)\geq 0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

هـ ـ $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ؛ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}_+$ وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ولدينا $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2\sqrt{x}}{x}$ ومنه $f'(x)>0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$.

27 الشكل المقابل هو المنحني $\mathcal{C}_f$ لدالة f قابلة للاشتقاق عند كل قيمة من المجموعة $\mathbb{R}-\{-2;2\}$.

المنحني الذي يمثل f' هو





قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4 ـ اشتقاق دالة مركبة

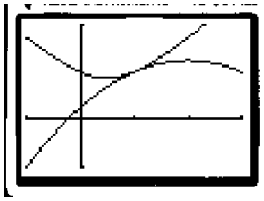
34 أ) $f'(x)=3(2x+2)(x^2+2x-3)^2$.

ب) $g'(x)=4(4x+1)(2x^2+x-1)^3$.

ج) $h'(t)=5(3t^2-1)(t^3-t+1)^4$.

د) $t'(u)=-\dfrac{16u}{(u^2+3)^9}$.

39 باستعمال حاسبة بيانية مثّلنا المنحنيين الذين معادلتيهما $y=\sqrt{x^2-x+1}$ و $y=-\dfrac{1}{4}x^2+x+\dfrac{1}{4}$.



1) يبدو أن للمنحنيين مماس مشترك عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

2) أ ــ الدالة g كثير حدود إذن هي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

الدالة $u:x\mapsto x^2-x+1$ تقبل الاشتقاق وموجبة تماما على $\mathbb{R}$ إذن الدالة $f:x\mapsto\sqrt{u}$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ب ــ $g(1)=1$ ، $f(1)=1$ ، $f'(1)=\dfrac{1}{2}$ و $g'(1)=\dfrac{1}{2}$.

ج ــ معادلة المماس لمنحني الدالة f هي : $y=\dfrac{1}{2}(x-1)+1$ ونجد نفس المعادلة لمماس منحني الدالة g .

5 ـ التقريب التآلفي

41 برّر التقريب التآلفي المحلي عند 0 في كل الحالة من الحالات التالية :

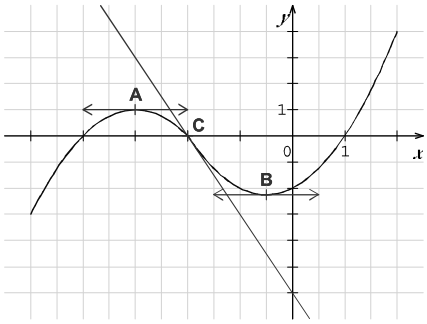
أ) $(1+x)^3\approx 1+3x$. لدينا $(1+x)^3=x^3+3x^2+3x+1$ وعندما يقترب x من 0 فيكون x^3 و $3x^2$ قيمتين مهملتين.

يمكن اعتبار معادلة مماس منحني الدالة $x\mapsto(1+x)^3$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي $y=1+3x$.

تمارين للتّعمّق.

1 ـ الاشتقاقية

46



المنحني البياني $\mathcal{C}_f$ التالي هو لدالة f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها

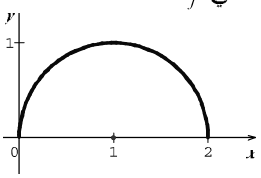
1. $D_f=[-5;2]$.

2. $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$ ، $f'(-3)=0$ و $f'(-2)=\dfrac{0-(-4)}{-2-0}=-2$.

4. عند A ، $y=1$ ؛ عند B ، $y=-\dfrac{9}{4}$ وعند C ، $y=-2(x+2)$.

5. لا توجد مماسات أخرى للمنحني $\mathcal{C}_f$ موازية لمماسه عند النقطة C لأنها هي نقطة انعطاف للمنحني $\mathcal{C}_f$.

53 f الدالة المعرّفة على المجال $[0;2]$ ، تمثيلها البياني $\mathcal{C}$ هو عبارة عن نصف دائرة كما هو مبيّن في الشكل .



1) المماس منطبق على محور التراتيب.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

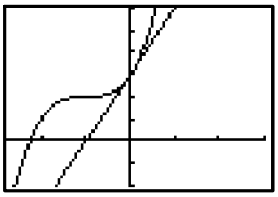
2) نضع $\Omega(1;0)$ ؛ $M(x;y)$ تنتمي إلى $\mathcal{C}$ معناه $\Omega M=1$ و $y\geq 0$ أي $(x-1)^2+y^2=1$ و $y\geq 0$ وهذا يعني $y=\sqrt{1-(x-1)^2}$ أي $f(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$

3) نجد بالحساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ غير منتهية .

2 ـ المشتقات والعمليات عليها

58 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3+3x^2+3x+3$

على شاشة الحاسبة البيانية نرسم المنحني $\mathcal{C}$ الممثل للدالة f والمماس T عند النقطة A التي فاصلتها 0 .



1. $y=3x+3$.
2. يبدو أنه إذا كان $x\in\left[-\frac{5}{2};+\infty\right[$ فإن المنحني يقع فوق المماس .
3. تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)-(3x+3)=x^2(x+3)$.
4. إذا كان $x\in[-3;+\infty[$ فإن $f(x)-(3x+3)\geq 0$ ويكون المنحني فوق المماس ، وإذا كان $x\in]-\infty;-3]$ فإن $f(x)-(3x+3)\leq 0$ ويكون المنحني تحت المماس.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM