5 min

CHABANE Oussama

Maths

3as

أداب و فلسفة + لغات أجنبية

المثاليات العددية



اعداد الأستاذ شعبان أسامة

اصدار ديسمبر 2020

تلمسان - 0775737163

Facebook/ min Maths

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

بسم الله الرحمن الرحيم

اليك أيها التلميذ " مجلة 5min Maths" للسنة الثالثة ثانوي لشعبة أداب و فلسفة و لغات أجنبية

محور المتتاليات العددية وفق المنهاج الرسمي الجديد

جاء هذا الملف شامل قصد مساعدتك على التحضير الجيد لاجتياز بكالوريا دورة 2021 ، أرجو عدم قراءة حلول التمارين المطروحة بل التفكير في الحل الذاتي أولا ثم مقارنته مع الحل المقترح مع العلم أنه ليس الحل الوحيد و ربما يكون حلك أحسن و أقصر لكن النتائج و الأهداف واحدة ,

في الأخير نرجوا من الله القدير أن يوفقك الى ما فيه نجاحك و يهديك الى سبيل الخير

أهدي هذا العمل المتواضع لعائلتي الكريمة أولا التي سهرت دائما على نجاحي بعد توفيق المولى عز و جل.

و ثانيا لجميع تلامذتي خاصة تلاميذ ثانوية بوحميدي الطاهر...أحبكم



الأستاذ شعبان أسامة

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

مجلة الرياضيات للطور الثانوي بمختلف
مستوياته الثلاثة،تم اصدار أول نسخة
بتاريخ :2019/09/13

5min Maths

CHABANE Oussama

تجدون في هذا العمل

1. ملخص الدرس
2. تطبيقات
3. تمارين محلولة
4. تمارين البكالوريا 2019-2008

#5min Maths

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ملخص الدرس

المتتاليات الحسابية

تعريف

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n+r$.

عبارة الحد العام

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p ، $u_n=u_p+(n-p)r$.

حالات خاصة: $u_n=u_0+nr$ و $u_n=u_1+(n-1)r$.

حساب المجموع

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية فإن:

$$S=u_0+u_1+.....+u_{n-1}+u_n=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$

عدد الحدود=دليل الالحد الأخير−دليل الحد الأول +1

الوسط الحسابي

تكون الأعداد a، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان: $a+c=2b$. يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c.

اتجاه التغير

(u_n)متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ ، حدها الأول u_0 وأساسها r

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=r$ و منه:

- **إذا كان r سالبا تماما $r<0$ فإن المتتالية متناقصة.**
- **إذا كان r موجبا تماما $r>0$ فإن المتتالية متزايدة.**
- **إذا كان r معدوما $r=0$ فإن المتتالية ثابتة.**

المتتاليات الرتيبة

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$.

(u_n) رتيبة يعني أنها إما متزايدة و إما متناقصة.

(u_n) متزايدة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \geq u_n$

(u_n) متناقصة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \leq u_n$

(u_n) ثابتة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n$.

تمرين:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n + 2$.

1. أحسب u_0 و u_1.
2. أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r.
3. أحسب، بدلالة n ، المجموع: $S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$.

الحل:

1. $u_0 = -3(0) + 2 = 2$ و $u_1 = -3(1) + 2 = -1$.
2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \left[-3(n+1)+2\right] - \left[-3n+2\right] = -3$.
نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r = -3$.
3. لدينا: $S = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \times \frac{2 - 3n + 2}{2}$ و منه $S = \frac{(n+1)(4-3n)}{2}$.

المتتاليات الهندسية

تعريف

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي)إذا وفقط إذا كان أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n \times q$

.

عبارة الحد العام

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p ، $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

حالات خاصة: $u_n = u_0 \times q^n$ و $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

حساب المجموع

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن1 فإن:

$$S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

عدد الحدود=دليل الحد الأخير–دليل الحد الأول +1

حالة خاصة: إذا كان $q=1$ فإن: $S=u_0+u_1+.....+u_{n-1}+u_n=(n+1)u_0$.

الوسط الهندسي

تكون الأعداد غير المعدومة a، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا و فقط إذا كان: $a\times c=b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c.

اتجاه التغير

(u_n)متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$،حدها الأول u_0 وأساسها q.

نعلم أن: $u_n=u_0q^n$. نستنتج أنه:

***إذا كان $0<q<1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة. * كان $0<q<1$ وكان $u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.**

*** إذا كان $q>1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.**

***إذا كان $q>1$ وكان $u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.**

***إذا كان $q=1$ فإن المتتالية ثابتة.**

***إذا كان $q=0$ تكون كل حدودالمتتالية معدومة ابتداء من الحد2 .**

تمرين:

(v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1=3$ و أساسها $q=2$.

1. أحسب v_2 و v_3.
2. أحسب، بدلالة n ، الحد العام v_n.
3. أحسب، بدلالة n ، المجموع $S=v_1+v_2+.....+v_n$.

الحل:

1. $v_2=v_1\times q=3\times 2=6$ ، $v_3=v_2\times q=6\times 2=12$.
2. $v_n=v_1\times q^{n-1}=3\times 2^{n-1}$.

و منه: $S=v_1+v_2+.....+v_n=v_1\times\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$ $S=3\times\left(\frac{1-2^n}{1-2}\right)=-3(1-2^n)=3(2^n-1)$

المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
تعريف	**تعريف**
نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n+r$.	نقول أن المتتالية (u_n)متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي)إذا وفقط إذا كان أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n\times q$ أو $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$
عبارة الحد العام	**عبارة الحد العام**
إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه من أجل كل عددين طبيعيين	

n و p ، $u_n = u_p + (n-p)r$.

حالات خاصة: $u_n = u_0 + nr$ و $u_n = u_1 + (n-1)r$.

حساب المجموع

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية فإن:

$$S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

عدد الحدود=دليل الالحد الأخير-دليل الحد الأول +1

الوسط الحسابي

تكون الأعداد a، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان: $a+c=2b$. يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c.

اتجاه التغير

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول u_0 وأساسها r

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n = r$ و منه:

- إذا كان r سالبا تماما $r<0$ فإن المتتالية متناقصة.
- إذا كان r موجبا تماما $r>0$ فإن المتتالية متزايدة.
- إذا كان r معدوما $r=0$ فإن المتتالية ثابتة.

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n+2$.

4. أحسب u_0 و u_1.
5. أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r.
6. أحسب، بدلالة n، المجموع: $S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$.

الحل:

4. $u_0 = -3(0)+2 = 2$ و $u_1 = -3(1)+2 = -1$.
5. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1} - u_n = \left[-3(n+1)+2\right] - \left[-3n+2\right] = -3$$

.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r=-3$.

6. لدينا:

$$= (n+1)\times\frac{u_0+u_n}{2} = (n+1)\times\frac{2-3n+2}{2}$$

و منه $S = \frac{(n+1)(4-3n)}{2}$.

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p، $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

حالات خاصة: $u_n = u_0 \times q^n$ و $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

حساب المجموع

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن1 فإن:

$$S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

عدد الحدود=دليل الحد الأخير-دليل الحد الأول +1

حالة خاصة: إذا كان $q=1$ فإن:

$$S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n = (n+1)u_0$$

الوسط الهندسي

تكون الأعداد غير المعدومة a، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا و فقط إذا كان: $a\times c = b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c.

اتجاه التغير

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول u_0 وأساسها q.

نعلم أن: $u_n = u_0 q^n$. نستنتج أنه:

*إذا كان $0<q<1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة. * كان $0<q<1$ وكان $u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

* إذا كان $q>1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

*إذا كان $q>1$ وكان $u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

*إذا كان $q=1$ فإن المتتالية ثابتة.

*إذا كان $q=0$ تكون كل حدودالمتتالية معدومة ابتداء من الحد2 .

مثال

(v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1=3$ و أساسها $q=2$.

4. أحسب v_2 و v_3.
5. أحسب، بدلالة n، الحد العام v_n.
6. أحسب، بدلالة n، المجموع $S = v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n$.

الحل:

3. $v_2 = v_1 \times q = 3\times 2 = 6$، $v_3 = v_2 \times q = 6\times 2 = 12$.
4. $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3\times 2^{n-1}$.

$$S = v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n = v_1 \times \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

و منه: $S = 3\times\left(\frac{1-2^n}{1-2}\right) = -3\left(1-2^n\right) = 3\left(2^n-1\right)$

تطبيقات

تطبيق1:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=-3n^2+1$.

1.أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_{20}.

2.أكتب بدلالة n الحدود u_{n+1} ، u_{2n} ، u_{3n+2} .

الحل:

1. $u_0=-3(0)^2+1=1$ ، $u_1=-3(1)^2+1=-2$ ، $u_2=-3(2)^2+1=-11$ ، $u_{20}=-3(20)^2+1=-1199$.
2. $u_{n+1}=-3(n+1)^2+1=-3n^2-6n-2$ ، $u_{2n}=-3(2n)^2+1=-12n^2+1$

تطبيق2:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=-2u_n+1$.

أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

الحل:

$$u_1=-2u_0+1=-2\times 2+1=-3$$
$$u_2=-2u_1+1=-2(-3)+1=7$$
$$u_3=-2u_2+1=-2\times 7+1=-13$$

تطبيق3:

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_0=-3$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}=2v_n+5$.

1. **أحسب v_1 و v_2.**
2. **عبر بدلالة v_n عن كل من v_{n+2} و v_{n-1}.**

الحل:

1. $v_1=2v_0+3=2(-3)+5=-1$ و $v_2=2v_1+5=2(-1)+5=3$.
2. $v_{n+2}=2v_{n+1}+5=2(2v_n+5)+5$

و منه $v_{n+2}=4v_n+15$.

من $v_{n+1}=2v_n+5$ نستنتج أن $v_n=2v_{n-1}+5$ و بالتالي $2v_{n-1}=v_n-5$

و منه $v_{n-1}=\frac{v_n-5}{2}$.

قلم الجزائر

تطبيق4 :

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n + 2$.

1.أحسب u_0 **و** u_1.

2.أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r.

3.أحسب، بدلالة n **، المجموع** $S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$.

الحل:

طريقة: لإثبات أن (u_n) متتالية حسابية يكفي أن نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت r.

1. $u_0 = -3(0) + 2 = 2$ و $u_1 = -3(1) + 2 = -1$.

2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \left[-3(n+1) + 2\right] - \left[-3n + 2\right] = -3$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r = -3$.

3. لدينا: $S = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \times \frac{2 - 3n + 2}{2}$ و منه $S = \frac{(n+1)(4-3n)}{2}$.

تطبيق5:

(v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1 = 3$ و أساسها $q = 2$.

1. **أحسب** v_2 **و** v_3.
2. **أحسب، بدلالة** n **، الحد العام** v_n.
3. **أحسب، بدلالة** n **، المجموع** $S = v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n$.

الحل:

1. $v_2 = v_1 \times q = 3 \times 2 = 6$ ، $v_3 = v_2 \times q = 6 \times 2 = 12$.
2. $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$.

$S = v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n = v_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$ و منه $S = 3 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = -3\left(1 - 2^n\right) = 3\left(2^n - 1\right)$

تطبيق6:

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = n^2 - n$.

1.أحسب $u_{n+1} - u_n$ **من اجل كل عدد طبيعي** n .

2.استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

الحل:

طريقة: لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) لا يكفي المقارنة بين u_1 و u_0 أو بين u_3 و u_2 أو ... و إنما يجب المقارنة بين u_{n+1} و u_n من أجل كل عدد طبيعي n.

1. $u_{n+1}-u_n=\left[(n+1)^2-(n+1)\right]-\left(n^2-n\right)$ و منه $u_{n+1}-u_n=2n$.
2. من أجل كل عدد طبيعي n، $2n\geq 0$ أي من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n\geq 0$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) متزايدة.

تطبيق 7 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $u_1=4$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-1$.

برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متناقصة.

الحل:

إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة يؤول إلى إثبات أنه، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}\leq u_n$.

المرحلة الأولى: نتحقق من أن: $u_2\leq u_1$

لدينا $u_2=\frac{1}{2}u_1-1=\frac{1}{2}\times 4-1=1$ و منه $u_2\leq u_1$.

المرحلة الثانية: نفرض أنه من أجل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}\leq u_n$.

المرحلة الثالثة: نبرهن أن $u_{n+2}\leq u_{n+1}$.

لدينا $u_{n+1}\leq u_n$. نحصل بعد ضرب الطرفين في $\frac{1}{2}$ على $\frac{1}{2}u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$. نضيف (-1) إلى الطرفين لنجد:

$\frac{1}{2}u_{n+1}-1\leq\frac{1}{2}u_n-1$ أي $u_{n+2}\leq u_{n+1}$.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}\leq u_n$. إذن المتتالية (u_n) متناقصة.

تطبيق8:

لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$.

1.بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول.

2.ما هو اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟

الحل:

1. $v_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} = \frac{3\times 3^n}{2\times 2^{n+1}} = \frac{3}{2}\times\frac{3^n}{2^{n+1}} = \frac{3}{2}v_n$ و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{2}$ و حدها الأول $v_0 = \frac{1}{2}$.
2. بما أن $\frac{3}{2} > 1$ و $v_0 > 0$ فإن المتتالية (v_n) متزايدة $\left(v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$.

التمارين

.1

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 3n-2$.

1.احسب u_0، u_1 ، u_2 و u_3.

2.بين أن المتتالية (u_n) حسابية وعين أساسها.

3.أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4.بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

5.أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

ب-عين العدد بحيث يكون: $S_n = 328$.

.2

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 و تحقق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$

1. احسب الحد الأول u_0.

2. أكتب الحد العام u_n بدلالة n.

3.عين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$.

4. احسب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{49}$.

5.نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n = 2u_n + 3$.

احسب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{49}$.

.3

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.

1.بين أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.

2.أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم استنتج قيمة الحد السابع.

3.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

4.استنتج قيمة المجموع: $S' = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_6$

.4

(u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بحدها الأول: $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$.

1.عين الأساس r للمتتالية (u_n).

2.بين أن : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 6n - 5$.

3.أثبت أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n)، ماهي رتبته؟

4. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S : $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

.5

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 و أساسها r .

1.أحسبالحد u_4 علما أن: $u_3 + u_5 = 20$.

2.أحسب الحد u_5 علما أن: $2u_4 - u_5 = 7$.

3.استنتج قيمة r واحسب u_0.

4.تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 3n - 2$.

5.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

6.جد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 33$.

.6

في كل من الحالات الأربع التالية اقترحت ثلاثة اجابات. واحدة منها صحيحة ، يطلب تعيينها مع التعليل.

1.الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها -3 وحدها الأول 1 هو:

أ- -17 **ب-** -14 **ج-** -11 .

2.مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 هو:

قلم الجزائر

أ- $\frac{3^{101}-1}{2}$ ب- $\frac{1-3^{100}}{2}$ ج- $\frac{3^{100}-1}{2}$.

3. نضع من أجل كل x عدد حقيقي: $a=2x+2$، $b=6x-3$، $c=4x$. الأعداد الحقيقية a، b، c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون :

أ- $x=\frac{4}{3}$ ب- $x=0$ ج- $x=\frac{3}{4}$

4. المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي : هي متتالية:

أ- حسابية أساسها 1 ب- هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ج- لا حسابية ولا هندسية

.7

اقراح الجواب الوحيد الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة التالية ، مع التبرير:

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على ب: $u_n=n^2-1$، (u_n) متتالية:

أ- متزايدة تماما **ب-** متناقصة تماما **ج-** ليست رتبة

2. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1=3$ و أساسها $q=2$، عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

أ- $v_n=3\times 2^n$ ب- $v_n=3\times 2^{n-1}$ ج- $v_n=2\times 3^n$

3. المجموع : $S_n=v_1+v_2+...+v_n$ يساوي:

أ- $3\left(2^n-1\right)$ ب- $\left(2^n-1\right)$ ج- $2\left(3^n-1\right)$

.8

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q حيث: $u_0\times u_2=576$ و $u_0+u_1=30$

1. بين أن $u_1=24$، ثم استنتج قيمة u_0.

2. بين أن $q=4$ ، ثم أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=18\times 4^n$، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4. احسب 4^4 ، ثم تحقق أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

5. احسب بدلالة المجموع: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$

.9

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = \alpha$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

أ) نفرض $\alpha = 3$

اثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة ثم أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$.

ب) نفرض $\alpha = 2$ و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.

1. أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
2. أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.
3. أحسب، بدلالة n ، المجموع $S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$.
4. ما هو اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

حلول التمارين

حل التمرين1:

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 3n-2$.

1.حساب u_0، u_1، u_2 و u_3.

$$u_0 = -2$$
$$u_1 = 1$$
$$u_2 = 4$$
$$u_3 = 7$$

2.اثبات أن المتتالية (u_n) حسابية.

$$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - 3n + 2$$
$$= 3n + 3 - 2 - 3n + 2$$
$$= 3$$

اذن: (u_n) متتالية حسابية أساسها 3.

3.دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n). بما أن $r = 3 > 0$ اذن (u_n) متتالية متزايدة.

4.بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية

نقوم بحل المعادلة: (u_n)

$$u_n = 1954$$

أي: $3n - 2 = 1954$ معناه: $u_{652} = 1954$ رتبته 653 لأن الحد الأول هو u_0.

$$n = 652 \in \mathbb{N}$$

5.أ- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$
$$= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$
$$= (n+1)\frac{(-2+3n-2)}{2}$$
$$= (n+1)\left(\frac{-4+3n}{2}\right)$$

و منه .

نقوم بالنشر نتحصل على: $S_n = \frac{3n^2 - n - 4}{2}$

ب-تعين العدد بحيث يكون: $S_n = 328$.

$$\frac{3n^2 \quad n \quad 4}{-2 \quad -} \quad 328$$
$$=$$
معناه: $3n^2 \quad n \quad 4 \quad 2(328)$
$$3 \ ^2 - \quad - \bar{6}\bar{6}0 \quad 0$$

هي معادلة من الدرجة الثانية تقبل حلان هما : $n_1 = 15 \in \mathbb{N}$ و بالتالي من أجل $n = 15$ لدينا: $S_n = 328$ $n_2 = \frac{-44}{3} \notin \mathbb{N}$

حل التمرين 2:

(u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 و تحقق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$

نجمع المعادلات نتحصل : $\begin{cases} u_1 = u_0 + r = u_0 + 3 \\ u_2 = u_0 + 2r = u_0 + 6 \\ u_3 = u_0 + 3r = u_0 + 9 \end{cases}$

$u_0 + u_0 + 3 + u_0 + 6 + u_0 + 9 = 10$ أي: $4u_0 + 18 = 10$ و بالتالي: $u_0 = -2$.

2. كتابة الحد العام u_n بدلالة n: $u_n = -2 + 3n$

3.تعين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$.

أي: $u_n = -2 + 3n = 145$ يعني: $n = 49$ $u_{49} = 145$

4. حساب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{49}$.

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{49} \\ &= 50\left(\frac{u_0 + u_{49}}{2}\right) \\ &= 50\left(\frac{-2 + 145}{2}\right) \\ &= 3575 \end{aligned}$$

5.نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n = 2u_n + 3$.

احسب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{49}$.

$$\begin{aligned} S' &= v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{49} \\ &= 2S + 3(50) \\ &= 2(3575) + 150 \\ &= 7300 \end{aligned}$$

حل التمرين3:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.

قلم الجزائر

1.اثبات أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.

من القانون : نضع: $n=3;\ p=1$

$$u_3 = u_1 \times q^{3-1}$$
$$\frac{u_3}{u_1} = q^2$$
$$q^2 = \frac{320}{20} = 16$$
$$q = 4, q = -4$$

$q=-4$ مرفوض لأن موجبة تماما. و بالتالي: $q=4$

2.أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n:

$$u_n = u_0 \times q^n = 5(4)^n.$$

استنتج قيمة الحد السابع. $u_7 = 5(4)^7 = 20480$

3.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$
$$= u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$
$$= 5\left(\frac{1-4^{n+1}}{1-4}\right)$$
$$= \frac{-5}{3}\left(1-4^{n+1}\right)$$

4.استنتاج قيمة المجموع: $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_6$

$$S' = \frac{-5}{3}\left(1-4^{6+1}\right) = 27305$$

حل التمرين4:

(u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بحدها الأول: $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$.

1.تعين الأساس r للمتتالية (u_n).

$$\begin{cases} u_3 = u_0 + 3r = -5 + 3r \\ u_7 = u_0 + 7r = -5 + 7r \end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد:

و منه:

$$-5 + 3r - 5 + 7r = 50$$
$$10r - 10 = 50$$
$$10r = 60$$
$$r = 6$$

2. من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 6n-5$.

لدينا: $u_0 = -5$ و $r = 6$ و بالتالي: $u_n = 6n-5$

3.أثبات أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n)،

نحل المعادلة: $6n-5 = 2017$
$n = 337 \in \mathbb{N}$

رتبته 338 لان: حدها الأول: $u_0 = -5$

4. حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$$
$$= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$
$$= (n+1)\left(\frac{-5+6n-5}{2}\right)$$
$$= (n+1)\left(\frac{-10+6n}{2}\right)$$
$$= (n+1)(-5+3n)$$
$$= 3n^2 - 2n - 5$$

أي:

حل التمرين5:

المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 و أساسها r .

1.حساب الحد u_4 علما أن: $u_3 + u_5 = 20$.

باستعمال خاصية الوسط الحسابي:

$$u_3 + u_5 = 2u_4$$
$$2u_4 = 20$$
$$u_4 = 10$$

و بالتالي:

2.أحسب الحد u_5 علما أن: $2u_4 - u_5 = 7$.لدينا:

$$u_4 = 10$$
$$2u_4 - u_5 = 7$$
$$2(10) - u_5 = 7$$
$$u_5 = 13$$

معناه:

3.استنتاج قيمة r بما أن (u_n) متتالية حسابية فان:

$$r = u_5 - u_4$$
$$r = 13 - 10$$
$$r = 3$$

حساب u_0.

قلم الجزائر

$u_4 = u_0 + 4r$

نأخذ المعادلة: $u_0 + 4(3) = 10$

$u_0 = -2$

4.تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 3n - 2$.

لدينا: $u_0 = -2$ و $r = 3$ و بالتالي: $u_n = 3n - 2$

5.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

$$= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

و بالتالي:

$$= (n+1)\left(\frac{-2 + 3n - 2}{2}\right)$$

$$= (n+1)\left(\frac{-4 + 3n}{2}\right)$$

6.ايجاد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 33$.

$$(n+1)\left(\frac{-4+3n}{2}\right) = 33$$

أي: $(n+1)(-4+3n) = 66$ و تصبح: $3n^2 - n - 70 = 0$.

و نتحصل على حلان أحدهما مرفوض لأنه ليس عدد طبيعي و نقبل: $n = 5$

حل التمرين6:

1.الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها -3 وحدها الأول 1 هو:

ب- -14

2.مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 هو:

ج- $\frac{3^{100} - 1}{2}$.

3.نضع من أجل كل x عدد حقيقي: $a = 2x + 2$، $b = 6x - 3$، $c = 4x$. الأعداد الحقيقية a، b، c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون :

أ- $x = \frac{4}{3}$

4.المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي : هي متتالية:

أ-حسابية أساسها 1 ب-هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ج- لا حسابية ولا هندسية

حل التمرين7:

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على ب: $u_n = n^2 - 1$، (u_n) متتالية:

أ- متزايدة تماما

لأن: $u_{n+1} - u_n > 0$

2. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1 = 3$ و أساسها $q = 2$، عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

ب- $v_n = 3 \times 2^{n-1}$

لأن حدها الأول v_1.

3.المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$ يساوي:

أ- $3\left(2^n - 1\right)$

حل التمرين8:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q حيث: $u_0 \times u_2 = 576$ و $u_0 + u_1 = 30$

1.اثبات أن $u_1 = 24$،

لدينا: $u_0 \times u_2 = 576$ باستعمال خاصية الوسط الهندسي نجد:

$$u_0 \times u_2 = u_1^2$$

و بالتالي: $u_1^2 = 576$

$$u_1 = 24; u_1 = -24$$

و بما أن (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما فان: $u_1 = 24$ استنتاج قيمة u_0:

$$u_0 + u_1 = 30$$

لأن: $u_0 = 30 - u_1 = 30 - 24$

$$u_0 = 6$$

$$u_1 = u_0 \times q$$

2.بين أن $q = 4$، نعلم أن: $q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{24}{6} = 4$

، كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n: $u_n = 6 \times 4^n$

3.أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$،

لدين: $u_n = 6 \times 4^n$ و بالتالي: $u_{n+1} = 6 \times 4^{n+1}$.

$$u_{n+1}-u_n = 6\times 4^{n+1}-6\times 4^n$$
$$= 6\times 4^n \times 4^1 - 6\times 4^n$$
$$= 6\times 4^n (4-1)$$
$$= 6\times 4^n (3) = 18\times 4^n$$

و هو المطلوب

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

بما أن: $u_{n+1}-u_n = 18\times 4^n > 0$ فان المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

4.حساب 4^4 ،

لدينا: $4^4 = 256$

التحقق من أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n).

$$u_n = 1536$$
نقوم بحل المعادلة: $$6\times 4^n = 1536$$
$$4^n = \frac{1536}{6} = 256$$

اذن: $4^n = 4^4$ و نعلم أن n عدد طبيعي فبالتالي: $n = 4$.

<u>رتبته</u>: 5 لأن الحد الأول هو u_0.

5.احسب بدلالة المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

معناه:

$$S_n = u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$
$$= 24\left(\frac{1-4^n}{1-4}\right)$$
أي: $$= 24\left(\frac{1-4^n}{-3}\right)$$
$$= -6\left(1-4^n\right)$$
$$= 6\left(4^n-1\right)$$

حل التمرين9:

أ) $\alpha = 3$ و منه $u_0 = 3$

- لنبين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 3$.

* الخاصية صحيحة من أجل $n=0$ لأن $u_0=3$.

* نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 0$ أي أن $u_n=3$ ونبرهن صحتها من أجل $n+1$.

لدينا $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2=\frac{1}{3}\times 3+2=3$ و منه $u_{n+1}=3$. إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

نستنتج، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n . إذن المتتالية (u_n) ثابتة.

- من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=u_0+u_1+...+u_n=n+1\ u_0$ و منه $S_n=3\ n+1$.

ب) $\alpha=2$ و منه $u_0=2$

1. $v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{1}{3}u_n+2-3=\frac{1}{3}u_n-1=\frac{1}{3}\ u_n-3$ و منه $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$.
إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=-1$ $(v_0=u_0-3)$.

2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=v_0\times q^n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
لدينا $v_n=u_n-3$ و منه $u_n=v_n+3$. إذن $u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$.

3. لدينا $S=v_0+3+v_1+3+...+v_n+3=v_0+v_1+...+v_n+3+3+...+3$
و منه $S=S'+3\ n+1$ حيث $S'=v_0+v_1+...+v_n$ (عدد حدود المجموع هو $n+1$).

لدينا $S'=-1\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=-\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$ و منه $S=-\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)+3(n+1)$.

4. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n>0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة.

.

حلول تمارين المتاليات العددية

بكالوريا 2008-2019

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2008 الموضوع الأول (5 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 3n+1$.

1. احسب u_0 ، u_1 و u_2.
2. بين أن (u_n) حسابية يطلب تعين أساسها. عين اتجاه تغير (u_n)
3. تحقق أن العدد 2008 حد من حدود المتتالية (u_n). ما رتبته؟
4. احسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{699}$

حل مقترح

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 3n + 1$.

1) حساب: u_0، u_1 و u_2.

لحساب الحدود u_0، u_1 و u_2 نعوض في عبارة الحد العام أعلاه قيم n بـ 0، 1 و 2 على الترتيب، فنجد:

$u_0 = 1$ ، $u_1 = 4$ ، $u_2 = 7$.

2) - تبين أن (u_n) متتالية حسابية مع تعيين أساسها r:

تكون المتتالية (u_n) حسابية إذا كان:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

لدينا: $u_{n+1} = 3(n+1) + 1$ .....

$u_{n+1} = 3n + 3 + 1$

$u_{n+1} = (3n+1) + 3$

ومنه: $u_{n+1} = u_n + 3$ .....

إذن: (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 3$.

- تعيين اتجاه تغير (u_n):

لتعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ندرس إشارة الفرق:

$$u_{n+1} - u_n$$

من السؤال السابق: $u_{n+1} - u_n = 3$ .....

إذن: $u_{n+1} - u_n > 0$ .....

ومنه: (u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ملاحظة:

- كل متتالية حسابية أساسها موجب هي متتالية متزايدة تماما.
- كل متتالية حسابية أساسها سالب هي متتالية متناقصة تماما.

3) تحقق أن العدد 2008 حد من حدود المتتالية (u_n)، ونحدد رتبته:

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: $u_n = 2008$ .....

أي: $3n + 1 = 2008$ .....

فنجد: $n = 669$ .....

بما أن 669 عدد طبيعي، فإن العدد 2008 حد من حدود المتتالية (u_n).

حيث: $u_{669} = 2008$ .....

فيكون الحد الذي قيمته 2008 هو: u_{669} .....

ورتبته: 670 .....

(لأن الحد الأول للمتتالية (u_n) هو u_0)

4) حساب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{669}$.

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$$

$$S = \frac{669 - 0 + 1}{2}(u_0 + u_{669})$$

$$S = \frac{670}{2}(1 + 2008)$$

ومنه نجد: $S = 673015$ .....

2008 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_1 = 7$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_{n+1} 2u_n + 1$.

1. احسب u_2 ، u_3 و u_4.
2. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعرف المتتالية (v_n) كما يأتي: $v_n = u_n + 1$.

أ-أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها q و حدها الأول u_1.

ب-أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ،ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج-نضع: $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ ، أحسب S_n بدلالة n.

د-عين n علما أن $S_n = 1016$.

حل مقترح

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_1 = 7$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1) حساب: u_2، u_3 و u_4.

- من أجل: $n = 1$ لدينا: $u_2 = 2u_1 + 1$ نجد: ..... $u_2 = 15$
- من أجل: $n = 2$ لدينا: $u_3 = 2u_2 + 1$ نجد: ..... $u_3 = 31$
- من أجل: $n = 3$ لدينا: $u_4 = 2u_3 + 1$ نجد: ..... $u_4 = 63$

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، نعرف المتتالية (v_n) كما يأتي: $v_n = u_n + 1$.

أ- نثبت أن (v_n) هندسية ونعين أساسها q وحدها الأول v_1:

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا كان:

$$v_{n+1} = q \times v_n$$

لدينا: $v_{n+1} = u_{n+1} + 1$.....

$v_{n+1} = 2u_n + 1 + 1$

$v_{n+1} = 2u_n + 2$

$v_{n+1} = 2(u_n + 1)$

ومنه: $v_{n+1} = 2 \times v_n$ .....

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول v_1:

حيث: $v_1 = u_1 + 1$ .....

بالتعويض نجد: $v_1 = 8$ .....

ب- نكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم نستنتج عبارة u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول v_1 بالعلاقة:

$$v_n = v_1 \times q^{n-1}$$

ومنه: $v_n = 8 \times 2^{n-1}$ .....

لدينا: $v_n = u_n + 1$ أي: $u_n = v_n - 1$.

ومنه: $u_n = 8 \times 2^{n-1} - 1$ .....

ج- نضع: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$،

حساب S_n بدلالة n:

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$$S_n = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$$S_n = v_1 \times \frac{1 - q^{n-1+1}}{1 - q}$$ حيث: $q = 2$ و $v_1 = 8$

$$S_n = 8 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2}$$

ومنه: $S_n = 8(2^n - 1)$ .....

د- نعين n علما أن $S_n = 1016$:

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: $S_n = 1016$ .....

أي: $8(2^n - 1) = 1016$ .....

$2^n - 1 = 127$

$2^n = 128$

$2^n = 2^7$ لأن: $128 = 2^7$.

بالمطابقة نجد: $n = 7$ .....

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2009 الموضوع الأول (5 نقاط)

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1 = 2$ و بالعلاقة: $u_2 - 2u_5 = 19$.

1.أ-احسب الأساس r للمتتالية (u_n).

ب-احسب الحد العاشر.

2.أكتب عبارة u_n بدلالة n.

3.بين أن الحد (-2008) هو حد من حدود (u_n) محددا رتبته.

4.احسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{671}$.

حل مقترح

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1 = 2$

وبالعلاقة: $u_2 - 2u_5 = 19$.

1) أ- حساب الأساس r للمتتالية (u_n):

لحساب الأساس r نكتب كلا من u_2 و u_5 بدلالة r.

حيث: $u_2 = u_1 + r$ أي: $u_2 = 2 + r$.

و $u_5 = u_1 + 4r$ أي: $u_5 = 2 + 4r$.

لدينا: .....

$u_2 - 2u_5 = 19$

$(2 + r) - 2(2 + 4r) = 19$

$2 + r - 4 - 8r = 19$

$-2 - 7r = 19$

$-7r = 21$

ومنه نجد: ..... $r = -3$

ب- حساب الحد العاشر:

الحد العاشر هو u_{10} حيث: $u_{10} = u_1 + 9r$.

ومنه: ..... $u_{10} = -25$

2) نكتب عبارة u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_1 بالعلاقة:

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

$u_n = 2 + (-3)(n-1)$

$u_n = 2 - 3n + 3$

ومنه نجد: ..... $u_n = 5 - 3n$

3) نبين أن العدد (-2008) هو حد من حدود (u_n)، ونحدد رتبته:

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: ..... $u_n = -2008$

أي: ..... $5 - 3n = -2008$

$3n = 2013$

ومنه نجد: ..... $n = 671$

بما أن 671 عدد طبيعي، فإن العدد -2008 حد من حدود المتتالية (u_n).

ومنه: ..... $u_{671} = -2008$

فيكون الحد الذي قيمته -2008 هو: ..... u_{671}

ورتبته: 671

(لأن الحد الأول للمتتالية (u_n) هو u_1)

4) حساب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{671}$.

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$$

$$S = \frac{671 - 1 + 1}{2} \times (u_1 + u_{671})$$

$$S = \frac{671}{2} \times (2 - 2008)$$

$S = -671 \times 1003$

ومنه نجد: ..... $S = -673013$

2009- الموضوع الثاني (7 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ و أساسها موجب.

1.عين أساس هذه المتتالية و حدها الأول u_0 اذا علمت أن:

$u_3 = 144$ و $u_5 = 576$.

2.تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 18 \times 2^n$.

3.احسب بدلالة المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{671}$ ثم استنتج قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 1134$

حل مقترح

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها موجب.

1) تعيين q أساس هذه المتتالية وحدها الأول u_0 علما أن:

$u_3 = 144$ و $u_5 = 576$.

نكتب كلا من الحدين u_3 و u_5 بدلالة q و u_0.

حيث: $u_3 = u_0 \times q^3$ و $u_5 = u_0 \times q^5$.

فتصبح لدينا جملة معادلتين بمجهولين q و u_0 هي:

$$\begin{cases} u_0 \times q^3 = 144 \ldots\ldots 1 \\ u_0 \times q^5 = 576 \ldots\ldots 2 \end{cases}$$

بقسمة 2 على 1: ..... $\frac{u_0 \times q^5}{u_0 \times q^3} = \frac{576}{144}$

أي: ..... $q^2 = 4$

وبما أن الأساس موجب فإن: ..... $q = 2$

نعوض قيمة q في المعادلة 1 مثلا فينتج: ..... $8u_0 = 144$

ومنه نجد: ..... $u_0 = 18$

2) نتحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 18 \times 2^n$:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

بعد التعويض نجد: ..... $u_n = 18 \times 2^n$

3) حساب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots u_n$.

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$$S_n = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

حيث: $q = 2$ و $u_0 = 18$.

$$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n-0+1}}{1 - q}$$

$$S_n = 18 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$$

ومنه نجد: ..... $S_n = 18(2^{n+1} - 1)$

استنتاج قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 1134$.

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: ..... $S_n = 1134$

أي: ..... $18(2^{n+1} - 1) = 1134$

$2^{n+1} - 1 = 63$

$2^{n+1} = 64$

$2^{n+1} = 2^6$

بالمطابقة نجد: ..... $n + 1 = 6$

ومنه: ..... $n = 5$

ملاحظة:

64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

قمنا بتحليل العدد 64 إلى جداء عوامل أولية فنتج:

$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

أي: $64 = 2^6$.

ومنه يمكن حل المعادلة: $2^{n+1} = 2^6$ بالمطابقة.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2010 الموضوع الأول (5 نقاط)

I. (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بالحدين: $u_{10}=31$ و $u_{15}=46$.

1.عين أساسها و حدها الأول u_0.

2.أكتب u_n بدلالة n.

3.بين أن 6028 حد من حدود المتتالية (u_n).

4.احسب المجموع: $S=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{2009}$

II. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=2\times 8^n$.

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها و حدها الأول v_0.

2.احسب بدلالة n المجموع: $S'=v_0+v_1+\ldots+v_n$

حل مقترح

I- (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بالحدين: $u_{10}=31$ و $u_{15}=46$.

1) تعيين الأساس r والحد الأول u_0:

نكتب كلا من الحدين u_{10} و u_{15} بدلالة r و u_0.

حيث: $u_{10}=u_0+10r$ و $u_{15}=u_0+15r$.

فتصبح لدينا جملة معادلتين بمجهولين r و u_0 هي:

$$\begin{cases} u_0+10r=31 \ldots 1 \\ u_0+15r=46 \ldots 2 \end{cases}$$

بطرح 1 من 2: $(u_0+15r)-(u_0+10r)=46-31$

$u_0+15r-u_0-10r=15$

$5r=15$

ومنه نجد: $r=3$

نعوض قيمة r في المعادلة 1 مثلا فينتج: $u_0+30=31$

ومنه نجد: $u_0=1$

2) نكتب u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n=u_0+n\times r$$

بالتعويض نجد: $u_n=1+3n$

3) تبيين أن 6028 حد من حدود المتتالية (u_n):

نحل المعادلة: $u_n=6028$

أي: $1+3n=6028$

$3n=6027$

ومنه نجد: $n=2009$

بما أن 2009 عدد طبيعي، فإن العدد 6028 حد من حدود المتتالية (u_n).

ومنه: $u_{2009}=6028$

4) حساب المجموع S: $S=u_0+u_1+\cdots+u_{2009}$.

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S=\frac{\text{عدد الحدود}}{2}\times(\text{الحد الأخير في المجموع}+\text{الحد الأول في المجموع})$$

$$S=\frac{2009-0+1}{2}\times(u_0+u_{2009})$$

$$S=\frac{2010}{2}\times(1+6028)$$

ومنه نجد: $S=6059145$

II- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=2\times 8^n$.

1) نبين أن (v_n) متتالية هندسية ونعين أساسها وحدها الأول v_0:

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا كان:

$$v_{n+1}=v_n\times q$$

لدينا: $v_{n+1}=2\times 8^{n+1}$

$v_{n+1}=2\times 8^n\times 8$

ومنه: $v_{n+1}=v_n\times 8$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها: $q=8$ وحدها الأول: $v_0=2$.

2) حساب بدلالة n المجموع S': $S'=v_0+v_1\ldots+v_n$.

تعطى عبارة المجموع S' بالعلاقة التالية:

$$S'=(\text{الحد الأول في المجموع})\times\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$$

$$S'=v_0\times\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}$$

$$S'=2\times\frac{1-8^{n+1}}{1-8}$$

ومنه نجد: $S'=\frac{2}{7}(8^{n+1}-1)$

2010 الموضوع الثاني (7 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$، أساسها و حدها الأول u_0، حيث: $u_1=6$ و $u_4=48$.

1.أ- احسب الأساس والحد الأول للمتتالية (u_n).

ب-استنتج أن عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) هي: .

2. أ-علما أن: $2^8=256$، بين أن 768 حد من حدود المتتالية (u_n)

ب- احسب المجموع: $S=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_7$.

3. (v_n) متتالية عددية معرفة ب: $v_0=4$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1}=2v_n-1$.

أ-احسب v_1، v_2، v_3.

ب-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=3\times 2^2+1$

ج- احسب بدلالة n المجموع S' حيث: $S'=v_0+v_1+\ldots+v_7$.

حل مقترح

(u_n) متتالية هندسية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

أساسها q وحدها الأول u_0 حيث: $u_1=6$ و $u_4=48$.

1) أ- حساب الأساس q والحد الأول u_0 للمتتالية (u_n):

نكتب كلا من الحدين u_1 و u_4 بدلالة q و u_0.

حيث: $u_1=u_0\times q$ و $u_4=u_0\times q^4$.

فتصبح لدينا جملة معادلتين بمجهولين q و u_0 هي:

$$\begin{cases} u_0\times q=6 \quad \ldots 1 \\ u_0\times q^4=48 \ldots 2 \end{cases}$$

بقسمة 2 على 1: $\frac{u_0\times q^4}{u_0\times q}=\frac{48}{6}$

أي: $q^3=8$

ومنه نجد: $q=2$

نعوض قيمة q في المعادلة 1 مثلا فينتج: $2u_0=6$

ومنه نجد: $u_0=3$

ب- استنتاج ان عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) هي:

$$u_n=3\times 2^n$$

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n=u_0\times q^n$$

حيث: $q=2$ و $u_0=3$.

بعد التعويض نجد: $u_n=3\times 2^n$

2) أ- علما أن: $2^8=256$

نبين ان العدد 768 هو حد من حدود المتتالية (u_n):

نحل المعادلة: $u_n=768$

أي: $3\times 2^n=768$

$2^n=256$

علما أن: $2^8=256$

فإن: $2^n=2^8$

ومنه نجد: $n=8$

قلم الجزائري
WWW.DZPEN.COM

ب- حساب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \cdots u_7$.

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$$

حيث $q = 2$ و $u_0 = 3$

$$S = u_0 \times \frac{1-q^{7-0+1}}{1-q}$$

$$S = 3 \times \frac{1-2^8}{1-2}$$

$$S = 3(2^8 - 1)$$

ومنه نجد: $S = 765$ .....

3) (v_n) متتالية عددية معرفة بـ: $v_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} = 2v_n - 1$.

أ- حساب: v_1، v_2، v_3.

- من أجل: $n = 0$ لدينا: $v_1 = 2v_0 - 1$ نجد: ..... $v_1 = 7$
- من أجل: $n = 1$ لدينا: $v_2 = 2v_1 - 1$ نجد: ..... $v_2 = 13$
- من أجل: $n = 2$ لدينا: $v_3 = 2v_2 - 1$ نجد: ..... $v_3 = 25$

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_n = 3 \times 2^n + 1$$

نضع: $P(n) : v_n = 3 \times 2^n + 1$ .....

- من أجل $n = 0$ لدينا: $v_0 = 4$ و $3 \times 2^0 + 1 = 4$.

ومنه $P(0)$ صحيحة.

- نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

أي: $v_n = 3 \times 2^n + 1$ .....

- ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

أي: $v_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 1$ .....

لدينا فرضا: $v_n = 3 \times 2^n + 1$ .....

نضرب طرفي المساواة في العدد $(+2)$:

$$2v_n = 2(3 \times 2^n + 1)$$
$$2v_n = 3 \times 2^n \times 2 + 2$$
$$2v_n = 3 \times 2^{n+1} + 2$$

نضيف إلى طرفي المساواة العدد (-1):

$$2v_n - 1 = 3 \times 2^{n+1} + 2 - 1$$
$$2v_n - 1 = 3 \times 2^{n+1} + 1$$

ولدينا: $v_{n+1} = 2v_n - 1$ .....

ومنه: $v_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 1$ .....

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = 3 \times 2^n + 1$.

جـ- حساب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 \ldots + v_7$.

لدينا: $v_n = 3 \times 2^n + 1$ .....

وأيضا: $u_n = 3 \times 2^n$ .....

ومنه: $v_n = u_n + 1$ .....

لدينا: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_7$ .....

$$S' = (u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \cdots + (u_7 + 1)$$
$$S' = (u_0 + u_1 + \cdots + u_7) + (1 + 1 + \cdots + 1)$$
$$S' = S + 8 \times 1$$

أي: $S' = S + 8$ .....

ومنه نجد: $S' = 773$ .....

2011 الموضوع الأول (6 نقاط)

1. (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول u_0 بحيث:

$u_0 + u_3 = 28$

أ-احسب u_0، ثم اكتب الحد العام u_n بدلالة n.

ب-احسب المجموع: $S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_9$.

2. (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام: $v_n = 1 - 5n$

أ-بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعين أساسها ثم استنتج اتجاه تغيرها.

ب-احسب المجموع: $S_2 = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_9$.

3. نعتبر المتتالية (k_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام:

$k_n = 1 + 3^n - 5n$.

تحقق أن: $k_n = u_n + v_n$ ثم احسب المجموع:

$S = k_0 + k_1 + \ldots + k_9$.

حل مقترح

1) (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول u_0 بحيث:

$u_0 + u_3 = 28$

أ- حساب u_0:

نكتب u_3 بدلالة u_0 و q كما يلي:

$u_3 = u_0 \times q^3$ أي: $u_3 = 27u_0$. (لأن: $q = 3$)

لدينا: $u_0 + u_3 = 28$ .....

$u_0 + 27u_0 = 28$

$28u_0 = 28$

ومنه: $u_0 = 1$ .....

نكتب الحد العام u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$u_n = u_0 \times q^n$

حيث: $q = 3$ و $u_0 = 1$.

بعد التعويض نجد: $u_n = 3^n$ .....

ب- حساب المجموع: $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.

تعطى عبارة المجموع S_1 بالعلاقة التالية:

$$S_1 = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$$

حيث $q = 3$ و $u_0 = 1$

$$S_1 = u_0 \times \frac{1-q^{9-0+1}}{1-q}$$

$$S_1 = 1 \times \frac{1-3^{10}}{1-3}$$

$$S_1 = \frac{1}{2}(3^{10} - 1)$$

ومنه نجد: $S_1 = 29524$ .....

2) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام:

$v_n = 1 - 5n$

أ- نبين أن (v_n) متتالية حسابية مع تعيين أساسها:

تكون (v_n) متتالية حسابية إذا كان:

$v_{n+1} = v_n + r$.

لدينا: $v_{n+1} = 1 - 5(n+1)$ .....

أي: $v_{n+1} = 1 - 5n - 5$ .....

$v_{n+1} = (1 - 5n) - 5$

ومنه: $v_{n+1} = v_n - 5$ .....

أو: $v_{n+1} - v_n = -5$ .....

إذن: (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$ وحدها الأول: $v_0 = 1$.

استنتاج اتجاه تغير (v_n):

بما أن أساس المتتالية (v_n) سالب $(r < 0)$ فإن (v_n) متتالية حسابية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ب- حساب المجموع: $S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_9$.

تعطى عبارة المجموع S_2 بالعلاقة التالية:

$S_2 = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$

حيث: $v_0 = 1$ و $v_9 = -44$ $\quad S_2 = \frac{9-0+1}{2} \times (v_0 + v_9)$

$S_2 = \frac{10}{2} \times (1 - 44)$

ومنه نجد: $S_2 = -215$

3) نعتبر المتتالية (k_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام:

$k_n = 1 + 3^n - 5n$

- نتحقق أن: $k_n = u_n + v_n$:

لدينا: $k_n = 1 + 3^n - 5n$

$k_n = (3^n) + (1 - 5n)$

ومنه: $k_n = u_n + v_n$

حساب المجموع: $S = k_0 + k_1 + \cdots + k_9$.

لدينا: $S = k_0 + k_1 + \cdots k_n$

$S = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \cdots + (u_9 + v_9)$

$S = (u_0 + u_1 + \cdots + u_9) + (v_0 + v_1 + \cdots + v_9)$

ومنه: $S = S_1 + S_2$

بالتعويض: $S = 29524 - 215$

ومنه نجد: $S = 29309$

2011 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرفتان على بحديهما العام:

$u_n = -2n$ و $v_n = 3^{-2n}$.

عين في كل من الحالات الخمس في الجدول أدناه الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الثلاث مع التعليل.

	العبارات	اقتراح 1	اقتراح 2	اقتراح 3
1	(u_n) هي متتالية	هندسية	حسابية	لا حسابية ولا هندسية
2	الحد الخامس و الأربعون للمتتالية (u_n) يساوي	-90	-92	-88
3	المجموع $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ يساوي	$n^2 + 1$	$-n^2 - n$	$-n^2 - 1$
4	(v_n) هي متتالية هندسية أساسها	$\frac{1}{9}$	9	-9
5	المتتالية (v_n)	متزايدة	متناقصة	ليست رتيبة

حل مقترح

1) نبحث عن طبيعة المتتالية (u_n):

لدينا: $u_n = -3n$

فيكون: $u_{n+1} = -3(n+1)$

أي: $u_{n+1} = -3n - 3$

نجد: $u_{n+1} = u_n - 3$

من الشكل: $u_{n+1} = u_n + r$

إذن: (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -3$.

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح 2.

2) نبحث عن الحد الخامس والأربعون للمتتالية (u_n):

الحد الخامس والأربعون للمتتالية (u_n) هو: u_{44}

أي: $u_{44} = -2 \times 44$

نجد: $u_{44} = -88$

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح 3.

3) نحسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$

حيث: $u_0 = 0$ و $u_n = -2n$ $\quad S = \frac{n-0+1}{2} \times (u_0 + u_9)$

$S = \frac{n+1}{2} \times (0 - 2n)$

$S = -n(n+1)$

نجد: $S = -n^2 - n$

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح 2.

4) نبحث عن طبيعة المتتالية (v_n) ونعين أساسها:

لدينا: $v_n = 3^{-2n}$

فيكون: $v_{n+1} = 3^{-2(n+1)}$

أي: $v_{n+1} = 3^{-2n-2}$

$v_{n+1} = 3^{-2n} \times 3^{-2}$

$v_{n+1} = 3^{-2n} \times \frac{1}{3^2}$

$v_{n+1} = 3^{-2n} \times \frac{1}{9}$

نجد: $v_{n+1} = v_n \times \frac{1}{9}$

من الشكل: $v_{n+1} = v_n \times q$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{9}$.

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح 1.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

5) نعين اتجاه تغير المتتالية (v_n):

لتعيين اتجاه تغير المتتالية (v_n) ندرس إشارة الفرق:

$v_{n+1}-v_n$.

$$v_{n+1}-v_n=3^{-2(n+1)}-3^{-2n}$$
$$v_{n+1}-v_n=3^{-2n-2}-3^{-2n}$$
$$v_{n+1}-v_n=3^{-2n}\times 3^{-2}-3^{-2n}$$
$$v_{n+1}-v_n=3^{-2n}(3^{-2}-1)$$
$$v_{n+1}-v_n=3^{-2n}\left(\frac{1}{3^2}-1\right)$$
$$v_{n+1}-v_n=3^{-2n}\left(\frac{1}{9}-1\right)$$
$$v_{n+1}-v_n=-\frac{8}{9}\times 3^{-2n}$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $v_{n+1}-v_n<0$

لأن: $-\frac{8}{9}<0$

ومن أجل كل عدد طبيعي n: $3^{-2n}>0$

إذن: (v_n) متناقصة من أجل كل عدد طبيعي n.

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح 2.

2012 الموضوع الأول (6 نقاط)

c,b,a ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية حسابية متزايدة أساسها r حيث: $a+b+c=9$.

1.أ-احسب b ثم أكتب a و b بدلالة r.

ب-علما أن: $a\times c=-16$

عين الأساس r ثم استنتج a و c.

2. (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0=-2$ و أساسها 5 .

أ- عبر عن الحد العام u_n بدلالة n.

ب-احسب u_{15} ثم استنتج المجموع:

$$S=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{15}$$

3. المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $8v_n-u_n=0$

احسب المجموع: $S'=v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{15}$.

حل مقترح

a، b، c ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية متزايدة تماما أساسها r حيث: $a+b+c=9$.

1) أ- حساب b:

بما أن a، b، c ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية فإن:

الوسط الحسابي هو: $a+c=2b$ .....

لدينا: $a+b+c=9$ .....

$(a+c)+b=9$

$2b+b=9$

أي: $3b=9$ .....

ومنه نجد: $b=3$ .....

نكتب a و c بدلالة r:

لدينا: $b=a+r$ .....

ومنه: $a=b-r$ .....

بالتعويض: $a=3-r$ .....

ولدينا: $c=b+r$ .....

بالتعويض: $c=3+r$ .....

ب- علما أن: $a\times c=-16$، نعين الأساس r:

لدينا: $a\times c=-16$ .....

بالتعويض: $(3-r)\times(3+r)=-16$ .....

بالنشر: $9-r^2=-16$ .....

أي: $r^2=25$ .....

بما أن الأساس موجب فإن: $r=5$ .....

استنتاج a و c:

لدينا: $a=3-r$ .....

بالتعويض نجد: $a=-2$ .....

ولدينا: $c=3+r$ .....

بالتعويض نجد: $c=8$ .....

2) (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0=-2$ وأساسها 5.

أ- نعبر عن الحد العام u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n=u_0+n\times r'$$

بالتعويض نجد: $u_n=-2+5n$ .....

ب- حساب u_{15}:

من أجل $n=15$ في عبارة الحد العام:

لدينا: $u_{15}=-2+5\times 15$ .....

نجد: $u_{15}=73$ .....

استنتاج المجموع: $S=u_0+u_1+\cdots+u_{15}$.

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S=\frac{\text{عدد الحدود}}{2}\times(\text{الحد الأخير في المجموع}+\text{الحد الأول في المجموع})$$

حيث: $u_0=-2$ و $u_{15}=73$: $S=\frac{15-0+1}{2}\times(u_0+u_{15})$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$S=\frac{16}{2}\times(-2+73)$$

ومنه نجد: ..... $S=568$

3) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة:

$$8v_n-u_n=0$$

- حساب المجموع: $S'=v_0+v_1\ldots+v_{15}$.

لدينا: ..... $8v_n-u_n=0$

ومنه: ..... $v_n=\frac{1}{8}u_n$

ولدينا: ..... $S'=v_0+v_1+\cdots+v_{15}$

$$S'=\left(\frac{1}{8}u_0\right)+\left(\frac{1}{8}u_1\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}u_{15}\right)$$

$$S'=\frac{1}{8}(u_0+u_1+\cdots+u_{15})$$

ومنه: ..... $S'=\frac{1}{8}S$

بالتعويض نجد: ..... $S'=71$

2012 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(u_n) متتالية حسابية متزايدة، أساسها r ، حدها الأول u_1 و $u_3=7$.

1.أ-احسب بدلالة r الجدائين: $T_1=u_1\times u_5$ و $T_2=u_2\times u_4$.

ب-عين الأساس r بحيث: $T_2-T_1=27$.

2.نضع $r=3$.

أ-أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

ب-نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

بين أن: $S=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$، $S_n=\frac{3n^2-n}{2}$.

ج-جد العدد الطبيعي n بحيث: $S_n=145$.

3.أ-أكتب الحد u_{n+5} بدلالة العدد الطبيعي n.

ب-تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n غيرمعدوم:

$$\frac{u_{n+5}}{n}=3+\frac{13}{n}$$

ج-استنتج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا.

حل مقترح

(u_n) متتالية حسابية متزايدة، أساسها r، حدها الأول u_1 و $u_3=7$.

1) أ- حساب بدلالة n الجدائين:

$T_1=u_1\times u_5$ و $T_2=u_2\times u_4$.

- نكتب u_1 و u_5 بدلالة r و u_3 (لأن u_3 معلوم)

لدينا: ..... $u_3=u_1+2r$

ومنه: ..... $u_1=u_3-2r$

بالتعويض: ..... $u_1=7-2r$

ولدينا: ..... $u_5=u_3+2r$

بالتعويض: ..... $u_5=7+2r$

وعليه: ..... $T_1=u_1\times u_5$

بالتعويض: ..... $T_1=(7-2r)\times(7+2r)$

بالنشر نجد: ..... $T_1=49-4r^2$

- نكتب u_2 و u_4 بدلالة r و u_3 (لأن u_3 معلوم)

لدينا: ..... $u_3=u_2+r$

ومنه: ..... $u_2=u_3-r$

بالتعويض: ..... $u_2=7-r$

ولدينا: ..... $u_4=u_3+r$

بالتعويض: ..... $u_4=7+r$

وعليه: ..... $T_2=u_2\times u_4$

بالتعويض: ..... $T_2=(7-r)\times(7+r)$

بالنشر نجد: ..... $T_2=49-r^2$

ب- نعين الأساس r بحيث: $T_2-T_1=27$.

لدينا من السؤال السابق:

$$\begin{cases}T_1=49-4r^2 \ldots 1\\ T_2=49-r^2 \ldots 2\end{cases}$$

بطرح 2 من 1: ..... $T_2-T_1=(49-r^2)-(49-4r^2)$

أي: ..... $T_2-T_1=49-r^2-49+4r^2$

فنجد: ..... $T_2-T_1=3r^2$

ولدينا: ..... $T_2-T_1=27$

ومنه: ..... $3r^2=27$

أي: ..... $r^2=9$

بما أن (u_n) متتالية حسابية متزايدة فإن: ..... $r=3$

2) نضع: $r=3$.

أ- نكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_1 بالعلاقة:

$$u_n=u_1+(n-1)r$$

لدينا: ..... $u_1=7-2r$

أي: ..... $u_1=1$

بالتعويض في عبارة الحد العام: ..... $u_n=1+3(n-1)$

ومنه نجد: ..... $u_n=3n-2$

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

- نبين أن: $S_n=\frac{3n^2-n}{2}$

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$

$S_n = \frac{n-1+1}{2} \times (u_1 + u_n)$

$S_n = \frac{n}{2} \times (1 + 3n - 2)$

$S_n = \frac{n(3n-1)}{2}$

بالنشر نجد: $S_n = \frac{3n^2-n}{2}$

جـ- نجد العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 145$

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: $S_n = 145$

أي: $3n^2 - n - 290 = 0$

نجد: $\Delta = 3481 = (59)^2$

للمعادلة حلين متمايزين هما: $n_1 = 10$ و $n_2 = -\frac{29}{3}$

وبما أن n عدد طبيعي فإن: $n = 10$

3) أ- نكتب الحد u_{n+5} بدلالة العدد الطبيعي n:

لدينا: $u_n = 3n - 2$

فيكون: $u_{n+5} = 3(n+5) - 2$

أي: $u_{n+5} = 3n + 15 - 2$

ومنه: $u_{n+5} = 3n + 13$

ب- نتحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$

لدينا: $u_{n+5} = 3n + 13$

فيكون: $\frac{u_{n+5}}{n} = \frac{3n+13}{n}$

أي: $\frac{u_{n+5}}{n} = \frac{3n}{n} + \frac{13}{n}$

ومنه: $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$

جـ- استنتاج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد: $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا:

يكون العدد: $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا إذا كان العدد: $\frac{13}{n}$ طبيعيا.

ويكون العدد: $\frac{13}{n}$ طبيعيا إذا كان n من قواسم العدد 13.

وقواسم العدد 13 هي: $D_{13} = \{1, 13\}$

ومنه قيم n هي: $n = 13$ و $n = 1$

2013 الموضوع الأول (6 نقاط)

(v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 2$ و أساسها 3.

1.أ-عبرعن v_n بدلالة n.

ب-احسب بدلالة n الفرق $v_{n+1} - v_n$، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n).

2.نضع، من أجل عدد طبيعي غير معدوم n:

$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$.

أ-احسب بدلالة n المجموع S_n .

ب-عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 80$.

ج-أثبت بالتراجع أنه، من أجل عدد طبيعي n، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 .

حل مقترح

(v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 2$ وأساسها 3.

1) أ- نعبر عن v_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول v_0 بالعلاقة:

$v_n = v_0 \times q^n$

حيث: $q = 3$ و $v_0 = 2$،

بعد التعويض نجد: $v_n = 2 \times 3^n$

ب- حساب $v_{n+1} - v_n$ الفرق بدلالة n:

$v_{n+1} - v_n = 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n$

$v_{n+1} - v_n = 2 \times 3 \times 3^n - 2 \times 3^n$

$v_{n+1} - v_n = (3-1)2 \times 3^n$

$v_{n+1} - v_n = 2 \times 2 \times 3^n$

ومنه: $v_{n+1} - v_n = 4 \times 3^n$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (v_n):

بما أن: $4 > 0$

ومن أجل كل عدد طبيعي n: $3^n > 0$

فإن: $4 \times 3^n > 0$

ومنه: $v_{n+1} - v_n > 0$

إذن: (v_n) متتالية هندسية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

أ- حساب بدلالة n المجموع S_n:

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$S_n = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$

$S_n = v_0 \times \frac{1-q^{n-1-0+1}}{1-q}$ حيث $q = 3$ و $v_0 = 2$

$S_n = 2 \times \frac{1-3^n}{1-3}$

ومنه نجد: $S_n = 3^n - 1$

ب- نعين قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 80$.

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: $S_n = 80$

أي: $3^n - 1 = 80$

أو: $3^n = 81$

حيث: $81 = 3^4$

ومنه: $3^n = 3^4$

بالمطابقة نجد: $n = 4$

جـ- أثبت بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2.

لاحظ أن: $S_n = 3^n - 1$

العدد S_n يقبل القسمة على 2 يعني: $S_n \equiv 0\ [2]$

نضع: $P(n)$: $S_n \equiv 0\ [2]$

- من أجل $n = 0$ لدينا: $S_0 = 0$ و $0 \equiv 0\ [2]$.

ومنه $P(0)$ صحيحة.

- نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

أي: $S_n \equiv 0\ [2]$

- ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

• ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

أي: $S_{n+1} \equiv 0\ [2]$ .....

لدينا فرضا: $S_n \equiv 0\ [2]$ .....

$3^n - 1 \equiv 0\ [2]$

$3^n \equiv 1\ [2]$

نضرب طرفي الموافقة في العدد $(+3)$:

$3 \times 3^n \equiv 3 \times 1\ [2]$

$3 \times 3^n \equiv 3\ [2]$

ولدينا: $3 \equiv 1\ [2]$ .....

وحسب خاصية التعدي يكون: $3^{n+1} \equiv 1\ [2]$ .....

نضيف العدد (-1) إلى طرفي الموافقة:

$(3^{n+1} - 1) \equiv (1 - 1)\ [2]$

$3^{n+1} - 1 \equiv 0\ [2]$

ومنه: $S_{n+1} \equiv 0\ [2]$ .....

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n \equiv 0\ [2]$.

أي من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2.

2013 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها 5 بحيث:

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$.

1.احسب u_0.

2.بين أنه، من أجل عدد طبيعي n: $u_n = 5n + 1$.

3.عين العدد الطبيعي n بحيث: $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$.

4. احسب بدلالة n المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{2013}$.

5.المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n = 2u_n + 1$

أ-ادرس اتجاه تغير المتتالية (v_n).

ب-احسب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{2013}$.

حل مقترح

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها 5 بحيث:

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$

1) حساب u_0:

نكتب: u_1، u_2 و u_3 بدلالة r و u_0.

لدينا: $u_1 = u_0 + r$ .....

ومنه: $u_1 = u_0 + 5$ .....

لدينا: $u_2 = u_0 + 2r$ .....

ومنه: $u_2 = u_0 + 10$ .....

لدينا: $u_3 = u_0 + 3r$ .....

ومنه: $u_3 = u_0 + 15$ .....

لدينا: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$ .....

$(u_0) + (u_0 + 5) + (u_0 + 10) + (u_0 + 15) = 34$

$4u_0 + 30 = 34$

$4u_0 = 4$

فنجد: $u_0 = 1$ .....

2) نبين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 5n + 1$.

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n = u_0 + n \times r$$

ومنه نجد: $u_n = 5n + 1$ .....

3) نعين العدد الطبيعي n بحيث: $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$.

$u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$

$[5(n+1) + 1] + [5n + 1] - 8n = 4033$

$5n + 6 + 5n + 1 - 8n = 4033$

$2n + 7 = 4033$

$2n = 4026$

ومنه: $n = 2013$ .....

4) حساب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{2013}$.

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$$

$$S = \frac{2013 - 0 + 1}{2} \times (u_0 + u_{2013})$$

حيث: $u_0 = 1$ و $u_{2013} = 10066$.

$$S = \frac{2014}{2} \times (1 + 10066)$$

نجد: $S = 10137469$ .....

5) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة:

$$v_n = 2u_n + 1$$

أ- ندرس اتجاه تغير المتتالية (v_n):

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n) ندرس إشارة الفرق:

$$v_{n+1} - v_n$$

$v_{n+1} - v_n = (2u_{n+1} + 1) - (2u_n + 1)$

$v_{n+1} - v_n = 2u_{n+1} + 1 - 2u_n - 1$

$v_{n+1} - v_n = 2u_{n+1} - 2u_n$

$v_{n+1} - v_n = 2[5(n+1) + 1] - 2[5n + 1]$

$v_{n+1} - v_n = 2(5n + 6) - 2(5n + 1)$

$v_{n+1} - v_n = 10n + 12 - 10n - 2$

ومنه: $v_{n+1} - v_n = 10$ .....

إذن: $v_{n+1} - v_n > 0$ .....

ومنه: (v_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب- حساب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + v_2 \ldots + v_{2013}$.

$S' = v_0 + v_1 + v_2 \ldots + v_{2013}$

$S' = (2u_0 + 1) + (2u_1 + 1) + \cdots + (2u_{2013} + 1)$

$S' = (2u_0 + 2u_1 + \cdots + 2u_{2013}) + (1 + 1 + \cdots 1)$

$S' = 2(u_0 + u_1 + \cdots + u_{2013}) + (1 + 1 + \cdots + 1)$

$S' = 2S + 2014 \times 1$

ومنه: $S' = 2S + 2014$ .....

نجد: $S' = 20276952$ .....

2014 الموضوع الأول (6 نقاط)

عين الاقتراح الوحيد الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة، في كل حالة من الحالات الأربعة الآتية، مع التعليل:

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

1. (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدها $u_2 = 1$. الحد العام للمتتالية (u_n) هو:

أ- $u_n = 1+3n$ ب- $u_n = 7+3n$ ج- $u_n = -5+3n$.

2. n عدد طبيعي .المجموع: $1+2+3+...+n$ يساوي:

أ- $\frac{n^2+n}{2}$ ب- $\frac{n(n-1)}{2}$ ج- $\frac{n^2+1}{2}$.

3. x عدد حقيقي .تكون الأعداد ، و بهذا الترتيب حدود متعاقبة لمتتالية هندسية اذا كان:

أ- $x=3$ ب- $x=5$ ج- $x=-2$.

4. (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها العام $v_n = 3\times 2^{n+1}$.

أساس المتتالية (v_n) هو:

أ- 2 ب- 3 ج- 6 .

حل مقترح

نعين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاث، في كل حالة من الحالات الأربع الآتية، مع التعليل.

1) (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدها $u_2 = 1$.

الحد العام للمتتالية (u_n):

نفرض أن الحد الأول هو u_0.

فيكون: $u_2 = u_0 + 2r$ .....

أي: $u_0 = u_2 - 2r$ .....

نجد: $u_0 = -5$ .....

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n = u_0 + n \times r$$

ومنه نجد: $u_n = -5 + 3n$ .....

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح 3.

ملاحظة:

يمكن اعتبار u_2 هو الحد الأول للمتتالية (u_n)، فتصبح عبارة الحد العام كالتالي: $u_n = u_2 + (n-2)r$.

بالتعويض نتحصل على نفس النتيجة: $u_n = -5 + 3n$ .....

2) n عدد طبيعي،

حساب المجموع: $S = 1+2+3+...+n$.

• لاحظ أن S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها 1.

تعطى عبارة المجموع S بالعلاقة التالية:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

نجد: $S = \frac{n^2+n}{2}$ .....

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح 1.

3) x عدد حقيقي، تكون الأعداد $x-2$ ، x ، $x+1$ بهذا الترتيب حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية إذا كان:

الوسط الهندسي: $x^2 = (x-2)(x+1)$ .....

بالنشر: $x^2 = x^2 + x - 2x - 2$ .....

بعد حل المعادلة نجد: $x = -2$ .....

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح 3.

4) (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$.

حدها العام: $v_n = 2 \times 3^{n+1}$.

حساب أساس المتتالية:

$v_{n+1} = 2 \times 3^{(n+1)+1}$

$v_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} \times 3$

نجد: $v_{n+1} = v_n \times 3$ .....

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$.

ومنه: الجواب الصحيح هو الاقتراح 2.

2014 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(v_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي: $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1} = 5v_n + 4$.

1.احسب v_1 ، v_2 و v_3.

2.نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = v_n + 1$.

أ-بين أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدها الأول $u_0 = 2$.

ب-أكتب u_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n.

ج-حلل العدد 1250 الى جداء عوامل أولية و استنتج أنه حد من حدود المتتالية (u_n).

3.احسب بدلالة n المجموع حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}$$

4. احسب بدلالة n المجموع حيث: $S'_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{n-1}$

حل مقترح

(v_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} = 5v_n + 4$.

1) حساب: v_1 ، v_2 و v_3.

- من أجل: $n = 0$ لدينا: $v_1 = 5v_0 + 4$ نجد: $v_1 = 9$ .....
- من أجل: $n = 1$ لدينا: $v_2 = 5v_1 + 4$ نجد: $v_2 = 49$ .....
- من أجل: $n = 2$ لدينا: $v_3 = 5v_2 + 4$ نجد: $v_3 = 249$ .....

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = v_n + 1$.

أ- نبين أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدها الأول $u_0 = 2$:

تكون المتتالية (u_n) هندسية اذا كان:

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

لدينا: $u_{n+1} = v_{n+1} + 1$ .....

$u_{n+1} = (5v_n + 4) + 1$

$u_{n+1} = 5v_n + 5$

$u_{n+1} = 5(v_n + 1)$

ومنه: $u_{n+1} = 5 \times u_n$ .....

إذن: (u_n) متتالية هندسية أساسها: $q = 5$ وحدها الأول: u_0

حيث: $u_0 = v_0 + 1$ .....

ومنه نجد: $u_0 = 2$ .....

ب- نكتب u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 بالعلاقة:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

حيث: $q = 5$ و $u_0 = 2$.

بعد التعويض نجد: $u_n = 2 \times 5^n$ .....

استنتاج v_n بدلالة n:

لدينا: $u_n = v_n + 1$ .....

أي: $v_n = u_n - 1$ .....

ومنه: $v_n = 2 \times 5^n - 1$ .....

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

جـ- نحلل العدد 1250 إلى جداء عوامل أولية:

1250	2
625	5
125	5
25	5
5	5
1	

$1250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$
$1250 = 2 \times 5^4$

استنتاج أن 1250 حد من حدود المتتالية (u_n):

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: $u_n = 1250$ .....
أي: $2 \times 5^n = 1250$ .....
ولدينا: $1250 = 2 \times 5^4$ .....
فيكون: $2 \times 5^n = 2 \times 5^4$ .....
بالمطابقة نجد: $n = 4$ .....
بما أن 4 عدد طبيعي، فإن العدد 1250 حد من حدود المتتالية (u_n).
حيث: $u_4 = 1250$ .....

3) أ- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:
$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.
تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$S_n = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$

حيث $q = 5$ و $u_0 = 2$ $\quad S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n-1-0+1}}{1-q}$

$S_n = 2 \times \frac{1 - 5^n}{1 - 5}$

ومنه نجد: $S_n = \frac{1}{2}(5^n - 1)$ .....

ب- حساب بدلالة n المجموع S'_n حيث:
$S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

$S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$
$S'_n = (u_0 - 1) + (u_1 - 1) + \cdots + (u_{n-1} - 1)$
$S'_n = (u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}) - (1 + 1 + \cdots + 1)$
$S'_n = S_n - n \times 1$
ومنه: $S'_n = S_n - n$ .....
بالتعويض: $S'_n = \frac{1}{2}(5^n - 1) - n$ .....

2015 الموضوع الأول (7 نقاط)

(u_n) المتتالية الهندسية التي وحدها الأول u_0 و أساسها $q = 3$

1. احسب u_1 و u_2.
2. أكتب u_n بدلالة n ثم استنتج u_5.
3. عين اتجاه تغير المتتالية (u_n).
4. أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

ب- استنتج قيمة المجموع: $2 + 6 + 18 + \ldots + 486$

5. أ- عين باقي القسمة الاقليدية على 5 لكل من الأعداد 3، 3^2، 3^3 و 3^4.

ب- استنتج أنه لكل k من $\mathbb{N}$: $3^{4k} = 1[5]$.

6. عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $3^n - 1$ قابل للقسمة على 5.

حل مقترح

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q حيث:
$u_0 = 2$ و $q = 3$.

1) حساب u_1 و u_2:

لدينا: $u_1 = u_0 \times q$ .....
ومنه: $u_1 = 6$ .....
ولدينا: $u_2 = u_0 \times q^2$ .....
ومنه: $u_2 = 18$ .....

2) نكتب u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 بالعلاقة:
$u_n = u_0 \times q^n$
حيث: $q = 3$ و $u_0 = 2$.
بعد التعويض نجد: $u_n = 2 \times 3^n$ .....

استنتاج u_5:

لدينا: $u_5 = 2 \times 3^5$ .....
ومنه: $u_5 = 486$ .....

3) تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n):

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) ندرس اشارة الفرق:
$u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n = 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n$
$u_{n+1} - u_n = 2 \times 3 \times 3^n - 2 \times 3^n$
$u_{n+1} - u_n = 2 \times 3^n(3 - 1)$
$u_{n+1} - u_n = 2 \times 2 \times 3^n$
$u_{n+1} - u_n = 4 \times 3^n$

بما أن: $4 > 0$ .....
ومن أجل كل عدد طبيعي n: $3^n > 0$ .....
فإن: $4 \times 3^n > 0$ .....
ومنه: $u_{n+1} - u_n > 0$ .....
إذن: (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

4) أ- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:
$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$.
تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$S_n = (\text{الحد الأول في المجموع}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$

حيث $q = 3$ و $u_0 = 2$ $\quad S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n-1-0+1}}{1-q}$

$S_n = 2 \times \frac{1 - 3^n}{1 - 3}$

ومنه نجد: $S_n = (3^n - 1)$ .....

ب- استنتاج قيمة المجموع: $2 + 6 + 18 + \cdots + 486$.
لاحظ أن:

$2 + 6 + 18 + \cdots + 486 = u_0 + u_1 + u_2 \ldots + u_5$
$2 + 6 + 18 + \cdots + 486 = u_0 \times \frac{1 - q^{5-0+1}}{1 - q}$
$2 + 6 + 18 + \cdots + 486 = 2\frac{1 - 3^6}{1 - 3}$
$2 + 6 + 18 + \cdots + 486 = 3^6 - 1$
ومنه: $2 + 6 + 18 + \cdots + 486 = 728$ .....

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ملاحظة:

يمكن تعويض n مباشرة في علاقة S_n بالعدد 6 (لدينا 6 حدود في المجموع: $2+6+18+54+162+486$).

5) أ- تعيين باقي القسمة الإقليدية على 5 لكل من الأعداد: 3، 3^2، 3^3 و 3^4.

باقي قسمة 3 على 5 هو: 3

باقي قسمة 3^2 على 5 هو: 4

باقي قسمة 3^3 على 5 هو: 2

باقي قسمة 3^4 على 5 هو: 1

العدد	3	3^2	3^3	3^4
الباقي على 5	3	4	2	1

ب- استنتاج انه لكل k من $\mathbb{N}$: $3^{4k}=1\ [5]$:

لدينا من السؤال السابق: ..... $3^4=1\ [5]$

وحسب خواص الموافقات فإن: ..... $(3^4)^k=1^k\ [5]$

ومنه من اجل كل k من $\mathbb{N}$: ..... $3^{4k}=1\ [5]$

6) تعيين الاعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون 3^n-1 قابلا للقسمة على 5.

3^n-1 يقبل القسمة على 5 يعني: ..... $3^n-1=0\ [5]$

أي: ..... $3^n=1\ [5]$

ومنه: ..... $n=4k\ \ (k\in\mathbb{N})$

2015 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r حيث: $u_2=\frac{1}{2}$ و $u_1-u_3=5$.

1.أ-بين أن : $u_1+u_3=1$.

ب-عين الحد الأول ، ثم استنتج أن .

2. أكتب u_n بدلالة n.

3.أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$.

ب-عين قيمة العدد الطبيعي التي يكون من أجلها $S_n=\frac{-657}{2}$

4. n عدد طبيعي غير معدوم نضع :

$$T_n=u_1+2u_2+3u_3+\ldots+nu_n$$

أ-تحقق أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$:

$$(n+2)(9-5n)=-5n^2-n+18$$

ب- باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أثبت أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$:

$$T_n=\frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$$

حل مقترح

(u_n) متتالية **حسابية** حدها الأول u_1 وأساسها r حيث:

$u_2=\frac{1}{2}$ و $u_1-u_3=5$.

1) أ- نبين أن: $u_1+u_3=1$.

الوسط الحسابي: ..... $u_1+u_3=2u_2$

بالتعويض: ..... $u_1+u_3=2\times\frac{1}{2}$

ومنه: ..... $u_1+u_3=1$

ب- نعين الحد الأول u_1:

لدينا: ..... $\begin{cases}u_1-u_3=5\ldots1\\u_1+u_3=1\ldots2\end{cases}$

بجمع 1 و 2 طرف لطرف: ..... $u_1-u_3+u_1+u_3=6$

نجد: ..... $2u_1=6$

ومنه: ..... $u_1=3$

استنتاج أن: $r=-\frac{5}{2}$.

لدينا: ..... $u_2=u_1+r$

ومنه: ..... $r=u_2-u_1$

نجد: ..... $r=-\frac{5}{2}$

2) نكتب u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية **حسابية** حدها الأول u_1 بالعلاقة:

$$u_n=u_1+(n-1)\times r$$

ومنه: ..... $u_n=3-\frac{5}{2}(n-1)$

نجد: ..... $u_n=-\frac{5}{2}n+\frac{11}{2}$

3) أ- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$.

تعطى عبارة المجموع S_n بالعلاقة التالية:

$$S_n=\frac{\text{عدد الحدود}}{2}\times(\text{الحد الأخير في المجموع}+\text{الحد الأول في المجموع})$$

$$S_n=\frac{n-1+1}{2}\times(u_1+u_n)$$

$$S_n=\frac{n}{2}\times\left(3-\frac{5}{2}n+\frac{11}{2}\right)$$

نجد: ..... $S_n=\frac{n(17-5n)}{4}$

ب- نعين قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها: $S_n=-\frac{657}{2}$.

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: ..... $S_n=-\frac{657}{2}$

أي: ..... $5n^2-17n-1314=0$

نجد: ..... $\Delta=26569=(163)^2$

للمعادلة حلين متمايزين هما: ..... $n_1=18$ و $n_2=-\frac{73}{5}$

وبما أن n عدد طبيعي فإن:..... $n=18$

نرفض القيمة n_2 لأن $\left(-\frac{73}{5}\right)$ ليس عددا طبيعيا.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ليكن n عدد طبيعي غير معدوم، نضع:

$T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n$.

أ- نتحقق انه لكل n من $\mathbb{N}^*$:

$(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$.

بالنشر: $(n+2)(9-5n) = 9n - 5n^2 + 18 - 10n$ .....

أي: $(n+2)(9-5n) = -5n^2 + (9n - 10n) + 18$ .....

ومنه: $(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$ .....

ب- باستعمال الاستدلال بالتراجع، نثبت انه لكل n من $\mathbb{N}^*$:

$T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$.

نضع: $P(n) : T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$ .....

- من أجل $n = 1$

لدينا: $T_1 = 1 \times u_1 = 3$.....

و: $T_1 = \frac{1}{6} \times 1 \times (1+1)(14-5\times 1) = 3$ .....

ومنه $P(1)$ صحيحة.

- نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

أي: $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$ .....

- ونبرهن ان $P(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

أي: $T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(9-5n)$ .....

لدينا فرضا: $T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n$ .....

$T_{n+1} = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n + (n+1)u_{n+1}$

$T_{n+1} = T_n + (n+1)u_{n+1}$

حيث: $u_{n+1} = -\frac{5}{2}(n+1) + \frac{11}{2}$ .....

$u_{n+1} = -\frac{5}{2}n - \frac{5}{2} + \frac{11}{2}$

$u_{n+1} = -\frac{5}{2}n + \frac{6}{2}$

$u_{n+1} = \frac{1}{2}(6-5n)$

ومنه: $T_{n+1} = T_n + \frac{1}{2}(n+1)(6-5n)$ .....

$T_{n+1} = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n) + \frac{1}{2}(n+1)(6-5n)$

$T_{n+1} = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n) + \frac{3}{6}(n+1)(6-5n)$

$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)[n(14-5n) + 3(6-5n)]$

$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(14n - 5n^2 + 18 - 15n)$

$T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(-5n^2 - n + 18)$

لدينا: $-5n^2 - n + 18 = (n+2)(9-5n)$.....

ومنه: $T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(9-5n)$ .....

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$:

$T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$.

2016 الموضوع الأول (7 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n:

$u_n = 3n - 2$.

1.احسب u_0، u_1، u_2 و u_3.

2.بين أن المتتالية (u_n) حسابية وعين أساسها.

3.أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4.بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

5.أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

ب-عين العدد بحيث يكون: $S_n = 328$.

حل مقترح

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n:

$u_n = 3n - 2$.

1.حساب u_0، u_1، u_2 و u_3.

$u_0 = -2$

$u_1 = 1$

$u_2 = 4$

$u_3 = 7$

2.اثبات أن المتتالية (u_n) حسابية.

$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - 3n + 2$

$= 3n + 3 - 2 - 3n + 2$

$= 3$

اذن: (u_n) متتالية حسابية أساسها 3.

3.دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n).

بما أن $r = 3 > 0$ اذن (u_n) متتالية متزايدة.

4.بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية (u_n)

نقوم بحل المعادلة:

$u_n = 1954$

أي: $3n - 2 = 1954$ معناه: $u_{652} = 1954$

$n = 652 \in \mathbb{N}$

رتبته 653 لأن الحد الأول هو u_0.

5.أ- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

$= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$

و منه $= (n+1)\frac{(-2 + 3n - 2)}{2}$.

$= (n+1)\left(\frac{-4 + 3n}{2}\right)$

نقوم بالنشر نتحصل على: $S_n = \frac{3n^2 - n - 4}{2}$

ب-تعين العدد بحيث يكون: $S_n = 328$.

$\frac{3n^2 \quad n \quad 4}{-2 \quad -} \quad 328$

$=$

معناه: $3n^2 \quad n \quad 4 \quad 2(328)$

$3^{\,2} - \quad - 660 \quad 0$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$n_1 = 15 \in \mathbb{N}$

هي معادلة من الدرجة الثانية تقبل حلان هما : $n_2 = \frac{-44}{3} \notin \mathbb{N}$

و بالتالي من أجل $n = 15$ لدينا: $S_{\ n} = 328$

2016 الموضوع الثاني (6 نقاط)

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 و تحقق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$

1. احسب الحد الأول u_0.
2. أكتب الحد العام u_n بدلالة n.
3. عين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$.
4. احسب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{49}$.
5. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n = 2u_n + 3$.
احسب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{49}$.

حل مقترح

(u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 و تحقق:

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$

نجمع المعادلات نتحصل : $\begin{cases} u_1 = u_0 + r = u_0 + 3 \\ u_2 = u_0 + 2r = u_0 + 6 \\ u_3 = u_0 + 3r = u_0 + 9 \end{cases}$

$u_0 + u_0 + 3 + u_0 + 6 + u_0 + 9 = 10$

أي: $4u_0 + 18 = 10$ و بالتالي: $u_0 = -2$.

2. كتابة الحد العام u_n بدلالة n: $u_n = -2 + 3n$

3. تعين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$.

أي: $u_n = -2 + 3n = 145$

يعني: $n = 49$ $u_{49} = 145$

4. حساب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{49}$.

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{49}$$
$$= 50\left(\frac{u_0 + u_{49}}{2}\right)$$
$$= 50\left(\frac{-2 + 145}{2}\right)$$
$$= 3575$$

5. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n = 2u_n + 3$.
احسب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{49}$.

$$S' = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{49}$$
$$= 2S + 3(50)$$
$$= 2(3575) + 150$$
$$= 7300$$

2017 الموضوع الأول (6 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث:

$u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.

1. بين أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.

2. أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم استنتج قيمة الحد السابع.

3. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع :

$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

4. استنتج قيمة المجموع: $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_6$

حل مقترح

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث:

$u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.

1. اثبات أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.

$u_3 = u_1 \times q^{3-1}$

$\frac{u_3}{u_1} = q^2$

من القانون : نضع: $n = 3; p = 1$.

$q^2 = \frac{320}{20} = 16$

$q = 4, q = -4$

$q = -4$ مرفوض لأن موجبة تماما. و بالتالي: $q = 4$

2. أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n:

$u_n = u_0 \times q^n = 5(4)^n$.

استنتج قيمة الحد السابع. $u_7 = 5(4)^7 = 20480$

3. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$
$$= u_0\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)$$
$$= 5\left(\frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4}\right)$$
$$= \frac{-5}{3}\left(1 - 4^{n+1}\right)$$

4. استنتاج قيمة المجموع: $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_6$

$S' = \frac{-5}{3}\left(1 - 4^{6+1}\right) = 27305$

4. استنتج قيمة المجموع: $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_6$

2017 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بحدها الأول: $u_0 = -5$

و $u_3 + u_7 = 50$.

1. عين الأساس r للمتتالية (u_n).

2. بين أن : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 6n - 5$.

3. أثبت أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n)، ماهي رتبته؟

4. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S :

$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

حل مقترح

(u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بحدها الأول: $u_0 = -5$

و $u_3 + u_7 = 50$.

1. تعين الأساس r للمتتالية (u_n).

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$\begin{cases} u_3 = u_0 + 3r = -5 + 3r \\ u_7 = u_0 + 7r = -5 + 7r \end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد:

$$-5+3r-5+7r=50$$

و منه:

$$10r-10=50$$

$$10r=60$$

$$r=6$$

2. من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 6n-5$.

لدينا: $u_0=-5$ و $r=6$ و بالتالي: $u_n=6n-5$

3.أثبات أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n)،

نحل المعادلة:

$$6n-5=2017$$

$$n=337\in\mathbb{N}$$

رتبته 338 لان: حدها الأول: $u_0=-5$

4. حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S:

$$S=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$$

$$=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$

أي:

$$=(n+1)\left(\frac{-5+6n-5}{2}\right)$$

$$=(n+1)\left(\frac{-10+6n}{2}\right)$$

$$=(n+1)(-5+3n)$$

$$=3n^2-2n-5$$

استثنائية 2017 الموضوع الأول (6 نقاط)

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 و أساسها r .

1.أحسبالحد u_4 علما أن: $u_3+u_5=20$.

2.أحسب الحد u_5 علما أن: $2u_4-u_5=7$.

3.استنتج قيمة r واحسب u_0.

4.تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=3n-2$.

5.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث:

$$S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$$

6.جد العدد الطبيعي n حيث: $S_n=33$.

حل مقترح

المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 و أساسها r .

1.حساب الحد u_4 علما أن: $u_3+u_5=20$.

باستعمال خاصية الوسط الحسابي:

$$u_3+u_5=2u_4$$

و بالتالي:

$$2u_4=20$$

$$u_4=10$$

2.أحسب الحد u_5 علما أن: $2u_4-u_5=7$. لدينا:

معناه:

$$2u_4-u_5=7$$

$$2(10)-u_5=7$$

$$u_5=13$$

3.استنتاج قيمة r

$$r=u_5-u_4$$

بما أن (u_n) متتالية حسابية فان:

$$r=13-10$$

$$r=3$$

حساب u_0.

$$u_4=u_0+4r$$

نأخذ المعادلة:

$$u_0+4(3)=10$$

$$u_0=-2$$

4.تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=3n-2$.

لدينا: $u_0=-2$ و $r=3$ و بالتالي: $u_n=3n-2$

5.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث:

$$S=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$$

$$=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$

و بالتالي:

$$=(n+1)\left(\frac{-2+3n-2}{2}\right)$$

$$=(n+1)\left(\frac{-4+3n}{2}\right)$$

6.ايجاد العدد الطبيعي n حيث: $S_n=33$.

$$(n+1)\left(\frac{-4+3n}{2}\right)=33$$

أي: $(n+1)(-4+3n)=66$ و تصبح: $3n^2-n-70=0$.

و نتحصل على حلان أحدهما مرفوض لأنه ليس عدد طبيعي و نقبل:

$$n=5$$

استثنائية 2017 الموضوع الثاني (6 نقاط)

في كل من الحالات الأربع التالية اقترحت ثلاثة اجابات. واحدة منها صحيحة ، يطلب تعيينها مع التعليل.

1. الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها -3 وحدها الأول 1 هو:

أ- -17 **ب-** -14 **ج-** -11 .

2. مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 هو:

أ- $\frac{3^{101}-1}{2}$ **ب-** $\frac{1-3^{100}}{2}$ **ج-** $\frac{3^{100}-1}{2}$.

3. نضع من أجل كل x عدد حقيقي: $a=2x+2$، $b=6x-3$، $c=4x$

الأعداد الحقيقية a، b، c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون :

أ- $x=\frac{4}{3}$ **ب-** $x=0$ **ج-** $x=\frac{3}{4}$

4. المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي : هي متتالية:

أ- حسابية أساسها 1 **ب-** هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ **ج-** لا حسابية ولا هندسية

حل مقترح

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

1. الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها -3 وحدها الأول 1 هو:

ب- -14

2. مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 هو:

ج- $\frac{3^{100}-1}{2}$

3. نضع من أجل كل x عدد حقيقي: $a=2x+2$، $b=6x-3$، $c=4x$

الأعداد الحقيقية a، b، c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون:

أ- $x=\frac{4}{3}$

4. المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي : هي متتالية:

أ- حسابية أساسها 1 **ب-** هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ **ج-** لا حسابية ولا هندسية

2018 الموضوع الأول (6 نقاط)

اقراح الجواب الوحيد الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة التالية ، مع التبرير:

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على ب: $u_n=n^2-1$، (u_n) متتالية:

أ- متزايدة تماما **ب-** متناقصة تماما **ج-** ليست رتبة

2. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1=3$ و أساسها $q=2$،

عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

أ- $v_n=3\times 2^n$ **ب-** $v_n=3\times 2^{n-1}$ **ج-** $v_n=2\times 3^n$

3. المجموع: $S_n=v_1+v_2+\ldots+v_n$ يساوي:

أ- $3\left(2^n-1\right)$ **ب-** $\left(2^n-1\right)$ **ج-** $2\left(3^n-1\right)$

حل مقترح

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على ب: $u_n=n^2-1$، (u_n) متتالية:

أ- متزايدة تماما

لأن: $u_{n+1}-u_n>0$

2. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1=3$ و أساسها $q=2$،

عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

ب- $v_n=3\times 2^{n-1}$

لأن حدها الأول v_1.

3. المجموع: $S_n=v_1+v_2+\ldots+v_n$ يساوي:

أ- $3\left(2^n-1\right)$

2018 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q حيث: $u_0\times u_2=576$ و $u_0+u_1=30$

1. بين أن $u_1=24$، ثم استنتج قيمة u_0.

2. بين أن $q=4$ ، ثم أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=18\times 4^n$، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4. احسب 4^4 ، ثم تحقق أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

5. احسب بدلالة المجموع: $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$

حل مقترح

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q حيث: $u_0\times u_2=576$ و $u_0+u_1=30$

1. اثبات أن $u_1=24$'

لدينا: $u_0\times u_2=576$ باستعمال خاصية الوسط الهندسي نجد:

$$u_0\times u_2=u_1^2$$

و بالتالي: $u_1^2=576$

$$u_1=24;u_1=-24$$

و بما أن (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما فان: $u_1=24$

استنتاج قيمة u_0:

$$u_0+u_1=30$$

لأن: $u_0=30-u_1=30-24$

$$u_0=6$$

$$u_1=u_0\times q$$

2. بين أن $q=4$، نعلم أن: $q=\frac{u_1}{u_0}=\frac{24}{6}=4$

، كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n: $u_n=6\times 4^n$

3. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=18\times 4^n$،

لدين: $u_n=6\times 4^n$ و بالتالي: $u_{n+1}=6\times 4^{n+1}$.

$$u_{n+1}-u_n=6\times 4^{n+1}-6\times 4^n$$
$$=6\times 4^n\times 4^1-6\times 4^n$$
$$=6\times 4^n(4-1)$$
$$=6\times 4^n(3)=18\times 4^n$$

و هو المطلوب

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

بما أن: $u_{n+1}-u_n=18\times 4^n>0$ فان المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

4. حساب 4^4 ،

لدينا: $4^4=256$

التحقق من أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n).

$$u_n=1536$$

نقوم بحل المعادلة: $6\times 4^n=1536$

$$4^n=\frac{1536}{6}=256$$

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n=\frac{2}{5}n-1$.

1) بيّن أنّ المتتالية (u_n) حسابية أساسها $\frac{2}{5}$ يُطلب حساب حدّها الأول u_1.

2) عيّن رتبة الحد الذي قيمته 575.

3) احسب قيمة المجموع S حيث: $S=u_1+u_2+\cdots+u_{1440}$.

4) (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n=4^{5u_n+6}$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_1.

ب) احسب بدلالة n المجموع: $S_n=v_1+v_2+\cdots+v_n$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

اذن: $4^n = 4^4$ و نعلم أن n عدد طبيعي فبالتالي: $n = 4$.

رتبته: 5 لأن الحد الأول هو u_0.

5.احسب بدلالة المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

معناه:

$$S_n = u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

أي:

$$= 24\left(\frac{1-4^n}{1-4}\right)$$

$$= 24\left(\frac{1-4^n}{-3}\right)$$

$$= -6\left(1-4^n\right)$$

$$= 6\left(4^n - 1\right)$$

2019 الموضوع الأول (6 نقاط)

حل مقترح

1.لأثبات أن المتتالية حسابية نقوم بحساب الفرق: $u_{n+1} - u_n$

و نتحصل على عدد حقيقي الذي يكون بدوره الأساس.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5}(n+1) - 1 - \frac{2}{5}n + 1$$

أي:

$$= \frac{2}{5}$$

اذن: $r = \frac{2}{5}$ هو أساس هذه المتتالية الحسابية.

الحد الأول: u_1

$$u_1 = \frac{2}{5}(1) - 1 = \frac{-3}{5}.$$

2.رتبة الحد الذي قيمته 575: نقوم بحل المعادلة:

$$u_n = \frac{2}{5}n + -1 = 575$$

$$n = 1440$$

و بالتالي رتبته 1440 أي: $u_{1440} = 575$ لأن الحد الأول هو u_1.

3.حساب المجموع:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{1440}$$

$$= 1440\left(\frac{u_1 + u_{1440}}{2}\right)$$

$$= 413568$$

4.لتكن (v_n) المتتالية المعرفة: $v_n = 4^{5u_n+6}$:

اثبات أن (v_n) متتالية هندسية:

أي نحسب حاصل القسمة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ و نتحصل على عدد حقيقي

الذي يسمى أساس هذه المتتالية.

نُبين أنّ حاصل القسمة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت

لدينا: $v_n = 4^{5u_n+6}$ ومنه: $v_{n+1} = 4^{5u_{n+1}+6}$

ولمـأنّ (u_n) حسابية فـإنّ $u_{n+1} = u_n + r$ أي: $\boxed{u_{n+1} = u_n + \frac{2}{5}}$.

وعليه: $4^{5\left(u_n+\frac{2}{5}\right)+6} = 4^{5u_n+2+6} = 4^{(5u_n+6)+2} = 4^{5u_n+6} \times 4^2$

وبالتالي: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4^{5u_n+6}\times 4^2}{4^{5u_n+6}} = 4^2 = 16$

اذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = 16}$، وحدّها الأول

$v_1 = 4^{5u_1+6} = 4^{5\left(\frac{-3}{5}\right)+6} = 4^{-3+6} = 4^3 = 64$ لأنّها معرّفة على "ا

ب- المجموع:

$$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_1\left(\frac{1-q^{n-1+1}}{1-q}\right) = 64\left(\frac{1-16^n}{1-16}\right) = \frac{64}{-15}(1-16^n)$$

$$= \frac{64}{15}(16^n - 1)$$

2019 الموضوع الثاني (6 نقاط)

(u_n) المتتالية الحسابية التي حدها الأول u_0 و أساسها r.

1) علما أنّ : $u_0 + u_1 + u_2 = 6$ ، عيّن u_1 .

2) علما أنّ : $2u_0 - 3u_1 = -10$ ، عيّن الحد الأول u_0، ثم استنتج قيمة r أساس المتتالية

3) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

4) أ) عيّن قيمة n حتى يكون $u_n = 2018$.

ب) أحسب الحد الخامس عشر للمتتالية (u_n).

5) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

6) عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون : $S_n = 96$

حل مقترح

1.تعيين u_1:

باستعمال خاصية الوسط الحسابي: $u_0 + u_2 = 2u_1$

$$3u_1 = 6$$

و منه: $u_1 = \frac{6}{3} = 2$.

2.تعين الحد الأول: u_0 علما أن:

$$2u_0 - 3u_1 = -10$$

أي:

$$2u_0 - 3(2) = -10$$

$$2u_0 = -4$$

$$u_0 = -2$$

تعين قيمة الأساس: $r = u_1 - u_0 = 2 - (-2) = 4$.

3.عبارة الحد العام:

$u_n = u_0 + nr = -2 + 4n$.

4.أ-تعيين قيمة حتى يكون $u_n = 2018$.

أي:

$$-2 + 4n = 2018$$

$$n = 505$$.

ب-حساب الحد الخامس عشر:

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

يعني نحسب u_{14} لأن الحد الأول هو u_0.

و بالتالي: $u_{14}=54$.

5.أ-حساب المجموع:

$$S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$$

يعني:

$$=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$

$$=(n+1)\left(\frac{-2-2+4n}{2}\right)$$

$$=(n+1)(-2+2n)$$

بعد النشر و التبسيط نتحصل على: $S_n=2n^2-2$

6.ايجا د العدد الطبيعي n حيث: $S_n=96$.

نقوم بحل معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الطبيعي n

نجد:

$$n=7\in\mathbb{N}$$

$$n=-7\notin\mathbb{N}$$

اذن : $n=7$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

إختبر نفسك...

❶.أ- (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 4n-1$ ، احسب u_0 ، u_1 و u_7:

ب-عين أساس المتتالية (u_n):

ج-ما هو اتجاه تغير المتتالية (u_n):

د-احسب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + ... + u_7$:

ه-احسب المجموع S_n' حيث: $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$:

و-أوجد العدد الطبيعي n حيث: $S'_n = 54$:

❷. أ- (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، احسب v_0 ، v_1:

ب-عين الأساس q و الحد الأول v_0 للمتتالية (v_n):

ج-عين اتجاه تغير المتتالية (v_n):

د-احسب المجموع S_n' بدلالة n حيث: $S'_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$:

ه-أوجد العدد الطبيعي n حيث: $S'_n = 3$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

❸ (u_n) متتالية حسابية و معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1 = 2$ و بالعلاقة : $u_2 - 2u_5 = 19$.

أ-احسب الأساس r لهذه المتتالية: (ارشاد أكتب كل من u_2 و u_5 بدلالة u_1 و r)

ب-أكتب عبارة الحد العام لهذه المتتالية:

ب- احسب الحد العاشر:

❹ (v_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_1 = 7$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $v_{n+1} = 2v_n + 1$

أ-.احسب v_2 ، v_3

ب-من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، نعرف المتتالية (t_n) كما يلي: $t_n = v_n + 1$.

أثبت أن (t_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها.:

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

هذا العمل من طرف انسان و احتمال السهو فيه وارد فارجوا من القراء التبليغ و التنبيه عبر البريد الالكتروني الخاص بالأستاذ شعبان أسامة

Chbnoussama@gmail.com

تجدون هذا الملف عبر مختلف منصات التواصل الاجتماعي للصفحة

5min Maths

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM