النّهايات + الاشتقاقية + دراسة دوال: كثير الحدود، جذرية، ناطقة وصمّاء



# تمارين شاملة في الدوال

## وفق البرنامج الوزاري
## 2021 / 2020

بالتوفيق في
شهادة البكالوريا



## الأستاذ
## عبد الرحمان
للرياضيات

لجميع الشعب العلمية

## تمارين شاملة في الدوال:

- العددية
- الأسية
- اللوغارتمية

قناة لتعليم الرياضيات لمختلف الأطوار
بدروس وتمارين قيّمة وبشرح مفصّل ومبسّط ودقيق
كما يمكنكم الاتصال بنا على أو أو

FB.COM/ABDOU. MATH17

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## التمرين الأول

ادرس قابلية اشتقاق الدّوال التالية عند القيمة $a$ المشار إليها في كل من الدّوال المعرفة بـ:

- $f_2(x)=x^2+1; a=2$
- $f_3(x)=x^2; a=1$
- $f_4(x)=x^2+x; a=-1$
- $f_5(x)=3x+1; a=0$
- $f_6(x)=\frac{x}{x+2}1; a=-1$
- $f_7(x)=\frac{1}{x+1}; a=2$
- $f_8(x)=\frac{1}{x}+2; a=-1$
- $f_9(x)=\frac{x+1}{x+3}; a=1$
- $f_{10}(x)=\sqrt{x+3}; a=6$
- $f_{11}(x)=\sqrt{x}; a=1$
- $f_{12}(x)=\sqrt{2x}; a=2$
- $f_{13}(x)=\sqrt{-x-1}+2; a=-1$

## التمرين الثاني

المستوي منسوب إلى معلم متعامد.

عين في كل حالة من الحالات التالية معادلة المماس لمنحنى كل دالة من الدّوال المعرفة كما يلي في النقطة ذات الفاصلة $x_0$:

- $f(x)=\frac{x^2+5x+2}{x^2+4x}; x_0=-2$
- $f(x)=-3x^3+x-4; x_0=0$
- $f(x)=2x+3-\frac{1}{(x+1)^2}; x_0=0$
- $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}+2; x_0=3$

## التمرين الثالث

$a$، $b$ و $c$ أعداد حقيقية.

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=ax^3+bx+c$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

- عين الأعداد $a$ ، $b$ و $c$ بحيث المنحنى $(C_f)$ يشمل النقطة $A(1;-3)$ ويقبل في النقطة $B(0;1)$ مماسا موازيا للمستقيم ذو المعادلة: $y=-6x$.

## التمرين الرابع

$f$ دالة كثير حدود من الدرجة الثانية تحقّق:

$$f'(3)=3 \qquad f(1)=2 \qquad f'(-2)=-3$$

- عيّن الدّالة $f$.

## التمرين الخامس

احسب مشتقة كل دالة من الدّوال المعرفة كما يلي:

- $f_1(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3+5x$
- $f_2(x)=\frac{3x^2+6x-3}{4}$
- $f_3(x)=\frac{2x+1}{x-2}$
- $f_4(x)=\frac{1}{x^2+2x-3}$
- $f_5(x)=(x^2+x)\sqrt{x}$
- $f_6(x)=\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}$
- $f_7(x)=\frac{x^2-8x+16}{x-3}$
- $f_8(x)=(2x+1)^2$
- $f_9(x)=2x+3-\frac{1}{x+3}$
- $f_{10}(x)=\frac{x^3+2x^2}{(x+1)^2}$
- $f_{11}(x)=\frac{-x^2+4x}{x^2-4x+3}$
- $f_{12}(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$
- $f_{13}(x)=sinx+3cosx$
- $f_{14}(x)=tanx$
- $f_{15}(x)=(sinx)(cosx)$
- $f_{16}(x)=cos^2x$
- $f_{17}(x)=\frac{1}{cosx}$
- $f_{18}(x)=\frac{1}{tanx}$
- $f_{19}(x)=\frac{1+sinx}{3+cosx}$
- $f_{20}(x)=sin(3x-2)$
- $f_{21}(x)=cos(-5x-5)$
- $f_{22}(x)=\sqrt{2x+2}$



## التمرين السادس

احسب النّهايات التالية:

- $\lim\limits_{x\to4}\left(\frac{\sqrt{x}}{1-x}\right)$
- $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{4-x^2}{x-2}\right)$
- $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x^2-3x+2}{1-x}\right)$
- $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)$
- $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)$
- $\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2-3x+2}\right)$
- $\lim\limits_{x\to9}\left(\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}\right)$
- $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)$
- $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{x+2}{x^2+x}+\frac{3x+1}{x^2-1}\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x}{x+3}}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-4+\frac{1}{x}\right)^3$
- $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x-1}}$
- $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2}\right)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x+4+\frac{sinx}{x}\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{cosx}{x-1}\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$
- $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

## التمرين السابع

احسب النّهايات التالية:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2-5x+2)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x^3-4x^2+9\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((2x+1)^2-5x^2+3\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-x-3}{x-1}\right)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2-2x+1}{(x-2)^2}\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-2x}{x^2-2x}\right)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{2x^2-x-1}\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x+1}-2x\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x+1}\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}+2x\right)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2-x}-x\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x-1}-x\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2\sqrt{x}-3}{3\sqrt{x}+2}\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{x}+2}\right)$

---

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

https://youtu.be/d3Tty_sfEFY . الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات

## التمرين الثامن

احسب النّهايات التالية:

- $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x}{x^2-1}$
- $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4}$
- $\lim\limits_{x\to-2}\frac{2x^2+3x-2}{x^2+x-2}$
- $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x^2+3x+2}$
- $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}}\frac{3x^2-5x+2}{9x^2-4}$
- $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^4+3x+1}{x^3+2x^2-1}$

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

https://youtu.be/d3Tty_sfEFY . الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## التمرين التاسع

احسب النّهايات التالية:

$$\bullet \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3} \quad \bullet \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x-2}-1}{\sqrt{x}-1} \quad \bullet \lim_{x\to 5}\frac{5\sqrt{x}-x\sqrt{5}}{x\sqrt{x}-5\sqrt{5}} \quad \bullet \lim_{x\to 4}\frac{x\sqrt{x}-8}{x^2-16}$$

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

https://youtu.be/d3Tty_sfEFY . الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات .

## التمرين العاشر

المستوي منسوب إلى معلم متعامد.

احسب نهايات كل من الدّوال المعرفة بالعبارات أدناه عند أطراف مجموعة تعريفها مفسّرا النتائج هندسيا:

- $f_1(x)=\dfrac{1}{x-2}$ ; $D_1=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$
- $f_2(x)=2-\dfrac{1}{x^2}$ ; $D_2=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
- $f_3(x)=\dfrac{2x^2}{1-x}$ ; $D_3=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$
- $f_4(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2+x-2}$ ; $D_4=]-\infty;-2[\cup]-2;1[\cup]1;+\infty[$
- $f_5(x)=\dfrac{-x+1}{x^2+1}$ ; $D_5=]-\infty;+\infty[$
- $f_6(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ ; $D_6=]-\infty;+\infty[$

## التمرين الحادي عشر

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ:

$$f(x)=\frac{x^2+2x+2}{x}$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

ب- احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}f(x)$ ، ثمّ فسر النتيجة هندسيا.

2- احسب $f'(x)$ ($f'$ الدالة المشتقة للدالة $f$).

3- ادرس إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$.

4- أ- أثبت أن المستقيم $(T)$ ذو المعادلة $y=x+2$ مقارب لـ $(C_f)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ب- ادرس الوضع النسبي بين المستقيم $(T)$ و المنحنى $(C_f)$.

5- بيّن أن النقطة $\Omega(0;2)$ مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$.

6- مثّل بيانيّا $(C_f)$.

## التمرين الثاني عشر

نعتبر الدّالة $f$ المعرفة على $D=\mathbb{R}-\{1;3\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- احسب نهايات الدّالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها، ثمّ فسّر ذلك هندسيا.

2- ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $f$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3- عيّن احداثيات نقط تقاطع $(C_f)$، مع حاملي محوري الإحداثيات.

4- أ- بيّن أنّه إذا كان $x\in D$ فإنّ: $(4-x)\in D$



ب- بيّن أنّ المستقيم ذو المعادلة $x=2$ محور تناظر لـ $(C_f)$.

5- مثّل بيانيا $(C_f)$.

## التمرين الثالث عشر

نعتبر الدّالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{x^2+x-3}{x+1}$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- ادرس تغيّرات الدّالة $f$.

2- أ- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يختلف عن $-1$ : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$. حيث $a$ ، $b$ و $c$ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

ب- استنتج أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$ يطلب تعيين معادلته.

ج- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$.

3- مثّل بيانيّا $(C_f)$.

## التمرين الرابع عشر

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=x^3+3x^2-4$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- ادرس تغيرات الدالة $f$.

2- عيّن إحداثيتي نقط تقاطع $(C_f)$ مع حاملي محوري الإحداثيات.

3- أ- برهن أنّ النقطة $\omega(-1;-2)$ مركز تناظر لـ $(C_f)$.

ب- عين معادلة للمماس $(T)$ في النقطة $\omega$.

4- مثّل بيانيّا كل من $(T)$ و $(C_f)$.

5- $m$ وسيط حقيقي. ناقش بيانيا وحسب قيم $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة : $x^3+3x^2-4-m=0$.

## التمرين الخامس عشر

$a$ و $b$ عددان حقيقيان.

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: :

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-3x+b$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- عين العددين $a$ و $b$ حتى تقبل الدالة $f$ قيمة حدية عند 3 قيمتها $-8$.

2- ادرس تغيرات الدالة $f$.

3- احسب $f(5)$، $f(1)$، $f(0)$ و $f(-2)$.

4- اكتب معادلة لـ $(T)$ مماس $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 1.

5- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(T)$.

6- مثّل بيانيّا كل من $(T)$ و $(C_f)$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## التمرين السادس عشر

$a$ و $b$ عددان حقيقيان.

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: :

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-3x+b$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- عين العددين $a$ و $b$ بحيث: $(C_f)$ يقطع حامل محور التراتيب في النقطة التي ترتيبتها $\frac{4}{3}$ ويقبل المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مقاربا له.

2- ادرس تغيرات الدالة $f$.

3- عيّن إحداثيتي نقط تقاطع $(C_f)$ مع حاملي محوري الإحداثيات.

4- بين أن $(C_f)$ يقبل مماسين $(T_1)$ و $(T_2)$ معامل توجيه كل منهما يساوي $-2$ يطلب تعيين معادلتيهما.

5- مثّل بيانيا $(C_f)$.

## التمرين السابع عشر

$a$ و $b$ عددان حقيقيان.

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: :

$$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x^2+2x+2}$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- أ- عين العددين $a$ و $b$ بحيث $(C_f)$ يقبل عند النقطة $A\left(0;\frac{7}{2}\right)$ مماسا موازيا لحامل محور الفواصل.

ب- بيّن أن $f(x)$ تكتب على الشكل: $f(x)=1+\frac{5x+5}{x^2+2x+2}$.

2- ادرس تغيرات الدالة $f$.

3- بيّن أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلته.

4- عيّن إحداثيتي نقط تقاطع $(C_f)$ مع حاملي محوري الإحداثيات.

5- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$.

6- برهن أن نقطة تقاطع $(C_f)$ و $(\Delta)$ هي مركز تناظر لـ $(C_f)$.

7- عين معادلة للمماس $(T)$ في النقطة $\omega$.

8- مثّل بيانيّا كل من $(T)$ و $(C_f)$.

## التمرين الثامن عشر

**I.** نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=x^3+3x^2+3x-1$$

1- ادرس تغيرات الدالة $g$.

2- احسب $g(0)$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

3- أ- علل وجود عدد حقيقي $\alpha$ من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يحقق $g(\alpha)=0$.

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$.

**II.** $f$ هي الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$. كما يلي :

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$$

ونسمّي $(\Gamma)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-1;+\infty[$ : $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$.

2- عين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسر النتيجة بيانيا

3- أحسب $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ ، ثمّ فسر النتيجة بيانيا.



4- شكل جدول تغيرات الدالة $f$.

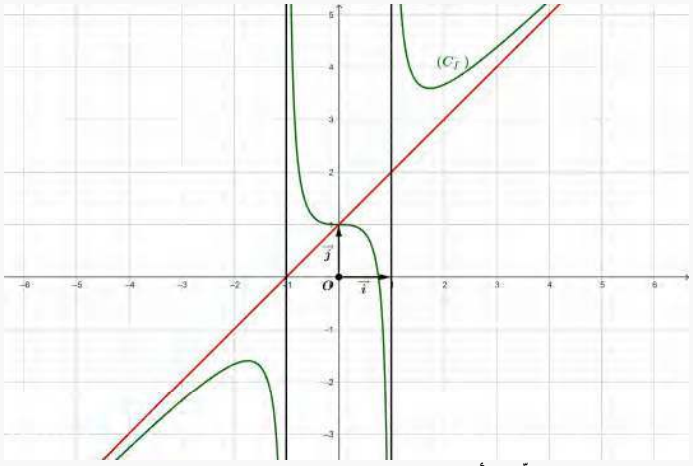
5- مثّل بيانيّا $(\Gamma)$.

## التمرين التاسع عشر

**I.** نعتبر الدّالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$$

ونسمّي $(C_f)$ منحنيها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ كما في الشكل المقابل :




1- بقراءة بيانية - دون استعمال عبارة الدالّة $f$ - أوجد مايلي :

أ- نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها .

ب- معادلة المستقيمات المقاربة للمنحنى $(C_f)$.

ج- إشارة $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2- بيّن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$ حيث : $\frac{1}{2}\prec\alpha\prec 1$.

3- أ- من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$. أُحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها.

ب- ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى $(C_f)$؟

4- من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$. أُحسب $f(x)+f(-x)$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

**II.** نعتبر الدّالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كما يلي:

$$g(x)=f(|x|)$$

ونسمّي $(C_g)$ منحنيها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- أُدرس قابلية اشتقاق الدالة $g$ في الصفر.

2- بيّن أنّ الدّالّة $g$ زوجية.

3- انطلاقا من $(C_f)$ مثّل بيانيا $(C_g)$. - اشرح طريقة الإنشاء - .

4- $m$ وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول $x$ التالية:

$$|x|^3+(1-|m|)(x^2-1)=0$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## التمرين عشرون

**I.** $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 - 3x - 3$$

1- ادرس تغيرات الدالة $g$.

2- أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ من المجال $]2;3[$.

ب- عيّن إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

**I.** $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1}$$

ونسمّي $(C_f)$ منحنيها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- بين أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على المجال $]1,+\infty[$.

2- ادرس إتّجاه الدالة $f$ على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3- بين أن المستقيم $(d)$ ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل لـ $(C_f)$، ثم ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(d)$.

4- أوجد فواصل النقط التي تكون فيها المستقيمات المماسية لـ $(C_f)$ موازية للمستقيم $(d)$.

5- مثّل بيانيا $(C_f)$.

## التمرين الواحد و عشرون

**I.** نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- أ- بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 - 1}$، حيث $a$ ، $b$ و $c$ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

ب- استنتج أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ في جوار $+\infty$ و $-\infty$، يُطلب تعيين معادلته.

2- ادرس تغيرات $f$.

3- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-\frac{4}{5}; -\frac{1}{2}[$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

4- مثّل بيانيّا $(C_f)$.

5- $m$ وسيط حقيقي. ناقش بيانيا وحسب قيم $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول $x$ التالية: $x^3 - (m+1)x^2 + m + 1 = 0$.

**II.** نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ كما يلي:

$$h(x) = \frac{|x| - x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

ونسمّي $(C_h)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- أثبت أن الدالة $h$ زوجية. فسّر ذلك هندسيا.

2- اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

3- مثل بيانيّا $(C_h)$.

## التمرين الثاني و عشرون

$a$ و $b$ عددان حقيقيان.

**I.** نعتبر الدّالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- عيّن العددين $a$ و $b$ بحيث: المنحنى $(C_f)$ يمر من النقطة $A(3;0)$ ويقبل فيها مماسا معامل توجيهه 4.

**II.** نضع من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$$



1- عيّن العددين الحقيقيين $\alpha$ و $\beta$ بحيث من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x^2 + 1}$.

2- ادرس تغيرات الدّالة $f$.

3- ادرس الوضع النسبي بين $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = 4x + 3$.

4- أثبت أنّ $(C_f)$ يقبل ثلاث نقط إنعطاف يطلب تعيينها.

5- بيّن أنّ النقطة $A(3;0)$ مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$.

6- أثبت أنّ $(C_f)$ يقبل مماسين معامل توجيههما 2.

7- مثّل بيانيا $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$.

8- $m$ وسيط حقيقي. ناقش بيانيا وحسب قيم $m$ عدد حلول المعادلة $f(x) = 4x + m$.

## التمرين الثالث و عشرون

**I.** نعتبر الدّالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$g(x) = x^3 - 3x - 4$$

1- ادرس تغيرات الدّالة $g$.

2- بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا $\alpha$ حيث: $\alpha \in ]2.19;2.20[$.

3- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

**II.** نعتبر الدّالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R} - \{-1;1\}$: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

2- ادرس إتجاه تغيّر الدّالة $f$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3- بيّن أنّ: $f(\alpha) = \frac{3(\alpha+2)}{\alpha^2 - 1}$، ثمّ أوجد حصرا للعدد $f(\alpha)$ بتقريب $10^{-1}$.

4- أ- بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ب- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$.

5- مثّل بيانيا المستقيم $(\Delta)$، ثمّ المنحنى $(C_f)$.

**III.** نعتبر الدّالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـ:

$$h(x) = f(|x|)$$

ونسمّي $(C_h)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- ادرس قابلية اشتقاق الدّالة $h$ في 0.

2- بيّن أنّ الدّالة $h$ زوجية.

3- بيّن كيف يمكن تمثيل المنحنى $(C_h)$ انطلاقا من $(C_f)$، ثمّ أنشئه.

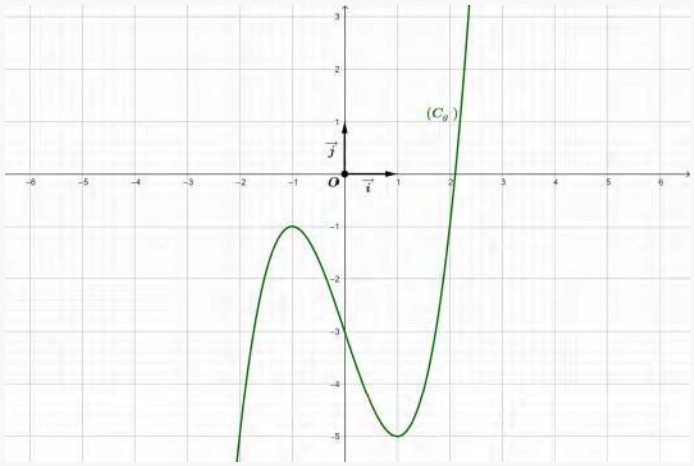
## التمرين الرابع و عشرون

$a$ و $b$ عددان حقيقيان. **I.** نعتبر الدّالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = ax^3 + bx + c$$

ونسمّي $(C_g)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ كما في الشكل المقابل:

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM




1- باستعمال المنحنى $(C_g)$ الممثل في الشكل السابق. عيّن $a$، $b$ و $c$.

2- بيّن أنّ المعادلة $x^3-3x-3=0$ تقبل حلّا وحيدا $\alpha$ حيث: $\alpha \in \left]2;\frac{5}{2}\right[$.

3- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

**II.** نعتبر الدّالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{2x^3+3}{x^2-1}+1$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- تحقق أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$: $f'(x)=\frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

2- عيّن دون حساب: $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

3- احسب نهايات الدّالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها.

4- شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$.

5- بيّن أنّ: $f(\alpha)=3\alpha+1$، ثمّ عيّن حصرا للعدد $f(\alpha)$.

6- أ- بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ب- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$.

7- مثّل بيانيّا المستقيم $(\Delta)$ ثمّ المنحنى $(C_f)$.

## التمرين الخامس و عشرون

**I.** نعتبر الدّالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي::

$$g(x)=x^3-x^2+3x+1$$

1- ادرس تغيّرات الدّالة $g$.

2- أ- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا $\alpha$ حيث: $\alpha \in ]-1;0[$.

ب- أعط حصرا لـ $\alpha$ سعته $10^{-1}$.

3- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

4- بيّن أنّ: $\alpha^2=-3-\frac{4}{\alpha-1}$.

**II.** نعتبر الدّالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\frac{x^3+x-2}{x^2+1}$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.



1- بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$.

2- ادرس إتجاه تغيّر الدّالة $f$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3- أ- بيّن أنّ: $f(\alpha)=\alpha-\frac{2}{\alpha^2+1}$.

ب- أوجد حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4- أ- عيّن الأعداد الحقيقية $a$، $b$، $c$ و $d$، بحيث من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{x^2+1}$.

ب- بيّن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$، يُطلب تعيين معادلته.

ج- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$.

5- أ- تحقّق أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f''(x)=\frac{4(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}$.

ب- بيّن أن المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطتي إنعطاف يُطلب تعيينهما.

6- بيّن أنّه يوجد مماسين $(T_1)$ و $(T_2)$ للمنحنى $(C_f)$ في النقطة ذات الترتيبة $-2$، يُطلب كتابة معادلتيهما

7- مثّل بيانيا المماسين $(T_1)$ و $(T_2)$، ثمّ المنحنى $(C_f)$.

8- $m$ وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة: $m(x^2+1)+2=0$.

## التمرين السادس و عشرون

**I.** نعتبر الدّالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x-1}$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- بيّن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل النقطة ذات الفاصلة $1$ مركز تناظر، يُطلب تعيين ترتيبتها.

2- ادرس تغيّرات الدّالة $f$.

3- أ- عيّن الأعداد الحقيقية $a$ و $b$، بحيث من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{1\}$: $f(x)=ax+b+\frac{x}{x-1}$.

ب- بيّن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$، يُطلب تعيين معادلته.

ج- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$.

4- بيّن أنّه يوجد مماسان $(T_1)$ و $(T_2)$ لـ $(C_f)$ عموديان على المستقيم ذو المعادلة: $y=-4x$، يُطلب تعيين معادلة كلّ منهما.

5- مثّل بيانيا كل من $(T_1)$ و $(T_2)$، ثمّ المنحنى $(C_f)$.

6- $m$ وسيط حقيقي. ناقش بيانيا وحسب قيم $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول $x$ التالية:

$$3x^2+(5-|m-1|)x+(|m-1|-4)=0$$

**II.** نعتبر الدّالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ: $h(x)=f(x^2)$ -عبارة $h(x)$ غير مطلوبة-.

ونسمّي $(C_h)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- أ- احسب نهايات الدّالة $h$ عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب- ادرس بطريقتين مختلفتين، اتجاه تغيّر الدّالة $h$.

ج- شكّل جدول تغيّرات الدّالة $h$.

2- بيّن أنّ الدّالة $h$ زوجية، ثمّ فسّر ذلك هندسيا.

**III.** نعتبر الدّالة $k$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كمايلي: $k(x)=2xf'(x^2)$ -عبارة $k(x)$ غير مطلوبة-.

1- ادرس إشارة $k(x)$.

2- برهن حسابيا بطريقتين مختلفتين أنّ الدّالة $k$ فردية، ثمّ فسّر ذلك هندسيا.

## التمرين السابع و عشرون

الأجزاء I، II و III مستقلة.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**I.** باستعمال العدد المشتق. احسب النهايتين التاليتين:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2021}-1}{x-1} \bullet \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\tan(x)-1}{\sin(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}} \bullet \lim_{x\to \alpha}\frac{\sin^2(x)-\sin(x)\cdot\sin(\alpha)}{x-\alpha} \bullet \lim_{x\to a}\frac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{x^3-a^a}$$

**II.** أوجد قيمة العدد الحقيقي $a$ حتى تكون الدالة $f$ المعرفة بـ: $f(x)=\begin{cases} ax^2-1 & ;x\succeq 1 \\ ax-x & ;x\prec 1 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق في $x_0=1$.

**III.** لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق في $\alpha$.

- حدّد النهايات الآتية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a+x^2)}{x} \bullet \lim_{x\to \alpha}\frac{xf(\alpha)-\alpha f(x)}{x-\alpha}$$

## التمرين الثامن و عشرون

**I.** $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=x^3-3x-4$$

**1-** ادرس تغيرات الدالة $g$.

**2-** أ- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ من المجال $]2.25;2[$.

ب- عيّن إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

**I.** $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}$$

ونسمّي $(C_f)$ منحنيها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

**1-** احسب نهايات الدّالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها.

**2-** بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$: $f'(x)=\frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

**3-** ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $f$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

**4-** أ- بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ب- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$.

**5-** بيّن أنّ: $f(\alpha)=1+\frac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}$، ثمّ أوجد حصرا لـ: $f(\alpha)$ بتقريب $10^{-2}$.

**6-** بيّن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $A(\beta;0)$ حيث: $-1.25\prec\beta\prec -1.5$.

**7-** مثّل بيانيّا $(C_f)$.

**III.** نعتبر الدّالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{\beta\}$ كمايلي:

$$h(x)=\frac{1}{f(x)}$$

ونسمّي $(C_h)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

**1-** ادرس تغيّرات الدّالة $h$، ثمّ مثّل $(C_h)$ بيانيّا.

**2-** $m$ وسيط حقيقي. ناقش بيانيا وحسب قيم $m$ عدد حلول المعادلة: $f(x)=|m-1|$.

**3-** $n$ وسيط حقيقي. ناقش بيانيا وحسب قيم $n$ عدد حلول المعادلة: $f(\cos(\theta))=\frac{1}{m}$. حيث: $0\preceq\theta\preceq 2\pi$.

**4-** $\gamma$ وسيط حقيقي. ناقش بيانيا وحسب قيم $\gamma$ عدد حلول المعادلة $f(x)=\sin(\gamma)$. حيث: $0\preceq\gamma\preceq 2\pi$.

## التمرين التاسع و عشرون

**I.** $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=x^3+3x^2+2$$

**1-** ادرس تغيرات الدالة $g$.

**2-** أ- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-3;-4[$.

ب- عيّن العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون: $-\frac{n+1}{10}\preceq\alpha\preceq\frac{n}{10}$.



ج- عيّن إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

**2-** بيّن أنّ: $\alpha^3=-3\alpha-2$.

**II.** $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+2x+1}$$

ونسمّي $(C_f)$ منحنيها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

**1-** احسب نهايات الدّالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها.

**2-** بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$.

**3-** شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$.

**4-** بيّن أنّ: $f(\alpha)=-\frac{3}{\alpha+1}$ ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

**5-** أ- بيّن أنّ: $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-2$ و $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=-2$.

ب- استنتج أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$، يُطلب تعيين معادلته.

ج- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$.

**6-** أ- بيّن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مماسا $(T)$ موازيا للمستقيم $(\Delta)$ في نقطة يُطلب تعيين إحداثيها.

ب- اكتب معادلة للمماس $(T)$.

**7-** مثّل بيانيا المستقيم $(T)$، ثمّ المنحنى $(C_f)$.

**8-** $m$ وسيط حقيقي. عيّن قيم $m$ حتى تقبل المعادلة: $(m+2)(x+1)^2-3x-1=0$ حلّين مختلفين في الإشارة.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## التمرين الثالث و ثلاثون

**I.** $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x + 1 - \frac{x}{x^2+1}$$

ونسمّي $(C_f)$ منحنيها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- ادرس تغيّرات الدّالة $f$.

2- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ من المجال $]-1; -2[$، ثمّ عيّن حصرا لـ $\alpha$ سعته $10^{-1}$.

3- نعتبر كثير الحدود التالي: $p(x) = x^4 + 2x^2 - 4x + 1$.

أ- تحقّق من أنّ: $p(1) = 0$.

ب- بيّن أنّ المعادلة $x^3 + x^2 + 3x - 1 = 0$ تقبل حلّا وحيدا $\beta$ على $\mathbb{R}$ ثمّ تحقّق أنّ: $0.3 \prec \beta \prec 0.2$.

ج- حل في $\mathbb{R}$، المعادلة $p(x) = 0$.

د- بيّن أنّه يوجد مماسان لـ $(C_f)$ يمران بالنقطة $B\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

4- اكتب معادلة للمماسين $(T_1)$ و $(T_2)$ في النقطتين ذات الفاصلتين $1$ و $-1$ على الترتيب.

5- أ- برهن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ يُطلب تعيين معادلته.

ب- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$.

6- برهن أنّ النقطة $I(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$.

7- بيّن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة إنعطاف يُطلب تعيين إحداثيها.

8- مثّل بيانيا كل من المستقيمين $(T_1)$ و $(T_2)$، ثمّ المنحنى $(C_f)$.

9- $m$ وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$.

**II.** نعتبر الدّالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = |f(x)|$$

ونسمّي $(C_g)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- أ- اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

ب- فسّر كيف يمكن تمثيل $(C_g)$ انطلاقا من $(C_f)$.

2- مثّل بيانيا $(C_g)$.

## التمرين الواحد و ثلاثون

**I.** نعتبر الدّالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 6}{2(x+2)}$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- احسب نهايات الدّالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها.

2- أ- احسب $f'(x)$.

ب- ادرس إشارة $f'(x)$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى $(C_f)$؟

ج- شكّل جدول تغيّراتها.

3- عيّن العددين الحقيقين $a$ و $b$ بحيث: $f(x) = a(x-1)^2 + \frac{b}{2(x+2)}$.

**II.** نعتبر الدّالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$$

ونسمّي $(C_g)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x))$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - g(x))$ ثمّ فسّر ذلك هندسيا.

2- ادرس الوضع النسبي بين $(C_g)$ و $(C_f)$.

3- اعتمادا على جدول تغيّرات الدّالة $f$. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة: $f(x) = m$.

**II.** نعتبر الدّالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ:

$$h(x) = \frac{x^3 + x - 2}{2(x+2)}$$



## التمرين الثاني و ثلاثون

**I.** $f$ الدّالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 11x + 7}{2(x-2)}$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$، حيث: $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$.

1- أ- احسب: $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب- احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

2- ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $f$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3- أ- برهن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = 2x - \frac{3}{2}$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ب- ادرس الوضع النسبي بين المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(C_f)$.

4- بيّن أنّ نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين هي مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$.

5- بيّن أنّه يوجد مماسان $(T_1)$ و $(T_2)$ لـ $(C_f)$ معامل توجيه كل منهما $\frac{3}{2}$، يُطلب تعيين معادلة كلّ منهما.

6- تحقق من أنّ نقطتي التماس لـ $(T_1)$ و $(T_2)$ مع المنحنى $(C_f)$ متناظرتين بالنسبة لمركز تناظر $(C_f)$.

7- مثّل بيانيّا $(C_f)$.

**II.** نعتبر الدّالة الوسيطة $f_m$ ذات المتغيّر $x$ والوسيط الحقيقي $m$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{4x^2 + (m+8)x - m + 4}{2(x-2)}$$

ونسمّي $(C_{f_m})$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- بيّن أنّه توجد نقطة ثابتة تنتمي إليها جميع المنحنيات $(C_{f_m})$.

2- ماهو المنحنى الذي يشمل $A\left(\frac{7}{4}; 0\right)$.

ونسمّي $(C_h)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- أ- بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R} - \{-2\}$: $h(x) = f(x) + 2$.

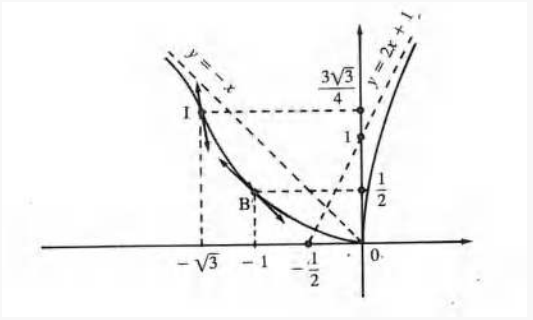
ب- استنتج أنّ $(C_h)$ هو صورة $(C_f)$ بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه.

ج- انطلاقا من المنحنى $(C_f)$، مثّل بيانيا $(C_h)$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## التمرين الثالث و ثلاثون

**I.** $(C_f)$ هو التمثيل البياني للدّالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$. الشكل المقابل يُوضّح ذلك:




- بقراءة بيانية. أوجد مايلي، مع التبرير:

أ- نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها .

ب- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)$ .

ج- $f'(-1)$ و $f''\left(-\sqrt{3}\right)$ .

د- $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$ .

**II.** نعتبر الدّالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=\sqrt{f(x)}$$

ونسمّي $(C_g)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- احسب: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ .

2- أ- من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$، احسب: $g'(x)$.

ب- عيّن إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

3- شكّل جدول تغيّرات الدّالة $g$.

4- $m$ وسيط حقيقي. انطلاقا من جدول تغيّرات الدّالة $g$، ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد حلول المعادلة ذات المجهول $x$ التالية: $g(x)=|m-2|$.

## التمرين الرابع و ثلاثون

**I.** نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-2x+1$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 احسب الدالة المشتقة للدالة $f$.

2- بين أنه من أجل $x\prec 0$ لدينا : $f'(x)\prec 0$.

3- بين أنه من أجل $x\succeq 0$ لدينا : $f'(x)\prec 0$.

4- بين أنه من أجل كل $x\prec 0$ لدينا : $f(x)+3x-1=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

5- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+3x-1)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

6- بين أنه من أجل كل $x\succ 0$ لدينا : $f(x)+x-1=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

7- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x-1)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

8- أ- بيّن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$ حيث: $1.4\prec\alpha\prec 1.3$.

ب- احسب $f(0)$.

9- مثّل بيانيّا $(C_f)$.



## التمرين الخامس و ثلاثون

**I.** نعتبر الدّالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=x+\sqrt{x^2+1}$$

1- بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $g(x)\succ 0$.

**II.** نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=xg(x)$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- ادرس تغيّرات الدّالة $f$.

2- اكتب معادلة للمماس $(T)$ في النقطة ذات الفاصلة $0$.

3- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(T)$.

4- مثّل بيانيا $(C_f)$.

5- $m$ وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول $x$ التالية: $f(x)=x+m$.

**III.** نعتبر الدالة $k$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$k(x)=f(x^2)$$

1- ادرس إتّجاه تغيّر الدّالة $k$ بطريقتين مختلفتين.

2- شكّل جدول تغيّرات الدّالة $k$.

## التمرين السادس و ثلاثون

**I.** نعتبر الدّالة $f$ المعرفة على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{2x-1}}{x}$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- ادرس قابلية اشتقاق الدّالة $f$ في $\frac{1}{2}$ من اليمين، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

2- ادرس تغيّرات الدّالة $f$.

3- بيّن أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]1;2[$: $|f'(x)|\prec 1$.

4- بيّن أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]1;2[$: $f''(x)=\frac{3x^2-6x+2}{x^3\sqrt{(2x-1)^3}}$.

5- استنتج أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف، يُطلب تعيين احداثييها.

6- مثّل بيانيّا $(C_f)$.

7- $m$ وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول $x$ التالية: $x+\sqrt{2x-1}-mx=0$.

**II.** 1- حل في المجال $[0;\pi]$ المتراجحة: $\sin(x)\succeq\frac{1}{2}$.

2- نعتبر الدّالة $k$ المعرفة على $\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ بـ:

$$k(x)=f(\sin x)$$

أ- ادرس إتجاه تغيّر الدّالة $h$ بطريقتين مختلفتين.

ب- شكّل جدول تغيّرات الدّالة $h$.

**II.** نعتبر الدّالة $h$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x)=(f(x))^2$$

1- احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)$ .

2- ادرس إتّجاه تغيّر الدّالة $h$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## التمرين السابع و ثلاثون

**I.** نعتبر الدّالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- احسب تغيّرات الدّالة $f$.

2- اكتب معادلة للمماس $(T)$ في النقطة ذات الفاصلة $0$.

3- من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ احسب: $f(x) + f(-x)$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

4- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(T)$، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى $(C_f)$؟

5- بيّن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$ حيث: $2 \prec \alpha \prec 1$.

6- مثّل بيانيا المستقيم $(T)$، ثمّ المنحنى $(C_f)$.

**II.** نعتبر الدّالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = 1 + \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$$

ونسمّي $(C_h)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- ادرس قابلية اشتقاق الدّالة $h$ في $0$، ثمّ فسّر ذلك هندسيا.

2- بيّن أنّ الدّالة $h$ زوجية.

3- انطلاقا من $(C_f)$. مثّل بيانيّا $(C_h)$.

## التمرين الثامن و ثلاثون

نعتبر الدّالة $f$ المعرّفة على $[-2;2]$ بـ:

$$f(x) = x - \sqrt{4-x^2}$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1 - أ - ادرس قابلية اشتقاق الدّالة $f$ في $-2$، ثمّ في $2$ من اليسار.

ب - فسّر ذلك هندسيا.

2 - احسب $f'(x)$، ثمّ ادرس إشارتها.

3 - شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$.

4 - حل في المجال $[0;2]$ المعادلة $f(x) = 0$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

5 - اكتب معادلة للمماس $(T)$ لـ $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة $0$.

6 - مثّل بيانيّا $(C_f)$.

## التمرين التاسع و ثلاثون

(I) نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $[-1;1]$ بـ:

$$f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$، حيث: $\left\|\vec{j}\right\| = 4cm$.

1- أ- أحسب $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h-1)-f(-1)}{h}$ و $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h+1)-f(1)}{h}$، ماذا تستنتج بالنسبة للدّالة $f$؟

ب- فسّر النتيجتين هندسيا

2- بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $]-1;1[$ فإنّ: $f'(x) = \dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3- أدرس إشارة $f'(x)$ ثمّ استنتج اتّجاه تغيّر الدّالة $f$ على المجال $[-1;1]$.

4- شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$.

5- اكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة $0$.

6- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(T)$.

7- مثّل بيانيا المستقيم $(T)$، ثمّ المنحنى $(C_f)$.



(II) نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $[-1;1]$ بـ:

$$g(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}$$

1- بيّن أنّ منحنى الدالة $g$ هو صورة المنحنى $(C_f)$ بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه ثمّ مثّله بيانيّا.

2- $m$ وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول $x$ التالية: $g(x) = e^m$.

## التمرين أربعون

$m$ وسيط حقيقي يختلف عن $4$.

نعتبر الدّالة $f_m$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f_m(x) = \frac{2x^2+mx+2}{(x+1)^2}$$

ونسمّي $(C_{f_m})$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- احسب: $\lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x)$، ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

2- ادرس حسب قيم $m$ كل من: $\lim\limits_{x \to -1} f_m(x)$ و $\lim\limits_{x \to -1} f_m(x)$، ثمّ فسّر ذلك هندسيا.

3- أ- ادرس حسب قيم $m$ اتجاه تغيّر الدّالة $f_m$.

ب- حسب قيم $m$. شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f_m$.

4- بيّن أنّه توجد مستقيمات مماسية لـ $(C_{f_m})$ موازية لحامل محور الفواصل في نقطة، يُطلب تعيينها.

5- برهن أنّ جميع المنحنيات $(C_{f_m})$ تمرّ من نقطة وحيدة ثابتة، يُطلب تعيين إحداثييها.

6- أوجد نقط تقاطع $(C_{f_m})$ مع محوري الإحداثيات.

7- مثّل بيانيا وفي نفس المعلم كل من $(C_{f_{-4}})$ و $(C_{f_8})$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

# دراسة دوال أسية



## التمرين الأول

(I) نعتبر الدّالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x - e^{-x}$ .

1 - ادرس تغيّرات الدّالة $g$ .

2 - أ - بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلًّا وحيدا $\alpha$ حيث : $0.5 \prec \alpha \prec 0.6$ .

ب - استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ .

(II) نعتبر الدّالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x+1}$ .

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1 - أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .

2 - أ - بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x) = \dfrac{-e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$ .

ب- عيّن دون حساب: $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

3 شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$.

4 - بيّن أنّ $f(x) = x$ إذا وفقط إذا كانت $g(x) = 0$ ثمّ استنتج قيمة $f(\alpha)$.

5 - مثّل بيانيًا $(C_f)$.

(III) نعتبر الدّالة $h$ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$h(x) = |f(x)|$$

ونسمّي $(C_h)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

2- انطلاقا من $(C_f)$، مثّل بيانيًا $(C_h)$.

## التمرين الثاني

(I) نعتبر الدّالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + 2 - \dfrac{4e^x}{e^x+3}$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ حيث : $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$ .

1 - أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .

2 - بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ فإنّ : $f'(x) = \left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$ .

3 - أ - أدرس اتجاه تغيّر الدّالة $f$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

ب - عيّن $f''(\ln 3)$ - دون حساب عبارة $f''(x)$ - برّر إجابتك .

4 - أ - بيّن أنّ المستقيم $(\Delta_1)$ ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ في جوار $(-\infty)$ .

ب - بيّن أنّ المستقيم $(\Delta_2)$ ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ في جوار $(+\infty)$ .

5 - أدرس الوضع النسبي بين المنحنى $(C_f)$ والمستقيمين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ .

6 - أكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $0$ .

7 - بيّن أنّ النقطة $I(\ln(3); \ln(3))$ مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$ .

8 - بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-2;-1[$ . ثمّ عيّن حصرا للعدد $\alpha$ سعته $10^{-1}$ .

9 - أنشئ المستقيمين $(\Delta_1)$ ، $(\Delta_2)$ ، المماس $(T)$ والمنحنى $(C_f)$ .

10 - ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي غير المعدوم $m$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ التالية : $f(-|x|) = \ln(|m|)\, x + 2$ .

(II) نعتبر الدّالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = f(3x-2)$ . - عبارة $g(x)$ غير مطلوبة - .

1 - ادرس تغيّرات الدّالة $g$ .

2 - تحقّق من أنّ : $g\left(\dfrac{\alpha+2}{3}\right) = 0$ ثمّ بيّن أنّ : $g'\left(\dfrac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'(\alpha)$ .

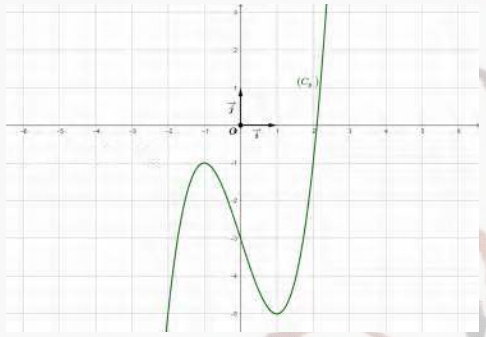
3 - استنتج معادلة المماس $(D)$ لمنحنى الدّالة $g$ عند النقطة ذات الفاصلة $\dfrac{\alpha+2}{3}$ .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4 - تحقّق من أنّ : $y = \frac{3\alpha^2}{4}x - \frac{\alpha^2(\alpha+2)}{4}$ معادلة للمستقيم $(D)$ .

## التمرين الثالث

(I) $a$، $b$ و $c$ أعداد حقيقية.
نعتبر الدّالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (ax+b)e^x + c$.
ونسمّي $(C)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$، كما في الشكل أدناه:



1 - بقراءة بيانية، أوجد مايلي:
أ- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ .
ب- $g(0)$ و $g'(0)$.
2- ممّا سبق، أوجد: $a$، $b$ و $c$.
3- نضع: $g(x) = (x-1)e^x - 1$.
أ- بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا $\alpha$ على $\mathbb{R}$، ثمّ تحقّق من أنّ: $1.2 < \alpha < 1.3$.
ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدّالة $f$ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$f(x) = \frac{x}{e^x+1}$$

ونسمّي $(C_f)$ منحنيها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
1- أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.
ب- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .
2- أ- بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$.
ب- ادرس إتجاه تغيّر الدّالة $f$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.
3- عيّن دون حساب: $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.
4- بيّن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسا وحيدا $(T)$ يمرّ من المبدأ، يُطلب كتابة معادلة له.
5- بيّن أنّ: $f(\alpha) = \alpha - 1$، ثمّ أوجد حصرا لـ $f(\alpha)$ بتقريب $10^{-2}$.
6- أ- بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $-\infty$.
ب- ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$.
7- مثّل بيانيّا المماس $(T)$، ثمّ المنحنى $(C_f)$.
8- $m$ وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = m$.



## التمرين الرابع

(I) نعتبر الدّالة $f$ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{(e^x+1)}$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
1- أ- بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$.
ب- ادرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى $(C_f)$؟
ج- شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$.
2- برهن أنّ النقطة $I(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$.
3- أ- بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (x-1)) = 0$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.
ب- احسب: $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - x)$ . ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى $(C_f)$؟
4- بيّن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$ حيث: $-2.77 < \alpha < -2.76$.
5 أ- احسب $f(0)$.
ب- مثّل بيانيا $(C_f)$.

(II) نعتبر الدّالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = f(4x+1)$ -عبارة $g(x)$ غير مطلوبة-.
1 ادرس تغيّرات الدّالة $g$.
2- تحقّق من أنّ: $g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) = 0$، ثمّ بيّن أنّ: $g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) = 4f'(\alpha)$.
3- استنتج معادلة المماس $(T)$ لمنحنى الدّالة $g$ في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha-1}{4}$.
4- تحقّق من أنّ: $y = (1+\alpha)^2 x - \frac{(1+\alpha)(\alpha^2-1)}{4}$ معادلة للمماس $(T)$.

(III) نعتبر الدّالة $f$ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$k(x) = f(|x|)$$

ونسمّي $(C_k)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
1- بيّن أنّ الدّالة $k$ زوجية.
2- أ- بيّن كيف يمكن تمثيل $(C_k)$ انطلاقا من $(C_f)$.
ب- انطلاقا من $(C_f)$. مثّل بيانيّا $(C_k)$.

(IV) نعتبر الدّالة $h$ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$h(x) = x + \frac{4}{e^x+1}$$

ونسمّي $(C_h)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
1- تحقّق أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) + 1$.
2- أ- استنتج أنّ $(C_h)$ هو صورة $(C_f)$ بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه.
ب- انطلاقا من $(C_f)$. مثّل بيانيّا $(C_h)$.

## التمرين الخامس

(I) نعتبر الدّالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x + 2 - e^x$.
1- ادرس تغيّرات الدّالة $g$.
2- بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّان $\alpha$ و $\beta$ حيث: $1.14 < \alpha < 1.15$ و $-1.9 < \beta < -1.8$.
3 استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدّالة $f$ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$f(x) = \frac{e^x-1}{xe^x+1}$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، ثمّ فسّر ذلك هندسيا.

2- بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$.

3- ادرس إتجاه تغيّر الدّالة $f$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4- عيّن دون حساب كل من: $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و $\lim\limits_{x\to\beta}\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}$، ثمّ فسّر النّتيجتين هندسيا.

5- بيّن أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$، ثمّ أوجد حصرا لـ $f(\alpha)$ سعته $10^{-1}$.

6- نعتبر الدّالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=e^x-xe^x-1$.

- بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $h(x)\leq 0$.

7- نضع من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $p(x)=(x^2+1)e^{2x}+xe^x-2e^x+1$.

- تحقّق من أنّ: $p(0)=0$.

8- أ- بيّن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ عموديّ على المستقيم ذو المعادلة $y=-x+5$.

ب- اكتب معادلة للمماس $(T)$.

ج- ادرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(T)$، ماذا تستنتج بالنسبة لـ $(C_f)$؟

9- نأخذ: $f(\beta)\simeq -1.195$. مثّل بيانيّا المستقيم $(T)$، ثمّ المنحنى $(C_f)$.

10- $m$ وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ التالية: $e^x(1-mx^2)+mx-1=0$.

## التمرين السادس

(I) نعتبر الدّالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2x+1-xe^{x-1}$

ونسمّي $(C_g)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث: $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$.

1 - ادرس تغيّرات الدّالة $g'$.

2 - احسب $g'(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$.

3 - ادرس تغيّرات الدّالة $g$.

4 - أ - بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=2x+1$ مقارب مقارب لـ $(C_g)$ بجوار $(-\infty)$.

ب - ادرس وضعية المنحنى $(C_g)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ على $\mathbb{R}$.

5 - أ - بيّن أنّ المنحنى $(C_g)$ يقبل مماسا $(D)$ يوازي المستقيم $(\Delta)$ في نقطة يُطلب تعيين إحداثييها.

ب - اكتب معادلة المماس $(D)$.

6 - بيّن أنّ المنحنى $(C_g)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما $\alpha$ و $\beta$ حيث: $2\prec\alpha\prec 1.9$ و $-0.5\prec\beta\prec -0.6$.

6 - أنشئ $(\Delta)$، $(D)$ ثمّ المنحنى $(C_g)$.

3 - نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ والوسيط الحقيقي الموجب تماما $m$ التالية: $(E)\ldots\ldots g(x)=2x+\ln m$.

- ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة $(E)$.

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط:

https://youtu.be/BlkFbE-ti_I . الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات

## التمرين السابع

نعتبر الدّالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- أ- بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $\dfrac{1}{e^{-x}+1}=1-\dfrac{1}{e^x+1}$.

ب- استنتج أنّ الدّالة $f$ فردية.



2- احسب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3- أ- بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$، ثمّ ادرس إشارة $f'(x)$.

ب- ماذا تستنتج بالنسبة لـ $(C_f)$؟

ج- شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$.

4- أ- بيّن أنّ: $\left(f(x)-\left(-\dfrac{1}{2}x+1\right)\right)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب- احسب: $\left(f(x)+\dfrac{1}{2}x\right)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

5- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى $(C_f)$ والمستقيم ذو المعادلة: $y=-\dfrac{1}{2}x+1$.

6- مثّل بيانيّا $(C_f)$.

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط:

https://youtu.be/lSpzGlcRIl0 . الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات

## التمرين الثامن

نعتبر الدّالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=-2e^{-2x}+e^{-x}+1$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب- بيّن أنّ: $f(x)=e^{-2x}(e^{2x}+e^x-2)$، ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2- بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{4-e^x}{e^{2x}}$، ثمّ ادرس إشارة $f'(x)$.

3- شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$.

4- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=1$.

5- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x)=0$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

6- احسب $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ -النتيجة مدوّرة إلى $10^{-2}$-.

7- مثّل بيانيّا $(C_f)$ على المجال $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

8- $m$ وسيط حقيقي.

- ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ التالية: $f(x)=m+2$.

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط:

https://youtu.be/fJ5eqmiZ5hw . الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

# دراسة دوال لوغاريتمية



## التمرين الأول

(I) نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$ .

1 - ادرس تغيّرات الدالة $g$.

2 - احسب $g(0)$، ثمّ استنتج حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]-1;+\infty[$ كمايلي :

$$f(x)=x-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

ونسمي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 - احسب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها.

2 - بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ في جوار $(+\infty)$.

3 - ادرس الوضع النسبي بين المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$.

4 - بيّن أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]-1;+\infty[$ : $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$، ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$.

5 - بيّن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

6 - مثّل بيانيّا المنحنى $(C_f)$.

## التمرين الثاني

(I) نعتبر الدّالة $g$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي : $g(x)=1+x^2+\ln x$ .

1 - ادرس تغيّرات الدّالة $g$ .

2 - بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدًا $\alpha$ حيث : $0.32\prec\alpha\prec 0.33$ .

3 - استنتج حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ .

(II) نعتبر الدّالة $f$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=-x+\frac{2+\ln x}{x}$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 - احسب $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ .

2 - بيّن أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]0;+\infty[$ : $f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$، ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$.

3 - بيّن أنّ : $f(\alpha)=2\left(\frac{1}{2\alpha}-\alpha\right)$، ثمّ عيّن حصرًا للعدد $f(\alpha)$.

4 - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]$ ، ثمّ استنتج أنّ $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلته.

- ادرس الوضع النّسبي بين المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$.

5 - أثبت أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مماس $(T)$ يوازي المستقيم $(\Delta)$ في نقطة يُطلب تعيينها. اكتب معادلة المماس $(T)$.

6 - مثّل بيانيّا كل من المستقيم $(\Delta)$، المماس $(T)$ والمنحنى $(C_f)$. علما أنّ $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما $x_0$ و $x_1$ حيث : $0.2\prec x_0\prec 0.1$ و $1.6\prec x_1\prec 1.5$.

(III) نعتبر الدّالة $h$ المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كمايلي :

$$f(x)=-x+1+\frac{2+\ln(x+1)}{x+1}$$

ونسمّي $(C_h)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- أ- بيّن أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]-1;+\infty[$ : $h(x)=f(x+1)+2$.

ب- بيّن أنّ المستقيم $(D)$ ذو المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل لـ $(C_h)$ في جوار $+\infty$

2- أ- بيّن أنّ المنحنى $(C_h)$ هو صورة المنحنى $(C_f)$ بتحويل بسيط يُطلب تعيينه.

ب- مثّل بيانيّا المنحنى $(C_h)$.

3- $m$ وسيط حقيقي غير معدوم.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$(T_m)$ مستقيم معادلته: $y = \ln(|m|)\,x + 1$.

أ- برهن أنّ جميع المستقيمات $(T_m)$ تشمل نقطة ثابتة وحيدة يُطلب تعيينها.

ب- ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد حلول المعادلة ذات المجهول $x$ التالية: $h(x) = \ln(|m|)\,x + 1$.

## تمرين الثالث التمرين الثالث

(I) نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـ :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln|x|} + x & ;x \in ]-\infty;0[-\{-1\} \\ \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{2(\ln(x))^2} & ;x \in ]0;+\infty[-\{1\} \\ 0 & ;x = 0 \end{cases}$$

ونُسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 ادرس قابلية إشتقاق الدالة $f$ في $x_0 = 0$ ، فسر النتيجة هندسيا .

2 - ادرس تغيرات الدالة $f$ .

3 - أ - بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل المستقيم $(\Delta)$ مقاربا مائلا بجوار $(-\infty)$ يطلب تعيين معادلته .

ب - ادرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ على المجال $]-\infty;0[-\{-1\}$ .

4 - حل المعادلة $f(x) = 0$ في المجال $]0;+\infty[-\{1\}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة لـ $(C_f)$ ؟

5 - بيّن أنّ $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$ على المجال $\left]-2;-\frac{3}{2}\right[$ .

6 - هل توجد مماسات لـ $(C_f)$ تمر من مبدأ المعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ ؟ برر إجابتك .

7 - مثّل بيانيّا كل من المستقيم $(\Delta)$ و المنحنى $(C_f)$ .

(II) نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـ : $h(x) = f(|x|)$ .

ونُسمّي $(C_h)$ منحنيها البياني في مستو المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ .

1 - بين أن الدّالة $h$ زوجية .

2 - اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

3 - مثّل بيانيّا المنحنى $(C_h)$ موضحا طريقة الإنشاء .

4 - نعتبر المعادلة ذات المجهول $x$ والوسيط الحقيقي $m$ التالية : $(E)$ ..... $h(x) = -(m^2 + a)$ حيث $a$ عدد حقيقي .

- ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة $(E)$ .

## تمرين الرابع التمرين الرابع

(I) نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي :

$$g(x) = (\ln x)^3 + 1$$

1 - ادرس تغيرات الدالة $g$ .

2 - حل المعادلة $g(x) = 0$ .

3 - استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ .

(II) نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = (\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}$$

ونُسمّي $(C_f)$ منحنيها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ .

1 - أ - احسب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها .

ب - بين أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$ يكون : $f'(x) = 2\dfrac{g(x)}{x(\ln x)^2}$ .



ج - استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

2 - نعتبر الدالة $h$ العرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $h(x) = (\ln x)^2 + 1$ .

ونُسمّي $(C_h)$ منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ .

1 - ادرس تغيرات الدالة $h$ .

2 - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - h(x)]$ ، فسر النتيجة هندسيا .

3 - ادرس الوضع النسبي بين المنحنيين $(C_f)$ و $(C_h)$ .

3 - بين أن $(C_h)$ يقبل $A$ نقطة إنعطاف يُطلب تعيين إحداثييها .

4 - اكتب معادلة للمماس $(T)$ لـ $(C_h)$ في النقطة $A$ .

5 - احسب $f(e)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة لـ $(C_f)$ ؟

6 مثّل بيانيّا المنحنيين $(C_f)$ و $(C_h)$ مع المستقيم $(T)$ في نفس المعلم .

7 - نعتبر المعادلة ذات المجهول $x$ والوسيط الحقيقي $m$ التالية :

$$e^m(\ln x)^3 + e^m(\ln x) - (\ln x) - 2e^m = 0 \text{..... } (F)$$

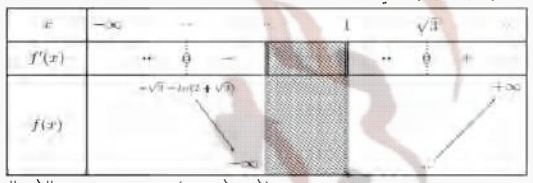
- ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد حلول المعادلة $(F)$ .

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

https://youtu.be/yUL3lFE2UG4 . الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات

## التمرين الخامس

(I) $f$ دالة معرّفة على $\mathbb{R} - [-1;1]$ بجدول تغيراتها التّالي :




ونسمي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث : $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$ .

1- علما أنّ الدّالة $f$ فردية :

أ - عيّن إشارة $f'(x)$ مع التبرير ، ثمّ استنتج اتجاه تغير الدّالة $f$ .

ب - بيّن أنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$ و $f\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt{3} + \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ .

ج - أكمل جدول تغيّرات الدّالة $f$ السابق .

2- نقبل أن المستقيم $(D)$ ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$ .

أ - مثّل بياني كل من المستقيم $(d)$ والمنحنى $(C_f)$ . - نأخذ : $\sqrt{3} \simeq 1.7$ و $f(\sqrt{3}) \simeq 3$ .

3- نفرض أنّ عبارة $f(x)$ هي من الشكل : $f(x) = ax + b + \ln\left(c + \dfrac{2}{x-1}\right)$ حيث : $a$ ، $b$ و $c$ أعداد حقيقية .

أ - باستعمال نتائج الجدول أعلاه بيّن أنّ : $a = 1$ ، $b = 0$ و $c = 1$ .

4- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول $x$ التالية : $x - \dfrac{e^m + e^x}{e^m - e^x} = 0$ .

(II) نعتبر الدّالة $g$ المعرفة على $]1;+\infty[$ كايلي : $g(x) = \ln(f(x))$ .

1- أُدرس تغيرات الدالة $g$ .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## التمرين السادس

نعتبر الدّالة $g$ المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=2\sqrt{x}-2-\ln x$$

1- أ- بيّن أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]0;+\infty[$ فإنّ: $g'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$.

ب- بيّن أنّ الدّالة $g$ متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

2- استنتج أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]1;+\infty[$ : $2\sqrt{x}\prec \ln x\prec 2\sqrt{x}-2$ ( لاحظ أنّ: $0\prec 2\sqrt{x}-2$ ).

3- أ- بيّن أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]1;+\infty[$ فإنّ: $\dfrac{8}{\sqrt{x}}\prec \dfrac{(\ln x)^3}{x^2}\prec 0$، ثمّ استنتج النّهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$.

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

https://www.youtube.com/watch?v=PBeTbFpwiMI&t=4s . الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات

## التمرين السابع

(I) نعتبر الدّالة $g$ المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln x+x-3$.

1- ادرس تغيرات الدّالة $g$.

2 - بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدًا $\alpha$ حيث: $2.21\prec\alpha\prec 2.2$.

3- عيّن إشارة $g(x)$ على المجال: $]0;+\infty[$

(II) نعتبر الدّالة $f$ المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$.

2- أ- احسب: $f'(x)$، ثمّ ادرس إشارتها.

ب- شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$.

3- عيّن دون حساب النّهاية التالية: $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

4- بيّن أنّ: $f(\alpha)=-\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

5- حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة: $f(x)=0$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

6- بأخذ: $f(\alpha)\simeq -0.66$. مثّل بيانيّا المنحنى $(C_f)$. على المجال $]0;10]$.

لمشاهدة الحل اضغط على الرابط :

https://www.youtube.com/watch?v=9e3zBhsbJnU . الأستاذ عبد الرحمان للرياضيات

## التمرين الثامن

(I) نعتبر الدّالة $g$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=x^2-2+\ln x$$

1- ادرس تغيّرات الدّالة $g$.

2- أ- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدًا $\alpha$ في المجال: $]0;+\infty[$.

ب- تحقّق من أنّ: $1.32\prec\alpha\prec 1.31$.

3- عيّن إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

4- برهن أنّ: $\ln\alpha=2-\alpha^2$.

(II) نعتبر الدّالة $f$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي:

$$f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$$

ونسمي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.



1- احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$.

2- بيّن أنّ إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

3- شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$.

4- بيّن أنّ: $f(\alpha)=\alpha^2(1+\alpha^2)$.

5- استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

(III) • نسمّي $(\Gamma)$ التمثيل البياني للدّالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=\ln x$.

• النقطة $A$ ذات الاحداثيات $(0;2)$.

• $M$ نقطة من المنحنى $(\Gamma)$ فاصلتها $x$.

1- بيّن أنّ المسافة $AM$ تُعطى بـ: $AM=\sqrt{f(x)}$.

2- نعتبر الدّالة $k$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $k(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ- برهن أنّ للدّالتين $f$ و $k$ نفس إتجاه التغيّر على المجال $]0;+\infty[$.

ب- برهن أنّ المسافة $AM$ أصغرية في نقطة $P$ من $(\Gamma)$، يُطلب تعيين إحداثييها.

ج- برهن أنّ: $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3- هل المستقيم $(AP)$ عمودي على المستقيم المماس للمنحنى $(\Gamma)$ في النقطة $P$؟ برّر إجابتك.

## الحل

**I.**

**1** دراسة تغيّرات الدّالة $g$

### النّهايات

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}g(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}(x^2-2+\ln x)$$
$$=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2-2+\ln x)$$
$$=+\infty$$

**المشتقة** : الدّالة $g$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة كمايلي:

$$g'(x)=2x+\frac{1}{x}$$
$$=\frac{2x^2+1}{x}$$

### إشارة المشتقة وإتجاه التغيّر

إنّ $g'(x)\succ 0$ على المجال $]0;+\infty[$ وبالتالي الدّالة $g$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

### جدول التغيّرات

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $g(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**2** تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدًا $\alpha$ في المجال: $]0;+\infty[$

لدينا من جدول التغيرات الدّالة $g$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\times\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}g(x)\prec 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدًا $\alpha$ في المجال: $]0;+\infty[$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التحقّق من أنّ: $1.31 \prec \alpha \prec 1.32$

لدينا: $g(1.31) = -0.13$ و $g(1.32) = 0.02$. إذن $1.31 \prec \alpha \prec 1.32$.

**3** تعيين إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**4** برهان أنّ: $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$

لدينا: $g(\alpha) = 0$ يكافئ:

$$\alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0$$

يكافئ:

$$\ln \alpha = 2 - \alpha^2$$

**II.**

**1** حساب: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) &= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left(x^2 + (2 - \ln x)^2\right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

لأنّ:

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$

و

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \left(x^2 + (2 - \ln x)^2\right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

لأنّ:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

**2** تبيين أنّ إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

لدينا الدّالة $f$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة كمايلي:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 2\left(-\frac{1}{x}\right)(2 - \ln x) \\ &= 2x - \frac{2}{x}(2 - \ln x) \\ &= \frac{2x^2 - 4 + 2\ln x}{x} \\ &= \frac{2\left(x^2 - 2 + \ln x\right)}{x} \\ &= \frac{2}{x} g(x) \end{aligned}$$

بماأنّ: $0 \prec \frac{2}{x}$ فإنّ إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

**3** تشكيل جدول تغيّرات الدّالة $f$



| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

**4** تبيين أنّ: $f(\alpha) = \alpha^2(1 + \alpha^2)$

لدينا:

$$f(\alpha) = \alpha^2 + (2 - \ln \alpha)^2 \cdots\cdots (1)$$

ومماسبق وجدنا:

$$\ln \alpha = 2 - \alpha^2 \cdots\cdots (2)$$

بتعويض $(2)$ في $(1)$ نجد:

$$f(\alpha) = \alpha^2 + (2 - (2 - \alpha^2))^2$$

يكافئ:

$$f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha^4$$

ومنه:

$$f(\alpha) = \alpha^2(1 + \alpha^2)$$

**5** استنتاج إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

من جدول تغيّرات الدّالة $f$ لدينا:

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ‖ | $+$ | |

**III.**

**1** تبيين أنّ المسافة $AM$ تُعطى بـ: $AM = \sqrt{f(x)}$ على المجال $]0;+\infty[$

لدينا: $M$ نقطة من $(\Gamma)$ معناه إحداثياتها هما: $(x;\ln x)$ ومنه المسافة تعطى بما يلي:

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x-0)^2 + (\ln x - 2)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (-(2 - \ln x))^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (2 - \ln x)^2} \\ &= \sqrt{f(x)} \end{aligned}$$

**2** أ- برهان أنّ للدّالتين $f$ و $k$ نفس إتجاه التغيّر على المجال $]0;+\infty[$

هنا نستعمل إتجاه تغيّر مركب دالتين -عُد لدروس السنة الثانية ستجد هذا بالتفصيل-

نضع من أجل كل $x$ من المجال $]0;+\infty[$: $u(x) = \sqrt{x}$.

لاحظ أنّ: $k = u \circ f$.

نعلم أنّ الدّالة $u$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ والدّالة $f$ موجبة تماما على المجال $]0;+\infty[$ وبالتالي فإنّ لـ $f$ و $k$ نفس إتجاه التغيّر.

ملاحظة: يمكنك اشتقاق الدّالة $k$ لتجد أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]0;+\infty[$: $k'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ وتقوم بدراسة إشارتها ومن ثمّ إتجاه التغيّر.



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ب- برهان أنّ المسافة $AM$ أصغرية في نقطة $P$ من $(\Gamma)$، يُطلب تعيين إحداثيها

بما أنّ لـ $f$ و $k$ نفس إتجاه التغيّر على المجال $]0;+\infty[$ فإنّ: الدّالة $k$ تبلغ قيمة حدية صغرى هي $x=\alpha$ وبالتالي المسافة أصغرية لمّا $x=\alpha$ إذن:

$$P(\alpha;\ln\alpha)$$

يكافئ:

$$P(\alpha;2-\alpha^2)$$

ج- برهن أنّ: $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$

لدينا مايلي:

$$\begin{aligned}AP&=\sqrt{(\alpha-0)^2+(2-\alpha^2-2)^2}\\&=\sqrt{\alpha^2+\alpha^4}\\&=\sqrt{\alpha^2(1+\alpha^2)}\\&=\sqrt{\alpha^2}\sqrt{1+\alpha^2}\\&=|\alpha|\sqrt{1+\alpha^2}\\&=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}\end{aligned}$$

**3** هل المستقيم $(AP)$ عمودي على المستقيم المماس للمنحنى $(\Gamma)$ في النقطة $P$؟ برّر إجابتك.

لنبدأ أوّلا بميل المستقيم المماس لـ $(\Gamma)$ في النقطة $P$ هو:

$$h'(\alpha)=\ln'(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$$

ولدينا ميل المستقيم $(AP)$ هو:

$$\begin{aligned}a&=\frac{y_P-y_A}{x_P-x_A}\\&=\frac{2-\alpha^2-2}{\alpha-0}\\&=\frac{-\alpha^2}{\alpha}\\&=-\alpha\end{aligned}$$

تذكّر أنّه: يتعامد مستقيمان إذا كان جداؤ ميليهما يساوي $-1$.

لدينا: $-\alpha\times\frac{1}{\alpha}=-1$ وبالتالي المستقيم $(AP)$ عمودي على المستقيم المماس للمنحنى $(\Gamma)$ في النقطة $P$.

## التمرين التاسع

(I) نعتبر الدّالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=xe^x-x+1$

1 - ادرس تغيّرات الدّالة $g$.

2 - احسب $g'(0)$ ثمّ استنتج إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$.

3 - بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $g(x)-1\succeq 0$.

(II) نعتبر الدّالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كـمايلي: $f(x)=\ln(xe^x-x+1)$

ونسمّي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 - احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2 - بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$.

3 - شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$.

4 - احسب: $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-\ln(-x))$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

5 - احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى $(C_f)$؟

6 - نعتبر الدّالة $u$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $u(x)=e^x+x-2$.



أ - بيّن أنّ المعادلة $u(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا $\alpha$ حيث: $0\prec\alpha\prec 1$، ثمّ عيّن حصرا لـ $\alpha$ سعته $10^{-1}$.

ب - استنتج إشارة $u(x)$ على $\mathbb{R}$.

7 - ادرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x$.

8 - أ - بيّن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسا $(\delta)$ عموديّ على المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ في نقطة يُطلب تعيين إحداثيها.

ب - برّر لماذا المستقيمان $(\delta)$ و $(\Delta)$ متوازيان.

ج- أوجد حصرًا للعدد $f(\alpha)-\alpha$ ( تُدوّر النتائج إلى $10^{-2}$ ).

د - اكتب معادلة المماس $(\delta)$.

ه - احسب $f(1)$ و $f(-2)$.

9 - اكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $1$.

10 - مثّل بيانيّا كل من المستقيمين $(\Delta)$ و $(T)$، منحنى الدّالة $x\mapsto\ln(-x)$ والمنحنى $(C_f)$.

11 - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $a$ عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ التالية: $f(x)=(2-e^{-1})x+a$.

11 - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $l$ عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ التالية: $f(x)=x+l$.

12 - $(T_n)$ مستقيم ذو المعادلة $y=(2e^n-e^{n-1})x-(e^n-e^{n-1})$.

أ - برهن أنّ جميع المستقيمات $(T_n)$ تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيين إحداثيها.

ب - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $n$ عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ التالية:

$$f(x)=(2e^n-e^{n-1})x-(e^n-e^{n-1})$$

(III) $h$ الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$h(x)=\ln\left(\frac{1}{xe^{x-1}-xe^{-1}+e^{-1}}\right)$$

ونسمّي $(C_h)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 - بين أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ فإنّ: $h(x)=-f(x)+1$.

2 - أ - بيّن أنّ المنحنى $(C_h)$ هو صورة المنحنى $(C_f)$ بتركيب تحويلين نقطيين بسيطين يطلب تعيينهما.

ب - مثّل بيانيّا المنحنى $(C_h)$.

3 - نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ والوسيط الحقيقي $m$ التالية: $(E)\ldots\ldots x(e^x-1)-m=0$ حيث $m\neq-1$.

- باستعمال المنحنى $(C_h)$. ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة $(E)$.

(IV) نعتبر الدّالة $k$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $k(x)=h(2x-2)+f(\alpha)$. - عبارة $k(x)$ غير مطلوبة -.

1 - ادرس تغيّرات الدّالة $k$.

2 - تحقّق من أنّ $k\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)=1$، ثمّ بيّن أنّ: $k'\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)=-2f'(\alpha)$.

3 - استنتج معادلة المماس $(D)$ لمنحنى الدّالة $k$ عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{2}$.

4 - تحقّق من أنّ: $y=-2x+\alpha+3$ معادلة للمستقيم $(D)$.

5 - احسب $k(-1)$.

(V) $p$ الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$p(x)=f(|x|)$$

ونسمّي $(C_p)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 - أ - احسب: $\lim\limits_{x\to0}\frac{p(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{p(x)}{x}$، ماذا تستنتج بالنسبة للدّالة $p$ ؟

ب - فسّر النتيجة هندسيا.

2 - أ - من أجل كل $x$ عدد حقيقي، احسب $p(x)-p(-x)$، ماذا تستنتج بالنسبة للدّالة $p$ ؟

ب - فسّر النتيجة هندسيا.

3 - اكتب $p(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

4 - باستعمال المنحنى $(C_f)$، مثّل بيانيّا المنحنى $(C_p)$ مبيّنا طريقة الإنشاء.

(VI) نعتبر الدّالة $q$ المعرفة على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ كمايلي:

$$q(x)=k(\tan x)$$



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ونسمّي $(C_q)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ .

1 - احسب $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} q(x)$ و $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} q(x)$ ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا .

2 - أ - ادرس بطرقتين مختلفتين اتجاه تغيّر الدّالة $q$ .

ب - شكّل جدول تغيّراتها .

3 - حل في المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ المعادلة : $\tan x=-1$ .

4 - اكتب معادلة المماس $(L)$ للمنحنى $(C_q)$ في النقطة ذات الترتيبة $f(\alpha)+f(-4)-1$ .

## الحل

### الجزء الأول

**1** ✍ دراسة تغيّرات الدّالة $g'$

حساب المستقة الأولى $g'$

الدّالة $g$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرّفة بـ : $g'(x)=e^x+xe^x-1$ .

حساب نهايات الدّالة $g'$

$$\lim_{x\to-\infty} g'(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^x+xe^x-1)$$
$$=-1$$

لأنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ .

$$\lim_{x\to+\infty} g'(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^x+xe^x-1)$$
$$=+\infty$$

لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ .

حساب المستقة الثانية $g''$

الدالة $g'$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرّفة بـ :

$$g''(x)=e^x+e^x+xe^x$$
$$=e^x(x+2)$$

جدول إشارة $g''(x)$

إشارة $g''(x)$ من إشارة $x+2$ لأنّ $e^x\succ 0$ ومنه إشارة $g''(x)$ تكون كالتالي :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

إتجاه تغيّر الدّالة $g'$

- لمّا : $x\in]-\infty;-2]$ لدينا : $g''(x)\preceq 0$ ومنه الدّالة $g'$ متناقصة .
- لمّا : $x\in[-2;+\infty[$ لدينا : $g''(x)\succeq 0$ ومنه الدّالة $g'$ متزايدة .

جدول تغيّرات الدّالة $g'$



| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g'(x)$ | $-1$ | ↘ | $-1-e^{-2}$ | ↗ | $+\infty$ |

**2** ✍ حساب $g'(0)$ ثمّ استنتاج إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$

لدينا : $g'(0)=e^0+(0)e^0-1=0$ ومنه من جدول التغيرات تكون إشارة $g'(x)$ كمايلي :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**3** ✍ تبيين أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $g(x)-1\succeq 0$

حساب نهايات الدّالة $g$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(xe^x-x+1)=+\infty$$ لأنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} -x=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(xe^x-x+1)=\lim_{x\to+\infty}(x(e^x-1)+1)=+\infty$$ لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-1)=+\infty$

جدول تغيّرات الدّالة $g$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

من جدول تغيّرات الدّالة $g$ لدينا : من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $g(x)\succeq 1$ ومنه : $g(x)-1\succeq 0$ .

### الجزء الثاني

**1** ✍ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(xe^x-x+1)=\lim_{x\to+\infty}\ln(x(e^x-1)+1)=+\infty$$ لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-1)=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln(xe^x-x+1)=+\infty$$ لأنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} -x=+\infty$

**2** ✍ تبيين أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

الدّالة $f$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=\frac{e^x+xe^x-1}{xe^x-x+1}=\frac{g'(x)}{g(x)}$$

**3** ✍ تشكيل جدول تغيّرات الدّالة $f$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g'(x)$ لأنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ فإنّ : $g(x)\succ 0$ ومنه جدول تغيّرات الدّالة $f$ يكون كالتالي :

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**4** حساب : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-\ln(-x))$ ثمّ تفسير النتيجة هندسيا

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\ln(-x))=\lim_{x\to-\infty}(\ln(xe^x-x+1)-\ln(-x))=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{xe^x-x+1}{-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(-e^x+1-\frac{1}{x}\right)=0$$

لأنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

التفسيـــر الهندسي

المنحنى $(C_f)$ ومنحنى الدّالة $x\mapsto\ln(-x)$ متقاربان في جوار $(-\infty)$ .

**5** حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ والاستنتاج بالنسبة للمنحنى $(C_f)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)&=\lim_{x\to+\infty}(\ln(xe^x-x+1)-x)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(xe^x\left(1-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{xe^x}\right)\right)-x\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(xe^x)+\ln\left(1-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{xe^x}\right)-x\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x)+\ln(e^x)+\ln\left(1-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{xe^x}\right)-x\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x)+x+\ln\left(1-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{xe^x}\right)-x\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x)+\ln\left(1-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{xe^x}\right)\right)\\&=+\infty\end{aligned}$$

نستنتج أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه المستقيم ذو المعادلة $y=x$ .

**6** تبيين أنّ المعادلة $u(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا $\alpha$ حيث : $1\prec\alpha\prec 0$

الدّالة $u$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $u'(x)=e^x+1$ ولدينا من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $u'(x)\succ 0$ .

وكذلك : $\lim\limits_{x\to-\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+x-2)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+x-2)=+\infty$

جدول تغيّرات الدّالة $u$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $u'(x)$ | | $+$ | |
| $u(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

لدينا : $u(0)=-2$ و $u(1)=e-1$

الدّالة $u$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;1[$ و $u(1)\times u(0)\prec 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $u(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا $\alpha$ حيث $\alpha\prec 1\prec 0$ .

تعيين حصرا لـ $\alpha$ سعته $10^{-1}$



| $x$ | $0$ | $0.1$ | $0.2$ | $0.3$ | $0.4$ | $0.5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u(x)$ | $-2$ | $-0.79$ | $-0.57$ | $-0.35$ | $-0.10$ | $0.14$ |

إذن : $0.4\prec\alpha\prec 0.5$ .

استنتاج إشارة $u(x)$ على $\mathbb{R}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**7** دراسة وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x$

لدينا : $f(x)-x=\ln(xe^x-x+1)-x$ .

نضع : من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $s(x)=\ln(xe^x-x+1)-x$ .

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}s(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}s(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=+\infty$ و $s(\alpha)=f(\alpha)-\alpha$ .

الدّالة $s$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرّفة بـ :

$$s'(x)=f'(x)-1=\frac{g'(x)}{g(x)}-1=\frac{g'(x)-g(x)}{g(x)}=\frac{e^x+xe^x-1-xe^x+x-1}{xe^x-x+1}=\frac{e^x+x-2}{xe^x-x+1}=\frac{u(x)}{g(x)}$$

إشارة $s'(x)$ من إشارة $u(x)$ لأنّ : $g(x)\succ 0$ ومنه جدول تغيّرات الدّالة $s$ يكون كالتالي :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $s'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $s(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $s(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

لدينا ممّا سبق : $f(1)=1$ يكافئ : $f(1)-1=0$ يكافئ : $s(1)=0$ وكذلك : $g(0)=1$ يكافئ : $\ln g(0)=\ln 1$ يكافئ : $f(0)-0=0$ ومنه : $s(0)=0$ .

وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ تُلخّص في الدول التالي :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s(x)=f(x)-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| الوضعية | $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ | | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | | $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ |

- $(C_f)\cap(\Delta)=\{O(0;0)\}$
- $(C_f)\cap(\Delta)=\{M(1;1)\}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**8** تبيين أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسا $(\delta)$ عموديّ على المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ في نقطة يُطلب تعيين إحداثيها

**تذكير**

يتعامد مستقيمان إذا كان جداء ميليهما يساوي $-1$.

$(\delta)$ عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ في النقطة ذات الفاصلة $x_0$ معناه : $f'(x_0)\times -1=-1$ أي : $f'(x_0)=1$ أي:
$\frac{g'(x_0)}{g(x_0)}=1$ يكافئ : $\frac{e^{x_0}+x_0e^{x_0}-1}{x_0e^{x_0}-x_0+1}-1=0$ يكافئ : $\frac{e^{x_0}+x_0e^{x_0}-1-x_0e^{x_0}+x_0-1}{x_0e^{x_0}-x_0+1}=0$ يكافئ : $\frac{u(x_0)}{g(x_0)}=0$ وبما
أنّ : $g(x_0)\succ 0$ فإنّ : $u(x_0)=0$ ومنه : $x_0=\alpha$ .
إذن $(\delta)$ يوازي المستقيم $(\Delta)$ في النقطة ذات الإحداثيات $(\alpha;f(\alpha))$ .

التبرير لماذا المستقيمان $(\delta)$ و $(\Delta)$ متوازيان.

لدينا المستقيم $(\Delta)$ عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ لأنّ جداء ميليهما يساوي $-1$. والمستقيم $(\delta)$ أيضا عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y=-x$-من معطيات التمرين-.
ونعلم أنّه يتوازى مستقيمان إذا كانا عموديان على نفس المستقيم.
ممّا يوحي إلى أنّ المستقيمان $(\delta)$ و $(\Delta)$ متوازيان.

إيجاد حصرًا للعدد $f(\alpha)-\alpha$ لدينا : $u(\alpha)=0$ يكافئ : $e^{\alpha}+\alpha-2=0$ ومنه : $e^{\alpha}=2-\alpha$

ولدينا : $f(\alpha)=\ln(\alpha e^{\alpha}-\alpha+1)=\ln(\alpha(2-\alpha)-\alpha+1)=\ln(-\alpha^2+\alpha+1)$ ومنه : $f(\alpha)=\ln(-\alpha^2+\alpha+1)$
لدينا : $(1)\cdots 0.5\prec\alpha\prec 0.4$ ، بتربيع الطرفين نجد : $(2)\cdots(0.5)^2\prec\alpha^2\prec(0.4)^2$ .
بضرب كل من المتراجحتين (1) و (2) في العدد $-1$ نجد : $(3)\cdots -0.4\prec-\alpha\prec-0.5$ و $(4)\cdots-(0.4)^2\prec-\alpha^2\prec-(0.5)^2$.
بجمع (1) مع (4) طرف بطرف نجد : $(5)\cdots -(0.4)^2+0.5\prec-\alpha^2+\alpha\prec-(0.5)^2+0.4$ .
بإضافة العدد 1 للمتراجحة (5) نجد $-(0.4)^2+0.5+1\prec-\alpha^2+\alpha+1\prec-(0.5)^2+0.4+1$ .
بما أنّ الدّالة $x\mapsto\ln x$ على المجال $]0;+\infty[$ فإنّ :

$$\ln\left(-(0.5)^2+0.4+1\right)\prec\ln\left(-\alpha^2+\alpha+1\right)\prec\ln\left(-(0.4)^2+0.5+1\right)\cdots(6)$$

بجمع (6) مع (3) طرف بطرف نجد :

$$\ln\left(-(0.5)^2+0.4+1\right)-0.5\prec\ln\left(-\alpha^2+\alpha+1\right)-\alpha\prec\ln\left(-(0.4)^2+0.5+1\right)-0.4$$

ومنه : $-0.36\prec f(\alpha)-\alpha\prec-0.11$

كتابة معادلة المماس $(\delta)$

$$y_\delta=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)=1(x-\alpha)+f(\alpha)=x+f(\alpha)-\alpha$$

حساب $f(1)$ و $f(-2)$

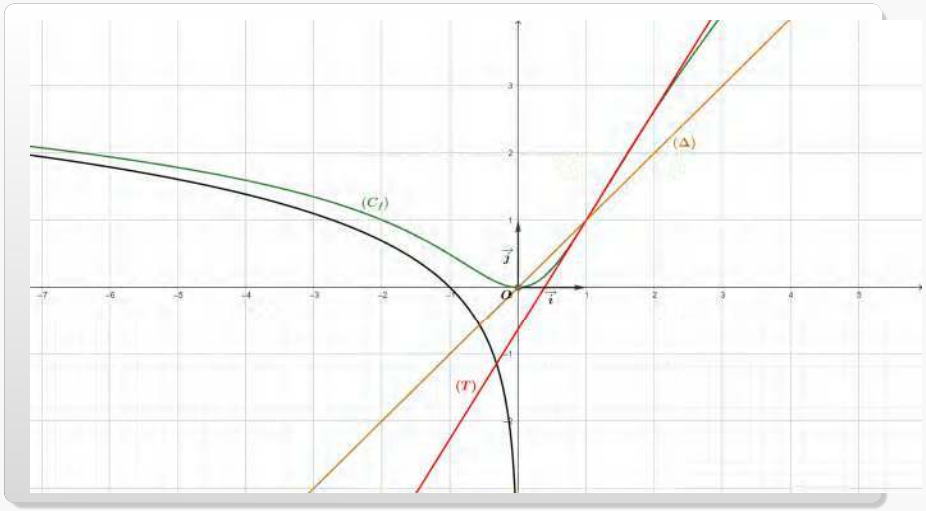
- $f(1)=\ln(1e^1-1+1)=1$
- $f(-2)=\ln(-2e^{-2}+2+1)\simeq 1$

**9** كتابة معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1

$$y_T=f'(1)(x-1)+f(1)=\left(2-e^{-1}\right)x+\left(e^{-1}-1\right)$$

**10** إنشاء : المستقيمين $(\Delta)$ و $(T)$ ، منحنى الدّالة $x\mapsto\ln(-x)$ والمنحنى $(C_f)$






إنشاء : المستقيمين $(\Delta)$ و $(T)$ ، منحنى الدّالة $x\mapsto\ln(-x)$ والمنحنى $(C_f)$

**11** المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي $a$ عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ التالية : $f(x)=(2-e^{-1})x+a$

حلول المعادلة $(2-e^{-1})x+a=f(x)$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع المستقيم ذو المعادلة $(2-e^{-1})x+a$ . ومنه :
- لمّا $a\prec e^{-1}-1$ المعادلة تقبل حلّا وحيدًا .
- لمّا $a=e^{-1}-1$ المعادلة تقبل حلّا مضاعفا هو : $x=1$ .
- لمّا $a\succ e^{-1}-1$ المعادلة تقبل حلّا وحيدًا .

**12** المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي $l$ عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ التالية : $f(x)=x+l$

حلول المعادلة $x+l=f(x)$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع المستقيم ذو المعادلة $x+l$ . ومنه :
- لمّا $l\prec f(\alpha)-\alpha$ المعادلة لاتقبل حلول .
- لمّا $l=f(\alpha)-\alpha$ المعادلة تقبل حلّا مضاعفا هو : $x=\alpha$ .
- لمّا $f(\alpha)-\alpha\prec l\prec 0$ المعادلة تقبل حلين موجبين تماما .
- لمّا $l=0$ المعادلة تقبل حلّين هما : $x=0$ و $x=1$ .
- لمّا $l\succ 0$ المعادلة تقبل حلّين مختلفين في الإشارة .

**13** البرهان أنّ جميع المستقيمات $(T_n)$ تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيين إحداثيها

نفرض أنّ المستقيمات $(T_n)$ تشمل نقطة ثابتة $A(x_1;y_1)$ معناه : $y_1=(2e^n-e^{n-1})x_1-(e^n-e^{n-1})$ يكافئ :
$y_1=(e^n(2-e^{-1}))x_1-(e^n(1-e^{-1}))$ يكافئ : $e^n\left[(2-e^{-1})x_1-(1-e^{-1})\right]-y_1=0$ ، المتغيّر في هذه المعادلة الأخيرة هو $e^n$ .

نعلم أنّه ينعدم كثير الحدود إذا انعدمت معاملات حدوده أي : $\begin{cases}(2-e^{-1})x_1-(1-e^{-1})=0\\-y_1=0\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}x_1=\frac{1-e^{-1}}{2-e^{-1}}\\y_1=0\end{cases}$

ومنه جميع المستقيمات $(T_n)$ تشمل نقطة ثابتة $A\left(\frac{1-e^{-1}}{2-e^{-1}};0\right)$ .

المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي $n$ عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ التالية : $f(x)=(2e^n-e^{n-1})x-(e^n-e^{n-1})$

أوّلا وقبل البدأ في هذه المناقشة يجب إيجاد قيمة $n$ حتى يكون المستقيم $(T_n)$ يوازي المستقيم $(\Delta)$ .
المستقيم $(T_n)$ يوازي المستقيم $(\Delta)$ معناه : $e^n(2-e^{-1})=1$ ومنه قيمة $n$ حتى يتوازى المستقيمان $(T_n)$ و $(\Delta)$ هي :
إذن : $n=\ln\left(\frac{1}{2-e^{-1}}\right)$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

- لمّا $n \in \left]-\infty;\ln\left(\frac{1}{2-e^{-1}}\right)\right[$ المعادلة لا تقبل حلولا .
- لمّا $0 \prec e^n \preceq \frac{1}{2-e^{-1}}$ أي $n \in \left]\ln\left(\frac{1}{2-e^{-1}}\right);0\right[$ المعادلة تقبل حلّا وحيدًا موجبا .
- لمّا $\frac{1}{2-e^{-1}} \prec e^n \prec 1$ أي $n \in \left]0;\ln\left(\frac{1}{2-e^{-1}}\right)\right[$ المعادلة تقبل حلّا وحيدًا موجبا .
- لمّا $e^n = 1$ أي $n = 0$ المعادلة تقبل حلّا مضاعفا هو $x = 1$ .
- لمّا $e^n \succ 1$ المعادلة تقبل حلّا وحيدًا موجبا .

## الجزء الثالث

**1** تبيين أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ فإنّ : $h(x) = -f(x) + 1$

$$h(x) = \ln\left(\frac{1}{xe^{x-1} - xe^{-1} + e^{-1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{-1}(xe^x - x + 1)}\right) = \ln\left(\frac{e}{xe^x - x + 1}\right) = \ln(e) - \ln(xe^x - x + 1) = -f(x) + 1$$

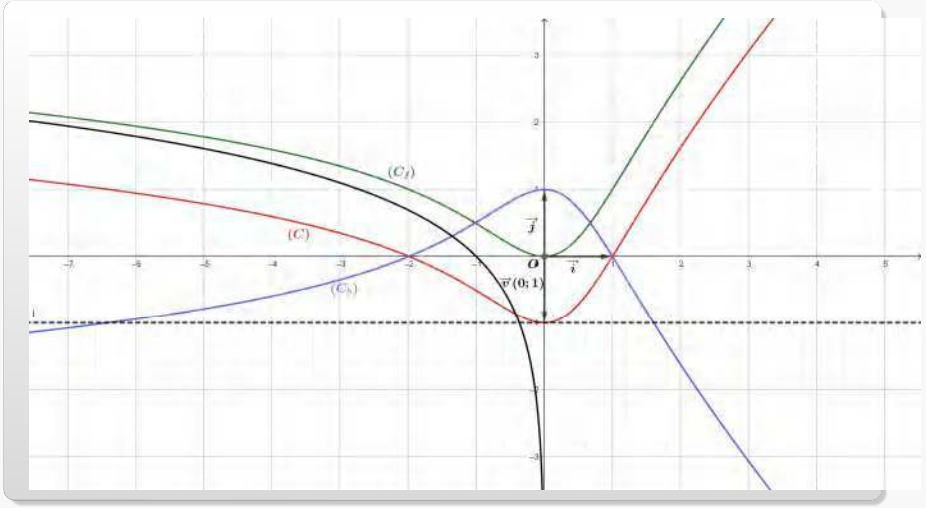
**2** تبيين أنّ المنحنى $(C_h)$ هو صورة المنحنى $(C_f)$ بتركيب تحويلين نقطيين بسيطين يطلب تعيينهما

لدينا : $h(x) = -f(x) + 1 = -(f(x) - 1)$ ومنه :

- منحنى الدّالة $x \mapsto f(x) - 1$ هو صورة المنحنى $(C_f)$ بانسحاب شعاعه $\vec{v}(0;-1)$ .
- ومنحنى الدّالة $x \mapsto -(f(x) - 1)$ هو نظير منحنى الدّالة $x \mapsto f(x) - 1$ بالنسبة لمحور التراتيب .

إنشاء المنحنى $(C_h)$

نسمّي $(C)$ منحنى الدّالة $x \mapsto f(x) - 1$ في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ .




إنشاء المنحنى $(C_h)$

**3** المناقشة البيانية حسب قيم $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة $(E)$

من أجل $m \in \mathbb{R} - \{-1\}$ لدينا : $x(e^x - 1) - m = 0$ يكافئ $xe^x - x = m$ يكافئ $xe^x - x + 1 = m + 1$

يكافئ : $\ln(xe^x - x + 1) = \ln|m+1|$ يكافئ : $-\ln(xe^x - x + 1) = -\ln|m+1|$ يكافئ : $-f(x) + 1 = \ln\left(\frac{1}{|m+1|}\right) + 1$ يكافئ : $h(x) = \ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right)$ .

- لمّا $\ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right) = 0$ أي : $\frac{e}{|m+1|} = e^0$ يكافئ : $|m+1| = e$ يكافئ : $m = e-1$ أو $m = -e-1$ المعادلة $(E)$ تقبل حلّين هما $x = 1$ و $x = -2$ .
- لمّا $1 \prec \ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right) \prec e$ يكافئ : $0 \prec \frac{e}{|m+1|} \prec e$ يكافئ : $1 \prec |m+1| \prec e$ يكافئ : $m \in ]-e-1;-2[\cup]0;e-1[$ أي : $(m+1) \in ]-e;-1[\cup]1;e[$ المعادلة $(E)$ تقبل حلّين مختلفين في الإشارة .
- لمّا $\ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right) = 1$ يكافئ : $\frac{e}{|m+1|} = e$ يكافئ : $|m+1| = 1$ أي : $m = 0$ أو $m = -2$ المعادلة $(E)$ تقبل حلّا مضاعفا هو $x = 0$ .
- لمّا $\ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right) \succ 1$ يكافئ : $\frac{e}{|m+1|} \succ e$ يكافئ : $1 \prec |m+1|$ يكافئ : $-2 \prec m \prec 0$ يكافئ : $-1 \prec m+1 \prec 1$

أي : $m \in ]-2;0[-\{-1\}$ المعادلة $(E)$ لا تقبل حلولا .

## الجزء الرابع

**1** ادرس تغيّرات الدّالة $k$

النّهايات

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-2) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ أي : $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = -\infty$ .

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-2) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ أي : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = -\infty$ .

المشتقة

الدّالة $k$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$k'(x) = 2h'(2x-2) = 2\left(-f'(2x-2)\right) = -2f'(2x-2)$$

إشارة المشتقة

- لمّا : $x \in ]-\infty;1]$ أي : $(2x-2) \in ]-\infty;0]$ يكون : $k'(x) \succeq 0$ ومنه الدّالة $k$ متزايدة .
- لمّا : $x \in [1;+\infty[$ أي : $(2x-2) \in [0;+\infty[$ يكون : $k'(x) \preceq 0$ ومنه الدّالة $k$ متناقصة .

جدول التغيّرات لدينا : $k(1) = h(2(1)-2) + f(\alpha) = h(0) + f(\alpha) = 1 - f(0) + f(\alpha) = f(\alpha)$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $k'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $k(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $-\infty$ |

**2** تحقّق من أنّ $k\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) = 1$ ثمّ بيّن أنّ : $k'\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) = -2f'(\alpha)$

- $k\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) + f(\alpha) = h\left(2\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)-2\right) + f(\alpha) = h(\alpha+2-2) + f(\alpha) = h(\alpha) = 1 - f(\alpha) + f(\alpha) = 1$
- $k'\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) = -2f'\left(2\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)-2\right) = -2f'(\alpha+2-2) = -2f'(\alpha)$

**3** استنتاج معادلة المماس $(D)$ لمنحنى الدّالة $k$ عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{2}$

$$y_D = k'\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\left(x - \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\right) + k\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) = -2f'(\alpha)\left(x - \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\right) + 1 = f'(\alpha)(\alpha+2-2x) + 1$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**4** ✍ التّحقّق من أنّ : $y=-2x+\alpha+3$ معادلة للمستقيم $(D)$

$$y=f'(\alpha)(\alpha+2-2x)+1=\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}(\alpha+2-2x)+1=\frac{e^{\alpha}+\alpha e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}-\alpha-1}(\alpha+2-2x)+1$$
$$=\frac{2-\alpha+\alpha(2-\alpha)-1}{\alpha(2-\alpha)-\alpha-1}(\alpha+2-2x)+1=\frac{-\alpha^2+\alpha-1}{-\alpha^2-\alpha-1}(\alpha+2-2x)+1=-2x+\alpha+3$$

**5** ✍ حساب $k(-1)$

$$k(-1)=h(2(-1)-2)+f(\alpha)=h(-4)+f(\alpha)=1-f(-4)+f(\alpha)$$

## الجـزء الخامس

**1** ✍ حساب : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{p(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{p(x)}{x}$ ، والاستنتاج بالنسبة للدّالة $p$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{p(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(|x|)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(xe^x-x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x(e^x-1)+1)}{x(e^x-1)}\cdot(e^x-1)=0$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{p(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(|x|)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(-xe^{-x}+x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x(-e^{-x}+1)+1)}{x(-e^{-x}+1)}\cdot(-e^{-x}+1)=0$

لأنّ : $\lim\limits_{x\to 0}x(e^x-1)=\lim\limits_{x\to 0}x(-e^{-x}+1)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ .

بما أنّ : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{p(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{p(x)}{x}=0$ نستنتج أنّ الدّالة $p$ قابلة للاشتقاق في الصفر .

✍ تفسير النتيجة هندسيا

نفسّر النتيجة السابقة هندسيا بأنّ المنحنى $(C_p)$ يقبل مماسا موازٍ لحامل محور الفواصل معادلته هي : $y=f(0)=0$ .

✍ حساب $p(x)-p(-x)$ ، والاستنتج بالنسبة للدّالة $p$

من أجل كل $x$ و $-x$ ينتميان إلى $\mathbb{R}$ لدينا : $p(x)-p(-x)=f(|x|)-f(|-x|)=f(|x|)-f(|x|)=0$

نستنتج أنّ الدّالة $p$ زوجية .

✍ تفسير النتيجة هندسيا

نفسّر النتيجة السابقة هندسيا بأنّ المنحنى $(C_p)$ يقبل المستقيم ذو المعادلة $x=0$ ( حامل محور التراتيب ) محور تناظر .

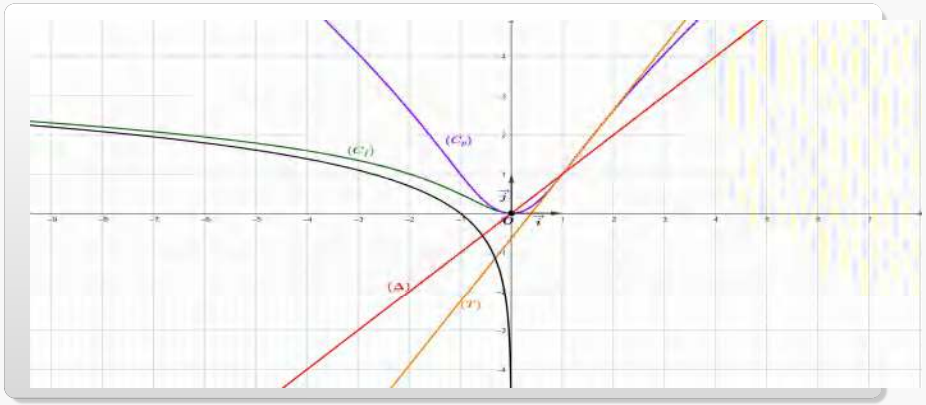
**2** ✍ كتابة $p(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

$$p(x)=f(|x|)=\begin{cases}f(x)\,;x\succeq 0\\ f(-x)\,;x\preceq 0\end{cases}$$

**3** ✍ باستعمال المنحنى $(C_f)$ ، إنشاء المنحنى $(C_p)$ مبيّنا طريقة الإنشاء

لمّا $x\succeq 0$ : $(C_p)$ ينطبق على $(C_f)$ . لمّا $x\preceq 0$ : $(C_p)$ نظير $(C_f)$ بالنسبة لمحور التراتيب .






إنشاء : المستقيمين $(\Delta)$ و $(T)$ ، منحنى الدّالة $x\mapsto \ln(-x)$ والمنحنى $(C_p)$

## الجـزء السادس

**1** ✍ حساب $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}q(x)$ و $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}q(x)$ ثمّ تفسير النّتيجتين هندسيا

تذكّر أنّ : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ .

لدينا : $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\tan(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to -\infty}k(x)=-\infty$ لأنّ : $\sin(-\frac{\pi}{2})=-1$ و $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\cos(x)=0^+$ ومنه :

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}q(x)=-\infty$$

لدينا : $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\tan(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to -\infty}k(x)=-\infty$ لأنّ : $\sin(\frac{\pi}{2})=1$ و $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\cos(x)=0^-$ ومنه :

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}q(x)=-\infty\ .$$

التفسير الهندسي

$x=-\frac{\pi}{2}$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى $(C_q)$ .

$x=\frac{\pi}{2}$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى $(C_q)$ .

**2** ✍ دراسة بطريقتين مختلفتين اتجاه تغيّر الدّالة $q$

الطريـقة 1 هنا نستعمل فقط مشتقة الدّالة $k$ وإشارتها .

الدّالة $q$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ ودالتها المشتقة هي : $q'(x)=\tan' x\cdot k'(\tan x)=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot k'(\tan x)$

لدينا : $k'(\tan x)=0$ أي : $\tan x=1$ يكافئ : $\frac{\sin x}{\cos x}=1$ يكافئ : $\sin x=\cos x$ يكافئ : $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ حيث : $k\in\mathbb{Z}$ وبما أنّ مجال الدّراسة هو $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ فإنّ : $x=\frac{\pi}{4}$

- لمّا $\tan x\in]-\infty;1]$ أي : $x\in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}]$ لدينا : $k'(\tan x)\succeq 0$ معناه : $q'(x)\succeq 0$ ومنه الدّالة $q$ متزايدة .
- لمّا $\tan x\in[1;+\infty[$ أي : $x\in[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}[$ لدينا : $k'(\tan x)\preceq 0$ معناه : $q'(x)\preceq 0$ ومنه الدّالة $q$ متناقصة .

الطريـقة 2 هنا نستعمل إتجاه تغيّر دالة مركبة .

لدينا : $q=k\circ v$ حيث $v$ دالة معرّفة كما يلي : $v:x\mapsto\tan x$ .

- الدّالة $k$ متزايدة على المجال $]-\infty;1]$ و $\tan x\preceq 1$ لمّا $x\in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}]$ والدّالة $\tan$ متزايدة على المجال $x\in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}]$ ومنه الدّالة $q$ متزايدة على المجال $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}]$ ( لأنّ $\tan' x=\frac{1}{\cos^2 x}$ ) .
- الدّالة $k$ متناقصة على المجال $[1;+\infty[$ و $\tan x\succeq 1$ لمّا $x\in[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}[$ والدّالة $\tan$ متزايدة على المجال $x\in[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}[$ ومنه الدّالة $q$ متناقصة على المجال $[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}[$ ( لأنّ $\tan' x=\frac{1}{\cos^2 x}$ ) .



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

جدول التغيّرات — لدينا : $q\left(\frac{\pi}{4}\right)=k\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=k(1)=f(\alpha)$ ومنه :

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $q'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ |
| $q(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $-\infty$ |

**3** حل في المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ المعادلة : $\tan x=-1$

لدينا : $\tan x=-1$ يكافئ : $\sin x=\cos x$ يكافئ : $-\sin x=\cos x=-\cos(\pi+x)$ يكافئ : $-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos(\pi+x)$ يكافئ : $\frac{\pi}{2}-x=\pi+x+2k\pi$

حيث : $k\in\mathbb{Z}$ أي : $x=-\frac{\pi}{4}-k\pi$ ومنه حل المعادلة $\tan x=-1$ في المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ هو $x=-\frac{\pi}{4}$ .

**4** كتابة معادلة المماس $(L)$

نفرض أنّ $(L)$ مماس لـ $(C_q)$ في النقطة $(x_2;1-f(-4)+f(\alpha))$ وكذلك : $\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ .

$q(x_2)=1-f(-4)+f(\alpha)$ يكافئ : $k(\tan x_2)=1-f(-4)+f(\alpha)$ إذن : $\tan x_2=-1$ ومنه: $x_2=-\frac{\pi}{4}$

$y_L=q'\left(-\frac{\pi}{4}\right)\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+q\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1-f(-4)+f(\alpha)=2x+\frac{\pi}{4}+1-f(-4)+f(\alpha)$

بالتوفيـــق والنجاح إن شاء الله في البكالوريـا

قال الإمام عبد الحميد ابن باديس رحمه الله تعالى :

انهض إلى العلم في جدٍّ بلا كسلٍ *** نهوض عبدٍ إلى الخيرات يبتدرُ

واصبر على نيله صبر المُجِدِّ لهُ *** فليس يُدركه من ليس يصطبرُ

يكفيكَ بالعلم فضلاً أنّ صاحبهُ *** بالعزّ نال العُلا والخيرَ ينتظرُ

وآهًا له رجلا فرّا محاسنُهُ *** بالحزم والعزم هان الصعبُ والعسِرُ

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM