دراسة دالة عددية بالقيمة المطلقة

المسألة

f هي الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\,;\,1\}$ بـ :

$$f(x)=|x+1|+\frac{x}{x^2-1}$$

وليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

ب- أحسب نهايات f عند أطراف مجموعة التعريف.

2) أ- أحسب $f'(x)$ ثم ادرس إشارتها.

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) أ- بين أن المستقيمين (Δ) و (Δ') مقاربين مائلين للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب حيث:

$(\Delta):y=x+1$ و $(\Delta'):y=-x-1$

ب- أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) على المجال $]1\,;+\infty[$ ووضعية (C) بالنسبة إلى (Δ') على المجال $]-\infty\,;-1[$.

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1\,;1[$ ثم أعط حصرا لـ α سعته 10^{-1}.

5) أرسم (C) والمستقيمات المقاربة.

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$f(x)=m$$

الحل

$$f(x)=|x+1|+\frac{x}{x^2-1}$$

1) أ- كتابة $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة:

لدينا:

$$|x+1|=\begin{cases}-x-1 & ;\ x\in\,]-\infty\,;-1[\\ \text{و}\\ x+1 & ;\ x\in[-1\,;+\infty[\end{cases}$$

ومنه:

$$f(x)=\begin{cases}-x-1+\dfrac{x}{x^2-1} & ;\ x\in\,]-\infty\,;-1[\\ \text{و}\\ x+1+\dfrac{x}{x^2-1} & ;\ x\in\,]-1\,;1[\cup\,]1\,;+\infty[\end{cases}$$

1) بـ- حساب نهايات f عند أطراف مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة على المجال $]-\infty;-1[\cup\,]-1;1[\cup\,]1;+\infty[$.

حساب: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x-1+\frac{x}{x^2-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x-1+\frac{x}{x\left(x-\frac{1}{x}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x-1+\frac{1}{x-\frac{1}{x}}\right)$$

لدينا:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(-x-1)=+\infty\\ \text{و}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0\\ \text{و}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x-\frac{1}{x}}\right)=0\end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

حساب: $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ <}}\left(-x-1+\frac{x}{x^2-1}\right)$$

لدينا:

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}}(-x-1)=0\\ \text{و}\\ \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}}\left(\frac{x}{x^2-1}\right)=-\infty\end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)=-\infty$$

حساب: $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\left(x+1+\frac{x}{x^2-1}\right)$$

لدينا:

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}(x+1)=0\\ \text{و}\\ \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}\left(\frac{x}{x^2-1}\right)=+\infty\end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=+\infty$$

حساب: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\left(x+1+\frac{x}{x^2-1}\right)$$

لدينا:

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}(x+1)=2\\ \text{و}\\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\left(\frac{x}{x^2-1}\right)=-\infty\end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=-\infty$$

حساب: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(x+1+\frac{x}{x^2-1}\right)$$

لدينا:

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}(x+1)=2\\ \text{و}\\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(\frac{x}{x^2-1}\right)=+\infty\end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=+\infty$$

حساب: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(x+1+\frac{x}{x^2-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left(x+1+\frac{x}{x\left(x-\frac{1}{x}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left(x+1+\frac{1}{x-\frac{1}{x}}\right)$$

لدينا:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty}(x+1)=+\infty\\ \text{و}\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0\\ \text{و}\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x-\frac{1}{x}}\right)=0\end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$$

تفسير النتائج بيانيا:

المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين عموديين (يوازيان حامل محور التراتيب) معادلتيهما $x=-1$ و $x=1$.

2) أ- حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ حيث:

- من أجل $x\in]-\infty;-1[$:

$$f'_1(x)=-1+\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$=-1+\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{-(x^2-1)^2-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{-x^4+2x^2-1-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{-x^4+x^2-2}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{-(x^4-x^2+2)}{(x^2-1)^2}$$

ومنه:

$$f'_1(x)=\frac{-(x^4-x^2+2)}{(x^2-1)^2}$$

- من أجل $x\in]-1;1[\cup]1;+\infty[$:

$$f'_2(x)=1+\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$=1+\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{(x^2-1)^2-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{x^4-2x^2+1-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

ومنه:

$$f'_2(x)=\frac{x^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2-1)^2}$$

دراسة إشارة $f'(x)$:

- من أجل $x\in]-\infty;-1[$:

$$f'_1(x)=\frac{-(x^4-x^2+2)}{(x^2-1)^2}$$

لدينا:

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;-1[$:

$$\begin{cases}-(x^4-x^2+2)<0\\(x^2-1)^2>0\end{cases}$$

ومنه:

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;-1[$:

$$f'_1(x)<0$$

يعطى جدول إشارة $f'_1(x)$ على المجال $]-\infty;-1[$ كما يلي:

x	$-\infty$		-1
$f'_1(x)$		$-$	‖

- من أجل $x\in]-1;1[\cup]1;+\infty[$:

$$f'_2(x)=\frac{x^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2-1)^2}$$

لاحظ أن:

الدالة $f'_2(x)$ تنعدم من أجل $x=-\sqrt{3}$ و $x=0$ و $x=\sqrt{3}$.

انتبه:

لا نأخذ القيمة $x=-\sqrt{3}$ بعين الاعتبار لأنها لا تنتمي إلى المجال $]-1;1[\cup]1;+\infty[$.

يعطى جدول إشارة $f'_2(x)$ على المجال $]-1;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي:

x	-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$		$+$	
$x+\sqrt{3}$	$+$	$+$		$+$	$+$	$+$		$+$	
$x-\sqrt{3}$	$-$	$-$		$-$	$-$	0		$+$	
$x^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$	$-$	0	$-$	$-$	0		$+$		
$f'_2(x)$	‖ $-$	0	$-$	‖	$-$	0		$+$	

نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول التالي:

x	$-\infty$	-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

2) بـ- تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	‖ $-\infty$	↘	$+\infty$	↘	‖ $-\infty$	↘	$1+\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$

3) أ- البرهان أن (Δ) و (Δ') مقاربين مائلين للمنحنى (C):

البرهان أن (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$:

المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ إذا كان:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f_2(x)-y_{(\Delta)}\right)=0$$

حيث:

$$\begin{cases} f_2(x)=x+1+\dfrac{x}{x^2-1} \\ \text{و} \\ (\Delta): y=x+1 \end{cases}$$

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f_2(x)-y_{(\Delta)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x\left(x-\frac{1}{x}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-\frac{1}{x}}\right)$$

$$=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f_2(x)-y_{(\Delta)}\right)=0$$

ومنه:

المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

حيث:

$$(\Delta): y=x+1$$

البرهان أن (Δ') مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$:

المستقيم (Δ') مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$ إذا كان:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f_1(x)-y_{(\Delta')}\right)=0$$

حيث:

$$\begin{cases} f_1(x)=-x-1+\dfrac{x}{x^2-1} \\ \text{و} \\ (\Delta'): y=-x-1 \end{cases}$$

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f_1(x)-y_{(\Delta')}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x\left(x-\frac{1}{x}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x-\frac{1}{x}}\right)$$

$$=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f_1(x)-y_{(\Delta')}\right)=0$$

ومنه:

المستقيم (Δ') مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

حيث:

$$(\Delta'): y=-x-1$$

3) بـ- دراسة وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) على المجال $]1;+\infty[$:

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) ندرس إشارة الفرق $f_2(x)-y_{(\Delta)}$ على المجال $]1;+\infty[$.

حيث:

$$f_2(x)-y_{(\Delta)}=\frac{x}{x^2-1}$$

لدينا:

من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$ فإن:

$$f_2(x)-y_{(\Delta)}>0$$

ومنه:

المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]1;+\infty[$.

(أنظر الجدول المرافق).

دراسة وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ') على المجال $]-\infty\,;-1[$:

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ') ندرس إشارة الفرق $f_1(x)-y_{(\Delta')}$ على المجال $]-\infty\,;-1[$.

حيث:

$$f_1(x)-y_{(\Delta')}=\frac{x}{x^2-1}$$

لدينا:

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty\,;-1[$ فإن:

$$f_1(x)-y_{(\Delta)}<0$$

ومنه:

المنحنى (C) يقع تحت المستقيم (Δ') على المجال $]-\infty\,;-1[$.

نلخص وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيمين (Δ) و (Δ') في الجدول المرافق التالي:

x	$-\infty$		-1	0	1		$+\infty$
x	$-$						$+$
x^2-1	$+$						$+$
$\frac{x}{x^2-1}$	$-$						$+$
الوضعية	(C) تحت (Δ')						(C) فوق (Δ)

4) البرهان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1\,;1[$:

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-1\,;1[$.

ولدينا:

$$\lim_{x\to -1} f(x)=+\infty$$

و

$$\lim_{x\to 1} f(x)=-\infty$$

لاحظ أن:

$$0\in\,]-\infty\,;+\infty[$$

ومنه:

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1\,;1[$ بحيث $f(\alpha)=0$.

إعطاء حصر لـ α سعته 10^{-1}:

لدينا:

$$-1<\alpha<1$$

ومن جدول تغيرات الدالة f لدينا:

$$f(0)=1\ \left(\text{قيمة موجبة}\right)$$

ومنه:

$$0<\alpha<1$$

وفيما يلي إشارة $f(\alpha)$ الموافقة لقيم α على المجال $]0\,;1[$:

حيث:

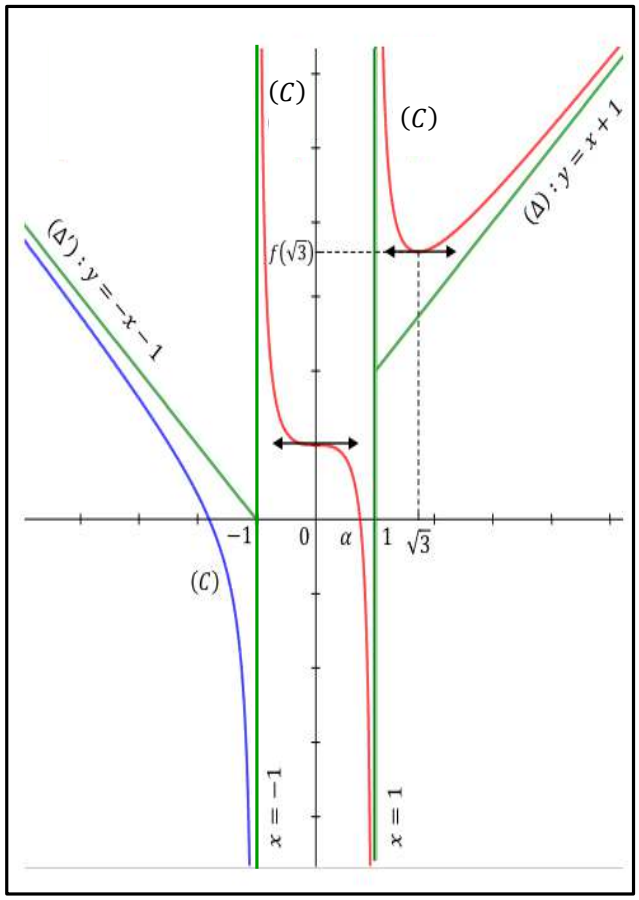
$$f(x)=x+1+\frac{x}{x^2-1}$$

α	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$f(\alpha)$	+	+	+	+	+	+	+	−	−

ومنه:

$$0,7<\alpha<0,8$$

5) رسم (C) والمستقيمات المقاربة:



6) المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة:

$f(x) = m \dots (*)$

الحلول البيانية للمعادلة (*) هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة f مع المستقيمات (Δ_m) المعرفة بالمعادلة:

$(\Delta_m) : y = m$

جميع المستقيمات $(\Delta_m) : y = m$ توازي حامل محور الفواصل.

ومنه:

المناقشة البيانية أفقية.

- إذا كان: $m < 1$

للمعادلة (*) حلان متمايزان أحدهما موجب والآخر سالب.

- إذا كان: $m = 1$

للمعادلة (*) حلان متمايزان أحدهما معدوم والآخر سالب.

- إذا كان: $1 < m < 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

للمعادلة (*) حلان متمايزان سالبان.

- إذا كان: $m = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

للمعادلة (*) ثلاثة حلول أحدها موجب هو $\sqrt{3}$ وحلان سالبان.

- إذا كان: $m > 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

للمعادلة (*) أربعة حلول حلان موجبان وحلان سالبان.

BAC
عبد الحميد

BAC
عبد الحميد