ثانوية: المجاهد صديقي نوري | الموسم الدراسي: 2021 / 2022

الواجب المنزلي رقم ①

المستوى: 3 ثانوي علوم تجريبية | الأستاذ: قويسم براهيم الخليل

سُلم يوم: 05|10|2021 | يُعاد يوم: 12|10|2021

◆ التمرين 01:

احسب النهايات التالية:

① $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}\right)$ ② $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4-x^2}{x-2}\right)$ ③ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)$

◆ التمرين 02:

عيّن النهايات التالية:

① $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$ ② $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2}\right)$ ③ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-2\sqrt{x}+1}{x-1}\right)$

◆ التمرين 03:

برهن أنّ المنحنى الممثل للدالة f على المجال I يقبل مستقيما مقاربا أفقيا أو عموديا في الحالات التالية:

① $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ ، $I=]2;+\infty[$ ② $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2+x-2}$ ، $I=]-\infty;-2[$

◆ التمرين 04:

برهن أنّ المستقيم (D) مقارب للمنحني (C_f) ، ثم أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (D) :

① $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$ ، $I=]2;+\infty[$ ، $D: y=x$

② $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ ، $I=]-\infty;-1[$ ، $D: y=x-1$

◆ التمرين 05:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^2+x-3}{x+1}$$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي $(O;\vec{i},\vec{j})$.

① عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

② اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن (-1) :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

حيث: a، b و c أعدادا حقيقية يطلب تعيينها.

③ استنتج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحني (C_f)

④ حدد الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم المقارب المائل.

⑤ مثل بيانيا في المعلم السابق المستقيمات المقاربة، والمنحنى (C_f)

◆ التمرين 06:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة:

$f(x)=x^3+3x^2-4$، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي $(O;\vec{i},\vec{j})$.

① ادرس تغيرات الدالة f ، ثم أنجز جدول التغيرات.

② عين احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع محوري الاحداثيات.

③ برهن أن النقطة $\omega(-1;-2)$ مركز تناظر لـ (C_f) .

④ عين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω.

⑤ مثل بيانيا كل من (T) و (C_f) .

⑥ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $x^3+3x^2-4-m=0$.

• بالتوفيق في شهادة البكالوريا •

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

◆ التمرين 01:

① $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}\right)$
$= \dfrac{\sqrt{4}}{1-4} = \boxed{-\dfrac{2}{3}}$

② $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4-x^2}{x-2}\right)$
$= \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{(2-x)(2+x)}{x-2}\right)$
$= \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{-(x-2)(2+x)}{x-2}\right)$
$= \lim\limits_{x\to 2}\big(-(2+x)\big)$
$= -(2+2) = \boxed{-4}$

③ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)$
$= \dfrac{0^2+0}{|0^2-1|+1} = \dfrac{0}{2} = \boxed{0}$

◆ التمرين 02:

① $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 1}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$
$= \boxed{+\infty}$
لأنّ:
$\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 1}}\big(\sqrt{x-1}\big) = 0^+$
و $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 1}}\left(\dfrac{1}{0^+}\right) = +\infty$

② $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 3}}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2}\right) = \boxed{+\infty}$
لأنّ:
$\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 3}}((x-3)^2) = 0^+$ و
$\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 3}}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{0^+}\right) = +\infty$

③ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-2\sqrt{x}+1}{x-1}\right)$
$= \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{(x^2-2\sqrt{x}+1)(x^2+2\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+2\sqrt{x}+1)}\right)$
$= \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^4+2x^2-4x+1}{(x-1)(x^2+2\sqrt{x}+1)}\right)$
$= \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{(x-1)(x^3+x^2+3x-1)}{(x-1)(x^2+2\sqrt{x}+1)}\right)$
$= \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3+x^2+3x-1}{x^2+2\sqrt{x}+1}\right) = \dfrac{4}{4} = \boxed{1}$

◆ التمرين 03:

① لدينا:
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x-2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$
$\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 2}}\left(\dfrac{1}{x-2}\right) = +\infty$
ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$
وآخر مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 2$

② لدينا:
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+x-2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2}\right) = 1$
$\lim\limits_{\substack{<\\ x\to -2}}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+x-2}\right) = +\infty$
ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y = 1$
وآخر مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = -2$

◆ التمرين 04:

① لدينا:
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-1-x^2}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-1}{x}\right) = 0$$
ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية: لدينا:
$$f(x)-y = \frac{x^2-1}{x}-x = \frac{x^2-1-x^2}{x} = \frac{-1}{x}$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	‖	$-$	
الوضعية	(D) فوق (C_f)	‖	(D) تحت (C_f)	

ومنه (C_f) يقع تحت (D) في المجال I

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

② لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-(x-1)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-(x-1)(x+1)}{x+1}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-x^2+1}{x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x-1$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية: لدينا:

$$f(x)-y=0\Rightarrow\frac{1}{x+1}=0\Rightarrow x+1\neq 0\Rightarrow x\neq -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$		$+$
الوضعية	(D) تحت (C_f)		(D) فوق (C_f)

ومنه (C_f) تحت (D) في المجال I

◆ التمرين 05:

① تعيين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right)=-\infty$

لأنّ: $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0^-$ و $\lim\limits_{\substack{<\\x\to-1}}\left(\frac{x^2+x-3}{0^-}\right)=+\infty$

- $\lim\limits_{\substack{>\\x\to-1}}\left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right)=-\infty$
- $\lim\limits_{\substack{<\\x\to-1}}\left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty$

② اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 نجد: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}=\frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}=\frac{ax^2+ax+bx+b+c}{x+1}=\frac{ax^2+x(a+b)+b+c}{x+1}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=1\\a+b=1\\b+c=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\\c=-3\end{cases}$

- استنتاج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) :

بما أنّ: $\lim\limits_{\substack{>\\x\to-1}}\left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{<\\x\to-1}}\left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right)=-\infty$

فإنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته: $x=-1$

ولدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x-\frac{3}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{3}{x+1}\right)=0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $\pm\infty$ معادلته $y=x$.

③ تحديد الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم المقارب المائل:

لدينا:

$$f(x)-x=\frac{-3}{x+1}\Rightarrow f(x)-x=\frac{3}{-x-1}\Rightarrow -x-1\neq 0\Rightarrow x\neq -1$$

ومنه:

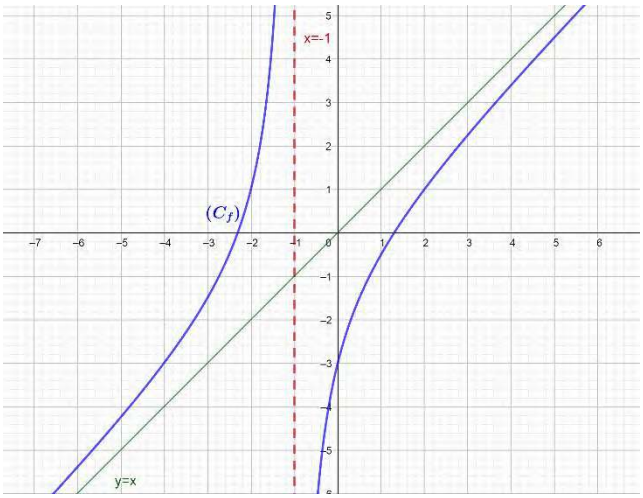
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$		$-$
الوضعية	(D) فوق (C_f)		(D) تحت (C_f)

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

④ التمثيل البياني:

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة: $x = -1$
- نرسم المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة: $y = x$
- باستعمال جدول الوضع النسبي والنهايات نمثل المنحني (C_f) .



◆ التمرين 06:

① دراسة تغيرات الدالة f ، ثم انجاز جدول التغيرات:

- تعيين النهايات:

• $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+3x^2-4)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+3x^2-4)=+\infty$

- تعيين $f'(x)$:

$$f'(x)=3x^2+6x$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2+6x=0\Rightarrow 3x(x+2)=0\Rightarrow\begin{cases}3x=0\\ \text{أو}\\ x+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ \text{أو}\\ x=-2\end{cases}$$

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

② تعيين احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات:

- مع محور الفواصل:

$$f(x)=0\Rightarrow x^3+3x^2-4=0$$

لدينا:

$$f(1)=1^3+3(1)^2-4=0$$

نلاحظ أنّ 1 حل للمعادلة $f(x)=0$ ، ومنه لحل المعادلة نستعمل طريقة المطابقة أو القسمة الاقليدية:

$$f(x)=x^3+3x^2-4\Rightarrow f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)\Rightarrow f(x)=x^3+ax^2+bx-x^2-ax-b$$
$$\Rightarrow f(x)=x^3+(a-1)x^2+(b-a)x-b$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a-1=3\\ b-a=0\\ -b=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\ b=4\end{cases}$

إذن: $f(x)=(x-1)(x^2+4x+4)$ ومنه:

$$f(x)=0\Rightarrow(x-1)(x^2+4x+4)=0\Rightarrow\begin{cases}x-1=0\\ \text{أو}\\ x^2+4x+4=0\end{cases}$$

لدينا: $x-1=0$ ومنه: $x=1$

ولدينا: $x^2+4x+4=0$: لحلها نستعمل المميز Δ:

$$\Delta=4^2-4(1)(4)=0$$

ومنه المعادلة السابقة تقبل جذر مضاعف هو $\frac{4}{}$ أي

قلم الجزائر

إذن مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$ هي : $s=\{1;-2\}$ وهي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل.

- مع محور التراتيب:

$$f(0)=0^3+3(0)^2-4=-4$$

إذن (C_f) يقطع محور التراتيب في النقطة ذات الاحداثيات $(0;-4)$

③ برهان أن النقطة $\omega(-1;-2)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) :

لدينا: $x\in\mathbb{R}$ ومنه: $(-x)\in\mathbb{R}$ إذن $\left(\underbrace{2(-1)-x}_{2\alpha-x}\right)\in\mathbb{R}$

ولدينا:

$$\begin{aligned}f(2(-1)-x)+f(x)&=(-2-x)^3+3(-2-x)^2-4+x^3+3x^2-4\\&=-(-2-x)^2(2+x)+3(2+x)^2-8+x^3+3x^2\\&=-(4+x^2+4x)(2+x)+12+3x^2+12x-8+x^3+3x^2\\&=-8-4x-2x^2-x^3-8x-4x^2+4+6x^2+12x+x^3\\&=-4=2(-2)\end{aligned}$$

ومنه النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f) .

④ تعيين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω:

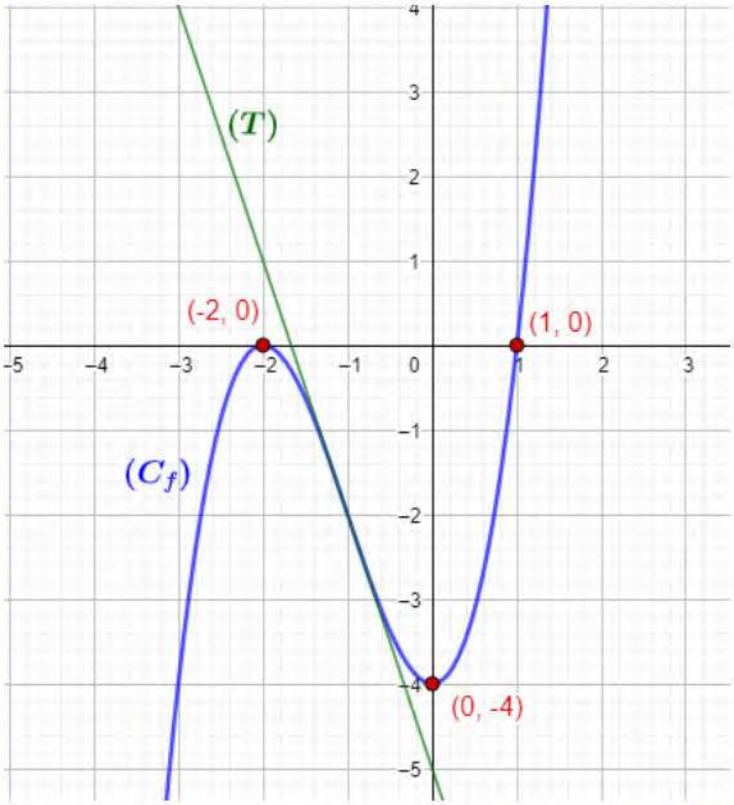
$$(T): y=f'(-1)\big(x-(-1)\big)+f(-1)$$
$$(T): y=\big(3(-1)^2+6(-1)\big)(x+1)+(-1)^3+3(-1)^2-4$$
$$(T): y=-3x-3-2$$
$$(T): y=-3x-5$$

ومنه معادلة المماس (T) هي $y=-3x-5$.

⑤ التمثيل البياني كل من (T) و (C_f) :

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نعين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الاحداثيات.
- نرسم المماس (T) ذو المعادلة: $y=-3x-5$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نمثل المنحني (C_f) .



⑥ المناقشة البيانية:

لدينا: $x^3+3x^2-4-m=0\Rightarrow f(x)=m$

ومنه حلول المعادلة هي نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y=m$ وعليه المناقشة أفقية:

لما	$m<-4$	أي	$x<-4$	للمعادلة حل وحيد سالب
لما	$m=-4$	أي	$x=-4$	المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والأخر مضاعف
لما	$-4<m<0$	أي	$-4<x<0$	المعادلة تقبل حلان سالبان وحل موجب
لما	$m=0$	أي	$x=0$	المعادلة تقبل حل مضاعف سالب وحل موجب
لما	$m>0$	أي	$x>0$	المعادلة تقبل حل وحيد موجب

• بالتوفيق في شهادة البكالوريا •

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM