الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: الربط بين مساحة حيز تحت منحن لدالة موجبة على مجال و الدوال الأصلية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " تكامل دالة ".

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: العلاقة بين دالة أصلية و مساحة حيز.

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج و يتوج بتقديم الفقرة " توظيف الحساب التكاملي لتعيين دوال أصلية ".

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

دراسة دالة تتضمن لوغاريتم نيبيري

تصحيح: /

الهدف: استنباط طريقة لحساب مساحة حيز محدد بمنحنيين.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

دالة معرفة بتكامل

تصحيح: /

الهدف: توظيف تعريف التكامل و الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

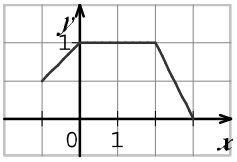
الحل: بسيط

التمارين

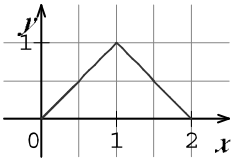
تمارين تطبيقية

1 ـ تكامل دالة

3



$I=\frac{13}{8}$

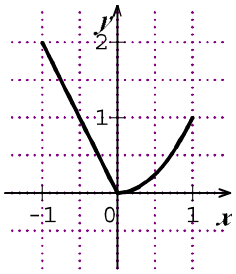


$I=1$

4 1. انشاء المنحني $\mathcal{C}$.

2. نعم الدالة f مستمرة على $[-1;1]$

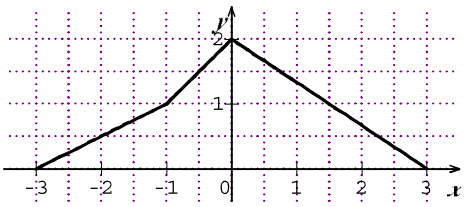
3. $I=\int_{-1}^{0}-2xdx+\int_{0}^{1}x^2dx \quad I=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

5

1.



2. نعم f مستمرة على $[-3;3]$.

3. $I=\int_{-3}^{-1}(0.5x+1.5)dx+\int_{-1}^{0}(x+2)dx+\int_{0}^{3}(-\frac{2}{3}x+2)dx$

6

• 1. $y=1+\sqrt{2-(x-1)^2}$ ..... $(*)$

$(*)$ تكافئ: $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ و $y-1\geq 0$

C هو نصف دائرة مركزها $\omega(1;1)$ و نصف قطرها $\sqrt{2}$ واقعة في نصف المستوي الذي معادلته $y\geq 1$.

2. تكامل الدالة f هو $I=\sqrt{2}(\pi+2)$

• 1. $y=\sqrt{4-x^2}$ تكافئ: $x^2+y^2=4$ و $y\geq 0$

C هو نصف دائرة مركزها O و نصف قطرها 2 واقعة في نصف المستوي الذي معادلته $y\geq 0$.

2. تكامل الدالة f هو $I=2\pi$.

7

$\int_{-1}^{3}f(x)dx=8$ ، $\int_{-1}^{2}f(x)dx=7$ ، $\int_{0}^{2}f(x)dx=4$.

10

1) $\int_{1}^{2}2x(x^2-1)dx=\left[\frac{1}{2}(x^2-1)\right]_{1}^{2}=\frac{3}{2}$

2) $\int_{1}^{10}\frac{dt}{\sqrt{t}}=2(\sqrt{10}-1)$ ؛ 3) $\int_{3}^{4}\frac{5x}{(x^2-2)^3}dx=\frac{5}{56}$ ؛ 4) $\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^x dx=1$

11

$\int_{0}^{1}(3x-6)(x^2-4x+1)^3dx=\left[\frac{3}{8}(x^2-4x+1)^4\right]_{0}^{1}$ ،

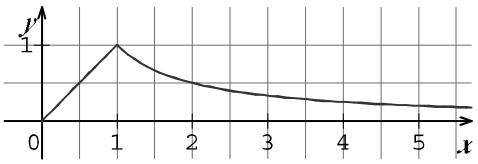
$\int_{0}^{3}\frac{dt}{\sqrt{1+t}}=\left[2\sqrt{1+t}\right]_{0}^{3}=4-2=2$ ،

$\int_{1}^{2}\frac{t^3}{t^4+1}dt=\left[\frac{1}{4}\ln(t^4+1)\right]_{1}^{2}=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{17}{2}\right)$ ،

$\int_{0}^{1}\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx=\left[\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)\right]_{0}^{1}=\frac{1}{2}(e^2-1)$

2 ـ خواص التكامل

32



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$I=\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^1 x\,dx+\int_1^3 \frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}+\ln 3$$

$$J=\int_2^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx=\int_2^1 \frac{1}{x}dx+\int_1^{\frac{1}{2}} x\,dx=-\ln 2-\frac{3}{8}$$

3 ـ القيمة المتوسطة

36 $f(x)=2x+3$ ، $\mu=3$

$f(x)=|x|$ ، $\mu=0$

37 1) من أجل كل x من $\left[\frac{1}{2};1\right]$ لدينا: $\ln x>\ln\frac{1}{2}$ و منه $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x\,dx\geq -\ln 2\int_{\frac{1}{2}}^1 dx$ أي $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x\,dx\geq -\frac{\ln 2}{2}$

2) من أجل كل x من $[1;2]$ لدينا: $\frac{1}{1+x^3}\leq\frac{1}{2}$ و منه $\int_1^2 \frac{1}{1+x^3}dx\leq\frac{1}{2}\int_1^2 dx$ أي $\int_1^2 \frac{1}{1+x^3}dx\leq\frac{1}{2}$

3) من أجل كل x من $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ لدينا: $-1\leq\sin(x^2+1)\leq 1$ ومنه $-\frac{\pi}{2}\leq\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(x^2+1)dx\leq\frac{\pi}{2}$

44 1) من أجل كل x من $[0;1]$ لدينا:

$\frac{1}{2}\leq\frac{1}{1+x^3}\leq 1$ ومنه $\frac{1}{2}\leq\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}dx\leq 1$

2) على المجال $[0;9]$ الدالة: $f:x\mapsto\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ متناقصة تماما، إذن من أجل كل x من $[0;9]$:

$f(9)\leq f(x)\leq f(0)$ و منه $\frac{1}{4}\leq f(x)\leq 1$ أي: $\frac{9}{4}\leq\int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx\leq 9$

45 1) على المجال $[1;2]$ الدالة: $f:x\mapsto\sqrt{x^3+1}$ متزايدة تماما،

إذن من أجل كل x من $[1;2]$: $f(1)\leq f(x)\leq f(2)$ ومنه $\sqrt{2}\leq f(x)\leq 3$ أي: $\sqrt{2}\leq\int_1^2\sqrt{x^3+1}\,dx\leq 3$

2) من أجل كل x من $[0;2]$: $e^{-4}\leq e^{x^2}\leq 1$ ومنه $2e^{-4}\leq\int_0^2 e^{-x^2}\,dx\leq 2$

3) من أجل كل x من $[2;4]$: $\ln 3\leq\ln(x^2-1)\leq\ln 15$ ومنه $2\ln 3\leq\int_2^4\ln(x^2-1)\,dx\leq 2\ln 3+2\ln 5$

46 تصويب: 1. باستعمال الشكل بين أن: $-\frac{1}{10}x^2+2x-5\leq f(x)\leq\frac{1}{2}x+2$

بقراءة بيانية المنحني C_f يقع أسفل Δ و أعلى P في المجال $[4;12]$،

نستنتج أن : $-\frac{1}{10}x^2+2x-5\leq f(x)\leq\frac{1}{2}x+2$

2.على المجال $[4;12]$، المنحني C_f أعلى محور الفواصل، إذن: $A=\int_4^{12} f(x)\,dx$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

بما أن $-\frac{1}{10}x^2+2x-5\le f(x)\le\frac{1}{2}x+2$ فإن: $\int_4^{12}\left(-\frac{1}{10}x^2+2x-5\right)dx\le\int_4^{12}f(x)dx\le\int_4^{12}\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx$

دالة أصلية للدالة g المعرفة بـ $g(x)=-\frac{1}{10}x^2+2x-5$ هي الدالة G المعرفة بـ: $G(x)=-\frac{1}{30}x^3+x^2-5x$

دالة أصلية للدالة h المعرفة بـ $h(x)=\frac{1}{2}x+2$ هي الدالة H المعرفة بـ: $H(x)=\frac{1}{4}x^2+2x$

$$\int_4^{12}\left(-\frac{1}{10}x^2+2x-5\right)dx=G(12)-G(4)=\frac{792}{30}-\left(-\frac{184}{30}\right)=\frac{976}{30}$$

$$\int_4^{12}\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx=H(12)-H(4)=60-12=48$$

إذن: $\frac{976}{30}\le A\le 48$

49 1) $\int_1^4 f(x)dx=3\mu=6$ ، $\int_1^3 f(x)dx=2\mu=2\ln 2$ 2)

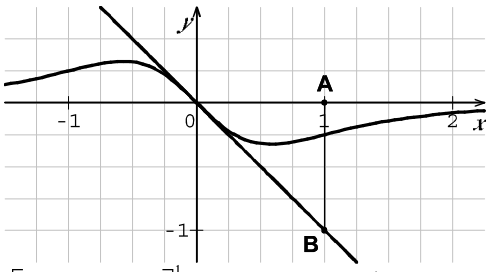
3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{74}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times\mu=\frac{1}{2}$

51 1) من أجل كل x من $[n;n+1]$: $\frac{1}{n}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{n+1}$ ومنه $\frac{1}{n}\le I_n\le\frac{1}{n+1}$.

2) حسب مبرهنة الحصر (I_n) متقاربة و تتقارب نحو 0.

4 ـ التمديد إلى دالة إشارتها كيفية

59



$A_1=\int_0^1-\frac{-x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ ومنه $A_1=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ ومنه $A_1=\left[-\frac{1}{2(x^2+1)}\right]_0^1$ أي $A_1=\frac{1}{4}$

2) أ- معادلة المماس T للمنحنى (C) عند المبدأ هي: $y=-x$

ب- المنحنى (C) أسفل T في المجال $]0;+\infty[$ و (C) أعلى T في المجال $]-\infty;0[$.

ج- المساحة A_2 للمثلث المحدد بـ T ، محور الفواصل و المستقيم D هي $A_2=\frac{1}{2}u.a$.

3) $A=A_2-A_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}u.a$

4) أ- $I(\lambda)=-\frac{1}{2}\int_0^{\lambda}\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\left[\frac{1}{2(x^2+1)}\right]_0^{\lambda}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$I(\lambda)=\left[\frac{1}{2(x^2+1)}\right]_0^{\lambda}=\frac{1}{2(\lambda^2+1)}-\frac{1}{2}$$

ب- $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I(\lambda)=-\frac{1}{2}$.

عندما يؤول λ إلى $+\infty$ ، مساحة المستوي المحدد بالمنحني (C) و محور الفواصل تقترب من $(-A_2)$ حيث A_2 مساحة المثلث OAB .

5 ـ توظيف الحساب التكاملي لحساب دوال أصلية

71 1. $I+J=\frac{\pi^2}{8}$.

أ- $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos(2x)$ 2.

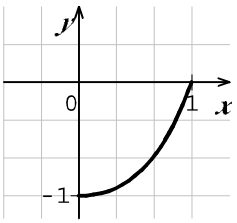
ب- نضع: $u(x)=x$ و $v'(x)=\cos 2x$ ومنه $u'(x)=1$ و $v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$

$$I-J=\left[\frac{x}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx \quad \text{ومنه} \quad I-J=\frac{1}{2}$$

3. $I=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{8}\right)$ و $J=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}\right)$

6- بعض تطبيقات الحساب التكاملي

73



$$a=\int_0^1 -(x-1)e^x dx$$

$$a=\left[(2-x)e^x\right]_0^1=e-2$$

2) $v=\int_0^1 \pi\left[(x-1)e^x\right]^2 dx=\pi\int_0^1 (x^2-2x+1)e^{2x} dx$

$v=\pi\left[\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}\right)e^{2x}\right]_0^1$ ، $v=\pi\frac{e^2-5}{4}u.v$

تمارين للتعمق

86 1. $J=\left[\frac{1}{2}\ln(1+2\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\ln 3$

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\cos x}{1+2\sin x}dx$$

2. $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=1$ ومنه $I=1-J=1-\frac{1}{2}\ln 3$

87 1) مجموعة النقط M هي ربع دائرة مركزها O و نصف قطرها r واقعة في الربع الأول.

2) $\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}r^2$ ، $\int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}r^2$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

97 1. من اجل كل x من $[0;1]$: $\frac{1}{1+e}\le\frac{1}{1+e^x}\le\frac{1}{2}$ و $e^{nx}>0$ و منه $\frac{e^{nx}}{1+e}\le\frac{e^{nx}}{1+e^x}\le\frac{e^{nx}}{2}$

2. بالمكاملة على المجال $[0;1]$ نجد :

$$\frac{e^n-1}{(1+e)n}\le u_n\le\frac{e^n-1}{2n}$$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

$\frac{1-e^{-n}}{(1+e)n}\le\frac{u_n}{e^n}\le\frac{1-e^{-n}}{2n}$، حسب مبرهنة الحصر يكون $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{e^n}=0$.

مسـائل

112

الجزء A :

1. $f(0)=1$ و $g(0)=0$ إذن C_g هو الذي يمر بمبدأ المعلم.

2. الدالتان f و g زوجيتان.

3. نقتصر الدراسة على $\mathbb{R}^+$.

$f'(x)=-2xe^{-x^2}$ ، $g'(x)=2x(1-x^2)e^{-x^2}$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	1	↘	0

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	↗	e^{-1}	↘	0

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ (بوضع $X=-x^2$)

4. $f(x)-g(x)=(1-x^2)e^{-x^2}$

C_f أعلى C_g إذا كان $-1<x<1$ و C_f أسفل C_g إذا كان $x<-1$ أو $x>1$ ، C_f يقطع C_g عند النقطتين اللتينفاصلتاهما -1 و 1.

الجزء B : $G(x)=\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$

1. G هي الدالة الأصلية للدالة g التي تنعدم عند 0.

2. الدالة g موجبة تماما على $]0;+\infty[$.من أجل $x>0$ ، $G(x)$ هو مساحة حيز مجموعة النقط $M(a;b)$ حيث $0\le a\le x$ و $0\le b\le g(x)$.

3. الدالة G متزايدة على $\mathbb{R}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4.الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ، إذن مشتقة الدالة $x\mapsto\frac{1}{2}\left[F(x)-xe^{-x^2}\right]$ هي :

$x\mapsto\frac{1}{2}\left[f(x)-e^{-x^2}+2x^2e^{-x^2}\right]$ أي الدالة g .

G و F لهما نفس المشتقة على $\mathbb{R}$. $G(0)=0$ و $\frac{1}{2}[F(0)-0]=0$. إذن $G(x)=\frac{1}{2}\left[F(x)-xe^{-x^2}\right]$

أ-5. $\lim\limits_{x\to+\infty}-xe^{-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(-x^2e^{-x^2}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\ell$ ،إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=\frac{\ell}{2}$.

ب- $N=\int_0^1(e^{-t^2}-t^2e^{-t^2})dt$ هو مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين C_f و C_g و $f(t)>g(t)$ على المجال $[0;1]$.N و محور التراتيب.

جـ-نضع من أجل كل $x\geq1$:

D_1 : مساحة الحيز المحدد بالمنحني C_f ، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$.

D_2 : مساحة الحيز المحدد بالمنحني C_g ، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$.

$D_3(x)$: مساحة حيز مجموعة النقط $M(a;b)$ التي تحقق $1\leq a\leq x$ و $0\leq b\leq f(x)$.

$D_4(x)$: مساحة حيز مجموعة النقط $M(a;b)$ التي تحقق $1\leq a\leq x$ و $0\leq b\leq g(x)$.

إذا كانت F و G دالتان أصليتان للدالتين f و g على $\mathbb{R}^+$ و $F(0)=G(0)=0$

$\int_0^x(e^{-t^2}-t^2e^{-t^2})dt=F(x)-G(x)$ و $\int_0^x(e^{-t^2}-t^2e^{-t^2})dt=\int_0^1(e^{-t^2}-t^2e^{-t^2})dt+\int_1^x(e^{-t^2}-t^2e^{-t^2})dt$

أي $\int_0^x(e^{-t^2}-t^2e^{-t^2})dt=D_2-D_1-\left(D_4(x)-D_3(x)\right)$

$\int_0^x(e^{-t^2}-t^2e^{-t^2})dt=N-\left(D_4(x)-D_3(x)\right)$

بما أن من أجل كل $x\geq1$: $D_4(x)-D_3(x)\geq0$ يكون : $N\geq F(x)-G(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\ell$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=\frac{\ell}{2}$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)-G(x)=\ell-\frac{\ell}{2}=\frac{\ell}{2}$

إذن $N\geq\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)-G(x)$ أي $N\geq\frac{\ell}{2}$.

ملاحظة: $\int_0^x[f(t)-g(t)]dt=\int_0^1[f(t)-g(t)]dt++\int_1^x[f(t)-g(t)]dt$

ومنه $\int_0^x[f(t)-g(t)]dt-\int_0^1[f(t)-g(t)]dt=\int_1^x[f(t)-g(t)]dt$

من أجل كل $x\geq1$: $f(x)<g(x)$ فيكون $\int_1^x[f(t)-g(t)]dt<0$ ومنه $\int_0^x[f(t)-g(t)]dt<\int_0^1[f(t)-g(t)]dt$

ومنه $F(x)-G(x)<\int_0^1[f(t)-g(t)]dt$ و بالتالي $\frac{\ell}{2}<\int_0^1[f(t)-g(t)]dt$ ومنه $\frac{\ell}{2}<\int_0^1\left[(1-t^2)e^{-t^2}\right]dt$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM