التحضير الجيد لبكالوريا 2021

الأستاذ: ميزان محمد

3As

المجلة الشاملة للرياضيات الأساسية التيبيرية

درس مفصل
و تمارين محلولة
لجميع الشعب العلمية

: Meziane Maths
: Meziane Maths
: Meziane Maths
: meziane.probastat@gmail.com

بالتوفيق
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM
الوريا 2021

قائمة المحتويات

1 الدالة الأسية 2

2 حلول المعادلة : $f' = kf$ 3

1.2 دوال تحول المجمـــوع إلى جداء 4

3 اتجاه تغير الدالة الأسية 4

1.3 النهايـــات 5

2.3 جدول التغيرات 5

3.3 التمثيل البياني 6

4 حل معادلات ومتراجحات 6

5 دراسة الدالة $exp \circ u$ 7

1.5 النهايات 7

2.5 اتجاه التغير 8

3.5 المشتقة 8

6 تمارين محلولة 9

1.6 تمارين تدريبية 9

2.6 تمارين تجريبية 31

7 التمارين الواردة في البكالوريا من 2008 إلى 2020 52

1.7 شعبة العلوم التجريبية 52

2.7 شعبة التقني الرياضي 60

3.7 شعبة الرياضيات 66

الأستاذ : مزيان محمد

1 الدالة الأسية

مبرهنة و تعريف

✍ توجد دالة وحيدة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث : $f'=f$ و $f(0)=1$ نرمز إلى هذه الدالة بالرمز "exp" ونسميها الدالة الأسية النيبيرية

مبرهنة

✍ الدالة الأسية موجبة تماما على $\mathbb{R}$.

برهان

✍ نعرف الدالة g على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=exp(x).exp(-x)$

g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $g'(x)=\exp(x).exp(-x)-exp(x).exp(-x)=0$ و منه g دالة ثابتة و عليه :

بما أن : $exp(0)=1$ فإن : $g(x)=1$ و عليه : $exp(x).exp(-x)=1$ و منه : exp لا تنعدم أبدا .

✍ لنبرهن أن الدالة exp موجبة تماما بالخلف :

نفرض وجود عدد x_0 بحيث $exp(x_0)\le 0$ في المجال $[0;x_0]$

أو المجال $[x_0;0]$. الدالة exp قابلة للاشتقاق فهي إذن مستمرة .

و لدينا : $exp(x_0)<0$ و $exp(0)>0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $exp(x)=0$ تقبل حلا في هذا المجال و هذا يناقض الفرض لأن exp لا تنعدم على $\mathbb{R}$.

و منه لا يوجد أي عدد x_0 من $\mathbb{R}$ بحيث : $exp(x_0)<0$ و عليه $exp(x)>0$ من أجل كل عدد طبيعي x .

نتائج

✍ $exp(0)=1$

✍ $exp'(x)=exp(x)$

خواص جبرية

1. $exp(x)\neq 0$
2. $exp(-x)=\dfrac{1}{exp(x)}$
3. $exp(x+y)=exp(x)\times exp(y)$
4. $exp(x-y)=\dfrac{exp(x)}{exp(y)}$
5. $exp(nx)=[exp(x)]^n$

العدد e والترميز e^x

✍ العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة الأسية أي $e=exp(1)$. تعطينا الحاسبة $e\approx 2.718281828$. من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، لدينا إذن: $exp(n)=exp(n\times 1)=[exp(1)]^n$ ، $exp(n)=e^n$.

اصطلاحا نرمز، من أجل كل عدد حقيقي x، إلى $exp(x)$ بِـ e^x .

خواص الترميز e^x

1. $e^0 = 1$.
2. $exp'(x) = e^x$.
3. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
4. $e^{x+y} = e^x \times e^y$.
5. $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.
6. $e^{nx} = (e^x)^n$.

مثال تطبيقي

✍ بسط العبارات التالية :

1. $(e^x)^3 \times e^{-5x} = e^{3x} \times e^{-5x} = e^{3x-5x} = e^{-2x}$
2. $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{-2x}} = e^{2x+1-(-2x)} = e^{2x+1+2x} = e^{4x+1}$
3. $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}} = \dfrac{e^x}{e^{2x}} + \dfrac{e^{-x}}{e^{2x}} = e^{x-2x} + e^{-x-2x} = e^{-x} + e^{-3x}$
4. $\left(\dfrac{(e^x)^3 \times e^{-6x}}{e^{4-x}}\right)^2 = \left(\dfrac{(e^{3x}) \times e^{-6x}}{e^{4-x}}\right)^2 = \left(\dfrac{e^{3x-6x}}{e^{4-x}}\right)^2 = \left(\dfrac{e^{-3x}}{e^{4-x}}\right)^2 = (e^{-3x-(4-x)})^2 = (e^{-3x-4+x})^2 = (e^{-2x+4})^2 = e^{-4x+8}$
5. $\sqrt{e^x} = (e^x)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}x} = e^{\frac{x}{2}}$
6. $\sqrt{\dfrac{3e^{x-1}}{e^{2x+1}}} = \sqrt{3e^{x-1-(2x+1)}} = \sqrt{3e^{x-1-2x-1}} = \sqrt{3e^{-x-2}} = \sqrt{3} \times \sqrt{e^{-x-2}} = \sqrt{3} \times (e^{-x-2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \times e^{\frac{-x-2}{2}}$

2 حلول المعادلة : $f' = kf$

مبرهنة و تعريف

✍ توجد دالة وحيدة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث : $f' = kf$

و $f(0) = 1$ هي الدالة $x \longmapsto e^{kx}$

برهان

الوجود: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{kx}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x) = ke^{kx} = kf(x)$ كما أن $f(0) = e^0 = 1$ وبالتالي الدالة f تحقق $f' = kf$ و $f(0) = 1$

الوحدانية : نفرض وجود دالة ثانية g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $g' = kg$ و $g(0) = 1$، نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$، الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$h'(x) = \dfrac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{[f(x)]^2} = \dfrac{kg(x)f(x) - g(x)kf(x)}{[f(x)]^2} = 0$ إذن h ثابتة على $\mathbb{R}$ مع $h(0) = \dfrac{g(0)}{e^0} = 1$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x) = 1$ وعليه $f(x) = g(x)$ إذن الدالة f موجودة ووحيدة.

مبرهنة

✍ الدوال غير المعدومة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث : من أجل كل عددين حقيقين x و y ، $f(x+y)=f(x)f(y)$
هي الدوال $x \longmapsto e^{kx}$ حيث k عدد حقيقي

3 إتجاه تغير الدالة الأسية

خاصية

✍ من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x > 0$

برهان

✍ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $e^x = e^{2\times\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$ و بما أن $e^x \neq 0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^x > 0$.

خاصية

✍ الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

برهان

✍ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $exp'(x) = e^x > 0$ ومنه e^x متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

نتائج

✍ من أجل كل عددين حقيقين a و b لدينا : $e^a < e^b$ معناه أن $a < b$
و $e^a = e^b$ تعني أن $a = b$
✍ من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $0 < e^x < 1$ يعني $x < 0$
و $e^x > 1$ يعني $x > 0$

1.3 النهايـــات

خواص

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$
6. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

برهان

1. نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بِـ $f(x)=e^x-x$. من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f'(x)=e^x-1$.
و بما أن من أجل كل x من $[0;+\infty[$ فإن $f'(x)\geq 0$ و منه f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و $f(0)=1$.
إذن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $e^x\geq x$ أي $e^x\geq x$. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

2. من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x=\dfrac{1}{e^{-x}}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.

3. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بِـ $f(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}$. لدينا من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f'(x)=e^x-x$ و $f''(x)=e^x-1$. بما أن من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $f''(x)\geq 0$ فإن الدالة f' متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و علما أن $f'(0)=1$ فإن من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $f'(x)\geq 0$ و منه فالدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و علما أن $f(0)=1$ فإن من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $f(x)\geq 0$. نستنتج أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $e^x-\dfrac{x^2}{2}\geq 0$ و بالتالي فإن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\dfrac{e^x}{x}\geq\dfrac{x}{2}$. باستعمال النهايات بالمقارنة و علما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$.

4. لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ و منه نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$.

5. نضع $X=-x$. إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} X=+\infty$ و منه: $\lim\limits_{X\to+\infty} -\dfrac{X}{e^X}=0$: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=\lim\limits_{X\to+\infty} -Xe^{-X}=0$.

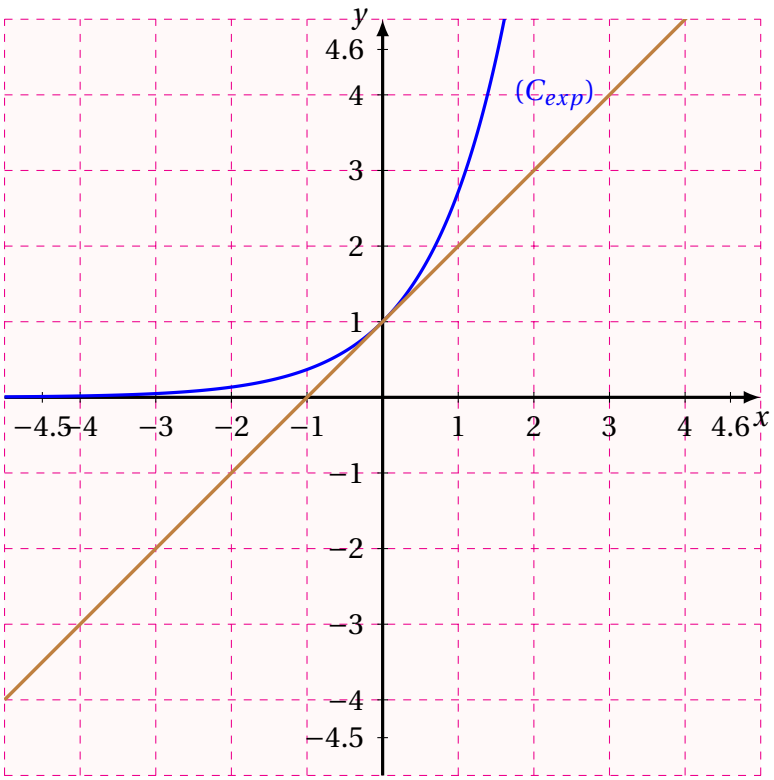
6. من تعريف العدد المشتق لدينا $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{0+x}-e^0}{x}=exp'(0)=1$ إذن : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

2.3 جدول التغيرات

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x		$+$			
e^x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

التمثيل البياني



✍ المنحنى (C) الممثل للدالة الأسية يقبل محور الفواصل كمستقيم مقارب لما x يؤول إلى $-\infty$

✍ لدينا $exp'(0) = exp(0) = 1$ إذن المنحنى (C) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا $y = x + 1$

✍ من تعريف العدد المشتق لدينا $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{0+x}-e^0}{x} = exp'(0) = 1$ إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1}$

4 حل معادلات ومتراجحات

طريقة

✍ المعادلة $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ تعني $u(x) = v(x)$

✍ المتراجحة $e^{u(x)} < e^{v(x)}$ تعني $u(x) < v(x)$

مثال تطبيقي

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية:

1. $e^{2x} + 3 = 0$
2. $e^{-2x+1} - 1 = 0$
3. $e^{-2x-1} - e^x < 0$

4 $e^{2x} > 2 - e^{x}$

الحل

1 تعني $e^{2x} = -3$. هذه المعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، e^{2x} ،إذن $S = \phi$.

2 تعني $e^{-2x+1} = 1$ أي $e^{-2x+1} = e^{0}$ و منه $-2x+1 = 0$ إذن $\frac{1}{2}$. $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

3 تعني $e^{-2x-1} < e^{x}$ أي $-2x-1 < x$ و منه $x > -\frac{1}{3}$. $S = \left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$

4 تعني $e^{2x} + e^{x} - 2 \leq 0$. بوضع $e^{x} = X$ نحصل على $X^2 + X - 2 \leq 0$ جذرا كثير الحدود $X = 2 + X - 2$ هما -2 و 1

و منه $X^2 + X - 2 \leq 0$ تعني $X < -2$ أو $X > 1$

$X < -2$ تعني $e^{x} < -2$. هذه المتراجحة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

$X > 1$ تعني $e^{x} > 1$ أي $x > 0$. إذن مجموعة حلول المتراجحة هي $S =]0; +\infty[$.

5 دراسة الدالة $exp \circ u$

1.5 النهايات

مبرهنة

a، b و c تمثل أعددا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$

نعتبر الدوال التالية u ، e^{x} و f حيث $f = exp \circ u$

إذا كانت $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ و $\lim\limits_{x \to b} e^{x} = c$ فإن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ : $f(x) = e^{-x+2}$.

لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x+2) = +\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x+2} = +\infty$ أي $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x+2) = -\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x+2} = 0$ أي $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

مثال تطبيقي

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بِـ $f(x) = e^{-3x^3+2}$.

أدرس نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

الحل

- لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^3+2)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}e^X=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-3x^3+2}=+\infty$ و بالتالي $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.
- لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^3+2)=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-3x^3+2}=0$ و بالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2.5 اتجاه التغير

خاصية

إذا كانت u دالة معرفة على مجال I فإن للدالتين u و $exp\circ u$ نفس اتجاه التغير على المجال I

برهان

نعلم أن الدالة " exp " متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. إذن حسب المبرهنة الخاصة باتجاه تغير دالة مركبة يكون للدالتين u و $exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=e^{x^2-3}$.

نلاحظ أن $f=exp\circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $u(x)=x^2-3$.

بما أن الدالة u متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$.

وبما ان الدالة u متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن الدالة f متزليدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

3.5 المشتقة

خاصية

إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I فإن للدالة $exp\circ u$ قابلة للإشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I،

$$(exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$$

برهان

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I و علما ان الدالة " exp " قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة المركبة $exp\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و بتطبيق قاعدة حساب مشتقة دالة مركبة يكون لدينا:

من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)\times(\exp)'[u(x)]=u'(x)\times(\exp)[u(x)]$.

أي من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)\,e^{u(x)}$.

أمثلة

مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=e^{2x}$ هي $f'(x)=2.e^{2x}$.

مشتقة الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $g(x)=e^{-5x+3}$ هي $g'(x)=-5.e^{-5x+3}$.

مشتقة الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $h(x)=e^{x^2+x+1}$ هي $h'(x)=(2x+1)e^{x^2+x+1}$.

مشتقة الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بِـ $k(x)=e^{\frac{1}{x}}$ هي $k'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

6 تمارين محلولة

1.6 تمارين تدريبية

التمرين 01

ضع العلامة ✔ أمام كل جملة صحيحة و العلامة ✖ أمام كل جملة خاطئة.

1. $e^{-3}<0$
2. $e^{-5}=-e^{5}$
3. التمثيل البياني للدالة $x\mapsto e^x$ يقطع حامل محور الفواصل .
4. $\sqrt{e^{2x}}=e^x$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$
6. الدالة المشتقة للدالة $x\mapsto e^{3x}$ هي : $x\mapsto e^{3x}$.
7. $\lim\limits_{x>\to 0}\frac{e^x}{x}=+\infty$
8. إذا كان $x\geq 2$ فإن $e^x\geq e^2$
9. إذا كان $x\leq 0$ فإن $e^x\leq 0$
10. من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x.e^{-x}=1$
11. إشارة : $(x-1)e^x$ هي نفس إشارة $x-1$
12. من أجل $x<1$: $e^{x-1}<0$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^x=0$
14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ex}{x^3}=+\infty$
15. $e^x-e=e^{x-1}$
16. $e^{2x}-2e^x+1=(e^x-1)^2$
17. الدالة : $x\mapsto e^{-1}x+3$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

18 ليس للمتراجحة $e^{x^2-4x}<0$ حل في $\mathbb{R}$

19 الدالة : $x\mapsto e^{x^2-4}$ هي حل للمعادلة : $y'=y$

20 $e^{-\frac{1}{2}}<1$

الحل

1 ✖ .	5 ✔	9 ✖ .	13 ✖ .	17 ✔
2 ✖ .	6 ✖ .	10 ✔	14 ✔	18 ✖ .
3 ✖ .	7 ✔	11 ✔	15 ✖ .	19 ✖ .
4 ✔ .	8 ✔ .	12 ✖ .	16 ✔ .	20 ✔ .

التمرين 02

بسط ما يلي :

1 $e^{3x}.e^{-2x}$

2 $e^{x}.e^{2}$

3 $\dfrac{1}{(e^{-x})^2}$

4 $\dfrac{e^{4x+1}}{e^{2x}.e^{-1}}$

5 $\dfrac{e^{-4x+5}}{(e^{x-2})^2}$

6 $e^{x}\left(e^{-x}+e^{2x}\right)$

الحل

التبسيط :

1 $e^{3x}.e^{-2x}=e^{3x-2x}=e^{x}$

2 $e^{x}.e^{2}=e^{x+2}$

3 $\dfrac{1}{(e^{-x})^2}=\dfrac{1}{e^{-2x}}=e^{2x}$

4 $\dfrac{e^{4x+2}}{e^{2x}.e^{-1}}=e^{4x+1}.e^{-2x}.e^{1}=e^{4x-2x+1}=e^{2x+2}$

5 $\dfrac{e^{-4x+5}}{(e^{x-2})^2}=\dfrac{e^{-4x+5}}{e^{2x-4}}=e^{-4x+5}.e^{-2x+4}=e^{-6x+9}$

6 $e^{x}\left(e^{-x}+e^{2x}\right)=e^{x}.e^{-x}+e^{x}.e^{2x}=e^{x-x}+e^{x+2x}=1+e^{3x}$

التمرين 03

* بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$$\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

الحل

* نبين أن : $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^x-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}}=\frac{\frac{e^{2x}-1}{e^x}}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^x}\times\frac{e^x}{e^{2x}+1}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

التمرين 04

بين أن الدوال f المعرفة كما يلي هي دوال معرفة على $\mathbb{R}$:

1) $f(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}}$ 2) $f(x)=\dfrac{1}{e^{2x}+1}$ 3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^x+4}}$ 4) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+3}$

الحل

1) لدينا : $f(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}}$ ومنه : $D_f=\{x\in\mathbb{R}:e^x+e^{-x}\geq 0\}$ و هي محققة دوما لأن $e^x>0$ و $e^{-x}>0$ ، $D_f=\mathbb{R}$.

2) لدينا : $f(x)=\dfrac{1}{e^{2x}+1}$ ومنه : $D_f=\{x\in\mathbb{R}:e^{2x}+1\neq 0\}$ $e^{2x}+1=0$ تكافئ $e^{2x}=-1$ و هذا مستحيل إذن : $D_f=\mathbb{R}$.

3) لدينا : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^x+4}}$ ومنه : $D_f=\{x\in\mathbb{R}:e^x+4>0\}$ $e^x+4>0$ محققة دوما لأن $e^x>0$ ومنه : $D_f=\mathbb{R}$.

4) لدينا : $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+3}$ ومنه : $D_f=\{x\in\mathbb{R}:e^x+3\neq 0\}$ $e^x+3=0$ تكافئ : $e^x=-3$ وهذا مستحيل ومنه : $D_f=\mathbb{R}$.

التمرين 05

* نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=\dfrac{x}{e^x+1}$.

إذا علمنا أن : $0\leq x\leq 1$ عين حصرا للعبارة $f(x)$.

الحل

* تعيين حصرا للعبارة : $f(x)$

لدينا : $0\leq x\leq 1$ ومنه : $e^0\leq e^x\leq e^1$ إذن : $2\leq e^x+1\leq 1+e$

و بالتالي : $\dfrac{1}{1+e}\leq\dfrac{1}{e^x+1}\leq\dfrac{1}{2}$

و منه : $0\times\dfrac{1}{1+e}\leq x\times\dfrac{1}{e^x+1}\leq 1(e+1)$ إذن : $0\leq f(x)\leq 1+e$.

التمرين 06

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

1) بين أن الدالة f فردية.

2 بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}$.

الحل

1 من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $(-x)$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ و لدينا:

$f(-x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=\dfrac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}}=-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$. إذن الدالة f دالة فردية.

2 $\dfrac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}=\dfrac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{1+\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2}=\dfrac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{\frac{(e^x+1)^2+(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}}=\dfrac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{\frac{2(e^{2x}+1)}{(e^x+1)^2}}=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)\dfrac{(e^x+1)^2}{(e^{2x}+1)}$

و منه $\dfrac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}=\dfrac{(e^x-1)(e^x+1)}{(e^{2x}+1)}=\dfrac{(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)}=f(2x)$.

و هكذا نجد أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}$

التمرين 07

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ: $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$.

1 بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(-x)+f(x)=2$. فسر بيانيا النتيجة.

2 بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}-1$.

الحل

ليكن x عددا حقيقيا كيفيا.

1 $f(-x)+f(x)=\dfrac{e^x(3e^{-x}-1)}{e^x(e^{-x}+1)}+\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{3-e^x}{1+e^x}+\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{2e^x+2}{e^x+1}=\dfrac{2(e^x+1)}{e^x+1}$.

و منه $f(-x)+f(x)=2$.

المنحنى الممثل للدالة f متناظر بالنسبة على النقطة $A(0,1)$.

2 $f(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}-1=\dfrac{4e^x-e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$.

التمرين 08

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1 $e^{2x-1}=1$

2 $e^{x^2-1}=e$

3 $(x^2-4x+3)e^x=0$

4 $e^{2x}-2e^x+1=0$

5 $(x^2-4)e^x=(9x+10)e^x$

6 $e^x-e^{-x}=0$

7 $e^{3x}-\dfrac{1}{e^x}=0$

الحل

حل المعادلات :

1 لدينا : $e^{2x-1}=1$ وهي تكافئ : $e^{2x-1}=e^0$ وعليه : $2x-1=0$ ومنه : $x=\frac{1}{2}$ وعليه : $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

2 لدينا : $e^{x^2-1}=e$ و هي تكافئ : $x^2-1=1$ ومنه : $x^2=2$ إذن : $x=\sqrt{2}$ أو $x=-\sqrt{2}$ و بالتالي : $S=\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$

3 لدينا : $(x^2-4x+3)x=0$ و هي تكافئ : $\Delta'=4, x^2-4x+3=0$ للمعادلة حلين : $x_1=1, x_2=3$ إذن : $S=\{1;3\}$

4 لدينا : $e^{2x}-2e^x+1=0$

بوضع $e^x=y$ نجد : $\begin{cases}y^2-2y+1=0\\y=e^x\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}(y-1)^2=0\\y=e^x\end{cases}$ و منه : $\begin{cases}y=1\\e^x=1\end{cases}$ أي : $\begin{cases}y=1e^x=e^0\end{cases}$ إذن :

$x=0$ أي : $S=\{0\}$

5 لدينا : $(x^2-4)e^x=(9x-18)e^x$

و هي تكافئ : $x^2-4=9x-18$ و منه : $x^2-9x+14=0$ $\Delta=25$ و منه للمعادلة حلين $x_1=2$ و $x_2=7$ إذن :

$S=\{2;7\}$

6 لدينا : $e^x-e^{-x}=0$ وهي تكافئ : $e^x-\frac{1}{e^x}=0$

وعليه : $\frac{e^{2x}-1}{e^x}=0$ إذن : $e^{2x}-1=0$ وعليه : $e^{2x}=1$ أي : $e^{2x}=e^0$ وبالتالي : $2x=0$ ومنه : $x=0$ إذن :

$S=\{0\}$

7 لدينا : $e^{3x}-\frac{1}{e^x}=0$ و هي تكافئ : $\frac{e^{4x}-1}{e^x}=0$

ومنه : $e^{4x}-1=0$ إذن : $e^{4x}=1$ وعليه : $4x=0$ و منه : $x=0$ إذن : $S=\{0\}$

التمرين 09

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1 $xe^{2x}-x^2e^{2x}\le 0$

2 $e^{2x-1}\le 1$

3 $e^{x^2-4}\le e^{7x-16}$

4 $e^{x^2-2}\le\frac{1}{e^x}$

5 $e^{2x}-2e^x+1\le 0$

6 $x^2e^{4x}+4e^x>0$

الحل

حل المتراجحات :

1 لدينا : $xe^{2x}-x^2e^{2x}\le 0$ وهي تكافئ : $e^{2x}(x-x^2)\le 0$ وعليه : $x-x^2\le 0$ لأن : $e^{2x}>0$ إذن : $x(-x+1)\le 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

وعليه : $x\in]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$ إذن : $S=]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2 لدينا : $e^{2x-1} \leq 1$ و هي تكافئ : $e^{2x-1} \leq e^{0}$ و منه : $2x-1 \leq 0$ إذن : $x \leq \frac{1}{2}$ وعليه : $S = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$

3 لدينا : $e^{x^2-4} \leq e^{7x-16}$ وهي تكافئ : $x^2-4 \leq 7x-16$ وعليه : $x^2-7x+12 \leq 0$

ندرس إشارة : $x^2-7x+12$ ، $\Delta = 1$ يوجد جذران : $x_1 = 3$ ، $x_2 = 4$

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x^2-7x+12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن : $S = [3;4]$

4 لدينا : $e^{x^2-2} \leq \frac{1}{e^x}$ وهي تكافئ : $e^{x^2-2}.e^{x} \leq 1$ وعليه : $e^{x^2+x-2} \leq 1$ إذن : $e^{x^2+x-2} \leq e^{1}$

وبالتالي : $x^2+x-2 \leq 1$ إذن : $x^2+x-3 \leq 0$

ندرس إشارة : x^2+x-3 ، $\Delta = 13$ يوجد جذران : $x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ ، $x_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$		$+\infty$
x^2+x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن : $S = \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$

5 لدينا : $e^{2x}-2e^{x}+1 \leq 0$

بوضع : $e^{x} = y$ نجد : $\begin{cases} y^2-2y+1 \leq 0 \\ e^{x} = y \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} (y-1)^2 \leq 0 \\ e^{x} = y \end{cases}$ و عليه : $\begin{cases} y-1 = 0 \\ e^{x} = y \end{cases}$

إذن : $e^{x} = 1$ وعليه : $x = 0$ إذن : $S = \{0\}$

6 لدينا : $x^2e^{4x}+4e^{x} > 0$ وهي تكافئ : $e^{x}\left(x^2e^{3x}+4\right) > 0$ وهي محققة دوما لأن : $e^{x} > 0$ و $e^{3x} > 0$ و $x^2 > 0$ وعليه : $S = \mathbb{R}$.

التمرين 10

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x) = e^{\frac{1}{3}x+1}$ و ليكن (C_f) منحنيها البياني.

1 أحسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

2 عين نقط المنحنى (C_f) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = \frac{x}{3}$.

الحل

1 من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x+1}$.

بما أن $e^{\frac{1}{3}x+1}>0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)>0$ و منه الدالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2 يكون المماس عند نقطة من (C_f) فاصلتها x_0 موازيا للمستقيم (Δ) يعني $f'(x_0)=\frac{1}{3}$
يكون لدينا إذن $\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x_0+1}=\frac{1}{3}$ أي $e^{\frac{1}{3}x_0+1}=1$ و هذا يعني $\frac{1}{3}x_0+1=0$ أي $x_0=-3$.
و بالتالي توجد نقطة وحيدة من (C_f) فاصلتها $x_0=-3$ يكون المماس عندها موازيا للمستقيم (Δ).

التمرين 11

عين مجموعة تعريف الدالة f و المجموعة التي تقبل فيها الاشتقاق ثم عين دالتها المشتقة f' في كل حالة مما يلي :

1 $f(x)=e^{2x}-e^{-x}$

2 $f(x)=xe^{x-1}$

3 $f(x)=\frac{e^x+x}{e^x-1}$

4 $f(x)=\frac{e^x}{x^2-1}$

5 $f(x)=(x^2-4x+5)e^x$

6 $f(x)=\sqrt{e^x-1}$

7 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

8 $f(x)=\sin x e^{\cos x}$

9 $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

10 $f(x)=\sqrt{e^{2x}-2e^x+1}$

الحل

1 لدينا : $f(x)=e^{2x}-e^{-x}$
الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$, حيث : $f'(x)=2e^{2x}+e^{-x}$.

2 لدينا : $f(x)=xe^{x-1}$
الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$, حيث : $f'(x)=1.e^{x-1}+xe^{x-1}$ ومنه : $f'(x)=(1+x)e^{x-1}$

3 لدينا : $f(x)=\frac{e^x+x}{e^x-1}$
الدالة f معرفة على $\mathbb{R}^*$ و تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$, حيث : $f'(x)=\frac{(e^x+1)(e^x-1)-e^x(e^x+x)}{(e^x-1)^2}$
ومنه : $f'(x)=\frac{e^{2x}-1-e^{2x}-xe^x}{(e^x-1)^2}$ وعليه : $f'(x)=\frac{-1-xe^x}{(e^x-1)^2}$

4 لدينا : $f(x)=\frac{e^x}{x^2-1}$
الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ حيث : $f'(x)=\frac{e^x(x^2-1)-2x.e^x}{(x^2-1)^2}$ ومنه : $f'(x)=\frac{(x^2-2x-1)e^x}{(x^2-1)^2}$

5 لدينا : $f(x)=(x^2-4x+5)e^x$ حيث : $D_f=\mathbb{R}$
الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f'(x)=(2x-4)e^{3x}+(x^2-4x+5)e^x$
وعليه : $f'(x)=(2x-4+x^2-4x+5)e^x$ ومنه : $f'(x)=(x^2-2x+1)e^x$

6 لدينا : $f(x)=\sqrt{e^x-1}$ حيث : $D_f=\{x\in\mathbb{R}: e^x-1\geq 0\}$

ومنه : $e^x-1\geq 0$ وعليه : $e^x\geq 1$ وبالتالي : $x\geq 0$ إذن : $D_f=[0;+\infty[$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث : $f'(x)=\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$

7 لدينا : $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ حيث : $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

8 لدينا : $f(x)=\sin x.e^{\cos x}$

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f'(x)=\cos x.e^{\cos x}+\sin x\,(-\sin x)\,e^{\cos x}$

ومنه : $f'(x)=e^{\cos x}\left(\cos x-\sin^2 x\right)$ وعليه : $f'(x)=e^{\cos x}\left[\cos x-\left(1-\cos^2 x\right)\right]$

وبالتالي : $f'(x)=\left(\cos^2 x+\cos x-1\right)e^{\cos x}$

9 لدينا : $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f'(x)=\dfrac{e^x\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=\dfrac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

10 لدينا : $f(x)=\sqrt{e^{2x}-2e^x+1}$

حيث : $D_f=\{x\in\mathbb{R}: e^{2x}-2e^x+1\geq 0\}$ نحل المتراجحة $e^{2x}-2e^x+1\geq 0$ بوضع : $y=e^x$ نجد : $y^2-2y+1\geq 0$

و عليه : $(y-1)^2\geq 0$

أي أن : $(e^x-1)^2\geq 0$ و هي محققة دوما . إذن : $D_f=\mathbb{R}$.

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ حيث : $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}-2e^x}{2\sqrt{e^{2x}-2e^x+1}}=\dfrac{e^{2x}-e^x}{\sqrt{e^{2x}-2e^x+1}}$.

التمرين 12

أحسب النهايات التالية :

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)$

2 $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)\,e^x$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x}{x^2+x+1}$

4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+2x-1\right)e^x$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(2x-1)\,e^x-3e^{2x}\right]$.

الحل

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)=+\infty$.

2 $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)\,e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2xe^x-e^x\right)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}2\dfrac{e^x}{x^2}\times\dfrac{x^2}{x^2+x+1}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2+x+1}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$.

4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+2x-1\right)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3e^x+2xe^x-e^x\right)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(2x-1)e^{x}-3e^{2x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}\left(2\dfrac{x}{e^{x}}-\dfrac{1}{e^{x}}-3\right)=-\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$

التمرين 13

احسب نهايات الدالة f في كل حالة مما يلي عند مجموعة التعريف :

1 $f(x)=x+e^{x}$

2 $f(x)=e^{-x+4}$

3 $f(x)=e^{\frac{1}{x^{2}}}$

4 $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$

5 $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x^{2}}$

6 $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{e^{x}+1}$

7 $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{x}$

8 $f(x)=(x-1)e^{x}$

الحل

1 لدينا : $f(x)=x+e^{x}$ حيث : $D_f=]-\infty;+\infty[$

ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+e^{x})=-\infty$ وعليه : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^{x})=+\infty$

2 لدينا : $f(x)=e^{-x+4}$ حيث : $D_f=]-\infty;+\infty[$

ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+4}=+\infty$ وعليه : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x+4}=0$

3 لدينا : $f(x)=e^{\frac{1}{x^{2}}}$ حيث : $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x^{2}}}=1$ وعليه : $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}e^{\frac{1}{x^{2}}}=+\infty$ وبالتالي : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}e^{\frac{1}{x^{2}}}=+\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x^{2}}}=1$

4 لدينا : $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ حيث : $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{\frac{1}{x}}=-\infty$ وعليه : $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}xe^{\frac{1}{x}}=0$

وبالتالي : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}xe^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{t}}{t}=+\infty$ (نضع : $t=\dfrac{1}{x}$) . إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{\frac{1}{x}}=+\infty$

5 لدينا : $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x^{2}}$ حيث : $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x}}{x^{2}}=0$

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\dfrac{e^{x}}{x^{2}}=+\infty$

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{e^{x}}{x^{2}}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x^{2}}=+\infty$

6 لدينا : $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{e^{x}+1}$ حيث : $D_f=]-\infty;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{e^x+1} = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{e^x+1} = +\infty$

7 لدينا : $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{x}$ حيث : $D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}-1}{x} = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 2\times\frac{e^{2x}-1}{2x} = 2$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2\times\frac{e^{2x}-1}{2x} = 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x} - \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\frac{e^{2x}}{2x} - \frac{1}{x} = +\infty$

8 لدينا : $f(x) = (x-1)e^x$ حيث : $D_f =]-\infty;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x - e^x = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)e^x = +\infty$.

التمرين 14

نعتبر الدالة f و المعرفة كما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{e^{2x}-e^x}{x}, x\neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1 ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند 0 .

2 عين الدالة المشتقة للدالة f من أجل $x\neq 0$.

الحل

1 قابلية الاشتقاق عند 0 : $D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\frac{e^{2x}-e^x}{x}}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{e^{2x}-e^x}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{e^x}{x}\times\frac{e^x-1}{x} = -\infty$

و منه f غير قابلة لاشتقاق عند 0 من اليسار .

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^{2x}-e^x}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^x}{x}\times\frac{e^x-1}{x} = +\infty$

و منه f غير قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين و بالتالي f غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

2 تعيين الدالة المشتقة من أجل $x\neq 0$:

$f'(x) = \frac{(2e^{2x}-e^x)x - 1(e^{2x}-e^x)}{x^2} = \frac{2xe^{2x}-xe^x-e^{2x}+e^x}{x^2} = \frac{(2x-1)e^{2x}-(x-1)e^x}{x^2}$

التمرين 15

* نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = (4x+3)e^x$

احسب كل من المشتقات : $f', f'', f^{(3)}, f^{(4)}$, ثم استنتج عبارة $f^{(n)}(x)$.

الحل

* $f(x)=(4x+3)e^x$

$f'(x)=4.e^x+(4x+3)e^x=(4+4x+3)e^x=(4x+7)e^x$

$f''(x)=4.e^x+(4x+7)e^x=(4+4x+7)e^x=(4x+11)e^x$

$f^{(3)}(x)=4.e^x+(4x+11)e^x=(4+4x+11)e^x=(4x+15)e^x$

$f^{(4)}(x)=4.e^x+(4x+15)e^x=(4+4x+15)e^x=(4x+19)e^x$

استنتاج عبارة $f^{(n)}$: $f^{(n)}(x)=(4x+3+4n)e^x$

التمرين 16

أدرس التغيرات لكل من الدوال المعرفة كما يلي :

1 $f(x)=xe^x$ 2 $f(x)=x-e^x$ 3 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ 4 $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

الحل

دراسة تغيرات f :

1 لدينا : $f(x)=xe^x$ حيث : $D_f=]-\infty;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^x=+\infty$

$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)$

و عليه $f'(x)$ له نفس إشارة $x+1$ و لدينا :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

إذن f متزايدة تماما على $[-1;+\infty[$ و متناقصة تماما على $]-\infty;-1]$ ؛ و عليه جدول التغيرات كما يلي :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

2 لدينا : $f(x)=x-e^x$ حيث : $D_f=]-\infty;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x-e^x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x-e^x=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{e^x}{x}\right)=-\infty$

$f'(x)=1-e^x$

$f'(x)=0$ تكافئ : $1-e^x=0$ ومنه : $e^x=1$ وعليه : $x=0$

$f'(x)>0$ تكافئ : $1-e^x>0$ ومنه : $e^x<1$ إذن : $x<0$ و عليه f متزايدة تماما على $]-\infty;0]$.

$f'(x)<0$ تكافئ $x>0$ ومنه f متناقصة تماما على $]-\infty;0]$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

3 لدينا : $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ حيث : $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{e^x}{x}=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{e^x}{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

$f'(x)=\frac{e^x.x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$

$f'(x)$ له نفس إشارة $x-1$ إذن : $f'(x)=0$ تكافئ : $x=1$

$f'(x)>0$ تكافئ $x>1$ إذن : f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$

و كذلك f متناقصة تماما على $]-\infty;0[$ وعلى $]0;1[$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	‖	$+\infty$	↘ e	↗	$+\infty$

4 لدينا : $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ حيث : $D_f=\{x\in\mathbb{R}: e^x-1\neq 0\}$

$e^x-1=0$ تكافئ $e^x=1$ و عليه : $x=0$.

إذن: $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1}=-1$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{e^x+1}{e^x-1}=-\infty$

لأن : $\begin{cases} e^x+1\longrightarrow 2 \\ e^x-1\longrightarrow 0^- \end{cases}$

• $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{e^x+1}{e^x-1} = +\infty$

لأن : $\begin{cases} e^x + 1 \longrightarrow 2 \\ e^x - 1 \longrightarrow 0^+ \end{cases}$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x+1}{e^x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}} = 1$

• $f'(x) = \frac{e^x(e^x-1)-e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^2} = \frac{e^x(e^x-1-e^x-1)}{(e^x-1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$

و منه : $f'(x) < 0$

الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]0;+\infty[$ و : $]-\infty;0[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	-1	↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	1

التمرين 17

✍ نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = e^x + e^{-x}$

1 ادرس تغيرات الدالة f ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(x) \geq 2$.

✍ نعتبر الدالة g المعرفة بالعبارة : $g(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x} - 1}$

2 ادرس تغيرات الدالة g , أنشئ التمثيل البياني (C_g) للدالة g .

الحل

1 دراسة تغيرات f : • $D_f =]-\infty;+\infty[$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• $f'(x) = e^x - e^{-x}$

$f'(x) = 0$ تكافئ : $e^x - e^{-x} = 0$ ومنه : $e^x = e^{-x}$

و عليه: $x = -x$ و منه: $2x = 0$ أي: $x = 0$.

$f'(x) > 0$ تكافئ : $e^x - e^{-x} > 0$ ومنه : $e^x > e^{-x}$

إذن : $x > -x$ ومنه : $2x > 0$ وعليه : $x > 0$

إذن f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و بالتالي فهي متناقصة تماما على $]-\infty;0]$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

الاستنتاج :

من جدول التغيرات القيمة 2 هي قيمة حدية صغرى للدالة f على $\mathbb{R}$ و عليه من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$f(x) \geq 2$

2 دراسة تغيرات الدالة g :

• $D_g = \{x \in : e^x + e^{-x} - 1 \neq 0\}$

نحل المعادلة: $e^x + e^{-x} - 1 = 0$ أي: $e^x + e^{-x} = 1$ أي: $f(x) = 1$ و هذا مستحيل لأن : $f(x) \geq 2$ إذن ليس للمعادلة حلول و عليه : $D_f =]-\infty;+\infty[$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

• $g'(x) = \frac{-e^x + e^{-x}}{(e^x + e^{-x} - 1)^2}$

$g'(x) = 0$ تكافئ : $-e^x + e^{-x} = 0$ أي: $e^{-x} = e^x$ و عليه : $-x = x$ و منه : $2x = 0$ أي : $x = 0$

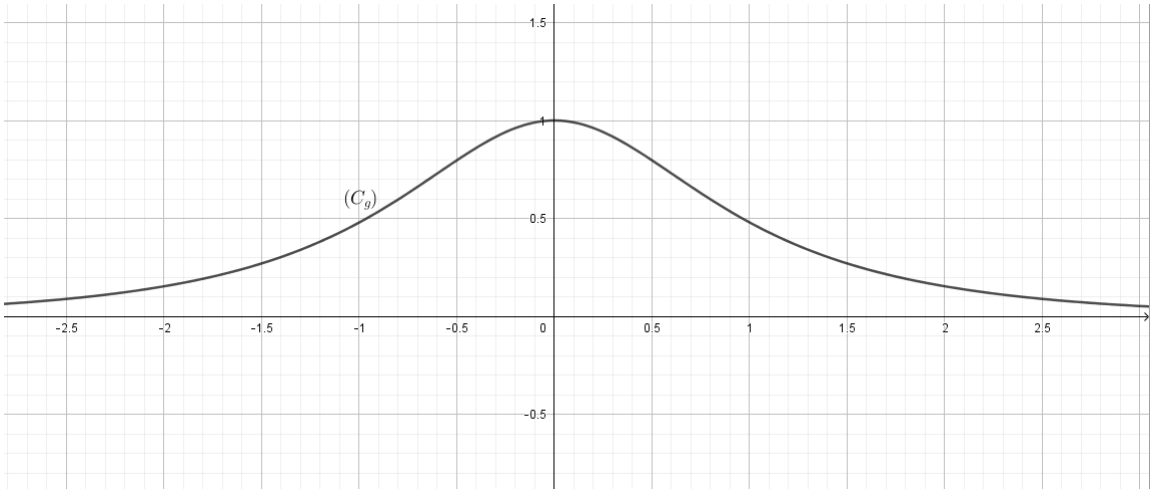
$g'(x) > 0$ تكافئ : $-e^x + e^{-x} > 0$ أي: $e^{-x} > e^x$ و عليه : $-x > x$ ومنه : $2x > 0$ أي : $x > 0$

إذن g متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ و عليه فهي متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↘	1	↗	0

• $g(0) = 1$

✍ إنشاء (C_g) :



التمرين 18

(I) h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=1-x-e^{-x}$.

1 ادرس تغيرات الدالة h .

2 استنتج إشارة $h(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$

1 احسب $f'(x)$ ثم استنتج إشارتها و اتجاه تغير الدالة f .

2 احسب نهايات الدالة f عند مجموعة تعريفها . ثم استنتج جدول تغيراتها .

3 أنشئ التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

التمرين 19

(I) نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=\frac{2e^x}{e^x-1}$

1 ادرس تغيرات الدالة f .

2 ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. بين أن (C_f) يقبل ثلاثة مستقيمات مقاربة

3 بين أن النقطة $\omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) ثم أنشئه .

(II) نعتبر الدالة g حيث : $g(x)=\dfrac{2e^x}{|e^x-1|}$

1 اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

2 أنشئ (C_g) التمثيل البياني للدالة g باستخدام (C_f) .

3 ناقش بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي m بحيث :
$(m-3)|e^x-1|=2e^x$.

الحل

1 دراسة تغيرات الدالة f : $D_f=\{x\in:e^x-1\neq 0\}$

$D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ ، $D_f=\mathbb{R}^*$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^x}{e^x-1}=0$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0}f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{2e^x}{e^x-1}=-\infty$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x-1		$-$	0	$+$	

ومنه : $\lim_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{2e^x}{e^x-1}=+\infty$ لأن : $\begin{cases}2e^x\to 2\\ e^x-1\overset{<}{\to}0\end{cases}$

وعليه : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$ لأن : $\begin{cases}2e^x\to 2\\ e^x-1\overset{>}{\to}0\end{cases}$

إذن: $f'(x)=\frac{2e^x(e^x-1)-e^x.2e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{2e^x(e^x-1-e^x)}{(e^x-1)^2}$: $f'(x)=\frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$

و منه $f'(x)<0$ و منه f متناقصة تماما على كل من المجالين : $]0;+\infty[$, $]-\infty;0[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	2

2 بما أن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ فإن $y=0$ معادلة مستقيم مقارب

و بما أن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=2$ فإن $y=2$ معادلة مستقيم مقارب

و بما أن $\left|\lim_{x\to0}f(x)\right|=+\infty$ فإن $x=0$ معادلة مستقيم مقارب .

1 نبين أن $\omega(0;1)$ مركز تناظر :

من أجل $x\in D_f$:

لدينا : $2\alpha - x \in D_f$ و $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$

أي : $f(2\times 0 - x) + f(x) = 2\times 1$ و عليه : $f(-x) + f(x) = 2$

لدينا من أجل كل x من D_f : $-x \in D_f$

إذن : $f(-x) + f(x) = \frac{2e^{-x}}{e^{-x}-1} + \frac{2e^{x}}{e^{x}-1} = \frac{\frac{2}{e^{x}}}{\frac{1}{e^{x}}-1} + \frac{2e^{x}}{e^{x}-1} = \frac{\frac{2}{e^{x}}}{\frac{1}{e^{x}}-1} + \frac{2e^{x}}{e^{x}-1} = \frac{2}{1-e^{x}} + \frac{2e^{x}}{e^{x}-1} = \frac{-2}{e^{x}-1} + \frac{2e^{x}}{e^{x}-1} = \frac{-2+2e^{x}}{e^{x}-1} =$

$\frac{2(e^{x}-1)}{e^{x}-1} = 2$ و منه $\omega(0;1)$ مركز تناظر المنحنى (C_f) .

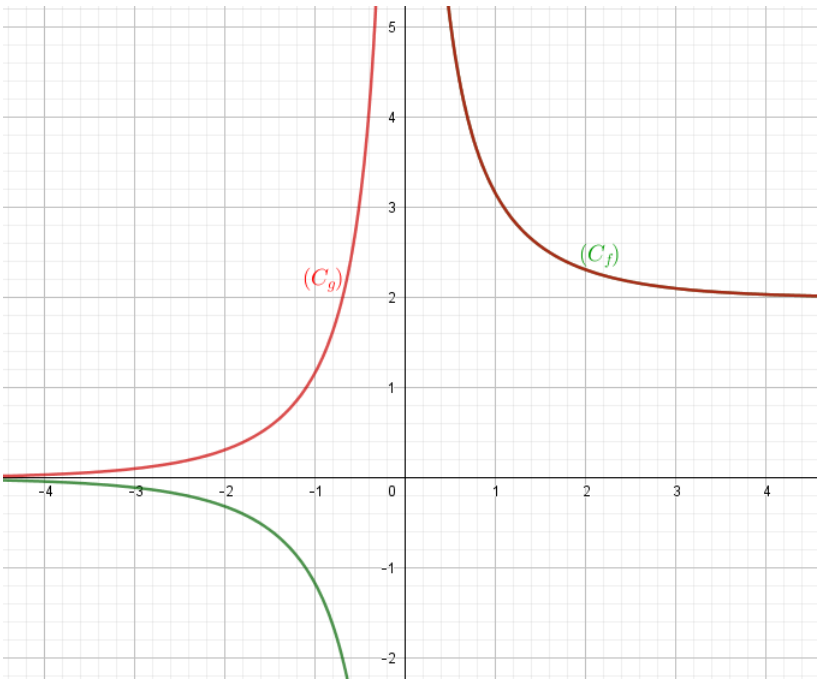
2 كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{2e^{x}}{-(e^{x}-1)}, e^{x}-1 < 0 x < 0 \\ g(x) = \frac{2e^{x}}{e^{x}-1}, e^{x}-1 > 0 x > 0 \end{cases}$$

إذن :
$$\begin{cases} g(x) = -f(x), x \in]-\infty;0] \\ g(x) = f(x), x \in]0;+\infty[\end{cases}$$

في المجال $(\delta) :]0;+\infty[$ ينطبق على (C_f) و في المجال $(\delta) :]-\infty;0]$ نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل .

- إنشاء (C_g) و (C_f) :



3 - المناقشة البيانية : $(m-3)|e^{x}-1| = 2e^{x}$

أي : $m-3 = \frac{2e^{x}}{|e^{x}-1|}$ أي : $m-3 = g(x)$

و منه بوضع $m-3 = \alpha$ نجد : $g(x) = \alpha$

لما $\alpha \leq 2$ أي : $m-3 \leq 2$ أي : $m \leq 5$

- ومنه ليس للمعادلة حلول .

- لما $\alpha > 2$ أي $m > 5$: للمعادلة حلين مختلفين في الإشارة .

التمرين 20

✍ a و b عددان حقيقيان و g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=e^{x^2+ax+b}$.

عين قيمتي a و b الموافقتين لجدول تغيرات الدالة g التالي :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$e^{-\frac{5}{4}}$	↗	$+\infty$

الحل

من جدول التغيرات لدينا : $g'\left(\frac{3}{2}\right)=0$ و $g\left(\frac{3}{2}\right)=e^{-\frac{5}{4}}$

مشتقة الدالة g : $g'(x)=(2x+a)e^{x^2+ax+b}$.

$g'\left(\frac{3}{2}\right)=0$ تكافئ $(3+a)e^{(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b)}$ تكافئ $3+a=0$ لأن : $e^{(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b)}\neq 0$

إذن : $a=-3$.

$g\left(\frac{3}{2}\right)=e^{-\frac{5}{4}}$ تكافئ $e^{(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b)}=e^{-\frac{5}{4}}$ و منه : $\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b\right)=-\frac{5}{4}$ و منه : $b=1$

و بالتالي : $a=-3$ و $b=1$.

التمرين 21

✍ (C_f) هو التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

للدالة f حيث : $f(x)=ae^{-2x}+be^{-x}+cx$ مع c,b,a أعداد حقيقية ثابتة.

عين الدالة f إذا علمت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معادلته $y=2x-\frac{1}{2}$ في النقطة $H\left(0;-\frac{1}{2}\right)$

و يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y=2x$.

الحل

النقطة $H\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ تنتمي إلى (C_f) معناه : $f(0)=-\frac{1}{2}$ أي : $a+b=-\frac{1}{2}$

المماس (T) عند النقطة $H\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ معادلته : $y=2x-\frac{1}{2}$ معناه : $f'(0)=2$.

$f'(x)=-2ae^{-2x}-be^{-x}+c$ و منه : $f'(0)=2$ تكافئ : $-2a-b+c=2$ أي : $-2a-b=2-c$

$y=2x$ معادلة المستقيم المقارب عند $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-cx]=\lim\limits_{x\to+\infty}[ae^{-2x}+be^{-x}]=0$

معناه : $y=cx$ معادلة المستقيم المقارب عند $+\infty$ و بالتالي : $c=2$.

لتعيين a و b نحل الجملة : $\begin{cases} a+b=-\frac{1}{2} \\ -2a-b=2-c \end{cases}$ التي تكافئ : $\begin{cases} a+b=-\frac{1}{2} \\ -2a-b=0 \end{cases}$

و منه : $a=\frac{1}{2}$ و $b=-1$ و بالتالي : $f(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}-e^{-x}+2x$.

التمرين 22

✍ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(ax+b)e^{x}$ حيث a و b عددان حقيقيان. (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و كتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يشمل المنحني (C_f) النقطة $\Omega(1,e)$ و يقبل مماسا معامل توجيهه $3e$.

2) أحسب $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-4;5]$.

3) أكتب معادلة المماس للمنحني عند النقطة التي فاصلتها 0.

4) بين أن المنحني يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها.

5) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[-4;5]$ كما يلي : $g(x)=[f(x)]^2$.

استنتج جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-4;5]$.

الحل

1) تعيين العددين الحقيقيين a و b :

المنحني (C_f) يشمل النقطة $\Omega(1,e)$ معناه : $f(1)=e$

معامل توجيه المماس عند $\Omega(1,e)$ يساوي $3e$ معناه : $f'(1)=3e$

نحسب $f'(x)$ فنجد : $f'(x)=(ax+a+b)e^{x}$ و بالتالي نحل الجملة : $\begin{cases} f(1)=e \\ f'(1)=3e \end{cases}$

و منه : $\begin{cases} (a+b)e=e \\ (2a+b)e=3e \end{cases}$ و بالتالي نجد : $a=2$ و $b=-1$ أي : $f(x)=(2x-1)e^{x}$.

2) حساب $f'(x)$: $f'(x)=2e^{x}+e^{x}(2x-1)=e^{x}(2+2x-1)=e^{x}(2x+1)$.

إشارة المشتقة من إشارة $(2x+1)$ لأن : $e^{x}>0$

جدول تغيرات الدالة f :

x	-4		$-\frac{1}{2}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-9-4e^{-4}$	↘	$-2e^{-\frac{1}{2}}$	↗	$9e^5$

3) معادلة المماس للمنحنى عند النقطة التي فاصلتها 0 .

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ و منه معادلة المماس المطلوبة هي : $y=x-1$

4) نبين أن المنحني يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها.

حساب الدالة المشتقة الثانية فنجد $f''(x)=(2x+3)e^x$ تنعدم عند $-\frac{3}{2}$ و جدول إشارتها هو :

x	-4		$-\frac{3}{2}$		5
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

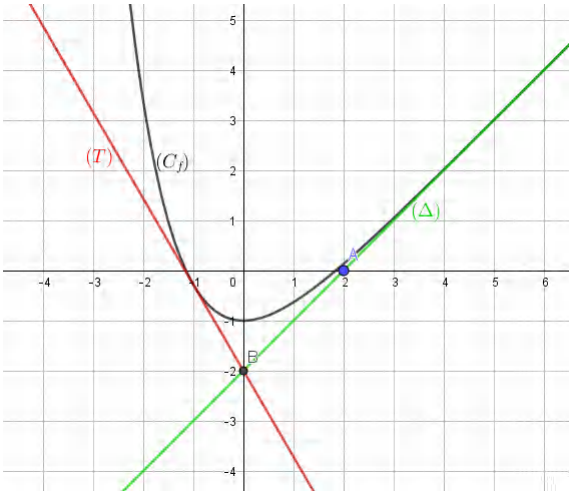
بما أن $f''(x)$ إنعدمت عند $-\frac{3}{2}$ و غيرت من إشارتها فإن النقطة $\omega\left(-\frac{3}{2};-4e^{-\frac{3}{2}}\right)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

5) جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-4;5]$ حيث : $g(x)=[f(x)]^2$.

$g'(x)=2f'(x).f(x)$ حيث : $f(x)=(2x-1)e^x$ و $f'(x)=(2x+1)e^x$.

x	4		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$81e^{-8}$	↗	$4e^{-1}$	↘	0	↗	$81e^{30}$

التمرين 23



✍ (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=ax+b+e^{-x}$ حيث : a و b عددان حقيقيان .

(Δ) المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f) المار من النقطتين $A(2,0)$ و $B(0,-2)$.

(T) هو المماس للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها -1 و معامل توجيهه هو $1-e$.

1) أكتب معادلة للمستقيم (Δ).

2) إستنتج قيمة كلا من a و b.

3) أكتب معادلة للمماس (T).

الحل

1) بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

فإن معادلة (Δ) هي : $y=ax+b$ و المار من النقطتين $A(2,0)$ و $B(0,-2)$

فيكون لدينا : $\begin{cases}0=2(a)+b\\-2=0(a)+b\end{cases}$ فنحصل على : $a=1$ و $b=-2$.

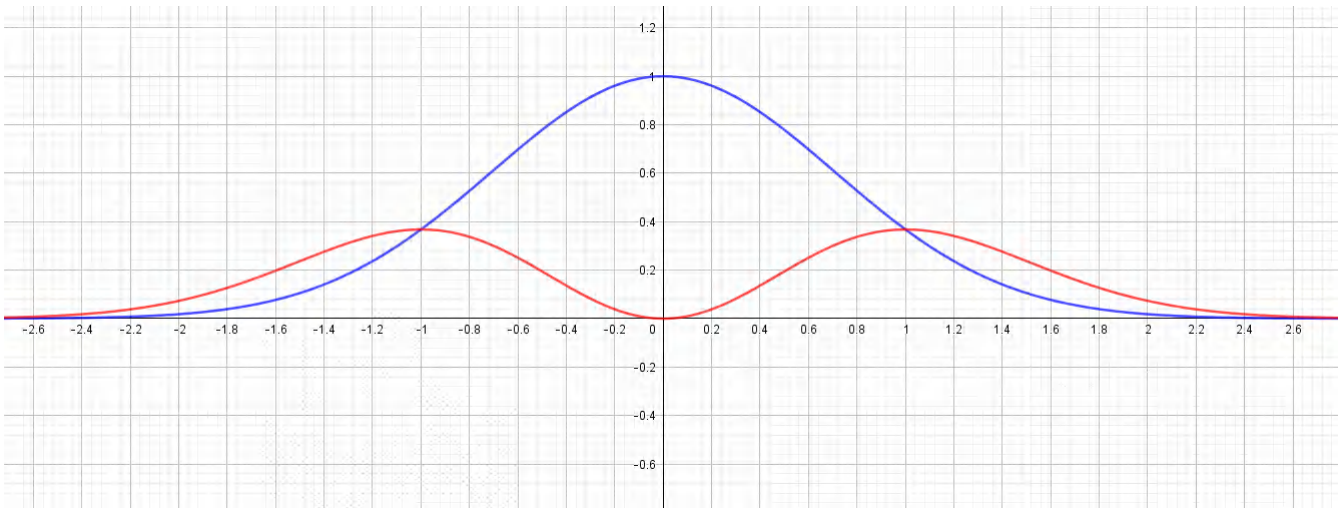
إذن : $f(x)=x-2+e^{-x}$ و معادلة (Δ) هي : $y=x-2$.

2) معادلة (T) : $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ أي : $y=(1-e)(x+1)-3+e$ و بالتالي : معادلة (T) هي : $y=(1-e)x-2$.

التمرين 24

✍ f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بحيث : $f(x)=e^{-x^2}$ و $g(x)=x^2e^{-x^2}$.

و ليكن (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان لهما على الترتيب.



1) ميز (C_f) و (C_g) مع التعليل .
2) أدرس شفعية الدالتين f و g .
3) عين النهاية عند $+\infty$ و أدرس إتجاه تغيرات الدالتين f و g.
4) أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g).

الحل

1) (C_f) هو المنحني الذي يشمل النقطة $A(0,1)$ لأن : $f(0)=1$
و (C_g) هو المنحني الذي يشمل المبدأ $O(0,0)$ لأن : $g(0)=0$.
2) شفعية الدالتين f و g :
شفعية f : من أجل $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$ و $f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}=f(x)$ و منه f دالة زوجية.
شفعية g : من أجل $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$ و $g(-x)=(-x)^2e^{-(-x)^2}=x^2e^{-x^2}=g(x)$ و منه f دالة زوجية.
3)أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$ حيث : f و g زوجيتان.
ب) دراسة تغيرات الدالة f :
$f'(x)=-2xe^{-x^2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

ج) دراسة تغيرات الدالة g : $g'(x)=2xe^{-x^2}+(-2x)e^{-x^2}(x^2)=2x(1-x^2)e^{-x^2}$
جدول إشارة $g'(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	e^{-1}	↘	0	↗	e^{-1}	↘	0

4) الوضعية النسبية : ندرس إشارة الفرق $g(x)-f(x)$.

$g(x)-f(x)=x^2e^{-x^2}-e^{-x^2}=(x^2-1)e^{-x^2}$ إشارة هذا الفرق من إشارة x^2-1 لأن : $e^{-x^2}>0$ و منه :

على المجالين $]1,+\infty[$ و $]-\infty,-1[$ يكون $x^2-1>0$ و بالتالي المنحنى (C_g) يقع فوق المنحنى (C_f).

على المجال $]-1,1[$ يكون $x^2-1<0$ و بالتالي المنحنى (C_g) يقع تحت المنحنى (C_f).

المنحنيان يتقاطعان في النقطتين $B(-1;e^{-1})$ و $C(1;e^{-1})$.

2.6 تمارين تجريبية

التمرين 01

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

حيث a ، b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0;-3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x)=0$.

نضع $a=1$, $b=0$, $c=-3$.

2) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

3) ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

4) أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$

5) عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

6) أرسم (T) و (C_f) .

7) m وسيط حقيقي ؛ ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة : $x^2-3+me^x=0$.

الحل

✍لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(ax^2+bx+c)\,e^{-x}$.
حيث a ، b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس .

1) تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0;-3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x)=0$.

$f(0)=-3$ و هذا يعني $c=-3$

و لدينا $f'(x)=(2ax+b)\ e^{-x}-(ax^2+bx+c)\,e^{-x}=[-ax^2+(2a-b)x+b-c]\ e^{-x}$

$f'(0)=3$ يعني أن $b-c=3$ و منه $b=0$.

$f(\sqrt{3})=0$ يعني ان $f(\sqrt{3})=(3a-3)\,e^{-\sqrt{3}}=0$ و منه $a=1$.

2) نضع $a=1$, $b=0$, $c=-3$ تصبح $f(x)=(x^2-3)\,e^{-x}$

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-3)\,e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$ لأنه بوضع $x=2t$

نجد $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{4t^2}{e^{2t}}\right]=4\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{t}{e^t}\right)^2=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)\,e^{-x}=+\infty$.

3) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

حساب المشتقة : $f'(x)=(2x)e^{-x}-e^{-x}(x^2-3)=(-x^2+2x+3)\,e^{-x}$

إشارة المشتقة : إشارتها من إشارة $(-x^2+2x+3)$ تنعدم عند العددين 3 و -1 و منه f متناقصة على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[3;+\infty[$ و متزايدة على المجال $[-1;3]$.

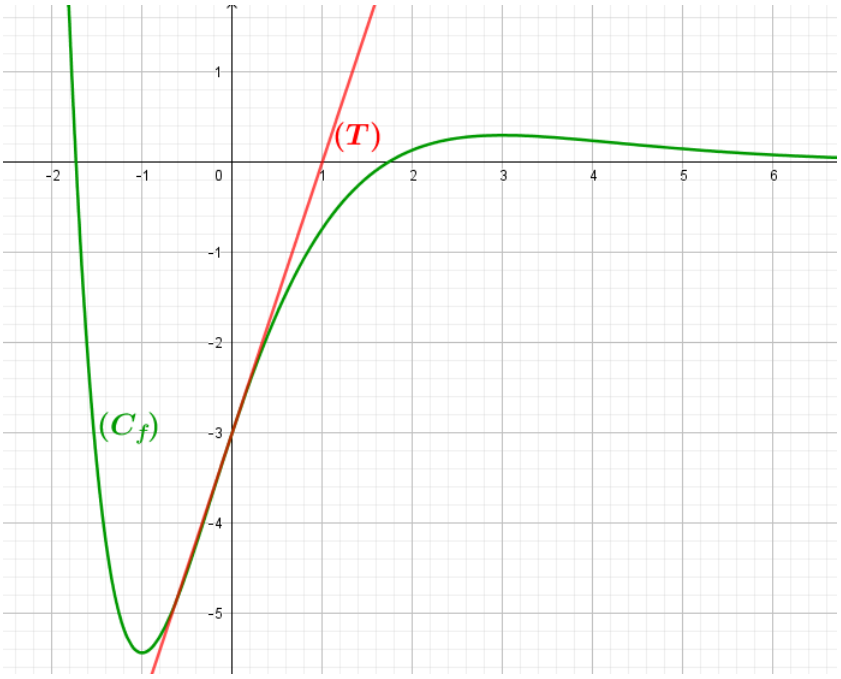
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-2e$	↗	$\dfrac{6}{e^3}$	↘	0

4) كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ معادلة المماس هي $y=3x-3$.

5) تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل :

$f(x)=0$ يكافئ $x^2-3=0$.اي ان $x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع هما $B(\sqrt{3};0)$ و $C(-\sqrt{3};0)$.

6) رسم (T) و (C_f)



7) m وسيط حقيقي ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة : $x^2-3+me^x=0$ المعادلة تكافئ $me^x=-(x^2-3)$ أي ان $-m=(x^2-3)e^{-x}$ يكافئ $-m=f(x)$

حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=-m$.

المناقشة :

✍ لما $-m<-2e$ أي ان $m>2e$ نلاحظ ان (Δ_m) و (C_f) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول .

✍ لما $-m=-2e$ أي ان $m=2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب.

✍ لما $-3>-m>-2e$ أي ان $3<m<2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما سالبان ومنه للمعادلة حلين سالبين.

✍ لما $-m=-3$ أي ان $m=3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين إحداهما فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداهما معدوم و الأخر سالب .

✍ لما $-3<-m\leq 0$ أي ان $0\leq m<3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما مختلفان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة .

✍ لما $0>-m>\frac{6}{e^3}$ أي ان $-\frac{6}{e^3}<m<0$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلاتهما موجبتان و نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب .

✍ لما $-m=\frac{6}{e^3}$ أي أن $m=-\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما مختلفان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة.

✍ لما $-m>\frac{6}{e^3}$ أي ان $m<-\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة فاصلتهما سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .

✍ نعتبر الدالة g للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=x-e^{-\frac{1}{2}x}$.

1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.70<\alpha<0.71$.

3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

✍ لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(2x-4)e^{\frac{1}{2}x}+2-x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس .

1)أ) احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(2-x)]$ ، و فسر النتيجة بيانيا .

ج) ادرس الأوضاع النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+2$.

2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{\frac{1}{2}x}\times g(x)$,ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

3) بين أن $f(\alpha)=4-\alpha-\dfrac{4}{\alpha}$,ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) احسب احداثيتي A نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور التراتيب .

5) اكتب معادلة المماس T للمنحنى (C_f) في النقطة A.

6) احسب $f(2)$ و $f(2\ln\frac{1}{2})$ ، ثم ارسم كل من المستقيم (Δ) , المماس T والمنحنى (C_f).

7) ناقش بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $2e^{\frac{1}{2}x}=\dfrac{m-2}{x-2}$.

الحـل

✍ الجـزء الأول

❶ دراسة تغيرات الدالة g : g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=x-e^{-\frac{1}{2}x}$

أولا : حساب النهايات $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-e^{-\frac{1}{2}x}\right)=-\infty \text{ و } \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-e^{-\frac{1}{2}x}\right)=+\infty}$

ثانيا :اتجاه التغير الدالة g معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

ولدينا: $\boxed{g'(x)=1+\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}}$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)>0$ وعليه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

❷ إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0,7;0,71[$ و $g(0,7)\times g(0,71)\leq 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,7<\alpha<0,71$

جدول الإشارة

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

✍ **الجـزء الثاني** الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(2x-4)e^{\frac{1}{2}x}+2-x$

❶ حساب نهايات الدالة f :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left((2x-4)e^{\frac{1}{2}x}+2-x\right)=\lim_{x\to+\infty}(x-2)\left(2e^{\frac{1}{2}x}-1\right)=+\infty$$

و

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left((2x-4)e^{\frac{1}{2}x}+2-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2xe^{\frac{1}{2}x}-4e^{\frac{1}{2}x}+2-x\right)=+\infty$$

حساب : $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2-x)\right]$

لدينـا :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2-x)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[(2x-4)e^{\frac{1}{2}x}+2-x-2+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(2xe^{\frac{1}{2}x}-4e^{\frac{1}{2}x}\right)=0$$

التفسير : المنحنى (C_f) يقبل مستقيمـا مقـاربـا مائلا معـادلته $y=2-x$ بجوار $(-\infty)$

دراسة الوضع النسبي :

يؤول إلى دراسة اشـارة الفرق $f(x)-(2-x)$

لدينـا : $f(x)-(2-x)=(2x-4)e^{\frac{1}{2}x}$

ومن أجل كل عدد حقيقي لدينا : $e^{\frac{1}{2}x}>0$

ومنه دراسة إشارة الفرق تؤول إلى دراسة اشـارة العبـارة $2x-4$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(2;0)$		(C_f) فوق (Δ)

❷ دراسة اتجاه تغير الدالة f : الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتهـا المشتقة هي :

$$f'(x)=2e^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}(2x-4)e^{\frac{1}{2}x}-1=(2+x-2)e^{\frac{1}{2}x}-1=xe^{\frac{1}{2}x}-1=e^{\frac{1}{2}x}\left(x-e^{-\frac{1}{2}x}\right)=e^{\frac{1}{2}x}g(x)$$

بمـا أن $e^{\frac{1}{2}x}>0$ من أجل كل عدد حقيقي x فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ وعليه :

جدول التغيرات

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

❸ **إثبات ان** $f(\alpha)=4-\alpha-\frac{4}{\alpha}$: لدينا مماسبق $g(\alpha)=0$ تكافيء $\alpha-e^{-\frac{1}{2}\alpha}=0$ ومنه $e^{-\frac{1}{2}\alpha}=\alpha$ إذن $e^{\frac{1}{2}\alpha}=\frac{1}{\alpha}$

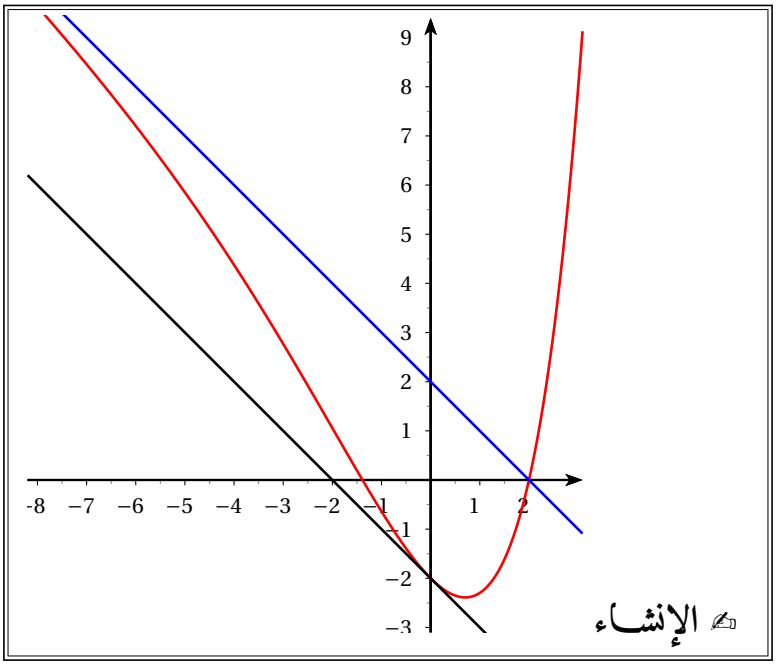
بالتعويض نجد : $\boxed{f(\alpha)=(2\alpha-4)\frac{1}{\alpha}+2-\alpha=\frac{2\alpha}{\alpha}-\frac{4}{\alpha}+2-\alpha=4-\alpha-\frac{4}{\alpha}}$

✍ **حصر** $f(\alpha)$:

لدينا $0,7<\alpha<0,71$ ومنه : $3,29<4-\alpha<3,3$ و $-5,71<-\frac{4}{\alpha}<-5,61$ إذن : $\boxed{-2,42<f(\alpha)<-2,31}$

✍ **احداثيي النقطة** A **نقطة تقاطع** (C_f) **مع حامل محور التراتيب :** لدينا : $f(0)=-2$ ومنه $\boxed{(C_f)\cap(y'y)=\{A(0;-2)\}}$

✍ **معادلة المماس عند** A: $\boxed{(T):y=f'(0)(x-0)+f(0)=-x-2}$



✍ **المناقشة البيانية:**

لدينا: $2e^{\frac{1}{2}x}=\frac{m-2}{x-2}$ تكافيء $(2x-4)e^{\frac{1}{2}x}=m-2$

أي $(2x-4)e^{\frac{1}{2}x}+2=m$ وعليه $\boxed{f(x)=m-x}$

إذن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=m-x$

✍ من أجل $m<-2$ المعادلة لاتقبل حلولا

✍ من أجل $-2<m<2$ المعادلة تقبل حلن مختلفين في الإشارة

✍ من أجل $m=-2$ المعادلة تقبل حلا وحيد $x=0$

✍ من أجل $m>2$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا

التمرين 03

✍ لتكن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=(x-1)e^{-x}+2$.

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.38,-0.37[$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$.

✍ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$) .

1) بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$.

2) أدرس تغيرات الدالة f .

3) بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ).

5) بين أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف .

6) بين أن : $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$.

7) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم المقارب (Δ) (نأخذ $\alpha=-0.375$) .

✍ (Δ_m) مستقيم معادلته $y=2x+m$ حيث m عدد حقيقي .

1) عين m حتى يكون (Δ_m) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

2) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة التالية : $\dfrac{x}{e^x}+1-m=0$.

الحل

✍ g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=(x-1)e^{-x}+2$

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\boxed{-\infty}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{e^x}-e^{-x}+2\right)=\boxed{2}$

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)=(2-x)e^{-x}$ ومنه إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $(2-x)$ وجدول تغيراتها يعطى بالشكل :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$e^{-2}+2$	↘	2

2. إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.38,-0.37[$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty,2[$ ومنه على المجال : $[-0.38,-0.37]$.
وبما أن $g(-0.37)\times g(-0.38)<0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.38,-0.37[$.

3. إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

✍ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$

1. لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=2-e^{-x}+xe^{-x}=(x-1)e^{-x}+2$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$

2. دراسة تغيرات الدالة f

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$ ولدينا ايضا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x-1]=\lim\limits_{x\to+\infty}-xe^{-x}=0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

4. لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x)-(2x+1)$

لدينا $f(x)-(2x+1)=-xe^{-x}$ ومنه فإن إشارة الفرق هي عكس إشارة x

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-(2x+1)$	$+$		$\|\|$	$-$	
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)		$\|\|$	(C_f) تحت (Δ)	

5. إثبات أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف .

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f''(x)=g'(x)$ ومنه

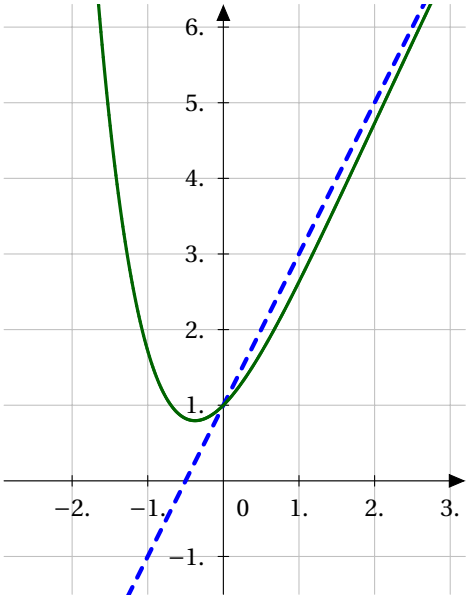
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

بما أن $f''(x)$ تنعدم مغيرة إشارتها عند 2 فإن النقطة $\left(2;5-\frac{2}{e^2}\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

6. إثبات أن : $f(\alpha)=\frac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$

$g(\alpha)=0$ تكافئ $e^{-\alpha}=-\frac{2}{\alpha-1}$ ومنه: $f(\alpha)=2\alpha+1\alpha-e^{-\alpha}=2\alpha+1+\frac{2\alpha}{\alpha-1}=\frac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$

7. رسم المنحنى (C_f)



✍ (Δ_m) مستقيم معادلته $y=2x+m$ حيث m عدد حقيقي

1. تعيين m حتى يكون (Δ_m) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

المستقيم $y=2x+m$ مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة x_0 منه يعني : $f'(x_0)=2$ اي أن $g(x)=2$ ومنه $(x-1)e^{-x}=0$ وبالتالي $x_0=1$

لدينا : $f(1)=3-e^{-1}$ ومنه معادلة المماس هي $y=2x+1-e^{-1}$ بالمطابقة نجد $m=1-e^{-1}$

2. المناقشة البيانية :

$\frac{x}{e^x}+1-m=0$ يعني $m=-xe^{-x}+1$ بإضافة $2x$ للطرفين نجد $m+2x=-xe^{-x}+1+2x$ أي أن $m+2x=f(x)$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m), لدينا عندئذ :

✍ إذا كان $m\in]-\infty,1-e^{-1}[$ المعادلة لا تقبل حلولا .

✍ إذا كان $m=1-e^{-1}$ للمعادلة حل وحيد .

✍ إذا كان $m \in]1-e^{-1},1[$ للمعادلة حلان .

✍ إذا كان $m > 1$ للمعادلة حل وحيد.

التمرين 04

✍ g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = \mathrm{e}^{-x} + x - 1$

1) أحسب $g'(x)$ ثم عين اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) \geqslant 0$، استنتج أنّ: $\mathrm{e}^{-x} + x \geqslant 1$.

✍ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{-x} + x}$، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس .

1) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x\mathrm{e}^{x}}}$.

2) أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. فسر النتيجتين بيانيا.

3) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}(1+x)}{(\mathrm{e}^{-x} + x)^2}$.

4) أدرس اشارة $f'(x)$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

5) أكتب معادلة لمماس المنحنى (C_f) عند النقطة O.

6) تحقق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x - f(x) = \dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$، ثم استنتج اشارة $x - f(x)$.

7) استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$.

8) أنشئ (Δ) و (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

9) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة: $\dfrac{xe^{x}}{xe^{x}+1} - 1 = m$.

الحل

1. حساب $g'(x)$ تعيين اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$:

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 1$

$g'(x) \geqslant 0$ يكافئ	$-e^{-x} + 1 \geqslant 0$	$g'(x) \leqslant 0$ يكافئ	$-e^{-x} + 1 \leqslant 0$
يكافئ	$e^{-x} \leqslant 1$	يكافئ	$e^{-x} \geqslant 1$
يكافئ	$1 \leqslant e$	يكافئ	$-x \geqslant 0$
يكافئ	$x \geqslant 0$	يكافئ	$x \leqslant 0$

و

إذن إذا كان $x \in]-\infty;0[$ فإن الدالة g متناقصة تماماً، و إذا كان $x \in]0;+\infty[$ فإن الدالة g متزايدة تماماً

2. تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) \geqslant 0$

من أجل $x \in]-\infty;0[$: $g(x) \geqslant g(0)$ لأن g متناقصة على $]-\infty;0[$ و منه $g(x) \geqslant 0 \cdots (1)$

من أجل $x\in]0;+\infty[$: $g(x)\geqslant g(0)$ لأن g متزايدة على $]0;+\infty[$ و منه $g(x)\geqslant 0$ ⋯(2)

من (1) و (2) ينتج أن $g(x)\geqslant 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

✍ استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{-x}+x\geqslant 1$

لدينا: $g(x)\geqslant 0$ يكافئ $e^{-x}+x-1\geqslant 0$ و منه $e^{-x}+x\geqslant 1$

1. التحقق من أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$: $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^x}}$

لدينا:

$$f(x)=\frac{x}{e^{-x}+x}=\frac{(x)\times 1}{(x)\times(\frac{e^{-x}}{x}+1)}=\frac{1}{\frac{e^{-x}}{x}+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}$$

2. حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0^-$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}1+\dfrac{1}{xe^x}=-\infty$

و بالتالي $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^x}}=0^-$ أي $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0^-$

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{1}{xe^x}=1$

و بالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^x}}=1$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

✍ التفسير البياني:

✍ عند $-\infty$: $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيم مقاربا أفقيا (Δ) معادلته: $y=0$ و $(\mathscr{C}_f)$ تحت (Δ)

✍ عند $+\infty$: $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيم مقاربا أفقيا معادلته: $y=1$.

3. f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x)=\dfrac{1(e^{-x}+x)-(-e^{-x}+1)(x)}{(e^{-x}+x)^2}=\dfrac{e^{-x}+xe^{-x}}{(e^{-x}+x)^2}$ إذن $f'(x)=\dfrac{e^{-x}(x+1)}{(e^{-x}+x)^2}$

4. دراسة إشارة $f'(x)$ ثم تشكيل جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$

لدينا $f'(x)=\dfrac{e^{-x}}{(e^{-x}+x)^2}(x+1)$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x+1$ لأن $e^{-x}>0$ و المقام موجب تماما، اذن :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

و منه جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	↘	$\dfrac{1}{1-e}$	↗	1

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

5. معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة O:

لدينا $f(0)=0$ و $f'(0)=1$، إذن معادلة المماس هي $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $y=x$

6. التحقق من أن $x-f(x)=\dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$

$$x-f(x)=x-\frac{x}{e^{-x}+x}=\frac{x(e^{-x}+x-1)}{e^{-x}+x}=\frac{x(e^{-x}+x-1)}{e^{-x}+x-1+1}=\frac{xg(x)}{g(x)+1}$$

✍ إشارة $x-f(x)$:

لدينا $g(x)\geqslant 0$ و منه $g(x)+1\geqslant 1$ و منه $g(x)+1>0$، إذن إشارة $x-f(x)$ من إشارة x

إذا كان $x<0$ فإن $x-f(x)<0$ ،

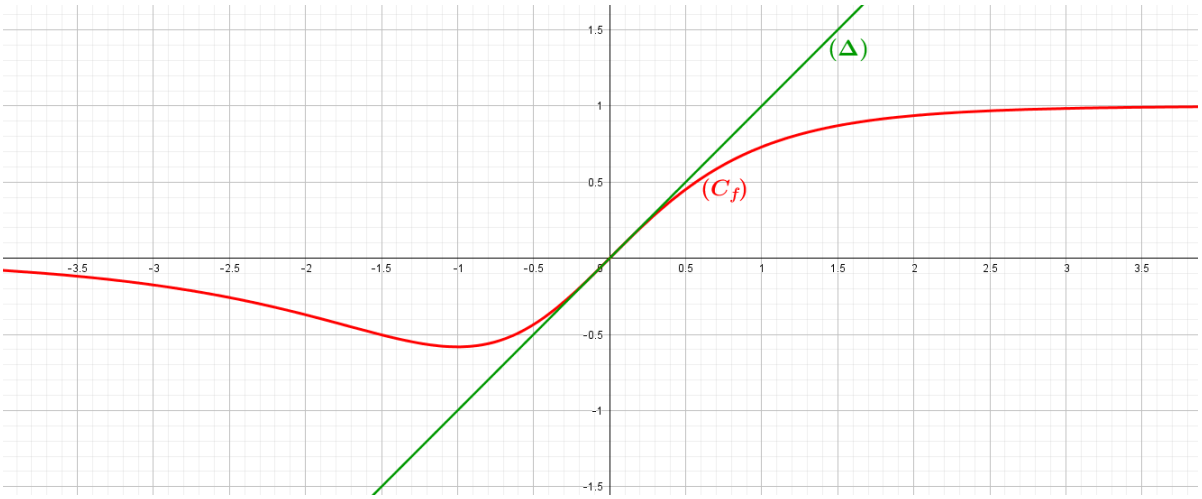
$x>0$ فإن $x-f(x)>0$

و إذا كان $x=0$ فإن $x-f(x)=0$.

7. الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$:

$x<0$	$x=0$	$x>0$
(C_f) فوق (Δ)	(C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطة O	(C_f) تحت (Δ)

8. رسم (C_f) و (Δ)



9. المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $\dfrac{xe^x}{xe^x+1}-1=m$

المناقشة: لدينا $\dfrac{xe^x}{xe^x+1}-1=m$ يكافئ $\dfrac{e^x}{e^x}\dfrac{x}{x+e^{-x}}=m+1$ يكافئ $\dfrac{x}{x+e^{-x}}=m+1$ أي $f(x)=m+1$، حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=m+1$، نميز الحالات التالية:

✍ إذا كان $m+1\geqslant 1$ أي $m\geqslant 0$ ، المعادلة ليس لديها حلول

✍ إذا كان $0<m+1<1$ أي $-1<m<0$، للمعادلة حل وحيد موجب

✍ إذا كان $m+1=0$ أي $m=-1$، للمعادلة حل وحيد معدوم $x_0=0$

✍ إذا كان $\dfrac{1}{1-e}<m+1<0$ أي $-1<m<-1+\dfrac{1}{1-e}$، للمعادلة حلين سالبين متمايزين

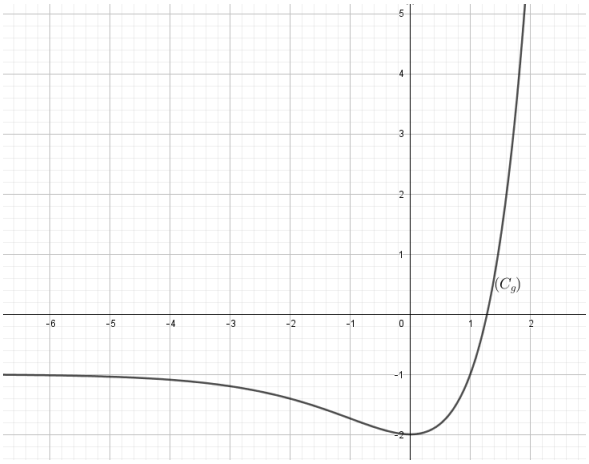
✍ إذا كان $m+1=\frac{1}{1-e}$ أي $m=\frac{1}{1-e}-1$، للمعادلة حل واحد سالب هو $x_1=-1$

✍ إذا كان $m+1<\frac{1}{1-e}$ أي $m<\frac{1}{1-e}-1$، المعادلة ليس لديها حلول .

التمرين 05

✍ في الشكل المقابل (C_g) هو المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$g(x)=(ax+b)e^x+c$



1) بقراءة بيانية :

أ) عين $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ ثم إستنتج قيمة c.

ب) عين نهاية الدالة g عند $+\infty$.

ج) عين كلا من : $g(0)$ و $g'(0)$ ثم إستنتج قيمتي كل من a و b .

2) نفرض فيما يلي: $g(x)=(x-1)e^x-1$.

أ) شكل جدول تغيرات الدالة g

ب) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.2<\alpha<1.3$

ج) إستنتج إشارة $g(x)$.

✍ f هي الدالة المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{x}{e^x+1}$ ،وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم حدد المستقيم المقارب بجوار $+\infty$.

2) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

3) أدرس إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

4) بين $f(\alpha)=\alpha-1$ ثم إستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

5) أنشئ المنحنى (C_f).

6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$.

7) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x)=f(|x|)$

أ) بين أن h دالة زوجية .

ب)أرسم (C_h)المنحنى البياني للدالة h إعتمادا على (C_f) في نفس المعلم السابق .

الحل

I) 1) بقراءة بيانية :

أ) لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-1$, و نعلم أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}[(ax+b)e^x+c]=\lim\limits_{x\to-\infty}(axe^x+be^x+c)=c$.

إذن نستنتج أن : $c=-1$.

ب) لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

ج) لدينا : $g(0) = -2$ و $g'(0) = 0$

لدينا : $g(0) = -2$ أي : $(a\times 0+b)e^0 - 1 = -2$ أي : $b-1=-2$ و منه : $b=-1$.

نحسب $g'(x)$: $g'(x) = a\times e^x + e^x(ax+b) = e^x(a+ax+b)$

لدينا : $g'(0)=0$ أي : $e^0(a+a\times 0-1)=0$ أي : $a-1=0$ و منه : $a=1$

إذن : $g(x) = (x-1)e^x - 1$.

2) أ) تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

ب) الدالة g مستمرة و رتيبة على المجال $[1{,}2;1{,}3]$ و بما أن : $g(1.2) = -$ و $g(1.3) = +$ أي : $g(1.2)\times g(1.3) < 0$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين : 1.2 و 1.3 .

ج) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) لدينا : $f(x) = \dfrac{x}{e^x+1}$

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^x+1} = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}} = 0$.

بجوار $+\infty$ المنحنى (C_f) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب .

2) لدينا : $(\Delta): y=x$, نحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x}{e^x+1}-x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-xe^x-x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-xe^x}{e^x+1} = 0$

إذن : المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

الوضعية النسبية بين المنحنى (C_f) و (Δ) .

ندرس إشارة الفرق : $f(x)-y$.

أي ندرس إشارة $\dfrac{-xe^x}{e^x+1}$ إذن إشارة الفرق من إشارة : $(-x)$.

3) دراسة إتجاه تغير الدالة f:

نحسب المشتقة $f'(x)$: $f'(x) = \dfrac{(e^x+1)-xe^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x+1-xe^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{(-x+1)e^x+1}{(e^x+1)^2} = \dfrac{-[(x-1)e^x-1]}{(e^x+1)^2} = \dfrac{-g(x)}{(e^x+1)^2}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$ لأن : $(e^x+1)^2>0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

4) إثبات : $f(\alpha)=\alpha-1$.

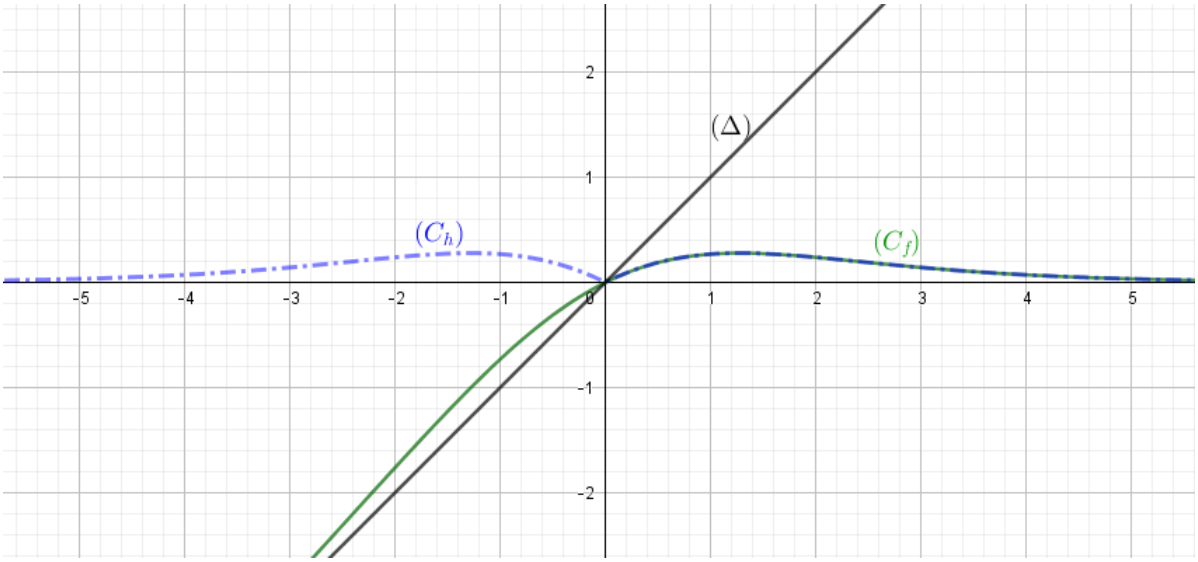
نعلم أن : $g(\alpha)=0$, أي : $(\alpha-1)e^{\alpha}-1=0$ أي : $(\alpha-1)e^{\alpha}=1$, ومنه : $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$.

لنحسب الآن $f(\alpha)$: $f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{e^{\alpha}+1}=\dfrac{\alpha}{\dfrac{1}{\alpha-1}+1}=\dfrac{\alpha}{\dfrac{1+\alpha-1}{\alpha-1}}=\dfrac{\alpha}{\dfrac{\alpha}{\alpha-1}}=\alpha\times\dfrac{\alpha-1}{\alpha}=\alpha-1$.

و هو المطلوب .

حصر لـ $f(\alpha)$: لدينا : $1.2<\alpha<1.3$ أي : $0.2<\alpha-1<0.3$ و منه : $0.2<f(\alpha)<0.3$.

5)الإنشاء :



6) المناقشة البيانية :

لدينا المعادلة : $f(x)=f(m)$, عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الموازي لحامل محور الفواصل و الذي معادلته : $y=f(m)$.

إذا كان : $m\in]-\infty;0]$ فإنّ : المعادلة تقبل حل واحد .

إذا كان : $m\in]0;\alpha[\cup]\alpha;+\infty[$ فإنّ : المعادلة تقبل حلان متمايزان .

إذا كان : $m=\alpha$ فإنّ : المعادلة تقبل حل واحد .

7) لدينا الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x)=f(|x|)$.

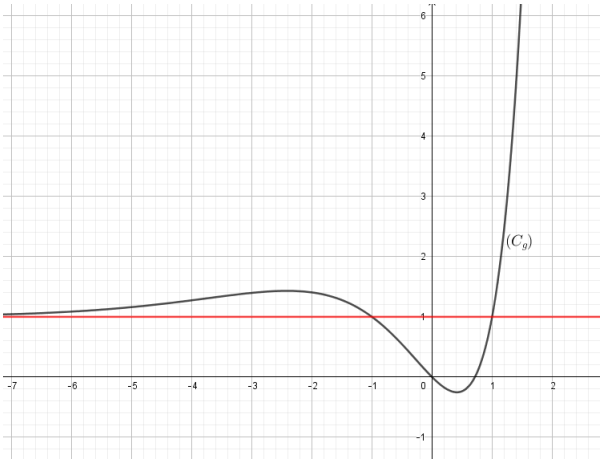
أ) تبيان أن الدالة h زوجية : $h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$ و وبالتالي الدالة h زوجية .

إنشاء المنحنى (C_h) :

(C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $]0;+\infty[$

(C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور التراتيب في المجال $]-\infty;0[$.

التمرين 06



✍ لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=(x^2-1)e^x+1$.

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس .

يعطى جدول القيم التالي :

x	6.0	65.0	7.0	75.0	8.0
g(x)	-17.0	-11.0	-03.0	07.0	2.0

1) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجموعة $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $0.7<\alpha<0.75$.

2) إستنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في $\mathbb{R}$.

✍ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x+(x-1)^2e^x$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x)=g(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

2) تحقق من أن : $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha+1}$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$.

3) أ) أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1,1)$.

ب) بين أن المماس (T) هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي بين (C_f)و المماس (T) .

ج) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T') يوازي (T) في نقطة B يطلب تعيين فاصلتها ثم أكتب معادلة للمماس (T') .

4) أرسم كلا من (T) , (T') و (C_f) .

5) عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $(E):(x-1)^2e^x-m-1=0$ ثلاثة حلول .

الحل

I) 1) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $0.7<\alpha<0.75$.

لدينا : $g(0)=(0^2-1)e^0+1=-1+1=0$ و منه 0 حل للمعادلة $g(x)=0$.

ولدينا : g دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[0.7;0.75]$ و $g(0.70)\times g(0.75)=-0.03\times 0.07=-0.0021<0$.

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث : $0.7<\alpha<0.75$.

و بالتالي المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $0.7<\alpha<0.75$.

2) إستنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II) لدينا : $f(x)=x+(x-1)^2e^x$ معرفة على $D_f=\mathbb{R}$.

1) أ) حساب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x+(x-1)^2e^x\right]=\lim_{x\to-\infty}(x+x^2e^x-2xe^x+e^x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x+(x-1)^2e^x\right]=+\infty$$

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=g(x)$.

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا :

$$f'(x)=1+2(x-1)e^x+(x-1)^2e^x=1+[2x-2+(x-1)^2e^x]=1+(2x-2+x^2-2x+1)e^x=1+(x-1)^2e^x=g(x)$$.

أي : $f'(x)=g(x)$.

إستنتاج إتجاه تغير الدالة f :

إشارة المشتقة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)=g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين : $]-\infty;0[$ و $]\alpha;+\infty[$ و f متناقصة تماما على المجال $[0;\alpha]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

2) التحقق من أن : $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha+1}$.

لدينا : $f(\alpha)=\alpha+(\alpha-1)^2e^\alpha$.

و لدينا : $g(\alpha)=0$ و منه : $1+(\alpha^2-1)e^\alpha=0$ و بالتالي : $e^\alpha=-\dfrac{1}{\alpha^2-1}$.

إذن : $f(\alpha)=\alpha+(\alpha-1)^2\times(-\dfrac{1}{\alpha^2-1})$ أي : $f(\alpha)=\alpha-\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha^2-1}=\dfrac{\alpha^3-\alpha-\alpha^2+2\alpha-1}{\alpha^2-1}$

و بالتالي : $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^3-\alpha^2+\alpha-1}{\alpha^2-1}=\dfrac{\alpha^2(\alpha-1)+(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}=\dfrac{(\alpha-1)(\alpha^2+1)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}=\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha+1}$.

تعيين حصر لـ $f(\alpha)$:

لدينا : $0.70 < \alpha < 0.75$ و منه : $(0.70)^2+1 < \alpha^2+1 < (0.75)^2+1$ و $0.70+1 < \alpha+1 < 0.75+1$.

إذن : $\frac{(0.70)^2+1}{0.70+1} < \frac{\alpha^2+1}{\alpha+1} < \frac{(0.75)^2+1}{0.75+1}$ وبالتالي : $0.85 < f(\alpha) < 0.92$.

3) أ) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1;1)$:

$(T): y = f'(1)(x-1)+f(1) = g(1)(x-1)+1 = x-1+1 = x$.

ب) تبيان أن المماس (T) هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+(x-1)^2e^x-x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2e^x-2xe^x+e^x) = 0$

و منه المماس (T) هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

دراسة الوضعية النسبية بين المنحنى (C_f) و المماس (T)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$: $f(x)-y = x+(x-1)^2e^x-x = (x-1)^2e^x$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$+$	
الوضعية	(C_f) فوق (T)		(C_f) يخترق (T) في النقطة $A(1;1)$	(C_f) فوق (T)	

تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T') يوازي (T) في نقطة B :

لدينا : $(T')\parallel(T)$ يعني معامل توجيه المماس (T') يساوي 1 أي : $f'(x_0) = 1$

و منه : $1+(x_0^2-1)e^{x_0} = 1$ وبالتالي : $(x_0^2-1)e^{x_0} = 0$ و منه : $(x_0^2-1) = 0$ لأن : $e^{x_0} \neq 0$ و عليه : $x_0 = 1$ أو $x_0 = -1$.

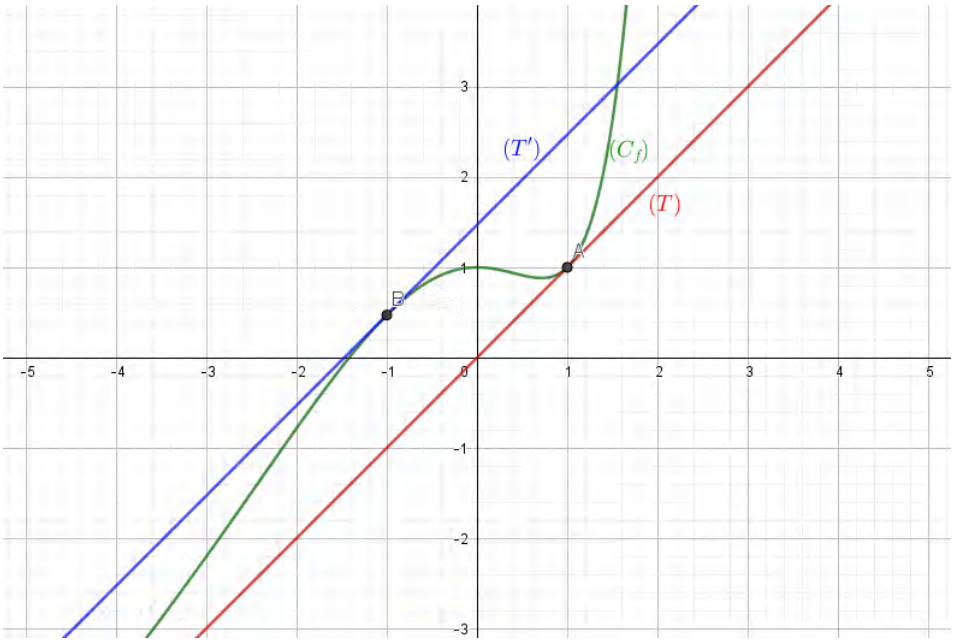
إذن (C_f) يقبل مماسا (T') يوازي (T) في النقطة B ذات الفاصلة -1.

كتابة معادلة المماس (T') :

لدينا : $B(-1;-1+4e^{-1})$

إذن : $(T'): y = f'(-1)(x+1)+f(-1) = 1\times(x+1)-1+4e^{-1} = x+4e^{-1}$.

الرسم :



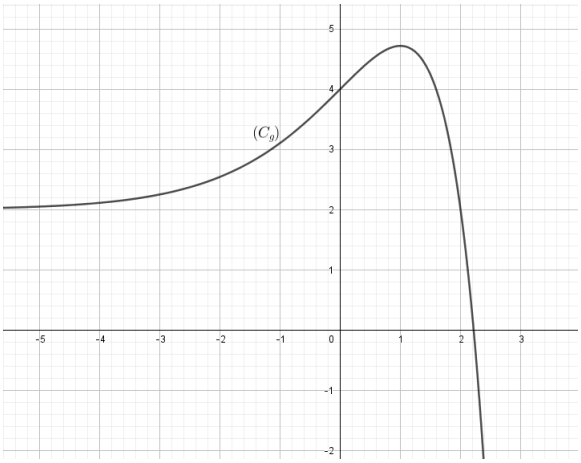
تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة (E) ثلاثة حلول:

لدينا : $(x-1)^2e^x = m+1$ تكافئ : $x+(x-1)^2e^x = x+m+1$ تكافئ : $f(x) = x+m+1$.

حلول المعادلة (E) بيانيا هي فواصل النقط المشتركة بين المنحنى (C_f) و المستقيم ذو المعادلة $y = x+m+1$ الموازي لكل من المماسين (T) و (T').

المعادلة (E) تقبل ثلاث حلول يعني : $0 < m+1 < 4e^{-1}$ وبالتالي : $-1 < m < -1+4e^{-1}$.

التمرين 07



✍ g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2+(2-x)e^x$.

(C_g) التمثيل البياني للدالة g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الشكل المقابل)

1) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $2.21 < \alpha < 2.22$.

2) بقراءة بيانية عيّن إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$ على $\mathbb{R}$.

✍ نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^2}{1+e^{-x}}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بيّن أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ، فسر النتيجة بيانيا .

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\frac{x.g(-x)}{(1+e^{-x})^2}$.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

3) بيّن أن : $f(-\alpha)=\alpha(\alpha-2)$ ، ثم عيّن حصرا للعدد $f(-\alpha)$.

4) (δ) المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto x^2$ في المعلم السابق .

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x^2)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا .

ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (δ) .

5) أنشئ كلا من المنحنى (δ) و المنحنى (C_f) (تعطى $f(-\alpha)=0.48$).

الحل

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2+(2-x)e^x$.

1) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $2,21<\alpha<2,22$.

• الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]1;3[$ و $]2.21;2.22[\subset]1;3[$ و

$$\begin{cases} g(2.21)\approx 0,08 \\ g(2.22)\approx -0,02 \end{cases}$$ أي $g(2.21)\times g(2.22)<0$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $]1;3[$ حلا وحيدا α ، حيث $2,21<\alpha<2,22$.

بقراءة بيانية : إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$g(-x)$		$+$	0	$-$	

II) نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{x^2}{1+e^{-x}}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

ب) تبيان أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2e^x}{e^x+1}=0$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

2) أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\frac{x.g(-x)}{(1+e^{-x})^2}$.

الدالة f قابلة للأشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

قلم الجزائر

$$f'(x)=\frac{2x(1+e^{-x})+x^2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}=\frac{x((2+(x+2)e^{-x}))}{(1+e^{-x})^2}=\frac{xg(-x)}{(1+e^{-x})^2}$$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$		$-\alpha$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول تغيّرات الدالة f:

x	$-\infty$		$-\alpha$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$f(-\alpha)$	↘	0	↗	$+\infty$

3) لدينا : $f(-\alpha)=\frac{\alpha^2}{1+e^{\alpha}}=\frac{\alpha^2}{1-\frac{2}{2-\alpha}}=\frac{\alpha^2}{\frac{-\alpha}{2-\alpha}}=-\alpha(2-\alpha)=\alpha(\alpha-2)$.

تعيين حصر للعدد $f(-\alpha)$:

لدينا :$2,21<\alpha<2,22$ و منه $0,21<\alpha-2<0,22$ إذن $0,46<\alpha(\alpha-2)<0,48$ و بالتالي $0,46<f(-\alpha)<0,49$.

4) (γ) المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto x^2$ في المعلم السابق .

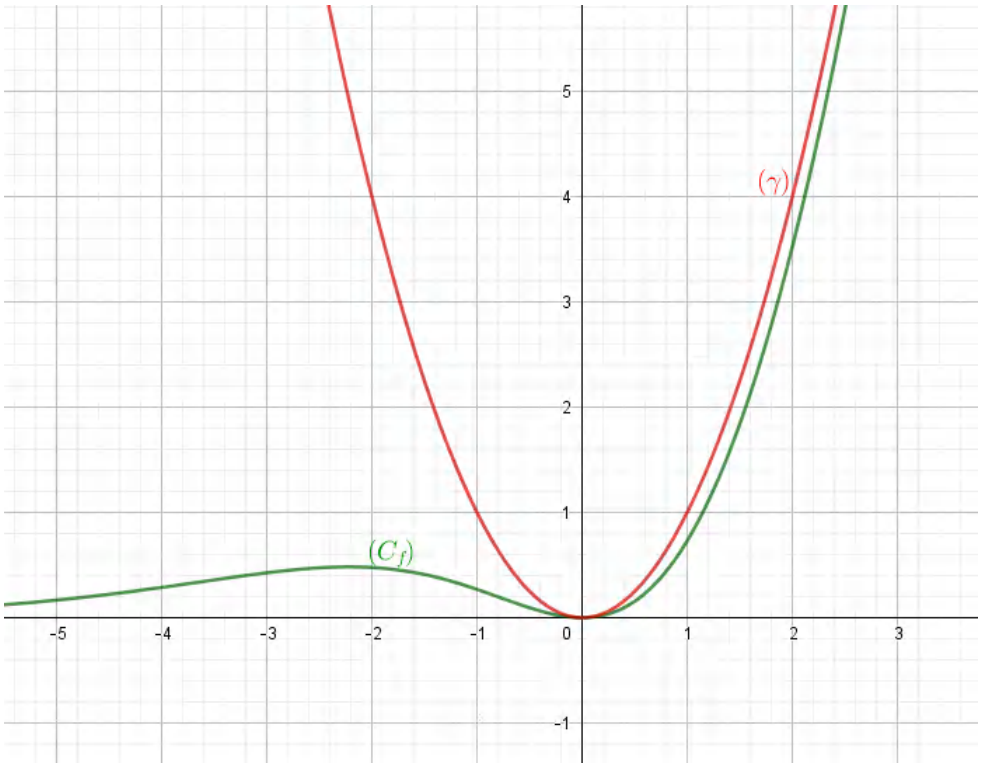
أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{1+e^{-x}}-x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)=0$.

التفسير البياني : المنحنى (γ) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (γ) :

لدينا : $f(x)-x^2=\frac{-x^2e^{-x}}{1+e^{-x}}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $\frac{-x^2e^{-x}}{1+e^{-x}}\le 0$ و بالتالي المنحنى (C_f) يقع أسفل المنحنى (γ) .

5) الرسم :



7 التمارين الواردة في البكالوريا من 2008 إلى 2020

1.7 شعبة العلوم التجريبية

التمرين 01

(I) نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كمايأتي: $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$
حيث a و b عددان حقيقيان. (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ وحدة الطول $1cm$.

عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) ومعامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

(II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$ و (C_g) إلى تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ وفسرالنتيجة بيانيا(نذكر أن $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$).

ب) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها.

ج) بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين احداثييها.

د) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I.

هـ) أرسم (C_g) .

(III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي: $k(x)=g(x^2)$
باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

التمرين 02

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x-1}$
نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$ وفسر هندسيا النتيجة.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب: $y=xy=x+1$.

ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ').

4) بيّن أن النقطة $\omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

5) أ) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2<\alpha<1$ و $-1,4<\beta<-1,3$.

ب) هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟.

ج) أرسم (Δ) و (Δ') .ثم المنحنى (C_f).

د) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x}=m$.

التمرين 03

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^x-ex-1$
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) أحسب $f'(x)$ ثم ادرس اشارتها.

ج) شكّل جدول تغيرات الدالة f.

2) أ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 .

ج) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α .

د) أرسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم (C_f) في المجال $]-\infty;2[$.

التمرين 04

(I) لتكن g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1-xe^x$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ،ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّوحيدا $\alpha\in[-1;+\infty[$

ب) تحقق أن:$0,5<\alpha<0,6$ إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي: $f(x)=(x-1)e^x-x-1$ و (C_f) تمثيلها البياني

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

2) لتكن f' مشتقة الدالة f.بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن: $f'(x)=-g(x)$.
إستنتج إشارة $f'(x)$ على $]-\infty;2]$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بيّن أن $f(\alpha)=-\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.(تدور النتائج إلى 10^{-2}).

4) أ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

5) أ) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث: $-1,6<x_1<-1,5$ و $1,5<x_2<1,6$.

ب) أنشئ (Δ) و (C_f).

التمرين 05

(I) f الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $f(x)=\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

x	f(x)
20.0	037.0
21.0	016.0
22.0	-005.0
23.0	-026.0
24.0	-048.0
25.0	-070.0

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1^{<}} f(x)$ واستنتج المستقيمين المقاربين لـ (C).

2) احسب $f'(x)$, بيّن أن f متناقصة تماما على $]-\infty;1[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α باستعمال الجدول أعلاه ثم جد حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ،ثم أرسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

5) عيّن بيانيا مجموعة قيم m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

(II) g الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x)=f(2x-1)$

1) ادرس تغيرات الدالة g على المجال $]-\infty;1[$ ،ثم شكل جدول تغيراتها .

2) أ) تحقق من أن: $g(\frac{\alpha+1}{2})=0$ ثم بيّن أن $g'(\frac{\alpha+1}{2})=2f'(\alpha)$.

ب) استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

ج) تحقق من أن: $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ معادلة للمستقيم (T).

التمرين 06

(I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α في $\mathbb{R}$ ،ثم تحقق أن: $0,36<\alpha<0,37$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

(II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$ و(C_f) تمثيلها البياني

1) أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $f'(x)=e^{2x+2}.g(-x)$.

ب) أستنتج أن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;-\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$

2) أحسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3 احسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x-1]$ ،ثم فسر النتيجة هندسيا.

4 أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=-x+1$.

5 أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $]-\infty;\frac{1}{2}]$ ، نأخذ : $f(-\alpha)\approx 0,1$.

التمرين 07

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2e^x-x^2-x$.

1 أ حساب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ودراسة اتجاه تغير الدالة g'

ب بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$.

ج احسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$ وشكل جدول تغيراتها

2 بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,38<\alpha<-1,3$

3 استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ من أجل كل عدد حقيقي x.

(II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}$

1 أ احسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

ب بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=\dfrac{xe^x.g(x)}{(e^x-x)^2}$.

ج ادرس اتجاه تغيرالدالة f على $\mathbb{R}$ ، وشكل جدول تغيراتها

2 أ بيّن أن: $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\frac{2}{\alpha-1}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

ب احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x^2]$ وفسر النتيجة بيانيا.

ج ارسم المنحنى (C_f).

التمرين 08

(I) g الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(x^2+x-1)e^{-x}$

1 أ احسب $\lim_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)$

ب ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث : $-1,52<\alpha<-1,51$

ب) استنتج إشارة $g(x)$.

II) f الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $1cm$

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=-g(x)$

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ (نأخذ $f(\alpha)\approx 0,38$)

د) عيّن دون حساب $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ وفسير هندسيا للنتيجة.

2) أ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذوالمعادلة : $y=-x$ مقارب مائلا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

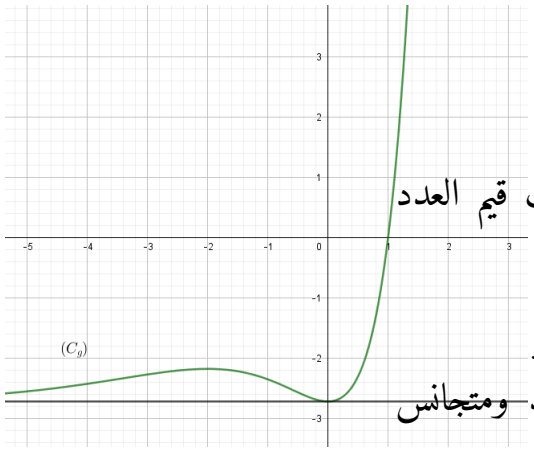
ج) بيّن أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين احداثياهما.

د) ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2;+\infty[$

هـ) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $(m-x)e^x+(x^2+3x+2)=0$ على المجال $[-2;+\infty[$.

التمرين 09

I) نعتبرالدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^2e^x-e$ (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ كما هو في الشكل المقابل.



1) أحسب $g(1)$

2) بقراءة بيانية عين إشارة $g(x)$ ثم استنتج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي: $f(x)=e^{-x}-2-\frac{e}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب النهايات الأتية: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

education-onec-dz.blogspot.com

2 بيّن أن المنحنى (γ) ذوالمعادلة $y=e^{-x}-2$ و (C_f) متقاربان عند $-\infty$ ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة (γ)

3 بين أنه من أجل كل حقيقي x غير معدوم: $f'(x)=\frac{-g(-x)}{x^2}$.

4 استنتج ان الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-1;0[$ و $]0;+\infty[$ ومتناقصة على المجال $]-\infty;-1]$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

5 بيّن كيف يمكن انشاء المنحنى (γ) انطلاقا من منحنى الدالة $x\to e^x$ ثم ارسم كلا من المنحنيين (γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق.

التمرين 10

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=2-x^2e^{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ و أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

2 أ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$.

ب أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3 أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

(II) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $h(x)=1-xe^{1-x}$

1 بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)\geq 0$ ،ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T).

2 بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.

3 إنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $]-1;+\infty[$.

التمرين 11

(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2+(x-1)e^{-x}$

1 أ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$.

ب ادراس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0,38<\alpha<-0,36$.

د) استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$.
و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(2x+1))$ ثم تفسير النتيجة بيانيا.

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) حيث : $y=2x+1$.

2) بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ يكون : $f'(x)=g(x)$ واستنتج اتجاه تغيرالدالة f وشكل جدول تغيراتها

3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

4) ارسم (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f) .

5) عيّن عدد وإشارة حلول المعادلة $x=(1-m)e^x$.

التمرين 12

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. تؤخذ وحدة الطول $2cm$
(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرّفتين على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=e^x-ex$ و $f(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2$

1) أ) أدرس إتجاه تغير الدالة g.

ب) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x الحقيقية .

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f .

3) أحسب كلاّ من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة f .

4) أدرس الوضع النسبي للمنحنين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$.

5) أرسم على المجال $[0;2]$ المنحنين (C_f) و (C_g) في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. (يعطى $e^2-2e\approx 2$).

6) h الدالة المعرّفة على المجال $[-2;2]$ كمايلي : $h(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}$ وليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ) بيّن أنّ h دالة زوجية .

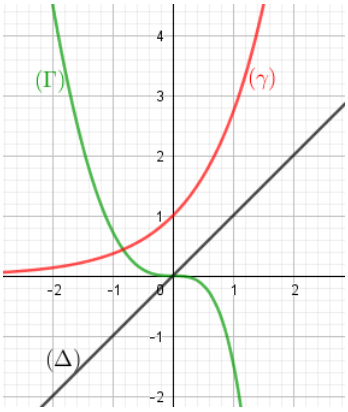
ب) من أجل $x\in[0;2]$ أحسب $h(x)+f(x)$ ثمّ إستنتج كيفية رسم (Γ) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه .

التمرين 13

(I) المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

في الشكل المرفق (Γ) المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2x^2+2x-2xe^x$

(Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y=x$ و (γ) المنحنى الممثل للدالة : $x\mapsto e^x$.



بقراءة بيانية :

1) برر أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x-x>0$.

2) حدد تبعا لقيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ علما أن : $g(0)=0$.

(II) الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-1+\dfrac{2e^x}{e^x-x}$ ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

1) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ و أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ثم فسر نتيجتي النهايتين هندسيا .

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x)=\dfrac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$.

ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أ) أكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 0.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f(x)-(2x+1)=\dfrac{g(x)}{e^x-x}$

ج) إستنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (T) على $\mathbb{R}$, ماذا تمثل النقطة A بالنسبة إلى (C_f)؟

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;1]$, ثم تحقق أن : $-0.6<\alpha<-0.5$

5) أنشئ المماس (T) و المستقيمين المقاربين ثم المنحنى (C_f).

2.7 شعبة التقني الرياضي

التمرين 01

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$بـ: $f(x)=x+\frac{2}{1+e^x}$و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $f(-x)+f(x)$ و ماذا تستنتج ؟.

2) أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم استنتج جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

3 بيّن أن المستقيم $y=x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

4 احسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

5 بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيد α حيث: $-1,7<\alpha<-1,6$.

6 بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها

7 بيّن أن المنحنى (C_f) يقع في شريط حداه المستقيمان المقاربان ثم ارسم المنحنى (C_f) .

التمرين 02

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي: $f(x)=\frac{3xe^x-3x-4}{3(e^x-1)}$.
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 عيّن العددين الحقيقيين a وb بحيث: $f(x)=ax+\frac{b}{3(e^x-1)}$ من اجل كل $x\in\mathbb{R}$.

2 احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجالات تعريفها.

3 بيّن أن f متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

4 (D) و(D') المستقيمان اللذان معادلتاهما على الترتيب $y=x$ و $y=x+\frac{4}{3}$

أ بيّن أن (D) و (D') مقاربان لـ (C_f) ثم حدد وضعيته بالنسبة لكل منهما.

ب بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث: $0,9<x_0<0,91$ و $-1,66<x_1<-1,65$.

ج أحسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $f(-x)+f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

د أرسم (D) و (D') و (C_f) .

5 m عدد حقيقي، (D_m) المستقيم المعرّف بالمعادلة $y=x+m$.
ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$.

6 g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=[f(x)^2]$.
ادرس تغيرات الدالة g دون حساب $g(x)$ بدلالة x.

التمرين 03

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=3-\frac{4}{e^x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ادرس تغيرات الدالة f .
2. عيّن المستقيمات المقاربة لـ (C_f).
3. بيّن أن للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها ثم اكتب معادلة المماس لـ (C_f) عندها.
4. لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=f(x)-x$.
   - أ) ادرس تغيرات الدالة g .
   - ب) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا و حيدا α حيث $2.7<\alpha<2.8$.
   - ج) أحسب $f(-x)+f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.
5. أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.
   - ب) ارسم المماس والمستقيم الذي معادلته : $y=x$ و (C_f).

التمرين 04

(I) g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=-4+(4-2x)e^x$.

1. أدرس تغيرات الدالة g ، شكل جدول تغيراتها.
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $1,59<\alpha<1,60$.
3. استنتج إشارة $g(x)$.

(II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=\frac{2x-2}{e^x-2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$؛[وحدة الطول: 2cm] .

1. بيّن أن (C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلاتهما على الترتيب $y=-1$ و $y=0$
2. أ) برهن أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$
   - ب) أستنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
   - ج) احسب $f(1)$ ، ثم أستنتج إشارة $f(x)$.

3 أ) بيّن أن : $f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha - 1}$

ب استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدوراالنتائج إلى 10^{-2})

ج أرسم (C_f) .

4 ناقش بيانيا،حسب قيم الوسيط الحقيقي m،عدد وإشارة حلول المعادلة : $2x - 2 = (e^x - 2x)(m+1)$

5 h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x) = [f(x)^2]$

أ أحسب $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ ثم أستنتج إشارة $h'(x)$.

ب شكل جدول تغيرات الدالة h .

التمرين 05

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x-1)e^x$.

(C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1-عين نهاية f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.

2- أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3-أ) بيّن أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$.ثم تحقق أن: $1.27 < \alpha < 1.28$.

ب)أكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 وحدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (T)

جـ)أرسم (T) و (C_f) .

4)عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة : $(x-1)e^x - (m-1)e^m = -1$ حلاواحدا في $\mathbb{R}$

5) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = (|x|+1)e^{-|x|}$.و (C_h) تمثيلها البياني.

أ)بيّن أن الدالة h زوجية.

ب)أرسم (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f).

6) g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (ax+b)e^x$ حيث a و b عددان حقيقيان.

عيّن a و b حتى يكون : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) = f(x)$.

التمرين 06

I) لتكن g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (x+2)e^x - 2$

1) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ،ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أحسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2x+3-(x+1)e^{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني .

1) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2 -أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $f'(x)=-g(x)$.

ب) أستنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

جـ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x+3$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

3 - أ) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث : $0,92<\alpha<0,93$ و $-1,56<\beta<-1,55$.

ب) أرسم (Δ) و المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty;\frac{3}{2}[$.

التمرين 07

I-) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=1-2xe^{-x}$

- أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم استنتج اشارة $g(x)$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=(x+1)(1+2e^{-x})$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1-أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

2-أ) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=1$ ثم استنتج معادلة لـ: (Δ) المقارب المائل للمنحنى (C_f) .

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة المستقيم (Δ) .

3-أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

4-باستعمال المنحنى (C_f) ،عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x)=x+m$ حلّين مختلفين.

التمرين 08

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ: $f(x)=\frac{x}{x-1}e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1)احسب: $\lim\limits_{x1} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا ، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2-بين أنه من أجل كل x من $]-\infty;1[$: $f'(x)=\frac{(-x^2+x-1)e^{-x}}{(x-1)^2}$.

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3- أ) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة صفر.

ب) h الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ: $h(x)=e^{-x}+x-1$

ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم أستنتج أنه من أجل كل x من $]-\infty;1[$: $h(x)\geq 0$.

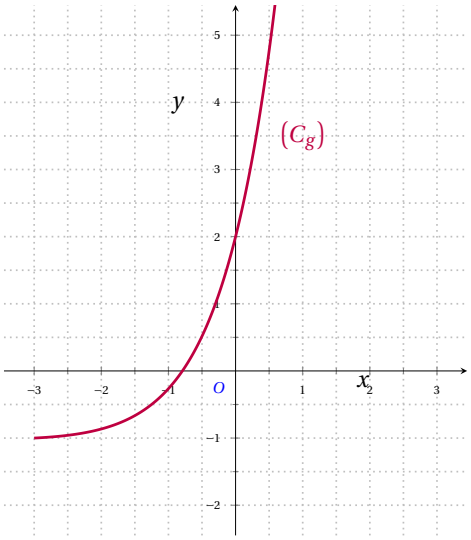
4) بين أنه من أجل كل x من $]-\infty;1[$: $f(x)+x=\frac{xh(x)}{(x-1)}$ ، ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) .فسر النتيجة بيانيا.

5) أكتب معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل مبدأ المعلم O و النقطة $A(-2;\frac{2}{3}e^2)$ ، ثم أرسم المستقيمين (Δ) و (T) والمنحنى (C_f) على المجال $]-2;1[$.

التمرين 09

I) g الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=(x+3)e^x+1$

و (C_g) تمثيلهاالبياني كما هو مبين في الشكل .



بقراءة بيانية:

أ) حدّد إشارة $g(-1)$ و $g(-\frac{1}{2})$.

ب) إستنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ بحيث $g(\alpha)=0$ ثم تحقّق أنّ : $-0.8<\alpha<-0.7$.

ج) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:$f(x)=(x+2)(e^x-1)$

و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2. بيّن أنّه من كلّ عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$ ثم كّل جدول تغيرات الدالة f.

3. أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)$ ثم إستنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

ج) أكتب معادلة لـ :(T) مماس (C_f)الموازي للمستقيم (Δ).

4. أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $]-\infty;1]$ (يعطى $f(\alpha)\approx-0.7$)

5. أحسب $f(x)-g(x)$ ثم إستنتج دالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

6. h الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x)=|x|(e^{|x|-2}-1)+1$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ) بيّن أنّ الدّالة h زوجية.

ب) تأكد أنّه من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$ فإنّ: $h(x)=f(x-2)+1$.

ج) إشرح كيف يمكن رسم (C_h) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسم (C_h) على المجال $[-3;3]$.

التمرين 10

نعتبر الدالة العددية f النعرفة على المجال $[-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-1+\frac{1}{4}(2e^{-x}-1)^2$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول 2cm) .

1)أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1;+\infty[$: $f'(x)=(1-e^{-x})(2e^{-x}+1)$.

ب - أدرس إشارة $f'(x)$ و استنتج إتجاه تغيّر الدالة f.

ج - أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) أ - بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-\frac{3}{4}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب - أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

3) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب كتابة معادلة له .

4) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيينها .

5) أرسم (Δ) ، (T) و (C_f) .

6) ليكن m وسيطا حقيقيا . عيّن مجموعة قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين مختلفين .

3.7 شعبة الرياضيات

التمرين 01

I) f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-1+\frac{4}{e^x+1}$ واليكن (C_f) تمثيلها البياني في في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة f.

2)بين ان (C_f) يقبل نقط إنعطاف ω واكتب معادلة لمماس (C_f) عند ω.

ثم بين ان ω مركز تناظر لـ (C_f)

3)أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)]$.

استنتج ان (C_f) يقبل مقاربين يطلب تعيين معادلة كل منهما

4)بين ان (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة $x_0\in]-2,77;-2,76[$.

احسب $f(1)$ و $f(-1)$ ارسم (C_f)

II) g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=-x+3-\frac{4}{e^x+1}$ وليكن (C_g) تمثيلها البياني.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x)=f(-x)$
2) انشئ (C_g) في نفس المعلم السابق (دون دراسة g).

التمرين 02

I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(3-x)e^x-3$
1) أدرس تغيرات الدالة g.
2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما معدوم والآخر $\alpha\in]2,82\,;2,83[$
3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases} f(x)=\frac{x^3}{e^x-1}\,;x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني
1) بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند $x_0=0$ واكتب معادلة لـ مماس (T) عند O
2) أ) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=0$ ثم جد $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$
ب) بيّن أنه من أجل $x\neq 0$ فإن: $f'(x)=\frac{x^2}{(e^x-1)^2}g(x)$
جـ) تحقق أن: $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$ ، ثم عين حصرا له.
د) أنشئ جدول تغيرات f
3) أحسب $f(x)+x^3$ واستنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C) منحنى الدالة $x\to -x^3$
4) بيّن أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x^3]=0$ وفسر النتيجة هندسيا.
5) أنشئ في نفس المعلم المماس (T) و (C_f) و (C).

التمرين 03

I) g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=2-xe^x$
1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاوحيدا α حيث $0,8<\alpha<0,9$
3) عين حسب قيم x ، اشارة $g(x)$.

II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=\frac{2x+2}{e^x+2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$؛ [وحدة الطول: 2cm .]
1) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا.
2) أ-احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، ب-بيّن أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة: $y=x+1$ مقارب لـ (C_f)
3) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$.
4) أ-بيّن أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

ب-بيّن أن $f(\alpha)=\alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

5) أرسم (Δ) و (Δ') و (C_f) .

6) ناقش ، بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=f(m)$.

التمرين 04

I) الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(x^2-1)e^{-x}$. 1-أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب-أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

2-أ-بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّين في $\mathbb{R}$.

تحقق أن أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-0,8<\alpha<-0,7$.

ب- استنتج اشارة $g(x)$ ، حسب قيم العدد الحقيقي x.

II) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x+1)^2e^{-x}$.و (C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$؛[وحدة الطول: 2cm] .

1-أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب-بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ-أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم(Δ) .

2-أ-بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=g(x)$.

ب-شكّل جدول تغيرات الدالة f على (نأخذ: $f(\alpha)=-0,9$)

3-أ-بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين ، معمل توجبه كل منهما يساوي 1 يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

ب-مثّل (Δ) والمماسين والمنحنى (C_f).

جـ-ناقش بيانيا ، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ،عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x: $(x+1)^2+me^x=0$.

التمرين 05

I) الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(2-x)e^x-1$.

1-ادرس تغيرات الدالة g.

2-بيّن أن للمعادلة $g(x)=0$ في $\mathbb{R}$ حلان α و β حيث: $-1,2<\alpha<-1,1$ و $1,8<\beta<1,9$.

3- استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$.

و (C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1-احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ وفسر النتيجتين هندسيا.

2-بيّن أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(e^x-x)^2}$ واستنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

3- بين أن : $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}$ واستنتج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$.

4-احسب $f(1)$ ، ثم أرسم المنحنى (C_f) .

التمرين 06

f الدالة المعرفة بـ: $f(0)=0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$: $f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أدرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليسار.

2) أحسب $\lim\limits_{x0}\frac{f(x)}{x}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

3-أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4-أ) بيّن أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=0$.

استنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

5) g الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ بـ: $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

6-أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$: $f(x)>x$.

ب) استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

جـ)أنشئ المنحنى (C_f) .

8) m عدد حقيقي ، h_m الدالة ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]-\infty;0[$ بـ : $h_m(x)=xe^{\frac{1}{x}}-mx$

أ) أحسب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m .

ب)باستعمال (C_f) ، ناقش بيانيا وحسب الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $h'_m(x)=0$.

التمرين 07

φ دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $\varphi(x)=(x^2-x+1)e^{-x+1}-1$

1-أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة φ و شكل جدول تغيراتها.

2) تبيان أن المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يختلف عن 1 ،ثم تحقق أن $2,79<\alpha<2,80$

3) استنتاج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f و g الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=(2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+1}$.

1-أ) حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

2) بيّن أن للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 ثم جد معادلة له.

3) ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f).

4-أ) بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)-g(x)=\frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$

ب) ادرس اشارة الفرق $f(x)-g(x)$ ثم استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_g).

التمرين 08

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\left\|\vec{i}\right\|=1cm$

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$ و تمثيلها البياني

1- احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3-أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثييهما،أحسب $f(-2)$ وأرسم (C_f).

II) ليكن m وسيط حقيقي،نعتبر الدالة العددية f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x^2+mx+1)e^{-x}$ و (C_m) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1-أثبت أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة ω يطلب تعيين إحداثييها.

2- أدرس إتجاه تغير f_m واستنتج قيم m التي من أجلها تقبل f_m قيمتين حديتين يطلب تعيينهما.

3- M_m نقطة من (C_m) فاصلتها X_m حيث : $X_m=1-m$.

أثبت أنه عندما m يمسح $\mathbb{R}$ فإن M_m تنتمي إلى منحنى يطلب تعيينه.

4-أدرس حسب قيم الوسيط m حيث $m\neq 2$ الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_m).

التمرين 09

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1-أ) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحنى يطلب تعيين معادلة له.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$.

ثم أستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2.

3- h الدالة العددية والمعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كمايلي: $h(x)=x^2e^{-x+2}-4$, ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج اشارة $h(x)$ و حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $[0;+\infty[$.

4-إرسم المماس (T) و المنحنى (C_f) على المجال $]0;+\infty[$. 5-نعتبر الوسيط الحقيقي m والمعادلة ذات المجهول الحقيقي x الموجب : $(E)....f(x)=m(x-2)$.

ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) .

6- g الدالة العددية والمعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

إعتمادا على السؤال رقم (1) شكل جدول تغيرات الدالة g.

التمرين 10

I) g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي : $g(x)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1$

1) بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $g'(x)=\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ وأستنتج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,9<\alpha<1$.

واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1-أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x)^2}$. واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

2-بيّن أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^{-\frac{1}{x}}-x)$ يمكن وضع $t=-\frac{1}{x}$ ثم استنتج ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

3- h الدالة العددية والمعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي: $h(x)=\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$.

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$ وادرس اتجاه تغير الدالة h واستنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب) تحقق أن: $f(x)-x=(1+x)h(x)$ ثم استنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

4-أرسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha)=1.73$).

التمرين 11

I) f_k الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$ حيث K وسيط حقيقي.

ليكن $(\mathscr{C}_k)$ التمثيل البياني للدالة f_K في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. بيّن أن كل المنحنيات $(\mathscr{C}_k)$ تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما .

2. أحسب نهايتي الدالة f_K عند $-\infty$ و $+\infty$. (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي K) .

3. أ) أحسب $f_k'(x)$ ، ثم حدّد حسب قيم الوسيط الحقيقي K إتجاه تغير الدالة f_k .

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f_k من أجل K عدد حقيقي موجب تماما .

4. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي K الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathscr{C}_k)$ و $(\mathscr{C}_{k+1})$.

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+1)^2e^{-2x}$

نسمي $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. شكل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$.

2. أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلّين في $\mathbb{R}$ أحدهما α حيث : $-1,27<\alpha<-1,28$.

ب) عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة : $\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ حلا وحيدا .

3. g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)+(x+1)e^{-2x}$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$ ثم إستنتج دالة أصلية لـ g على $\mathbb{R}$.

ب) بإستعمال المكاملة بالتجزئة ، أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ ومحور الفواصل و المستقيمين اللّذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$

التمرين 12

I) الدالتان g و h معرفتان على المجال $]-\infty;0]$ كما يلي : $g(x)=-2e^x$ و $h(x)=x(e^x+1)$

حدد إشارة كلا من $g(x)$ و $h(x)$ على المجال $]-\infty;0]$.

II) الدالة العددية f معرفة على المجال $]-\infty;0]$ كما يلي : $f(x)=(x-3)e^x+\frac{1}{2}x^2$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0]$: $f'(x)=h(x)+g(x)$.

ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty;0]$

2) أحسب $f(0)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;0]$ ثم نحقق أن : $-1.5<\alpha<-1.4$.

4) (P) هو التمثيل البياني للدالة $x\mapsto\frac{1}{2}x^2$ على المجال $]-\infty;0]$

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x^2\right]$, ثم فسر النتيجة بيانيا .

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (P) و (C_f).

ج) أنشئ (P) ثم المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty;0]$

5) ليكن m وسيطا حقيقيا , ناقش بيانيا و حسب قيم m عدد حلول المعادلة $|f(x)|=e^m$ في المجال $]-\infty;0]$.