**تمرين 01 ☹**

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقطة $A(1;2;-3)$ والشعاع $\vec{u}(-4;2;1)$

1- أكتب معادلة المستوي $(P)$ الذي يشمل $A$ ويعامد $\vec{u}$

2- تحقق أنّ النقطة $C(-1;1;1)$ لا تنتمي إلى المستوي $(P)$.

3- احسب المسافة بين النقطة $C$ والمستوي $(P)$.

4- احسب المسافة بين النقطة $D(1;0;1)$ والمستوي $(P)$ ماذا تستنتج ؟

**الحل☺**

**1. كتابة معادلة المستوي $(P)$ الذي يشمل $A$ ويعامد $\vec{u}$**

للمستوي $(P)$ معادلة من الشكل $-4x+2y+z+d=0$ وبما أنّ $A\in(P)$ فإنّ $-4+4-3+d=0$ ومنه $d=3$

وعليه معادلة المستوي $(P)$ هي $-4x+2y+z+3=0$.

**2. التحقق أنّ النقطة $C(-1;1;1)$ لا تنتمي إلى المستوي $(P)$.**

لدينا $-4x_C+2y_C+z_C+3=4+2+1+3=10$ ومنه النقطة $C$ لا تنتمي للمستوي $(P)$.

**3. حساب المسافة بين النقطة $C$ والمستوي $(P)$.**

$$d\left(C;(P)\right)=\frac{\left|-4x_C+2y_C+z_C+3\right|}{\sqrt{(-4)^2+2^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{21}}$$

**4- حساب المسافة بين النقطة $D(1;0;1)$ والمستوي $(P)$ ماذا تستنتج ؟**

$d\left(D;(P)\right)=\frac{\left|-4(1)+2(0)+1+3\right|}{\sqrt{(-4)^2+2^2+1^2}}=\frac{0}{\sqrt{21}}=0$ و نستنتج أن النقطة $D$ تنتمي للمستوي $(P)$.

**تمرين 02☹**

يعطى المستويان $(P_1)$ و $(P_2)$ بمعادلتيهما: $x-2y+3z-4=0$ و $-2x+3y-z+2=0$

ـ هل المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$ متقاطعان ؟ في حالة تقاطعهما عيّن التمثيل الوسيطي لمستقيم التقاطع

**الحل☺**

يعطى المستويان $(P_1)$ و $(P_2)$ بمعادلتيهما: $x-2y+3z-4=0$ و $-2x+3y-z+2=0$

**ـ هل المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$ متقاطعان ؟**

لدينا $\vec{n}(1;-2;3)$ شعاعا ناظميا للمستوي $(P_1)$ و $\vec{n'}(-2;3;-1)$ شعاعا ناظميا للمستوي $(P_2)$.

ولدينا $\frac{-2}{1}\neq\frac{3}{-2}$ منه الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطين خطيا إذن المستويان $(P_1)$ و $(P_2)$ متقاطعان حسب مستقيم $(d)$

**تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم $(d)$.**

المستقيم $(d)$ معرف بالجملة التالية $\begin{cases}x-2y+3z-4=0.....(1)\\-2x+3y-z+2=0.....(2)\end{cases}$

بضرب المعادلة $(1)$ بـالعدد 2 وبجمع المعادلتين نجد $-y+5z-6=0$ ومنه $y=5z-6$

وبتعويض في المعادلة $(1)$ نجد $x-2(5z-6)+3z-4=0$ ومنه $x-7z+8=0$ أي $x=7z-8$

وبوضع $z=t$ نجد $\begin{cases} x=7t-8 \\ y=5t-6 \\ z=t \end{cases}$ حيث $t$ عدد حقيقي.

**تمرين 03☹**

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(-1;-1;-1)$، $B(2;3;-2)$، $C(-1;3;-1)$ والشعاع $\vec{u}(-1;-2;-3)$ .

**1)** أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي $(OAB)$.

**2)** عيّن المعادلة الديكارتية للمستوي $(P)$ الذي يشمل $C$ ويكون $\vec{u}$ شعاعا ناظميا له.

**3)** عيّن نقط تقاطع المستوي $(OAB)$ والمستوي $(P)$.

**الحل☺**

**1) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستوي $(OAB)$.**

لدينا $\overrightarrow{OA}(-1;-1;-1)$ ، $\overrightarrow{OB}(2;3;-2)$ و $\frac{2}{-1}\neq\frac{3}{-1}$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقط $A$، $B$ و $C$ تعين مستويا $(OAB)$.

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء

$M\in(OAB)$ يعني $\overrightarrow{OM}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ حيث $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان.

ومنه $\begin{cases} x=-\alpha+2\beta \\ y=-\alpha+3\beta \\ z=-\alpha-2\beta \end{cases}$ حيث $\alpha$ و $\beta$ وسيطان حقيقيان.

**2) تعيين المعادلة الديكارتية للمستوي $(P)$ الذي يشمل $C$ ويكون $\vec{u}$ شعاعا ناظميا له.**

المستوي $(P)$ له معادلة من الشكل $-x-2y-3y+d=0$ ولدينا $C\in(P)$ تعني $1-6+3+d=0$ أي $d=2$

وعليه معادلة المستوي $(P)$ هي $-x-2y-3y+2=0$.

**3) تعيين نقط تقاطع المستوي $(OAB)$ والمستوي $(P)$.**

نحل الجملة $\begin{cases} x=-\alpha+2\beta.....(1) \\ y=-\alpha+3\beta.....(2) \\ z=-\alpha-2\beta.....(3) \\ -x-2y-3y+2=0.....(4) \end{cases}$

نعوض كل من المعادلة $(1)$ و $(2)$ و $(3)$ في المعادلة $(4)$ نجد $\alpha-2\beta+2\alpha-6\beta+3\alpha+6\beta+2=0$

ومنه $6\alpha-2\beta+2=0$ أي $\beta=3\alpha+1$ وعليه $\begin{cases} x=-\alpha+2(3\alpha+1) \\ y=-\alpha+3(3\alpha+1) \\ z=-\alpha-2(3\alpha+1) \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=5\alpha+2 \\ y=8\alpha+3 \\ z=-7\alpha-2 \end{cases}$ حيث $\alpha$ عدد حقيقي

وهو تمثيل وسيطي لمستقيم التقاطع.

**تمرين 04☹ ( بكالوريا علوم تجريبية 2011)**

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، المستوي $(P)$ الذي يشمل النقطة $A(1;-2;1)$ و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له ؛ وليكن $(Q)$ المستوي ذا المعادلة $x+2y-7=0$ .


aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefai A/Elaziz

1. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$.

2. أ ـ تحقق أنّ النقطة $B(-1;4;-1)$ مشتركة بين المستويين $(P)$ و $(Q)$.

ب ـ بيّن أنّ المستويين $(P)$ و $(Q)$ متقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له.

3. لتكن النقطة $C(5;-2;-1)$

أ ـ أحسب المسافة بين النقطة $C$ والمستوي $(P)$، ثمّ المسافة بين النقطة $C$ والمستوي $(Q)$.

ب ـ اثبت أنّ المستويين $(P)$ و $(Q)$ متعامدان .

جـ ـ استنتج المسافة بين النقطة $C$ والمستقيم $(\Delta)$.

**الحل☺**

**1. كتابة معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$.**

المستوي $(P)$ له معادلة من الشكل $-2x+y+5z+d=0$ ولدينا $A\in(P)$ يعني $-2-2+5+d=0$ أي $d=-1$

وبالتالي $-2x+y+5z-1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$.

**2. أ ـ التحقق أنّ النقطة $B(-1;4;-1)$ مشتركة بين المستويين $(P)$ و $(Q)$.**

لدينا $-2x_B+y_B+5z_B-1=2+4-5-1=0$ ومنه $B\in(P)$.

و لدينا $x_B+2y_B-7=-1+8-7=0$ ومنه $B\in(Q)$.

**ب ـ تبيين أنّ المستويين $(P)$ و $(Q)$ متقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له.**

لدينا $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي لـ $(P)$ و $\vec{n'}(1;2;0)$ شعاع ناظمي لـ $(Q)$ و $\frac{-2}{1}\neq\frac{1}{2}$ ومنه الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطين خطيا و بالتالي المستويان $(P)$ و $(Q)$ متقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$

**تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$.**

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

إذا كانت $M\in(\Delta)$ فإن إحداثياتها تحقق الجملة $\begin{cases}x+2y-7=0\\-2x+y+5z-1=0\end{cases}$ وبوضع $y=t$

تصبح الجملة $\begin{cases}x+2t-7=0.....(1)\\-2x+t+5z-1=0.....(2)\end{cases}$ من $(1)$ نجد $x=-2t+7$ وبالتعويض في $(2)$ نجد

$-2(-2t+7)+t+5z-1=0$ ومنه $z=-t+3$ إذن $(\Delta):\begin{cases}x=-2t+7\\y=t\\z=-t+3\end{cases}$ حيث $t$ وسيط حقيقي.

3. لتكن النقطة $C(5;-2;-1)$

**أ ـ حساب المسافة بين النقطة $C$ والمستوي $(P)$، ثمّ المسافة بين النقطة $C$ والمستوي $(Q)$.**

$$d(C;(P))=\frac{|-2(5)-2+5(-1)-1|}{\sqrt{4+1+25}}=\frac{18}{\sqrt{30}}=\frac{3\sqrt{30}}{5}\quad;\quad d(C;(Q))=\frac{|5+2(-2)-7|}{\sqrt{1+4}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

**ب ـ اثبت أنّ المستويين $(P)$ و $(Q)$ متعامدان.**

لدينا $\vec{n}.\vec{n'}=-2\times1+1\times2+5\times0=0$ ومنه $\vec{n}\perp\vec{n'}$ وبالتالي المستويان $(P)$ و $(Q)$ متعامدان.

**جـ ـ** استنتج المسافة بين النقطة $C$ والمستقيم $(\Delta)$

المستويان $(P)$ و $(Q)$ متعامدان ومنه حسب نظرية فيتاغورس $d^2(C;(\Delta))=d^2(C;(P))+d^2(C;(Q))$



Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM
سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك
aziz_mus1@hotmail.fr

ومنه $d\left(C;(\Delta)\right)=\sqrt{d^2\left(C;(P)\right)+d^2\left(C;(Q)\right)}=\sqrt{\frac{270}{25}+\frac{180}{25}}=\sqrt{\frac{450}{5}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

**تمرين 05☹ (بكالوريا علوم تجريبية 2014)**

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ النقط:

$A(-1;1;3)$ ، $B(1;0;-1)$ ، $C(2;-1;1)$ ، $D(2;0;-1)$ والمستوي $(P)$ ذا المعادلة : $2y+z+1=0$ .

ليكن $(\Delta)$ المستقيم الذي تمثيل وسيطي له: $\begin{cases}x=-1\\y=2+\beta\\z=1-2\beta\end{cases}$ حيث $\beta$ وسيط حقيقي.

**1)** أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(BC)$؛ ثمّ تحقق أنّ المستقيم $(BC)$ محتوى في المستوي $(P)$.

**2)** بيّن أنّ المستقيمين $(\Delta)$ و $(BC)$ ليسا من نفس المستوي.

**3) أ )** احسب المسافة بين النقطة $A$ والمستوي $(P)$.

**ب)** بيّن أنّ $D$ نقطة من $(P)$؛ وأنّ المثلث $BCD$ قائم .

**4)** بيّن أنّ $ABCD$ رباعي وجوه، ثمّ احسب حجمه.

**الحل☺**

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ النقط:

$A(-1;1;3)$ ، $B(1;0;-1)$ ، $C(2;-1;1)$ ، $D(2;0;-1)$ والمستوي $(P)$ ذا المعادلة : $2y+z+1=0$ .

ليكن $(\Delta)$ المستقيم الذي تمثيل وسيطي له: $\begin{cases}x=-1\\y=2+\beta\\z=1-2\beta\end{cases}$ حيث $\beta$ وسيط حقيقي.

**1) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(BC)$.**

لدينا $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ شعاع توجيه للمستقيم $(BC)$.

من أجل نقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم $(BC)$ لدينا $\overrightarrow{BM}=t\overrightarrow{BC}$ حيث $t$ عدد حقيقي.

ومنه $\begin{cases}x=1+t\\y=-t\\z=-1+2t\end{cases}$ حيث $t$ عدد حقيقي.

**التحقق أنّ المستقيم $(BC)$ محتوى في المستوي $(P)$.**

لدينا $2y_B+z_B+1=2(0)-1+1=0$ ومنه $B\in(P)$

ولدينا $2y_C+z_C+1=2(-1)+1+1=0$ ومنه $C\in(P)$ وبالتالي المستقيم $(BC)$ محتوى في المستوي $(P)$.

**2) تبيين أنّ المستقيمين $(\Delta)$ و $(BC)$ ليسا من نفس المستوي.**

لدينا $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ شعاع توجيه للمستقيم $(BC)$ و $\vec{u}(0;1;-2)$ شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta)$.

و $\frac{0}{1}\neq\frac{1}{-1}$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{BC}$ و $\vec{u}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي المستقيمان $(\Delta)$ و $(BC)$ غير متوازيين

ندرس التقاطع

نفرض أنّ $(\Delta)$ و $(BC)$ متقاطعان إذن $\begin{cases}-1=1+t.....(1)\\2+\beta=-t.....(2)\\1-2\beta=1+2t.....(3)\end{cases}$



Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM
سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك
aziz_mus1@hotmail.fr

من $(1)$ نجد $t=-2$ بالتعويض في جميع المعادلات نجد $\begin{cases}-1=1-2\\2+\beta=2\\1-2\beta=-5\end{cases}$ أي $\begin{cases}-1=-1\\\beta=0\\\beta=3\end{cases}$ وهذا تناقض

إذن $(\Delta)$ و $(BC)$ غير متقاطعين وبالتالي فهما ليسا من نفس المستوي.

**3) أ ) حساب المسافة بين النقطة $A$ والمستوي $(P)$.**

$$d\left(A;(P)\right)=\frac{\left|2(1)+3+1\right|}{\sqrt{4+1}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

**ب) تبيين أنّ $D$ نقطة من $(P)$؛ وأنّ المثلث $BCD$ قائم.**

لدينا $2y_D+z_D+1=2(0)-1+1=0$ ومنه $D\in(P)$

ولدينا $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ ، $\overrightarrow{BD}(1;0;0)$ و $\overrightarrow{CD}(0;1;-2)$ إذن $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BD}=0\times1+1\times0-2\times0=0$ ومنه $\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{BD}$

وبالتالي المثلث $BCD$ قائم في $D$.

**4) تبيين أنّ $ABCD$ رباعي وجوه.**

بما أنّ $d\left(A;(P)\right)\neq0$ فإنّ $A\notin(P)$ ومنه $ABCD$ رباعي وجوه ( لأنّ المستوي $(BCD)$ هو المستوي $(P)$ )

**حساب حجمه.**

$$V\left(ABCD\right)=\frac{1}{3}S\left(BCD\right)\times d\left(A;(P)\right)$$

لدينا $S\left(BCD\right)=\frac{BD\times CD}{2}$ ولدينا $BD=\sqrt{1+0+0}=1$ و $CD=\sqrt{0^2+(1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

ومنه $S\left(BCD\right)=\frac{1\times\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}ua$ وعليه $V\left(ABCD\right)=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{6}{\sqrt{5}}=1uv$.

**تمرين 06☹**

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$،

نعتبر النقط $A(1;0;-1)$، $B(-1;4;1)$، $C(2;3;3)$، $D(2;1;5)$

1- بيّن أنّ الشعاع $\vec{u}(-1;-1;1)$ عمودي على المستوي $(ABC)$.

2- استنتج معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$

3- بين أن $ABCD$ هو رباعي أوجه.

4- احسب مساحة المثلث $ABC$.

5- احسب المسافة $d$ بين النقطة $D$ والمستوي $(ABC)$.

6- احسب حجم رباعي الأوجه $ABCD$.

**الحل☺**

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$،

نعتبر النقط $A(1;0;-1)$، $B(-1;4;1)$، $C(2;3;3)$، $D(2;1;5)$

لدينا $\overrightarrow{AB}(-2;4;2)$ ، $\overrightarrow{AC}(1;3;4)$ و $\frac{-2}{1}\neq\frac{4}{3}$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعين مستويا.

1- **تبيين أنّ الشعاع $\vec{u}(-1;-1;1)$ عمودي على المستوي $(ABC)$.**

لدينا $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=-1(-2)-1(4)+1(2)=0$ و $\vec{u}.\overrightarrow{AC}=-1(1)-1(3)+1(4)=0$ ومنه الشعاع $\vec{u}$ عمودي على

aziz_mus1@hotmail.com
Mostefai A/Elaziz

كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبالتالي الشعاع $\vec{u}$ عمودي على المستوي $(ABC)$.

2- **استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي** $(ABC)$

للمستوي $(ABC)$ معادلة من الشكل $-x-y+z+d=0$ ولدينا $A\in(ABC)$ تعني $-1-1+d=0$ ومنه $d=2$

وعليه $-x-y+z+2=0$ معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.

3- **تبيين أن** $ABCD$ **هو رباعي أوجه.**

بما أنّ $-x_D-y_D+z_D+2=-2-1+5+2=4\neq 0$ فإن النقطة $D$ خارجة عن المستوي $(ABC)$ ومنه $ABCD$ هو رباعي أوجه.

4- **حساب مساحة المثلث** $ABC$.

لتكن $H$ المسقط العمودي للنقطة $C$ على المستقيم $(AB)$ عندئذ $\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}\right|=AB.AH$

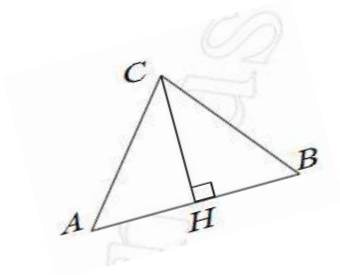
ولدينا من جهة أخرى $\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right|=|-2(1)+4(3)+2(4)|=18$ و $AB=\sqrt{(-2)^2+(4)^2+(2)^2}=\sqrt{24}$

وعليه $18=\sqrt{24}AH$ إذن $AH=\dfrac{18}{\sqrt{24}}$.

لدينا في المثلث $ACH$ القائم في $H$ : $AH^2+CH^2=AC^2$ ومنه $CH=\sqrt{AC^2-AH^2}$

حيث $AC^2=(1)^2+(3)^2+(4)^2=26$ و $AH^2=\dfrac{324}{24}$ ومنه $CH=\sqrt{26-\dfrac{324}{24}}=\sqrt{\dfrac{300}{24}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

إذن $S(ABC)=\dfrac{AB.CH}{2}=\dfrac{2\sqrt{6}\times\dfrac{5\sqrt{2}}{2}}{2}=\dfrac{10\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}ua$




5- **حساب المسافة** $d$ **بين النقطة** $D$ **والمستوي** $(ABC)$.

$$d=\frac{|-2-1+5+2|}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

6- **حساب حجم رباعي الأوجه** $ABCD$.

$V(ABCD)=\dfrac{1}{3}S(ABC)\times d$ ومنه $V(ABCD)=\dfrac{1}{3}\times 5\sqrt{3}\times\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{20}{3}uv$.

**تمرين 07☹**

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط: $A(3;-1;2)$، $B(4;-1;-1)$، $C(2;0;2)$.

1) أ- بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا.

ب- بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(3;3;1)$ ناظمي للمستوي $(ABC)$ ثمّ عيّن معادلة ديكارتية له.

2) ليكن المستوي $(P)$ الذي معادلته الديكارتية $x+y-1=0$.

أ- بيّن أنّ المستويين $(P)$ و $(ABC)$ متقاطعان.

ب- عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ تقاطع المستويين $(P)$ و $(ABC)$.

3) أ- احسب المسافة بين $O$ والمستقيم $(\Delta)$.

ب- استنتج معادلة ديكارتية لسطح الكرة التي مركزها $O$ والمماسة للمستقيم $(\Delta)$.

**الحل☺**

أ- **إثبات أنّ النقط** $A$ ، $B$ **و** $C$ **تعيّن مستويا:** لدينا $\overrightarrow{AB}(1;0;-3)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;1;0)$

aziz_mus1@hotmail.fr



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$\frac{1}{-1} \neq \frac{0}{1}$ ومنه إحداثيات الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير متناسبة وعليه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

وبالتالي فإنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست على استقامة واحدة فهي تعيّن مستويا وحيدا.

**ب ـ إثبات أنّ $\vec{n}$ شعاعا ناظميا للمستوي $(ABC)$**

**لدينا** $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 3(1)+3.(0)+1.(-3) = 0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 3(-1)+3.(1)+1.(0) = 0$

ومنه الشعاع $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وعليه فإنّ الشعاع $\vec{n}$ ناظمي للمستوي $(ABC)$.

**تعيين معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.**

المستوي $(ABC)$ له معادلة من الشكل $3x+3y+z+d=0$ ولدينا $C$ تنتمي للمستوي $(ABC)$ يعني $3(2)+3(0)+2+d=0$ ومنه $d=-8$ وبالتالي معادلة المستوي $(ABC)$ هي: $3x+3y+z-8=0$.

**أ ـ إثبات أنّ المستويين $(P)$ و $(ABC)$ متقاطعان.**

لدينا $\vec{n}(3;3;1)$ شعاعا ناظميا للمستوي $(ABC)$ و $\vec{n'}(1;1;0)$ شعاعا ناظميا للمستوي $(P)$

و $\frac{1}{3} \neq \frac{0}{1}$ ومنه الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطين خطيا وعليه فإنّ المستويين $(P)$ و $(ABC)$ متقاطعان

**ب ـ تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ تقاطع المستويين $(P)$ و $(ABC)$.**

المستقيم $(\Delta)$ معرّف بالجملة التالية: $\begin{cases} 3x+3y+z-8=0 \ldots\ldots(1) \\ x+y-1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$

من المعادلة $(2)$ نجد: $x=1-y$.

وبتعويض قيمة $x$ في $(1)$ نجد $3(1-y)+3y+z-8=0$ ومنه $z=5$ وعليه $\begin{cases} x=1-y \\ y=y \\ z=5 \end{cases}$

وبوضع $y=t$ نجد: $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=5 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ وهو تمثيل وسيطي للمستقيم $(\Delta)$.

**أ ـ حساب المسافة بين النقطة $O$ و $(\Delta)$.**

لتكن $H$ المسقط العمودي للنقطة $O$ على $(\Delta)$ ومنه $\vec{u}.\overrightarrow{OH}=0$.

لدينا $H$ تنتمي للمستقيم $(\Delta)$ إذن $H(1-t;t;5)$ و $\overrightarrow{OH}(1-t;t;5)$.

ولدينا $\vec{u}(-1;1;0)$ شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta)$.

$\vec{u}.\overrightarrow{OH}=0$ معناه $(-1)(1-t)+t+0.(5)=0$ ومنه $t=\frac{1}{2}$ وعليه $H\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};5\right)$

$$d\left(O;(\Delta)\right)=OH=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+(5-0)^2}=\frac{\sqrt{102}}{2}$$

aziz_mus1@hotmail.fr



Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM
سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك

**ب ـ استنتاج معادلة ديكارتية لسطح الكرة التي مركزها $O$ والمماسة للمستقيم $(\Delta)$.**

معادلة سطح الكرة هي $x^2+y^2+z^2=\frac{102}{4}$ أي $x^2+y^2+z^2=\frac{51}{2}$

**تمرين 08☹**

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

$x-y+z-11=0$ معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$ الذي يمسّ سطح الكرة $(S)$ ذات المركز $A(1;-1;3)$.

1- جد نصف قطر سطح الكرة $(S)$ ، ثمّ استنتج معادلة ديكارتية لـ: $(S)$.

2- جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(d)$ الذي يشمل النقطة $A$ والعمودي على $(P)$.

3- لتكن النقطة $H$ نقطة تماس $(S)$ والمستوي $(P)$؛ عيّن احداثيات $H$.

4- عيّن احداثيات النقط المشتركة بين $(S)$ وحامل محور الفواصل.

5- المستويان $(P_1)$ و $(P_2)$ معادلتيهما على الترتيب: $x-y-2z-3=0$ و $2x+y-z-2=0$.

ـ جد معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشمل النقطة $B(3;-6;2)$ والعمودي على المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$.

**الحل☺**

$x-y+z-11=0$ معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$ الذي يمسّ سطح الكرة $(S)$ ذات المركز $A(1;-1;3)$.

**1- إيجاد نصف قطر سطح الكرة $(S)$، ثمّ استنتج معادلة ديكارتية لـ: $(S)$.**

لدينا $d(A;(P))=\frac{|1+1+3-11|}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$ بما أن $(P)$ يمس $(S)$ فإن نصف قطر السطح $(S)$ هو $R=2\sqrt{3}$

وبالتالي المعادلة الديكارتية للسطح $(S)$ هي $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=12$.

**2- إيجاد تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(d)$ الذي يشمل النقطة $A$ والعمودي على $(P)$.**

لدينا $\vec{n}(1;-1;1)$ شعاعا ناظميا للمستوي $(P)$ وبما أنّ $(d)$ عمودي على $(P)$ فإنّ $\vec{n}$ موجه للمستقيم $(d)$.

ومنه $\begin{cases}x=1+t\\y=-1-t\\z=3+t\end{cases}$ حيث $t$ عدد حقيقي؛ وهو تمثيل وسيطي للمستقيم $(d)$.

**3- لتكن النقطة $H$ نقطة تماس $(S)$ والمستوي $(P)$؛ تعيين احداثيات $H$.**

$H$ هي المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستوي $(P)$ أي هي نقطة تقاطع المستقيم $(d)$ والمستوي $(P)$.

لدينا $H\in(d)$ معناه $H(1+t;-1-t;3+t)$ ولدينا $H\in(P)$ معناه $x_H-y_H+z_H-11=0$ ومنه

$1+t-(-1-t)+3+t-11=0$ ومنه $3t-6=0$ أي $t=2$ وبالتالي فإنّ $H(3;-3;5)$.

**4- تعيين احداثيات النقط المشتركة بين $(S)$ وحامل محور الفواصل.**

نحل الجملة $\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=12.....(1)\\y=0.....(2)\\z=0.....(3)\end{cases}$ بتعويض كل من $y$ و $z$ في $(1)$ نجد

$(x-1)^2+(0+1)^2+(0-3)^2=12$ ومنه $(x-1)^2=2$ أي $x=\sqrt{2}+1$ أو $x=-\sqrt{2}+1$

إذن $(x;y;z)\in\{(\sqrt{2}+1;0;0);(-\sqrt{2}+1;0;0)\}$ ومنه $(S)\cap(Ox)=\{I(\sqrt{2}+1;0;0);I'(-\sqrt{2}+1;0;0)\}$

5- المستويان $(P_1)$ و $(P_2)$ معادلتيهما على الترتيب: $x-y-2z-3=0$ و $2x+y-z-2=0$.

**ـ إيجاد معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشمل النقطة** $B(3;-6;2)$ **والعمودي على المستويين** $(P_1)$ **و** $(P_2)$**.**

لدينا $\overrightarrow{n_1}(1;-1;-2)$ شعاع ناظم للمستوي $(P_1)$ و $\overrightarrow{n_2}(2;1;-1)$ شعاع ناظم للمستوي $(P_2)$.وهما شعاعي توجيه للمستوي $(Q)$ العمودي على المستويين $(P_1)$ **و** $(P_2)$**.**

ليكن $\vec{u}(a;b;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي $(Q)$ عندئذ $\begin{cases}\vec{u}.\overrightarrow{n_1}=0\\ \vec{u}.\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a-b-2c=0.....(1)\\ 2a+b-c=0.....(2)\end{cases}$

بجمع المعادلتين نجد $3a-3c=0$ ومنه $a=c$ بالتعويض في $(2)$ نجد $2c+b-c=0$ ومنه $b=-c$ نأخذ مثلا $c=1$ نجد $\vec{u}(1;-1;1)$ ومنه للمستوي $(Q)$ معادلة من الشكل $x-y+z+d=0$ ولدينا $B\in(Q)$ تعني $3+6+2+d=0$ أي $d=-11$ وعليه $x-y+z-11=0$ معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$ وعليه $(Q)=(P)$.

**تمرين 09☹ (بكالوريا تقني رياضي 2010)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقطتين $A(3;-2;2)$ و $B(0;4;-1)$.

**1.** أكتب معادلة للمستوي $(P_1)$ الذي يشمل $A$ و $\vec{u}(1;0;-1)$ شعاع ناظمي له.

**2.** $(P_2)$ المستوي الذي يحوي المستقيم $(AB)$ ويعامد المستوي $(P_1)$.

**أ ـ** بيّن أنّ $\vec{v}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(P_2)$.

**ب ـ** أكتب معادلة للمستوي $(P_2)$.

**3.** نعتبر النقطتين $C$ و $D$ حيث: $C(6;1;5)$ و $D$ معرّفة بـ: $\overrightarrow{CD}(0;-3;-6)$.

**أ ـ** بيّن أنّ المثلث $ACD$ قائم في $A$ واحسب مساحته.

**ب ـ** بيّن أنّ المستقيم $(AB)$ عمودي على المستوي $(ACD)$.

**جـ ـ** أحسب حجم رباعي الوجوه $ACDB$.

**الحل☺**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقطتين $A(3;-2;2)$ و $B(0;4;-1)$.

**1. كتابة معادلة للمستوي** $(P_1)$ **الذي يشمل** $A$ **و** $\vec{u}(1;0;-1)$ **شعاع ناظمي له.**

المستوي $(P_1)$ له معادلة من الشكل $x-z+d=0$ ولدينا $A\in(P_1)$ تعني $3-2+d=0$ أي $d=-1$ وعليه $x-z-1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(P_1)$.

**2.** $(P_2)$ المستوي الذي يحوي المستقيم $(AB)$ ويعامد المستوي $(P_1)$.

**أ ـ تبيين أنّ** $\vec{v}(1;1;1)$ **شعاع ناظمي للمستوي** $(P_2)$**.**

لدينا $\overrightarrow{AB}(-3;6;-3)$ و $\vec{u}$ شعاعي توجيه للمستوي $(P_2)$ وهما غير مرتبطين خطيا لأنّ يحوي المستقيم $(AB)$ ويعامد المستوي $(P_1)$ ولدينا $\vec{v}.\vec{u}=1\times1+1\times0+1(-1)=0$ و $\vec{v}.\overrightarrow{AB}=1(-3)+1\times6+1(-3)=0$

ومنه $\vec{v}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}\perp\vec{u}$ أي $\vec{v}$ شعاع ناظمي للمستوي $(P_2)$.

**ب ـ كتابة معادلة للمستوي** $(P_2)$**.**

المستوي $(P_2)$ له معادلة من الشكل $x+y+z+d=0$ ولدينا $B\in(P_2)$ تعني $0+4-1+d=0$ أي $-3$


Mostefai A/Elaziz
WWW.DZPEN.COM
aziz_mus1@hotmail.fr

وبالتالي $x+y+z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(P_2)$.

**3.** نعتبر النقطتين $C$ و $D$ حيث: $C(6;1;5)$ و $D$ معرّفة بـ: $\overrightarrow{CD}(0;-3;-6)$.

**أ ـ تبيين أنّ المثلث $ACD$ قائم في $A$**

نضع $D(x';y';z')$ ومنه $\overrightarrow{CD}(x'-6;y'-1;z'-1)$ ولدينا $\overrightarrow{CD}(0;-3;-6)$ إذن $x'-6=0$ ، $y'-1=-3$ ، $z'-5=-6$ أي $x'=6$ ، $y'=-2$ و $z'=-1$ وعليه $D(6;-2;-1)$

لدينا $\overrightarrow{AC}(3;3;3)$ ، $\overrightarrow{AD}(3;0;-3)$ و $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=3\times3+3\times0+3(-3)=0$ وهذا يعني أن $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AD}$ وبالتالي المثلث $ACD$ قائم في $A$.

**حساب مساحته.**

$$S(ACD)=\frac{AC\times AD}{2}=\frac{3\sqrt{3}\times3\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{6}}{2}ua$$

**ب ـ تبيين أنّ المستقيم $(AB)$ عمودي على المستوي $(ACD)$.**

لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-3\times3+6\times3-3\times3=0$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=-3\times3+6\times0-3(-3)=0$ وهذا يعني $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ ومنه $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي للمستوي $(ACD)$ وبالتالي المستقيم $(AB)$ يعامد المستوي $(ACD)$

**جـ ـ حساب حجم رباعي الوجوه $ACDB$.**

بما أن $(AB)$ يعامد المستوي $(ACD)$ فإن $A$ هي المسقط العمودي للنقطة $B$ على المستوي $(ACD)$

وعليه $V(ABCD)=\frac{1}{3}S(ACD)\times AB=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times3\sqrt{6}=27uv$

**تمرين 10☹**

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقط $A(3;-2;2)$ ، $B(6;1;5)$ ، $C(6;-2;-1)$ ، $D(0;4;-1)$.

1) بيّن أنّ المثلث $ABC$ قائم في $A$.

2) أُكتب معادلة المستوي $(P_1)$ الذي يشمل $A$ ويعامد المستقيم $(AC)$.

3) بيّن أنّ المستوي $(P_2)$ ذا المعادلة: $x+y+z-3=0$ يشمل النقطة $A$ ويعامد المستقيم $(AB)$.

4) أ ) أُكتب معادلة سطح الكرة $(S)$ التي مركزها $B$ ونصف قطرها $R=5\sqrt{3}$

ب) عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة $L$ حيث $L=(S)\cap(P_2)$.

5) أ ) احسب الجدائين السلميين الآتيين: $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$ ، ثمّ استنتج أنّ المستقيم $(AD)$ يعامد المستوي $(ABC)$

ب) أُحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

**الحل☺**

**1) إثبات أنّ المثلث $ABC$ قائم في $A$.**

لدينا $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ و $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3(3)+0(3)+-3(3)=0$

أي أنّ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ وبالتالي المثلث $ABC$ قائم في $A$.

**2) معادلة المستوي $(P_1)$ الذي يشمل $A$ ويعامد المستقيم $(AC)$.**

بما أنّ $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ فإن المستوي $(P_1)$ معادلته من الشكل: $3x-3z+d=0$ وبما أنّ $(P_1)$ يشمل النقطة $A$ فإنّ $3(3)-3(2)+d=0$ ومنه $d=-3$ وعليه $(P_1):3x-3z-3=0$.


Mostefai A/Elaziz
WWW.DZPEN.COM
aziz_mus1@hotmail.fr

**3) إثبات أنّ المستوي $(P_2)$ ذا المعادلة: $x+y+z-3=0$ يشمل النقطة $A$ ويعامد المستقيم $(AB)$.**

لدينا $x_A+y_A+z_A-3=3-2+2-3=0$ ومنه $(P_2)$ يشمل النقطة $A$.

ولدينا $\overrightarrow{n_{P_2}}(1;1;1)$ و $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ و $\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=\frac{3}{1}$ ومنه $\overrightarrow{n_{P_2}}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا إذن $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي للمستوي $(P_2)$ وبالتالي المستوي $(P_2)$ يعامد المستقيم $(AB)$.

**4) أ ) كتابة معادلة سطح الكرة $(S)$ التي مركزها $B$ ونصف قطرها $R=5\sqrt{3}$**

$(S):(x-6)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=75$.

**ب) تعيين الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة $L$ حيث $L=(S)\cap(P_2)$.**

بُعد النقطة $B$ عن المستوي $(P_2)$ هو $d=\frac{|6+1+5-3|}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$.

و $d<5\sqrt{3}$ وعليه $(P_2)$ يقطع $(S)$ في دائرة مركزها $A$ المسقط العمودي للنقطة $B$ على المستوي $(P_2)$ ونصف قطرها $r$ حيث $r^2+d^2=R^2$ ومنه $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{75-27}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

5) أ ) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=-3(3)+6(3)-3(3)=0$ و $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=-3(3)+6(0)-3(-3)=0$.

ومنه الشعاع $\overrightarrow{AD}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وعليه الشعاع $\overrightarrow{AD}$ ناظمي للمستوي $(ABC)$ وبالتالي المستقيم $(AD)$ يعامد المستوي $(ABC)$.

**ب) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.**

بما أنّ المستقيم $(AD)$ يعامد المستوي $(ABC)$ فإنّ $A$ هي المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$

وعليه حجم رباعي الوجوه $ABCD$ يعطى كما يلي $V=\frac{1}{3}S_{ABC}.AD$.

المثلث $ABC$ قائم في $A$ وبالتالي مساحته هي $S_{ABC}=\frac{AB.AC}{2}=\frac{3\sqrt{2}\times3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{6}}{2}ua$

ولدينا $AD=3\sqrt{6}$ وعليه $V=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times3\sqrt{6}=27uv$.

**تمرين 11☹**

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط:

$A(-1;2;1)$، $B(2;1;3)$، $C(0;-1;2)$.

ولتكن $(P)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء بحيث $AM=BM$.

1- بيّن أنّ $(P)$ هو المستوي الذي معادلته $3x-y+2z-4=0$.

2- عيّن معادلة المستوي $(Q)$ الذي يشمل $A$ ويوازي $(P)$.

3- **أ)** أُكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(D)$ الذي يشمل $C$ ويعامد $(P)$.

ب) عيّن إحداثيات $E$ نقطة تقاطع $(Q)$ و $(D)$.

جـ) احسب المسافة بين النقطة $A$ والمستقيم $(D)$.

4- عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي $(P')$ الذي يحوي المستقيم $(AC)$ ويعامد المستوي $(P)$، ثمّ استنتج معادلة له.

aziz_mus1@hotmail.com

**الحل☺**

**1- إثبات أنّ $(P)$ هو المستوي الذي معادلته $3x-y+2z-4=0$.**

$AM=BM$ معناه $\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(y-3)^2}$

وتكافئ $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=(x-2)^2+(y-1)^2+(y-3)^2$

وبعد التبسيط نجد $3x-y+2z-4=0$ وبالتالي $3x-y+2z-4=0$ هي معادلة للمستوي $(P)$.

**2- تعيين معادلة المستوي $(Q)$ الذي يشمل $A$ ويوازي $(P)$.**

بما المستوي $(Q)$ يوازي $(P)$ فإنّ معادلته تكون من الشكل: $3x-y+2z+d=0$

وبما أنّ $A$ نقطة من $(Q)$ فإنّ $3(-1)-2+2(1)+d=0$ ومنه $d=3$

وعليه $3x-y+2z+3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$

**3- أ ) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(D)$ الذي يشمل $C$ ويعامد $(P)$.**

لدينا $\vec{n}(3;-1;2)$ شعاعا ناظميا للمستوي $(P)$ وبما أنّ المستقيم $(D)$ يعامد $(P)$ فإنّ

الشعاع $\vec{n}(3;-1;2)$ يكون شعاع توجيه للمستقيم $(D)$ ولدينا $C\in(D)$.

من أجل كل $M(x;y;z)$ من $(D)$ لدينا: $\overrightarrow{CM}=t\vec{n}$ حيث $t$ عدد حقيقي و $\overrightarrow{CM}(x;y+1;z-2)$.

ومنه $\begin{cases}y+1=-t\\z-2=2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ أي $\begin{cases}x=3t\\y=-1-t\\z=2+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

**ب) تعيين إحداثيات $E$ نقطة تقاطع $(Q)$ و $(D)$.**

نحل الجملة $\begin{cases}x=3t.....(1)\\y=-1-t.....(2)\\z=2+2t.....(3)\\3x-y+2z+3=0.....(4)\end{cases}$.

وبتعويض كلا من $(1)$ و $(2)$ و $(3)$ في $(4)$ نجد: $3(3t)-(-1-t)+2(2+2t)+3=0$

ومنه $14t+8=0$ أي $t=-\frac{4}{7}$ إذن $\begin{cases}x=-\frac{12}{7}\\y=-\frac{3}{7}\\z=\frac{6}{7}\end{cases}$ إذن $E\left(-\frac{12}{7};-\frac{3}{7};\frac{6}{7}\right)$.

**جـ) حساب المسافة بين النقطة $A$ والمستقيم $(D)$.**

لدينا المستقيم $(D)$ يعامد المستوي $(P)$ والمستويان $(P)$ و $(Q)$ متوازيان إذن $(D)$ يعامد $(Q)$.

ولدينا $A\in(Q)$ إذن المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستقيم $(D)$ هي النقطة $E$ نقطة تقاطع $(Q)$ و $(D)$.

وعليه المسافة بين النقطة $A$ والمستقيم $(D)$ هي الطول $AE$.

$$AE=\sqrt{\left(-\frac{12}{7}+1\right)^2+\left(-\frac{3}{7}-2\right)^2+\left(\frac{6}{7}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{315}}{7}$$

aziz_mus1@hotmail.fr

**4- تعيين تمثيلا وسيطيا للمستوي $(P')$ الذي يحوي المستقيم $(AC)$ ويعامد المستوي $(P)$.**

لدينا $(P')$ يحوي المستقيم $(AC)$ إذن $\overrightarrow{AC}$ شعاع توجيه للمستوي $(P')$.

ولدينا $(P')$ يعامد المستوي $(P)$ إذن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ الناظمي للمستوي $(P)$ يكون شعاع توجيه ثان للمستوي $(P')$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطيا.

وعليه من أجل كل $M(x;y;z)$ من $(P')$ لدينا: $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}\ /\ ((t,k)\in\mathbb{R}^2)$.

ومنه $\begin{cases}x=3t+k-1\\y=-t-3k+2\\z=2t+k+1\end{cases}$ حيث $t$ و $k$ عددان حقيقيان.

**استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي $(P')$.**

$$\begin{cases}x=3t+k-1.....(1)\\y=-t-3k+2.....(2)\\z=2t+k+1.....(3)\end{cases}$$

من $(1)$ نجد: $k=x-3t+1$ وبتعويض $k$ بقيمتها في $(2)$ و $(3)$ نجد:

$$\begin{cases}k=x-3t+1.....(4)\\y=-3x+8t-1.....(5)\\z=x-t+2.....(6)\end{cases}$$ ومنه $y=-t-3(x-3t+1)+2$ و $z=2t+(x-3t+1)+1$

من $(6)$ نجد: $t=x-z+2$ وبتعويض $t$ بقيمتها في $(5)$ نجد: $y=-3x+8(x-z+2)-1$

وعليه $5x-y-8z+15=0$ هي معادلة للمستوي $(P')$.

**تمرين 12☹**

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط:

$A(2;0;0)$، $B(0;1;0)$، $C(0;0;2)$.

1- بيّن أنّ النقط $A$، $B$ و $C$ ليست في استقامية.

2- جد معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.

3- جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(BC)$.

4- $(P)$ المستوي الذي معادلته $2x+2y+z-2=0$.

أ) بيّن أن $(P)$ و $(ABC)$ متقاطعان.

ب) بيّن أنّ النقطة $B$ والنقطة $C$ تنتميان إلى $(P)$ ماذا تستنتج؟

5- عيّن مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$

**الحل☺**

**1- إثبات أنّ النقط $A$، $B$ و $C$ ليست في استقامية.**

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-2;1;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;0;2)$ و $\frac{-2}{-2}\neq\frac{0}{1}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

ومنه النقط $A$، $B$ و $C$ ليست في استقامية.

**2- معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.**

ليكن $\vec{n}(a;b;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي $(ABC)$ إذن $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}-2a+b=0\\ -2a+2c=0\end{cases}$

ومنه $b=2a$ و $c=a$ نأخذ مثلا $a=1$ نجد $b=2$ و $c=1$ وعليه $\vec{n}(1;2;1)$.

إذن المستوي $(ABC)$ له معادلة من الشكل $x+2y+z+d=0$ وبما أنّ $A$ تنتمي للمستوي $(ABC)$

فإنّ $2+d=0$ ومنه $d=-2$ وبالتالي: $x+2y+z-2=0$ هي معادلة للمستوي $(ABC)$

**3- تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(BC)$.**

المستقيم $(BC)$ شعاع توجيهه هو $\overrightarrow{BC}(0;-1;2)$.

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم $(BC)$ لدينا: $\overrightarrow{BM}=t\overrightarrow{BC}/t\in\mathbb{R}$ و $\overrightarrow{BM}=(x;y-1;z)$.

ومنه $\begin{cases}x=0\\ y-1=-t\\ z=2\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=0\\ y=1-t;(t\in\mathbb{R})\\ z=2\end{cases}$.

**أ ) إثبات أنّ $(P)$ و $(ABC)$ متقاطعان .**

لدينا $\vec{n}(1;2;1)$ شعاعا ناظميا للمستوي $(ABC)$ و $\vec{n'}(2;2;1)$ شعاعا ناظميا للمستوي $(P)$.

$\frac{2}{1}\neq\frac{2}{2}$ إذن إحداثيات الشعاعين $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير متناسبة ومنه الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطين خطيا

وبالتالي المستويان $(P)$ و $(ABC)$ متقاطعان.

**ب) إثبات أنّ النقطة $B$ والنقطة $C$ تنتميان إلى $(P)$.**

بتعويض إحداثيات النقطتين $B$ و $C$ في المستوي $(P)$ نجد:

$2(0)+2(1)+0-2=0$ ومنه النقطة $B$ تنتمي للمستوي $(P)$.

$2(0)+2(0)+2-2=0$ ومنه النقطة $C$ تنتمي للمستوي $(P)$.

بما أنّ النقطتين $B$ و $C$ تنتميان للمستوي $(P)$ فإنّ $(BC)$ محتوى في المستوي $(P)$

وكذلك المستقيم $(BC)$ محتوى في المستوي $(ABC)$.

**نتيجة:** المستويان $(P)$ و $(ABC)$ يتقاطعان في المستقيم $(BC)$.

**5- تعيين مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق:** $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$

لتكن النقطة $G$ هي مركز ثقل المثلث $ABC$

لدينا من أجل كل نقطة $M$ من الفضاء $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

و $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}-\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)-\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$ تكافئ $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|$.

أي $3MG=\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|$ ولدينا $\overrightarrow{AB}(-2;1;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;0;2)$.

ومنه $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)(-4;1;2)$ وعليه $\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{(-4)^2+1+2^2}=\sqrt{21}$.

ومنه $3MG=\sqrt{21}$ أي $MG=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

aziz_mus1@hotmail.fr

وبالتالي مجموعة النقط $M$ هي سطح كرة مركزها النقطة $G$ وطول نصف قطرها $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

**تمرين 13☹**

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط: $A(1;4;1)$، $B(0;2;1)$ و $C(1;6;0)$.

1- أ ـ بيّن أنّ النقط $A$، $B$ و $C$ ليست في استقامية.

ب ـ أُكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.

2- ليكن سطح الكرة $(S)$ التي مركزها $\omega(1;1;1)$ ونصف قطرها 3.

أ ـ أُكتب معادلة سطح الكرة $(S)$.

ب ـ أحسب $d(\omega;(ABC))$.

3- عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ المار من $\omega$ والعمودي على $(ABC)$.

4- بيّن أنّ المستوي $(ABC)$ يقطع سطح الكرة $(S)$ في دائرة $(C)$، عيّن مركزها ونصف قطرها.

**الحل☺**

**1- أ ـ إثبات أنّ النقط $A$، $B$ و $C$ ليست في استقامية.**

لدينا $\overrightarrow{AB}(-1;-2;0)$ و $\overrightarrow{AC}(0;2;-1)$ و $\frac{0}{1}\neq\frac{2}{-2}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط $A$، $B$ و $C$ ليست في استقامية.

**ب ـ كتابة معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.**

ليكن $\vec{n}(a;b;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي $(ABC)$ إذن $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}-a-2b=0.....(1)\\ 2b-c=0.....(2)\end{cases}$

وهي جملة معادلتين بثلاث مجاهيل فهي تقبل عدد غير منته من الحلول.

من (2) نجد $c=2b$ ومن (1) نجد $a=-2b$ وعليه $\vec{n}(-2b;b;2b)$ نأخذ مثلا $b=1$ ومنه $\vec{n}(-2;1;2)$.

ومنه معادلة المستوي $(ABC)$ من الشكل $-2x+y+2z+d=0$ وبما أنّ $B$ نقطة من $(ABC)$ فإنّ $2+2+d=0$ ومنه $d=-4$ وعليه $-2x+y+2z-4=0$.

$(ABC):-2x+y+2z-4=0$.

2- ليكن سطح الكرة $(S)$ التي مركزها $\omega(1;1;1)$ ونصف قطرها 3.

**أ ـ كتابة معادلة سطح الكرة $(S)$.**

إذا كانت $M(x;y;z)$ تنتمي لـ $(S)$ فإنّها تحقق $\omega M=3$.

$\omega M=3$ معناه $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$.

**ب ـ حساب $d(\omega;(ABC))$.**

$d(\omega;(ABC))=\frac{|-2(1)+1+2(1)-4|}{3}$ ومنه $d(\omega;(ABC))=\frac{|-3|}{3}=1$.

**3- تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ المار من $\omega$ والعمودي على $(ABC)$.**

بما أنّ $(\Delta)$ عمودي على المستوي $(ABC)$ فإنّ $\vec{n}(-2;1;2)$ شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta)$.

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم $(\Delta)$ لدينا: $\overrightarrow{\omega M}=t\vec{n}$ حيث $t$ عدد حقيقي.

ومنه $\begin{cases}x-1=-2t\\ y-1=t\\ z-1=2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ أي $\begin{cases}x=1-2t\\ y=1+t\\ z=1+2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

aziz_mus1@hotmail.fr



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**4- إثبات أنّ المستوي $(ABC)$ يقطع سطح الكرة $(S)$ في دائرة $(C)$.**

لدينا نصف قطر سطح الكرة $(S)$ هو $R=3$ و $d(\omega;(ABC))=1$ ومنه $d(\omega;(ABC))\prec R$ وبالتالي $(ABC)$ و $(S)$ متقاطعان في دائرة $(C)$ مركزها $H$ المسقط العمودي للنقطة $\omega$ على المستوي $(ABC)$ ونصف قطرها $r$.

حسب نظرية فيتاغورث $R^2=r^2+d^2$ ومنه $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{9-1}=2\sqrt{3}$.

$H$ المسقط العمودي للنقطة $\omega$ على المستوي $(ABC)$ إذن هي نقطة تقاطع $(\Delta)$ و $(ABC)$.

نحل الجملة $\begin{cases}x=1-2t\\y=1+t\\z=1+2t\\-2x+y+2z-4=0\end{cases}$ وعليه $-2(1-2t)+1+t+2(1+2t)-4=0$

ومنه $9t-3=$ أي $t=\frac{1}{3}$ وعليه $\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\y=\frac{4}{3}\\z=\frac{5}{3}\end{cases}$ بالتالي $H\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$.

إذن $(ABC)$ و $(S)$ يتقاطعان وفق دائرة $(C)$ مركزها $H$ ونصف قطرها $2\sqrt{3}$.

**تمرين 14☹** بكالوريا علوم تجريبية 2011

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط: $A(0;1;5)$ ، $B(2;1;7)$ و $C(3;-3;6)$.

1- أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل $B$ و $\vec{u}(1;-4;-1)$ شعاع توجيه له.

ب) تحقق أنّ النقطة $C$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$.

جـ) بيّن أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

د) استنتج المسافة بين النقطة $A$ والمستقيم $(\Delta)$.

2- نعتبر النقطة $M(2+t;1-4t;7-t)$ حيث $t$ عدد حقيقي .

ولتكن الدّالة $h$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $h(t)=AM$.

أ) اكتب عبارة $h(t)$ بدلالة $t$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $t$: $h'(t)=\frac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$.

ج) استنتج قيمة العدد الحقيقي $t$ التي تكون من أجلها المسافة $AM$ أصغر مايمكن.

- قارن بين القيمة الصغرى للدالة $h$ والمسافة بين النقطة $A$ والمستقيم $(\Delta)$.

**الحل☺**

**1- أ) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل $B$ و $\vec{u}(1;-4;-1)$ شعاع توجيه له.**

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$M(x;y;z)$ تنتمي لـ $(\Delta)$ معناه $\overrightarrow{BM}=k\vec{u}$ حيث $k$ عدد حقيقي و $\overrightarrow{BM}(x-2;y-1;z-7)$

و $k\vec{u}(k;-4k;-k)$ ومنه $\overrightarrow{BM}=k\vec{u}$ معناه $\begin{cases}x-2=k\\y-1=-4k\\z-7=-k\end{cases};k\in\mathbb{R}$ أي $\begin{cases}x=2+k\\y=1-4k\\z=7-k\end{cases};k\in\mathbb{R}$.


Mostefai A/Elaziz
WWW.DZPEN.COM
aziz_mus1@hotmail.fr

**ب) التحقق أنّ النقطة $C$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$.**

$C$ تنتمي إلى $(\Delta)$ معناه $\begin{cases}3=2+k\\-3=1-4k\\6=7-k\end{cases}$ وعليه $\begin{cases}k=1\\k=1\\k=1\end{cases}$.

$k$ وحيد إذن النقطة $C$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$.

**جـ) إثبات أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.**

لدينا $\overrightarrow{AB}(2;0;2)$ و $\overrightarrow{BC}(1;-4;-1)$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=2(1)+0(-4)+2(-1)=2-2=0$.

وبالتالي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

**د) استنتاج المسافة بين النقطة $A$ والمستقيم $(\Delta)$.**

لدينا $B\in(\Delta)$ و $C\in(\Delta)$ إذن $(\Delta)$ هو المستقيم $(BC)$.

ولدينا $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$ وهذا يعني أنّ $B$ هي المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستقيم $(BC)$.

أي $B$ هي المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستقيم $(\Delta)$.

وعليه فإنّ المسافة بين النقطة $A$ والمستقيم $(\Delta)$ هي $AB$.

$d(A;(\Delta))=AB=\sqrt{2^2+0^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

**2- أ) كتابة عبارة $h(t)$ بدلالة $t$.**

$AM=\sqrt{(2+t)^2+((1-4t)-1)^2+((7-t)-5)^2}$ ومنه $AM=\sqrt{8+18t^2}$.

أي أنّ $h(t)=\sqrt{8+18t^2}$.

**ب) إثبات أنّه من أجل كل عدد حقيقي $t$: $h'(t)=\dfrac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$.**

الدّالة $h$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $h'(t)=\dfrac{36t}{2\sqrt{8+18t^2}}$ أي $h'(t)=\dfrac{18t}{\sqrt{8+18t^2}}$.

**ج) استنتاج قيمة العدد الحقيقي $t$ التي تكون من أجلها المسافة $AM$ أصغر ما يمكن.**

$h'(0)=0$ ومنه الدالة $h$ تقبل قيمة حدية صغرى عند القيمة $t=0$ وهي $h(0)=2\sqrt{2}$.

ومنه المسافة $AM$ تكون أصغر مايمكن من أجل $t=0$.

**المقارنة بين القيمة الصغرى للدالة $h$ والمسافة بين النقطة $A$ والمستقيم $(\Delta)$.**

$h(0)=2\sqrt{2}$ و $d(A;(\Delta))=2\sqrt{2}$ وعليه $d(A;(\Delta))=h(0)$.

**<u>تمرين 15</u>☹**

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(2;1;3)$ ، $B(-3;-1;7)$ ، $C(3;2;4)$ و $D(0;2;0)$.

1- بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعين مستويا.

2- $(\Delta)$ مستقيم معرّف بتمثيله الوسيطي $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=-7+2t\\y=-3t\\z=4+t\end{cases}$.

أ - بيّن أنّ $(\Delta)$ يعامد المستوي $(ABC)$، ثمّ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.

ب - تحقّق أنّ النقطة $D$ لا تنتمي للمستقيم $(\Delta)$، ثمّ عيّن إحداثيات النقطة $H$ المسقط العمودي للنقطة $D$

aziz_mus1@hotmail.fr

على المستقيم $(\Delta)$.

**جـ ـ** أحسب المسافة بين النقطة $D$ والمستقيم $(\Delta)$.

3- بيّن أنّ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقّق:

$(3x+y+2z-1)^2-(x+4y+z+3)^2=0$ هي إتحاد مستويين أحدهما المستوي $(ABC)$.

**الحل☺**

**1- إثبات أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعين مستويا.**

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-5;-2;4)$ و $\overrightarrow{AC}(1;1;1)$.

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا معناه $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ ومنه $\begin{cases}-5=k\\-2=k\\4=k\end{cases}$ لا يمكن إيجاد $k$.

إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقلان خطيا ومنه النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية فهي تعيّن مستويا.

2- $(\Delta)$ مستقيم معرّف بتمثيله الوسيطي $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=-7+2t\\y=-3t\\z=4+t\end{cases}$.

**أ ـ إثبات أنّ $(\Delta)$ يعامد المستوي $(ABC)$.**

لدينا $\vec{u}(2;-3;1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta)$.

ولدينا $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=2(-5)-3(-2)+4=-10+6+4=0$

و $\vec{u}.\overrightarrow{AC}=2(1)-3(1)+1=2-3+1=0$.

ومنه الشعاع $\vec{u}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وعليه $\vec{u}$ يعامد المستوي $(ABC)$

وبالتالي المستقيم $(\Delta)$ يعامد المستوي $(ABC)$.

**كتابة معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.**

لدينا $\vec{u}(2;-3;1)$ شعاعا ناظميا للمستوي $(ABC)$.

من أجل كل $M(x;y;z)$ من المستوي $(ABC)$ لدينا $\overrightarrow{AM}\,\vec{u}=0$ و $\overrightarrow{AM}(x-2;y-1;z-3)$.

ومنه $2(x-2)-3(y-1)+(z-3)=0$ أي $2x-3y+z-4=0$ هي معادلة للمستوي $(ABC)$.

**ب ـ التحقّق أنّ النقطة $D$ لا تنتمي للمستقيم $(\Delta)$.**

نفرض أن $D$ تنتمي للمستقيم $(\Delta)$ إذن $\begin{cases}0=-7+2t\\2=-3t\\0=4+t\end{cases}$ أي $\begin{cases}t=\dfrac{7}{2}\\t=-\dfrac{2}{3}\\t=-4\end{cases}$ تناقض.

بالتالي النقطة $D$ لا تنتمي للمستقيم $(\Delta)$.

**تعيين إحداثيات النقطة $H$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستقيم $(\Delta)$.**

$H$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على $(\Delta)$ إذن $\vec{u}.\overrightarrow{DH}=0$

$H$ تنتمي للمستقيم $(\Delta)$ ومنه $H(-7+2t;-3t;4+t)$ و $\overrightarrow{DH}(-7+2t;-3t-2;4+t)$.

aziz_mus1@hotmail.fr

ولدينا $\vec{u}(2;-3;1)$ شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta)$.

$\vec{u}.\overrightarrow{DH}=0$ معناه $2(-7+2t)-3(-3t-2)+4+t=0$ أي $14t-4=0$ ومنه $t=\frac{2}{7}$.

وعليه $H\left(-7+2\left(\frac{2}{7}\right);-3\left(\frac{2}{7}\right);4+\frac{2}{7}\right)$ أي $H\left(-\frac{45}{7};-\frac{6}{7};\frac{30}{7}\right)$.

**3- إثبات أنّ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقّق:**

$(3x+y+2z-1)^2-(x+4y+z+3)^2=0$ **هي إتحاد مستويين أحدهما المستوي $(ABC)$.**

$(3x+y+2z-1)^2-(x+4y+z+3)^2=0$ تعني

$[(3x+y+2z-1)+(x+4y+z+3)][(3x+y+2z-1)-(x+4y+z+3)]=0$

أي $(4x+5y+3z-2)(2x-3y+z-4)=0$

ومنه $2x-3y+z-4=0$ أو $x+5y+3z-2=0$.

إذن مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تُحقّق:

$(3x+y+2z-1)^2-(x+4y+z+3)^2=0$ هي إتحاد مستويين أحدهما المستوي $(ABC)$.

**تمرين 16☹**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(1;4;3)$، $B(0;2;2)$ و $C(1;-1;1)$ والمستوي $(P)$ الذي معادلته $x-3y-2z+3=0$.

أ- تحقق أنّ $\begin{cases}x=1+t\\y=4+2t\\z=3+t\end{cases}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم $(AB)$ حيث $t$ عدد حقيقي.

ب- أثبت أنّ $(AB)$ يقطع المستوي $(P)$، ثمّ عيّن $H$ إحداثيات نقطة تقاطعهما.

جـ- تحقق أنّ النقط $A$، $B$ و $C$ ليست في استقامية وأنّ $\vec{n}(1;2;-5)$ ناظم للمستوي $(ABC)$.

د- عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.

- بيّن أنّ $(P)$ و $(ABC)$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

- $(S)$ سطح كرة معادلتها: $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-1=0$.

أ- عيّن $\omega$ مركز $(S)$ ونصف قطرها.

ب- أُحسب المسافة بين النقطة $\omega$ والمستوي $(P)$، ثمّ استنتج تقاطع $(P)$ و $(S)$.

**الحل☺**

أ- **التحقق أنّ** $\begin{cases}x=1+t\\y=4+2t\\z=3+t\end{cases}$ **هو تمثيل وسيطي للمستقيم $(AB)$.**

$\begin{cases}1=1+t\\4=4+2t\\3=3+t\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}t=0\\t=0\\t=0\end{cases}$ وحيد ومنه النقطة $A$ تنتمي للمستقيم الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases}x=1+t\\y=4+2t\\z=3+t\end{cases}$

aziz_mus1@hotmail.com

ولدينا $\overrightarrow{AB}$ مرتبط خطيا مع الشعاع $\vec{v}(1;2;1)$ ومنه $\begin{cases} x=1+t \\ y=4+2t \\ z=3+t \end{cases}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم $(AB)$.

**ب ـ إثبات أنّ $(AB)$ يقطع المستوي $(P)$.**

لدينا $\vec{u}(1;-3;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي $(P)$ و $\overrightarrow{AB}(-1;-2;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم $(AB)$.

و $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=-1-3(-2)-2(-1)=7$ وهذا يعني أنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير متعامدين

ومنه $(AB)$ يقطع المستوي $(P)$.

**تعيين $H$ إحداثيات نقطة تقاطعهما.**

إحداثيات النقطة $H$ معرّفة بالجملة $\begin{cases} x=1+t \\ y=4+2t \\ z=3+t \\ x-3y-2z+3=0 \end{cases}$.

وعليه $1+t-3(4+2t)-2(3+t)+3=0$ أي $-7t-14=0$ ومنه $t=-2$

إذن $\begin{cases} x=1-2 \\ y=4+2(-2) \\ z=3-2 \end{cases}$ أي $H(-1;0;1)$.

**جـ ـ تحقق أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية.**

لدينا $\overrightarrow{AB}(-1;-2;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(0;-5;-2)$ و $\frac{0}{-1}\neq\frac{-5}{-2}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية.

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=-1+2(-2)-5(-1)=-5+5=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0+2(-5)-5(-2)=-10+10=0$.

الشعاع $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ومنه $\vec{n}$ ناظمي للمستوي $(ABC)$.

**د ـ تعيين معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.**

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستوي $(ABC)$ فإنّها تُحقق $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ مع $\overrightarrow{AM}(x-1;y-4;z-3)$.

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ معناه $(x-1)+2(y-4)-5(z-3)=0$

ومنه $x+2y-5z+6=0$ هي معادلة للمستوي $(ABC)$.

**ـ إثبات أنّ $(P)$ و $(ABC)$ متقاطعان.**

لدينا $\vec{n}(1;2;-5)$ هو شعاع ناظم للمستوي $(ABC)$ و $\vec{u}(1;-3;-2)$ شعاع ناظم للمستوي $(P)$ و

$\frac{1}{1}\neq\frac{-3}{2}$ ومنه الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{u}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي $(P)$ و $(ABC)$ متقاطعان.

**تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم $(\Delta)$.**

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

إذا كانت $M\in(\Delta)$ فإنّ إحداثياتها تحقق الجملة $\begin{cases} x-3y-2z+3=0.....(1) \\ x+2y-5z+6=0.....(2) \end{cases}$

بطرح $(1)$ من $(2)$ نجد $5y-3z+3=0$ ومنه $y=\frac{3}{5}z-\frac{3}{5}$.

aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefai A/Elaziz



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

بالتعويض في $(1)$ نجد $x-3\left(\frac{3}{5}z-\frac{3}{5}\right)-2z+3=0$ ومنه $5x-9z+9-10z+15=0$

ومنه $5x-19z+24=0$ وعليه $x=\frac{19}{5}z-\frac{24}{5}$.

بوضع $z=5t$ نجد $\begin{cases}x=19t-\frac{24}{5}\\ y=3t-\frac{3}{5}\\ z=5t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

**أ ـ تعيين $\omega$ مركز $(S)$ ونصف قطرها.**

$x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-1=0$ تكافئ $(x-1)^2-1+(y+1)^2-1+(z-1)^2-1-1=0$

وتكافئ $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$.

إذن مركز $(S)$ هو النقطة $\omega(1;-1;1)$ ونصف قطرها $R=2$.

**ب ـ حساب المسافة بين النقطة $\omega$ والمستوي $(P)$.**

$d=\frac{|1-3(-1)-2(1)+3|}{\sqrt{1+9+4}}=\frac{5}{\sqrt{14}}$.

**استنتاج تقاطع $(P)$ و $(S)$.**

$d\prec R$ ومنه $(P)$ يقطع $(S)$ في دائرة مركزها $I$ المسقط العمودي للنقطة $\omega$ على المستوي $(P)$ ونصف قطرها $r$.

حسب نظرية فيتاغورث $r^2+d^2=R^2$ ومنه $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{4-\frac{25}{14}}=\sqrt{\frac{31}{14}}$.

**تمرين 17** ☹ بكالوريا تقني رياضي 2013

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(3;-2;-1)$، $B(5;-3;2)$، $C(2;3;2)$ و $D(1;-5;-2)$.

1) بيّن أنّ النقط $A$، $B$ و $C$ تعيّن مستويا ؛ نرمز له بالرمز $(P)$.

2) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(2;1;-1)$ ناظمي للمستوي $(P)$، ثمّ جد معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$.

3) أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $D$ ويعامد $(P)$.

ب) عيّن احداثيات النقطة $E$ ؛ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(P)$.

4) $H$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستقيم $(AB)$، و $\lambda$ عدد حقيقي حيث: $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

أ) بيّن أنّ: $\lambda=\frac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}$.

ب) استنتج العدد الحقيقي $\lambda$ وإحداثيات النقطة $H$، ثمّ المسافة بين النقطة $D$ والمستقيم $(AB)$.

**الحل** ☺

1) **إثبات أنّ النقط $A$، $B$ و $C$ تعيّن مستويا.**

$\overrightarrow{AB}(2;-1;3)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;5;3)$ ومنه إحداثيات الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير متناسبة $\frac{-1}{2}\neq\frac{5}{-1}$


Mostefai A/Elaziz
WWW.DZPEN.COM
aziz_mus1@hotmail.fr

أي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا.

2) **إثبات أنّ الشعاع** $\vec{n}(2;1;-1)$ **ناظمي للمستوي** $(P)$.

لدينا $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2(2)+1(-1)-1(3)=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=2(-1)+1(5)-1(3)=0\end{cases}$

ومنه الشعاع $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وعليه فإنّ الشعاع $\vec{n}$ ناظمي للمستوي $(ABC)$.

**معادلة ديكارتية للمستوي** $(P)$.

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من $(P)$ لدينا: $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ مع $\overrightarrow{AM}(x-3;y+2;z+1)$.

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ معناه $2(x-3)+(y+2)-(z+1)=0$ ومنه $2x+y-z-5=0$ هي معادلة للمستوي $(P)$.

3) **أ) التمثيل الوسيطي للمستقيم** $(\Delta)$ **الذي يشمل النقطة** $D$ **ويعامد** $(P)$.

بما أنّ $(\Delta)$ يعامد $(P)$ فإنّ $\vec{n}$ هو شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta)$ ولدينا $D\in(\Delta)$.

لتكن $M(x;y;z)$ من المستقيم $(\Delta)$ فإنّها تُحقق: $\overrightarrow{DM}=t\vec{n}/t\in\mathbb{R}$ مع $\overrightarrow{DM}=(x-1;y+5;z+2)$.

ومنه $\begin{cases}x-1=2t\\ y+5=t\\ z+2=-t\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=1+2t\\ y=-5+t\ (t\in\mathbb{R})\\ z=-2-t\end{cases}$ $:(\Delta)$.

**ب) تعيين إحداثيات النقطة** $E$ **؛ المسقط العمودي للنقطة** $D$ **على المستوي** $(P)$.

إحداثيات النقطة $E$ ؛ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(P)$ هي نقطة تقاطع المستقيم العمودي على $(P)$ والمار من النقطة $D$ مع المستوي $(P)$ أي هي نقطة تقاطع المستقيم $(\Delta)$ والمستوي $(P)$.

نحل الجملة $\begin{cases}x=1+2t.....(1)\\ y=-5+t.....(2)\\ z=-2-t.....(3)\\ 2x+y-z-5=0.....(4)\end{cases}$

نعوض كل من $x$ و $y$ و $z$ من $(1)$ و $(2)$ و $(3)$ بقيمهما في $(4)$ نجد:

$2(1+2t)+(-5+t)-(-2-t)-5=0$ ومنه $6t-6=0$ أي $t=1$.

ومنه $\begin{cases}x=3\\ y=-4\\ z=-3\end{cases}$ إذن $E(3;-4;-3)$.

4) **أ) إثبات أنّ:** $\lambda=\dfrac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}$.

لدينا $H$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستقيم $(AB)$ ومنه $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}$

ولدينا $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AB}$ إذن $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$ ومنه $\lambda=\dfrac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}$.

**ب) استنتاج العدد الحقيقي** $\lambda$.

$\overrightarrow{AD}(-2;-3;-1)$ و $\overrightarrow{AB}(2;-1;3)$ ومنه $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=2(-2)-1(-3)+3(-1)=-4$

aziz_mus1@hotmail.fr

و $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{14}$ إذن $\lambda=\frac{-4}{14}=-\frac{2}{7}$.

**إحداثيات النقطة $H$.**

نضع $H\left(x';y';z'\right)$.

لدينا $\lambda\overrightarrow{AB}\left(2\lambda;-\lambda;3\lambda\right)$ و $\overrightarrow{AH}\left(x'-3;y'+2;z'+1\right)$ وعليه $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AB}$ معناه

$x'-3=2\lambda$ و $y'+2=-\lambda$ و $z'+1=3\lambda$ ومنه $x'=2\lambda+3$ و $y'=-\lambda-2$ و $z'=3\lambda-1$.

وبما أنّ $\lambda=-\frac{2}{7}$ فإنّ: $x'=\frac{17}{7}$ و $y'=-\frac{12}{7}$ و $z'=-\frac{13}{7}$ إذن $H\left(\frac{17}{7};-\frac{12}{7};-\frac{13}{7}\right)$.

**المسافة بين النقطة $D$ والمستقيم $(AB)$.**

$d\left(D;(AB)\right)=DH=\frac{3\sqrt{70}}{7}$.

**تمرين 18☹ بكالوريا علوم تجريبية 2014**

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط $A\left(1;-1;-2\right)$ ، $B\left(1;-2;-3\right)$ و $C\left(2;0;0\right)$.

1) أ) برهن أنّ $A$، $B$ و $C$ ليست في استقامية.

ب) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي $(ABC)$.

جـ) تحقق أنّ $x+y-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.

2) نعتبر المستويين $(P)$ و $(Q)$ المعرّفين بمعادلتيهما كما يلي:

$(P):x-y-2z+5=0$ و $(Q):3x+2y-z+10=0$.

برهن أنّ $(P)$ و $(Q)$ يتقاطعان وفق المستقيم $(\Delta)$ ذي التمثيل الوسيطي $\begin{cases}x=t-3\\y=-t\\z=t+1\end{cases};(t\in\mathbb{R})$

3) عيّن تقاطع المستويات $(ABC)$ ، $(P)$ و $(Q)$.

4) لتكن $M\left(x;y;z\right)$ نقطة من الفضاء.

نسمي $d\left(M,(P)\right)$ المسافة بين $M$ والمستوي $(P)$ و $d\left(M,(Q)\right)$ المسافة بين $M$ والمستوي $(Q)$

عيّن المجموعة $(\Gamma)$ للنقط $M$ حيث: $\sqrt{6}\times d\left(M,(P)\right)=\sqrt{14}\times d\left(M,(Q)\right)$.

**الحل☺**

**1) أ) إثبات أنّ $A$، $B$ و $C$ ليست في استقامية.**

لدينا $\overrightarrow{AB}\left(0;-1;-1\right)$ ، $\overrightarrow{AC}\left(1;1;2\right)$ و $\frac{1}{-1}\neq\frac{2}{-1}$ إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ الشعاعان غير مرتبطين خطيا ومنه

$A$، $B$ و $C$ ليست في استقامية.

**ب) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستوي $(ABC)$.**

لتكن $M\left(x;y;z\right)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(ABC)$ معناه $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ حيث $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان.

ومنه $\begin{cases}x-1=\beta\\y+1=-\alpha+\beta\\z+2=-\alpha+2\beta\end{cases};(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ أي $\begin{cases}x=\beta+1\\y=-\alpha+\beta-1\\z=-\alpha+2\beta-2\end{cases};(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

**جـ) التحقق أنّ $x+y-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.**

$x_A+y_A-z_A-2=1-1+2-2=0$ ، $x_B+y_B-z_B-2=1-2+3-2=0$

aziz_mus1@hotmail.fr



Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$x_C+y_C-z_C-2=2+0-0-2=0$ ومنه إحداثيات النقط $A$، $B$ و $C$ تحقق المعادلة $x+y-z-2=0$
وعليه $x+y-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.

**طريقة 2:** بما أنّ $0=2-2-(-\alpha+2\beta-2)-(-\alpha+\beta-1)+(\beta+1)$ فإنّ $x+y-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.

**إثبات أنّ** $(P)$ **و** $(Q)$ **يتقاطعان وفق المستقيم** $(\Delta)$ **ذي التمثيل الوسيطي** $\begin{cases}x=t-3\\y=-t\\z=t+1\end{cases}$ $;(t\in\mathbb{R})$

$2(t+1)+5=0$ ومنه $(\Delta)$ محتوى في المستوي $(P)$ $(t-3)-(-t)-$
$3(t-3)+2(-t)-(t+1)+10=0$ ومنه $(\Delta)$ محتوى في المستوي $(Q)$
إذن $(P)$ و $(Q)$ يتقاطعان وفق المستقيم $(\Delta)$

**3) تعيين تقاطع المستويات** $(ABC)$ ، $(P)$ **و** $(Q)$.

بما أنّ $(\Delta)=(P)\cap(Q)$ فإنّ $(ABC)\cap(P)\cap(Q)=(ABC)\cap(\Delta)$.

نحل الجملة $\begin{cases}x=t-3\\y=-t\\z=t+1\\x+y-z-2=0\end{cases}$ وعليه $t-3-t-t-1-2=0$ ومنه $t=-6$ إذن $\begin{cases}x=-9\\y=6\\z=-5\end{cases}$

وعليه $(ABC)\cap(P)\cap(Q)=\{I(-9;6;-5)\}$.

**تعيين المجموعة** $(\Gamma)$ **للنقط** $M$ **حيث:** $\sqrt{6}\times d(M,(P))=\sqrt{14}\times d(M,(Q))$.

$\sqrt{6}\times d(M,(P))=\sqrt{14}\times d(M,(Q))$ معناه $\sqrt{6}\times\dfrac{|x-y-2z+5|}{\sqrt{6}}=\sqrt{14}\times\dfrac{|3x+2y-z+10|}{\sqrt{14}}$

وتكافئ $|x-y-2z+5|=|3x+2y-z+10|$ وتكافئ $x-y-2z+5=3x+2y-z+10$ أو
$x-y-2z+5=-3x-2y+z-10$ أي $2x+3y+z+5=0$ أو $4x+y-3z+15=0$
إذن $(\Gamma)$ هي اتحاد مستويين $(P_1)$ و $(P_2)$ حيث $(P_1):2x+3y+z+5=0$ و $(P_2):4x+y-3z+15=0$.

**تمرين 19**☹ بكالوريا تقني رياضي 2011

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط $A$، $B$، $C$ و $D$ حيث :
$A(2;0;1)$ ، $B(3;-2;0)$ ، $C(2;8;-4)$ و $D(3;5;3)$.

1. بيّن أنّ النقط $A$، $B$، $D$ تعيّن مستويا.
2. بيّن أنّ المستقيم $(CD)$ يعامد المستوي $(ABD)$.
3. $H$ المسقط العمودي للنقطة $C$ على المستقيم $(AB)$.
   - **أ ـ** بيّن أنّ المستقيم $(AB)$ يعامد المستوي $(CDH)$.
   - **ب ـ** عيّن معادلة للمستوي $(CDH)$ واكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(AB)$.
   - **جـ ـ** استنتج إحداثيات النقطة $H$.
4. أحسب الأطوال $DH$، $CD$، $AB$، ثمّ أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

**الحل**☺

1. **إثبات أنّ النقط** $A$، $B$، $D$ **تعيّن مستويا.**

لدينا $\overrightarrow{AB}(1;-2;-1)$ و $\overrightarrow{AD}(1;5;2)$ و $\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{5}{-2}$ وبالتالي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ غير مرتبطين خطيا


aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefai A/Elaziz

فإنّ النقط $A$ ، $B$ ، $D$ ليست على استقامة واحدة فهي تعيّن مستويا.

2. **إثبات أنّ المستقيم $(CD)$ يعامد المستوي $(ABD)$.**

لدينا $\overrightarrow{CD}(1;-3;7)$ ومنه $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}=1(1)-3(-2)+7(-1)=0$

و $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AD}=1(1)-3(5)+7(2)=0$.

ومنه الشعاع $\overrightarrow{CD}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ وعليه $\overrightarrow{CD}$ يعامد المستوي $(ABD)$ وبالتالي المستقيم $(CD)$ يعامد المستوي $(ABD)$.

3. أ ـ **إثبات أنّ المستقيم $(AB)$ يعامد المستوي $(CDH)$.**

لدينا $H$ المسقط العمودي للنقطة $C$ على المستقيم $(AB)$ ومنه $\overrightarrow{AB}$ يعامد $\overrightarrow{CH}$.

ولدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=1(1)-3(-2)+7(-1)=0$ ومنه $\overrightarrow{AB}$ يعامد $\overrightarrow{CD}$.

وبالتالي فإنّ المستقيم $(AB)$ يعامد المستوي $(CDH)$.

**ب ـ تعيين معادلة للمستوي $(CDH)$.**

لدينا $\overrightarrow{AB}$ شعاعا ناظميا للمستوي $(CDH)$ ومنه فإنّ المستوي $(CDH)$ له معادلة من الشّكل $x-2y-z+d=0$ وبما أنّ $D$ مثلا تنتمي للمستوي $(CDH)$ فإنّ $3-2(5)-3+d=0$

ومنه $d=10$ وعليه معادلة المستوي $(CDH)$ هي: $x-2y-z+10=0$.

**التمثيل الوسيطي للمستقيم $(AB)$.**

من أجل كل $M(x;y;z)$ من $(AB)$ لدينا: $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ حيث $t$ عدد حقيقي .

و $\overrightarrow{AM}(x-2;y;z-1)$ ومنه $\begin{cases}x-2=t\\y=-2t\\z-1=-t\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=2+t\\y=-2t\\z=1-t\end{cases}$ ; $t\in\mathbb{R}$.

**جـ ـ استنتاج إحداثيات النقطة $H$.**

بما أنّ $H$ تنتمي للمستقيم $(AB)$ وتنتمي للمستوي $(CDH)$ فإنّها تمثل نقطة تقاطع $(AB)$ و $(CDH)$.

$H$ تنتمي لـ $(AB)$ معناه $H(2+t;-2t;1-t)$ ولدينا $H$ تنتمي للمستوي $(CDH)$

إذن $x_H-2y_H-z_H+10=0$ ومنه $t+2-2(-2t)-(-t+1)+10=0$ ومنه $t=-\frac{11}{6}$

وعليه $H\left(2-\frac{11}{6};-2\left(\frac{-11}{6}\right);\frac{11}{6}+1\right)$ أي $H\left(\frac{1}{6};\frac{11}{3};\frac{17}{6}\right)$.

4. **حساب الأطوال $DH$ ، $CD$ ، $AB$.**

$AB=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$ ، $CD=\sqrt{1^2+(-3)^2+7^2}=\sqrt{59}$

$DH=\sqrt{\left(\frac{1}{6}-3\right)^2+\left(\frac{11}{3}-5\right)^2+\left(\frac{17}{6}-3\right)^2}=\frac{\sqrt{354}}{6}$.

**حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.**

حجم رباعي الوجوه يعطى $\frac{1}{3}\times$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع.

فإنّ $V=\frac{1}{3}S_{ABD}\times d$ ، حيث $S_{ABD}$ مساحة المثلث $ABD$ و $d$ هو بُعد النقطة $C$ على المستوي $(ABD)$

بما أنّ المستقيم $(AB)$ يعامد المستوي $(CDH)$ فإنّ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستقيم $(AB)$

aziz_mus1@hotmail.fr



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

هي النقطة $H$ نقطة تقاطع $(AB)$ والمستوي $(CDH)$ وعليه $S_{ABD}=\frac{AB.DH}{2}$.

وبما أنّ المستقيم $(CD)$ يعامد المستوي $(ABD)$ فإنّ النقطة $D$ هي المسقط العمودي للنقطة $C$ على المستوي $(ABD)$ أي $d=CD$.

وعليه $V=\frac{1}{3}\times\frac{AB.DH}{2}\times CD=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{59}}{2}\times\sqrt{59}=\frac{59}{6}uv$.

**تمرين 20☹**

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط: $A(3;-2;2)$ ، $B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$.

**الجزء الأوّل:**

1. بيّن أنّ المثلث $ABC$ قائم.
2. ليكن $(P)$ المستوي الذي معادلته $x+y+z-3=0$.

- بيّن أنّ $(P)$ عمودي على $(AB)$ ويمر من النقطة $A$.

3. ليكن $(P')$ المستوي العمودي على $(AC)$ والذي يمر من $A$.

- عيّن معادلة ديكارتية لـ$(P')$.

4. عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ مستقيم تقاطع $(P)$ و$(P')$.

**الجزء الثاني:**

1. لتكن النقطة $D(0;4;-1)$، بيّن أنّ المستقيم $(AD)$ عمودي على المستوي $(ABC)$.
2. احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.
3. بيّن أنّ قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هي $\frac{\pi}{4}Rad$.
4. أ - احسب مساحة المثلث $BDC$.

ب - استنتج المسافة بين $A$ والمستوي $(BDC)$.

**الحل☺**

**الجزء الأوّل:**

1. **إثبات أنّ المثلث $ABC$ قائم.**

لدينا $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ و $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3(3)+3(0)+3(-3)=0$ ومنه المثلث $ABC$ قائم في $A$.

2. ليكن $(P)$ المستوي الذي معادلته $x+y+z-3=0$.

**إثبات أنّ $(P)$ عمودي على $(AB)$ ويمر من النقطة $A$.**

لدينا $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(P)$ ولدينا $\overrightarrow{AB}=3\vec{n}$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا إذن $\overrightarrow{AB}$ هو شعاع ناظمي للمستوي $(P)$ وبالتالي $(P)$ عمودي على $(AB)$.

ولدينا $x_A+y_A+z_A-3=3-2+2-3=0$ إذن المستوي $(P)$ يمر من النقطة $A$.

3. ليكن $(P')$ المستوي العمودي على $(AC)$ والذي يمر من $A$.

**تعيين معادلة ديكارتية لـ$(P')$.**

بما أنّ $(P')$ عمودي على $(AC)$ فإنّ $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي $(P')$

إذن المستوي $(P')$ معادلته من الشكل $3x-3z+d=0$ ولدينا $A$ نقطة من $(P')$ يعني $3x_A-3z_A+d=0$ أي $3(3)-3(2)+d=0$ ومنه $d=-3$ وبالتالي $(P'):3x-3z-3=0$.


WWW.DZPEN.COM
Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

4. **تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ مستقيم تقاطع $(P)$ و $(P')$.**

المستقيم $(\Delta)$ معرّف بالجملة التالية: $\begin{cases} x+y+z-3=0.....(1) \\ 3x-3z-3=0.....(2) \end{cases}$.

بضرب المعادلة $(1)$ بالعدد 3 وبجمع المعادلتين نجد $6x+3y-12=0$ ومنه $y=4-2x$.

وبتعويض قيمة $y$ في المعادلة $(1)$ نجد $x+(4-2x)+z-3=0$ ومنه $z=x-1$.

وبوضع $x=t$ نجد $(\Delta):\begin{cases} x=t \\ y=4-2t \\ z=-1+t \end{cases};(t\in\mathbb{R})$.

**الجزء الثاني:**

1. **إثبات أنّ المستقيم $(AD)$ عمودي على المستوي $(ABC)$.**

لدينا $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$ و $\begin{cases} \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=-3(3)+6(3)-3(3)=0 \\ \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=-3(3)+6(0)-3(-3)=0 \end{cases}$.

ومنه الشعاع $\overrightarrow{AD}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وعليه يعامد $\overrightarrow{AD}$ المستوي $(ABC)$ وبالتالي المستقيم $(AD)$ يعامد المستوي $(ABC)$.

2. **حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.**

بما أنّ المستقيم $(AD)$ يعامد المستوي $(ABC)$ فإنّ النقطة $A$ هي المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$ أي $d(D;(ABC))=AD$.

وعليه $V=\frac{1}{3}S_{ABC}.AD$ حيث $S_{ABC}$ هي مساحة المثلث القائم $ABC$.

$AB=\sqrt{3^2+3^2+3^2}=3\sqrt{3}$ ، $AC=\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$.

$S_{ABC}=\frac{AB.AC}{2}=\frac{9\sqrt{6}}{2}$ و $AD=\sqrt{(-3)^2+(6)^2+(-3)^2}=3\sqrt{6}$.

وبالتالي $V_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times3\sqrt{6}=27uv$.

3. **تبيين أنّ قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هي $\frac{\pi}{4}Rad$.**

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}=DC\times DB\times\cos(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DB})$ ومنه $\cos(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DB})=\frac{\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}}{DC.DB}$

$\overrightarrow{DC}(6;-6;0)$ و $\overrightarrow{DB}(6;-3;6)$ ومنه $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}=6(6)-3(-6)+6(0)=54$

ولدينا $DC\times DB=54\sqrt{2}$ ومنه $\cos(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DB})=\frac{54}{54\sqrt{2}}$ أي $\cos(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DB})=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

وهذا يعني أنّ قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هو $\frac{\pi}{4}Rad$.

4. **أ ـ حساب مساحة المثلث $BDC$.**

$S_{BCD}=\frac{1}{2}DC\times DB\times\sin\widehat{BDC}=\frac{1}{2}54\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=27ua$.

aziz_mus1@hotmail.fr



Mostefai A/Elaziz
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**ب ـ استنتاج المسافة بين $A$ والمستوي $(BDC)$.**

لدينا $V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{BCD}\times d$ حيث $d$ هي المسافة بين $A$ والمستوي $(BDC)$.

ومنه $27=\frac{1}{3}(27)\times d$ وعليه $d=3$ إذن المسافة بين $A$ والمستوي $(BDC)$ هي 3.

**تمرين 21☹**

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقطة $A(2;0;2)$ والمستوي $(P)$ ذو المعادلة: $x+y-z-3=0$.

1- حدّد تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ المار من $A$ والعمودي على المستوي $(P)$.

2- حدّد إحداثيات $B$ نقطة تقاطع المستقيم $(\Delta)$ و $(P)$.

3- نعتبر السطح $(S)$ الذي مركزه النقطة $A$ والذي يتقاطع مع المستوي $(P)$ وفق الدائرة التي مركزها $B$ ونصف قطرها 2.

أ ـ حدّد نصف قطر سطح الكرة $(S)$.

ب ـ أكتب معادلة ديكارتية للسطح $(S)$.

**الحل☺**

**1- تحديد تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ المار من $A$ والعمودي على المستوي $(P)$.**

لدينا $\vec{n}(1;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(P)$ وبما أنّ $(\Delta)$ عمودي على $(P)$ فإنّ $\vec{n}$ هو شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta)$.

لتكن $M(x;y;z)$ من $(\Delta)$ ومنه $\overrightarrow{AM}=t\vec{n}$ حيث $t$ عدد حقيقي.

ومنه $\begin{cases}x-2=t\\y=t\\z-2=-t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$ أي $\begin{cases}x=2+t\\y=t\\z=2-t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$.

**2- تحديد إحداثيات $B$ نقطة تقاطع المستقيم $(\Delta)$ و $(P)$.**

نحل الجملة $\begin{cases}x=2+t\\y=t\\z=2-t\\x+y-z-3=0\end{cases}$ وعليه $(2+t)+t-(2-t)-3=0$ ومنه $t=1$.

إذن $\begin{cases}x=3\\y=1\\z=1\end{cases}$ وعليه $B(3;1;1)$.

**أ ـ تحديد نصف قطر سطح الكرة $(S)$.**

ليكن $R$ نصف قطر سطح الكرة $(S)$، حسب نظرية فيتاغورث

$R^2=AB^2+2^2=3+4=7$ ومنه $R=\sqrt{7}$.

**ب ـ معادلة ديكارتية للسطح $(S)$.**

معادلة السطح $(S)$ هي: $(x-2)^2+y^2+(z-2)^2=7$.

aziz_mus1@hotmail.fr

**تمرين 22**☹ بكالوريا علوم تجريبية 2014

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(2;-1;1)$ ، $B(-1;2;1)$ ، $C(1;-1;2)$ و $D(1;1;1)$.

1) أ) تحقق أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا.

ب) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$.

جـ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.

2) لتكن النقطة $G$ مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$.

أ) احسب احداثيات النقطة $G$.

ب) لتكن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$.

بيّن أنّ $(\Gamma)$ هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

جـ) اكتب معادلة ديكارتية لـ $(\Gamma)$.

3) بيّن أنّ $(ABC)$ و $(\Gamma)$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

**الحل**☺

**1) أ) التحقق أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا.**

لدينا $\overrightarrow{AB}(-3;3;0)$ ، $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$ و $\frac{-1}{-3}\neq\frac{0}{3}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

ومنه النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا.

**ب) تبيين أنّ الشعاع $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$.**

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=1(-3)+1(3)+1(0)=-3+3=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=1(-1)+1(0)+1(1)=-1+1=0$

ومنه $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبالتالي $\vec{n}$ ناظم للمستوي $(ABC)$.

**جـ) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.**

معادلة المستوي $(ABC)$ من الشكل $x+y+z+d=0$ وبما أنّ $A$ تنتمي للمستوي $(ABC)$ فإنّ $2-1+1+d=0$

ومنه $d=-2$ وعليه معادلة المستوي $(ABC)$ هي $x+y+z-2=0$.

2) لتكن النقطة $G$ مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$.

**أ) حساب احداثيات النقطة $G$.**

$$x_G=\frac{x_A+2x_B-x_C}{2}=\frac{2-2-1}{2}=\frac{-1}{2}\ ،\ y_G=\frac{y_A+2y_B-y_C}{2}=\frac{-1+4-1}{2}=2$$

وعليه $z_G=\frac{z_A+2z_B-z_C}{2}=\frac{1+2-2}{2}=\frac{1}{2}$ $G\left(-\frac{1}{2};2;\frac{1}{2}\right)$.

ب) لتكن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$.

**تبيين أنّ $(\Gamma)$ هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.**

لدينا $G$ مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$ ومنه $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(1+2-1)\overrightarrow{MG}$

أي $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$

$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$ معناه $\left\|2\overrightarrow{MG}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$ وتكافئ $2MG=2MD$ أي $MG=MD$

إذن $(\Gamma)$ هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

aziz_mus1@hotmail.fr



Mostefai A/Elaziz
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**جـ) كتابة معادلة ديكارتية لـ $(\Gamma)$.**

لتكن $I$ منتصف القطعة $[GD]$ إذن $I\left(\frac{1}{4};\frac{3}{2};\frac{3}{4}\right)$.

المستوي $(\Gamma)$ شعاعه الناظمي هو $\overrightarrow{GD}\left(\frac{3}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$ و يشمل النقطة $I$.

معادلة المستوي $(\Gamma)$ من الشكل $\frac{3}{2}x-y+\frac{1}{2}z+d=0$ وبما أنّ $I$ تنتمي للمستوي $(\Gamma)$ فإنّ $\frac{3}{8}-\frac{3}{2}+\frac{3}{8}+d=0$

ومنه $d=\frac{3}{4}$ وعليه معادلة $(\Gamma)$ هي $\frac{3}{2}x-y+\frac{1}{2}z+\frac{3}{4}=0$ أي $6x-4y+2z+3=0$.

**3) تبيين أنّ $(ABC)$ و $(\Gamma)$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.**

لدينا $\vec{n}'(6;-4;2)$ شعاع ناظمي لـ $(\Gamma)$ و $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي لـ $(ABC)$

واضح أنّ $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ غير مرتبطين خطيا إذن $(ABC)$ و $(\Gamma)$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$

**تعيين تمثيل وسيطي لـ $(\Delta)$.**

نحل الجملة $\begin{cases}x+y+z-2=0.....(1)\\6x-4y+2z+3=0.....(2)\end{cases}$ بضرب المعادلة $(1)$ بالعدد $4$ وبجمع المعادلتين نجد

$10x+6z-5=0$ ومنه $x=\frac{1}{2}-\frac{3}{5}z$ وبتعويض $x$ في $(1)$ نجد $\frac{1}{2}-\frac{3}{5}z+y+z-2=0$ ومنه $y+\frac{2}{5}z-\frac{3}{2}=0$

أي $y=\frac{3}{2}-\frac{2}{5}z$ وبوضع $z=5t$ نجد $\begin{cases}x=\frac{1}{2}-3t\\y=\frac{3}{2}-2t;(t\in\mathbb{R})\\z=5t\end{cases}$

**تمرين 23☹** بكالوريا رياضيات 2012

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط: $A(1;1;1)$ ، $B(1;-1;0)$ ، $C(2;0;1)$.

1- بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعين مستويا $(P_1)$ يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

2- $(P_2)$ المستوي الذي $x-2y-2z+6=0$ معادلة ديكارتية له.

- بيّن أنّ $(P_1)$ و $(P_2)$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

3- بيّن أنّ النقطة $O$ هي مرجح الجملة: $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$.

4- أ ) عيّن $(S)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{3}$.

ب) احسب إحداثيات $D$ و $E$ نقطتي تقاطع $(S)$ و $(\Delta)$.

جـ) ماهي طبيعة المثلث $ODE$؟ ثمّ استنتج المسافة بين $O$ و $(\Delta)$.

**الحل☺**

**1- إثبات أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعين مستويا $(P_1)$.**

لدينا $\overrightarrow{AB}(0;-2;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-1;0)$ و $\frac{0}{1}\neq\frac{-1}{-2}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين

خطيا ومنه فإنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية فهي تعيّن مستويا $(P_1)$.

**تعيين تمثيلا وسيطيا للمستوي $(P_1)$.**

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليس لهما نفس الحامل وعليه $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ معلما للمستوي $(P_1)$.

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

إذا كانت $M$ تنتمي لـ $(P_1)$ فإنها تحقق: $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$.

حيث $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان و $\overrightarrow{AM}=(x-1;y-1;z-1)$.

ومنه $\begin{cases}x-1=\beta\\y-1=-2\alpha-\beta\\z-1=-\alpha\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=1+\beta\\y=1-2\alpha-\beta\\z=1-\alpha\end{cases}$ و $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان.

وهو تمثيل وسيطي للمستوي $(P_1)$.

2- $(P_2)$ المستوي الذي $x-2y-2z+6=0$ معادلة ديكارتية له.

**- إثبات أنّ $(P_1)$ و $(P_2)$ متقاطعان.**

لدينا $\vec{n}(1;-2;-2)$ شعاعا ناظميا للمستوي $(P_2)$.

نفرض أنّ $\vec{n}$ ناظمي للمستوي $(P_1)$ إذن $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ ولدينا $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=1(0)-2(-2)-2(-1)=6\\\vec{n}.\overrightarrow{AC}=1(1)-2(-1)-2(0)=3\end{cases}$ تناقض.

إذن الشعاع $\vec{n}$ ليس ناظمي للمستوي $(P_1)$ وبالتالي المستويان $(P_1)$ و $(P_2)$ غير متوازيين فهما متقاطعان.

**كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم $(\Delta)$.**

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

إذا كانت $M\in(\Delta)$ فإنّ إحداثياتها تحقق الجملة: $\begin{cases}x=1+\beta.....(1)\\y=1-2\alpha-\beta.....(2)\\z=1-\alpha.....(3)\\x-2y-2z+6=0....(4)\end{cases}$.

نعوض كل من $x$ و $y$ و $z$ من $(1)$ و $(2)$ و $(3)$ بقيمهما في $(4)$ نجد:

$1+\beta-2(1-2\alpha-\beta)-2(1-\alpha)+6=0$ ومنه $3\beta+6\alpha+3=0$ وعليه $\beta=-2\alpha-1$.

إذن $\begin{cases}x=1+(-2\alpha-1)\\y=1-2\alpha-(-2\alpha-1)\\z=1-\alpha\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=-2\alpha\\y=2\\z=1-\alpha\end{cases}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ وهو تمثيل وسيطي للمستقيم $(\Delta)$.

**3- إثبات أنّ النقطة $O$ هي مرجح الجملة: $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$.**

نسمي $G$ هي مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$ وعليه

$x_G=\frac{1+1-2}{1+1-1}=0$ ، $y_G=\frac{1-1-0}{1+1-1}=0$ ، $z_G=\frac{1+0-1}{1+1-1}=0$ ومنه النقطة $G$ منطقة على $O$.

إذن النقطة $O$ هي مرجح الجملة: $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$.

**4- أ ) تعيين $(S)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق:** $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{3}$

لدينا $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(1+1-1)\overrightarrow{MO}$ أي $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO}$


Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

ومنه $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{3}$ تعني $\left\|\overrightarrow{MO}\right\|=2\sqrt{3}$ أي $MO=2\sqrt{3}$.

إذن المجموعة $(S)$ هي سطح كرة مركزه $O$ ونصف قطره $2\sqrt{3}$.

**ب) حساب إحداثيات $D$ و $E$ نقطتي تقاطع $(S)$ و $(\Delta)$.**

$x^2+y^2+z^2=12$ هي معادلة ديكارتية لـ $(S)$.

نحل الجملة $\begin{cases}x=-2\alpha\\y=2\\z=1-\alpha\\x^2+y^2+z^2=12\end{cases}$ وعليه $(-2\alpha)^2+2^2+(1-\alpha)^2=12$ أي $5\alpha^2-2\alpha-7=0$

بعد حل المعادلة نجد: $\alpha=\frac{7}{5}$ أو $\alpha=-1$.

ومنه $\begin{cases}x=-2\left(\frac{7}{5}\right)\\y=2\\z=1-\frac{7}{5}\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=-2(-1)\\y=2\\z=1+1\end{cases}$.

إذن يتقاطع $(S)$ و $(\Delta)$ في النقطتين $D\left(-\frac{14}{5};2;-\frac{2}{5}\right)$ و $E(2;2;2)$.

**جـ) طبيعة المثلث $ODE$.**

بما أن النقطتين $D$ و $E$ تنتميان لسطح الكرة $(S)$ التي مركزها $O$ فإنّ $OE=OD$ ومنه فإنّ المثلث $ODE$ متساوي السّاقين.

**استنتاج المسافة بين $O$ و $(\Delta)$.**

بما أنّ النقطتين $D$ و $E$ تنتميان للمستقيم $(\Delta)$ فإنّ $(\Delta)$ هو المستقيم $(DE)$.

المثلث $ODE$ متساوي الساقين بالتالي المسقط العمودي للنقطة $O$ على $(DE)$ هي النقطة $H$ منتصف القطعة $[DE]$ ومنه $d(O;(DE))=OH$.

ولدينا $H\left(-\frac{2}{5};2;\frac{4}{5}\right)$ وعليه $OH=\sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2+2^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{24}{5}}$.

إذن $d(O;(\Delta))=\sqrt{\frac{24}{5}}$.

**تمرين 24☹**

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(1;2;3)$، $B(0;1;4)$ و $C(-1;-3;2)$، $D(4;-2;5)$ والشعاع $\vec{n}(2;-1;1)$.

1- أ - بيّن أنّ النقط $A$، $B$ و $C$ ليست على استقامة واحدة.

ب - بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(2;-1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$.

ج - عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.

2- ليكن المستقيم $(\Delta)$ الذي تمثيله الوسيطي: $\begin{cases}x=2-2t\\y=-1+t\\z=4-t\end{cases}$ حيث $t$ عدد حقيقي.

aziz_mus1@hotmail.fr



Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ـ بيّن أنّ النقطة $D$ تنتمي للمستقيم $(\Delta)$ وأنّ هذا المستقيم عمودي على المستوي $(ABC)$.

3- لتكن $H$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$.

ـ بيّن أنّ $H$ هي مركز ثقل المثلث $ABC$.

**الحل☺**

**1- أ ـ إثبات أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست على استقامة واحدة .**

لدينا $\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-5;-1)$ و $\frac{-2}{-1}\neq\frac{-5}{-1}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست على استقامة واحدة .

**ب ـ إثبات أنّ الشعاع $\vec{n}(2;-1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$.**

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2(-1)-1(-1)+1(1)=-2+2=0$.

و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=2(-2)-1(-5)+1(-1)=-4+5-1=0$.

بما أنّ $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ والشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا فإنّ $\vec{n}(2;-1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$.

**ج ـ تعيين معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.**

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من $(ABC)$ لدينا: $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ و $\overrightarrow{AM}(x-1;y-2;z-3)$

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ معناه $2(x-1)-1(y-2)+(z-3)=0$ ومنه $(ABC):2x-y+z-3=0$.

2- ليكن المستقيم $(\Delta)$ الذي تمثيله الوسيطي: $\begin{cases}x=2-2t\\y=-1+t\\z=4-t\end{cases}$ حيث $t$ عدد حقيقي.

**ـ إثبات أنّ النقطة $D$ تنتمي للمستقيم $(\Delta)$ وأنّ هذا المستقيم عمودي على المستوي $(ABC)$.**

$D\in(\Delta)$ معناه $\begin{cases}4=2-2t\\-2=-1+t\\5=4-t\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}t=-1\\t=-1\\t=-1\end{cases}$ إذن من أجل $t=-1$ نجد النقطة $D(4;-2;5)$ من المستقيم $(\Delta)$.

من التمثيل الوسيطي نجد $\vec{u}(-2;1;-1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta)$.

و $\vec{n}(2;-1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$ ومنه $\vec{u}=-\vec{n}$ وعليه الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا وبالتالي فإنّ $(\Delta)$ عمودي على المستوي $(ABC)$.

3- لتكن $H$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$.

**ـ بيّن أنّ $H$ هي مركز ثقل المثلث $ABC$.**

نجد أولا إحداثيات النقطة $H$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$.

نحل الجملة $\begin{cases}x=2-2t\\y=-1+t\\z=4-t\\2x-y+z-3=0\end{cases}$ ومنه $2(2-2t)-(-1+t)+(4-t)-3=0$

ومنه $-6t+6=0$ وعليه $t=1$ إذن $H(0;0;3)$.

لدينا $\overrightarrow{HA}(1;2;0)$ ، $\overrightarrow{HB}(0;1;1)$ و $\overrightarrow{HC}(-1;-3;-1)$

ومنه $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}(-1+0+1;-3+1+2;-1+1+0)$ أي $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}(0;0;0)$

وهذا يعني أنّ $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ وبما أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامة فإن $H$ هي مركز ثقل

aziz_mus1@hotmail.com
Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

المثلث $ABC$.

**تمرين 25☹**

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(1;4;-5)$ ، $B(3;2;-4)$ ، $C(5;4;-3)$ و $D(-2;8;4)$ والشعاع $\vec{u}(1;5;-1)$.

1. بيّن أنّ $x-2z-11=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.
2. حدّد تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(T)$ الذي يشمل النقطة $D$ ويوازي $\vec{u}$.
3. ليكن $(P)$ المستوي ذو المعادلة: $x-y-z-7=0$.

أ ـ بيّن أنّ المستويين $(ABC)$ و $(P)$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x=11+2t \\ y=4+t \\ z=t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

ب ـ بيّن أنّ المستقيمين $(T)$ و $(\Delta)$ ليسا من نفس المستوي.

4. تعطى النقطتان $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$، تحقق أنّ: $E\in(\Delta)$ و $F\in(T)$.
5. لتكن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ مع $\alpha$ عدد حقيقي.

أ ـ جد بدلالة $\alpha$ معادلة ديكارتية لـ$(\Gamma)$ واستنتج أنّ $(\Gamma)$ مستو، $\overrightarrow{EF}$ شعاع ناظمي له.

ب ـ عيّن قيمة $\alpha$ حتى يكون $(\Gamma)$ المستوي المحوري للقطعة $[EF]$.

**الحل☺**

**1. إثبات أنّ $x-2z-11=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.**

لدينا $x_A-2z_A-11=1-2(-5)-11=0$ و $x_B-2z_B-11=3-2(-4)-11=0$

و $x_C-2z_C-11=5-2(-3)-11=0$ ومنه إحداثيات النقط $A$ ، $B$ و $C$ تحقق المعادلة $x-2z-11=0$

وبالتالي $x-2z-11=0$ هي معادلة للمستوي $(ABC)$.

**2. تحديد تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(T)$ الذي يشمل النقطة $D$ ويوازي $\vec{u}$.**

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$M$ تنتمي لـ $(T)$ إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي $k$ بحيث $\overrightarrow{DM}=k\vec{u}$.

ومنه $\begin{cases} x+2=k \\ y-8=5k \\ z-4=-k \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$ أي $\begin{cases} x=-2+k \\ y=8+5k \\ z=4-k \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$.

3. ليكن $(P)$ المستوي ذو المعادلة: $x-y-z-7=0$.

**أ ـ إثبات أنّ المستويين $(ABC)$ و $(P)$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ تمثيله الوسيطي** $\begin{cases} x=11+2t \\ y=4+t \\ z=t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

بالتعويض في معادلة كل من $(ABC)$ و $(P)$ نجد:

$(11+2t)-2(t)-11=0$ و $(11+2t)-(4+t)-t-7=11-11+2t-2t=0$

ومنه $(\Delta)$ محتوى في $(ABC)$ ومحتوى في $(P)$ وعليه $(ABC)$ و $(P)$ يتقاطعان وفق المستقيم $(\Delta)$.

**ب ـ إثبات أنّ المستقيمين $(T)$ و $(\Delta)$ ليسا من نفس المستوي.**

لدينا $\vec{u}(1;5;-1)$ هو شعاع توجيه لـ$(T)$ و $\vec{v}(2;1;1)$ هو شعاع توجيه لـ $(\Delta)$.

aziz_mus1@hotmail.fr

و $\frac{2}{1}\neq\frac{1}{5}$ إذن $(T)$ و $(\Delta)$ غير متوازيين.

ندرس تقاطع $(T)$ و $(\Delta)$.

$$(*)\begin{cases}11+2t=-2+k\ldots\ldots(1)\\4+t=8+5k\ldots\ldots(2)\\t=4-k\ldots\ldots(3)\end{cases}$$ نحل الجملة

ندرس إمكانية وجود ثنائية $t$ و $k$ من الأعداد الحقيقية تحقق الجملة $(*)$.

بتعويض $t$ بقيمتها من $(3)$ في $(2)$ نجد $4+(4-k)=8+5k$ ومنه $k=0$

بالتعويض في $(3)$ نجد $t=4$ وبتعويض $t$ و $k$ بقيمهما في $(1)$ نجد $-2=19$ تناقض.

إذن $(T)$ و $(\Delta)$ غير متقاطعين وبما أنهما غير متوازيين فإنهما ليسا من نفس المستوي.

4. تعطى النقطتان $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$ ، تحقق أنّ: $E\in(\Delta)$ و $F\in(T)$.

$E\in(\Delta)$ معناه $\begin{cases}3=11+2t\\0=4+t\\-4=t\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}t=-4\\t=-4\\t=-4\end{cases}$ بما أن $t$ وحيد فإنّ $E\in(\Delta)$.

$F\in(T)$ معناه $\begin{cases}-3=-2+k\\3=8+5k\\5=4-k\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}k=-1\\k=-1\\k=-1\end{cases}$ بما أنّ $k$ وحيد فإنّ $F\in(T)$.

5. لتكن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ مع $\alpha$ عدد حقيقي.

**أ ـ إيجاد بدلالة $\alpha$ معادلة ديكارتية لـ $(\Gamma)$.**

$\overrightarrow{ME}(3-x;-y;-4-z)$ و $\overrightarrow{FE}(6;-3;-9)$.

$\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ معناه $6(3-x)+3y-9(-4-z)=\alpha$ ومنه $-6x+3y+9z+54-\alpha=0$

هي معادلة ديكارتية لـ $(\Gamma)$ وهي معادلة مستوي شعاعه الناظمي $\overrightarrow{EF}$.

**ب ـ تعيين قيمة $\alpha$ حتى يكون $(\Gamma)$ المستوي المحوري للقطعة $[EF]$.**

لتكن $I$ منتصف $[EF]$ ومنه $I\left(0;\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$

المستوي المحوري للقطعة $[EF]$ شعاعه الناظمي $\overrightarrow{EF}$ ويشمل النقطة $I$.

ومنه $-6(0)+3\left(\frac{3}{2}\right)+9\left(\frac{1}{2}\right)+54-\alpha=0$ أي $\alpha=63$.

**طريقة ثانية:**

المستوي المحوري للقطعة $[EF]$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{FE}=0$.

$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{FE}=0$ معناه $\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EI}\right).\overrightarrow{FE}=0$ ومعناه $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FE}=0$

أي $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=-\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FE}$ ومنه $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{FE}$.

$\overrightarrow{IE}\left(3;-\frac{3}{2};-\frac{9}{2}\right)$ ومنه $\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{EF}=3(6)-\frac{3}{2}(-3)-\frac{9}{2}(-9)=18+45=63$

ومنه $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{FE}=0$ تعني $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=63$.

إذن المستوي المحوري للقطعة $[EF]$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=63$

aziz_mus1@hotmail.com

وعليه $\alpha = 63$.

**تمرين 26☹** بكالوريا تقني رياضي 2014

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$A$ ، $B$ و $C$ ثلاث نقط من الفضاء حيث $A(0;-1;1)$ ، $B(1;3;2)$ و $C(-1;3;4)$.

1) أ) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، ثمّ استنتج القيمة المدورة إلى الوحدة، بالدرجات للزاوية $\widehat{BAC}$

ب) بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعين مستويا.

2) أ) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(2;-1;2)$ ناظمي للمستوي $(ABC)$.

ب) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.

3) ليكن $(S)$ سطح الكرة الذي معادلته: $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+5=0$

نسمي $\Omega$ و $R$ مركز ونصف قطر $(S)$ احسب $R$ وعيّن احداثيات $\Omega$

4) اكتب معادلة ديكارتية لكل من المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$ مماسي سطح الكرة $(S)$ والموازيين للمستوي $(ABC)$.

**الحل☺**

**1) أ) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.**

لدينا $\overrightarrow{AB}(1;4:1)$ ، $\overrightarrow{AC}(-1;4:3)$ ومنه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1.(-1)+4.(4)+1.(3)=18$.

**استنتاج القيمة المدورة إلى الوحدة، بالدرجات للزاوية $\widehat{BAC}$**

لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$ ومن جهة أخرى $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=18$

ومنه $AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}=18$ ومنه $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{18}{AB\times AC}$

ولدينا $\sqrt{1^2+4^2+1^2}=\sqrt{18}$ ، $AC=\sqrt{(-1)^2+4^2+3^2}=\sqrt{26}$

ومنه $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{18}{\sqrt{18}\times\sqrt{26}}=\sqrt{\dfrac{9}{13}}$ وهذا يعني أنّ $\widehat{BAC}=34^\circ$

**ب) تبيين أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعين مستويا.**

بما أنّ $\widehat{BAC}\neq 0$ و $\widehat{BAC}\neq\pi$ فإنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعين مستويا.

**2) أ) تبيين أنّ الشعاع $\vec{n}(2;-1;2)$ ناظمي للمستوي $(ABC)$.**

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2.(1)-1.(4)+2.(1)=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=2.(-1)-1.(4)+2.(3)=0$

ومنه $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبالتالي $\vec{n}$ ناظمي للمستوي $(ABC)$.

**ب) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.**

المستوي $(ABC)$ له معادلة من الشكل $2x-y+2z+d=0$ وبما أنّ $A$ تنتمي للمستوي $(ABC)$ فإنّ

$0=1+2+d=0$ ومنه $d=-3$ وعليه معادلة المستوي $(ABC)$ هي $2x-y+2z-3=0$

3) ليكن $(S)$ سطح الكرة الذي معادلته: $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+5=0$

**حساب $R$ وتعيين احداثيات $\Omega$**

$x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+5=0$ معناه $(x-2)^2-4+(y+3)^2-9+(z-1)^2-1+5=0$

ومنه $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$ إذن $\Omega(2;-3;1)$ و $R=3$.

**4) كتابة معادلة ديكارتية لكل من المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$ مماسي سطح الكرة $(S)$ والموازيين للمستوي $(ABC)$.**

المستوي $(P)$ الموازي لـ $(ABC)$ معادلته من الشكل $2x-y+2z+d=0$ وبما أنّ $(P)$ مماس لـ $(S)$ فإنّ

$d(\Omega;(P))=3$ ومنه $\frac{|4+3+2+d|}{3}=3$ ومنه $|9+d|=9$ وعليه $9+d=9$ أو $9+d=-9$

أي $d=0$ أو $d=-18$.

إذن يوجد مستويان موازيان للمستوي $(ABC)$ مماسين لسطح الكرة $(S)$ معادلتاهما

$(P_1): 2x-y+2z=0$ و $(P_2): 2x-y+2z-18=0$.

**تمرين 27☹**

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(7;1;1)$، $B(1;7;1)$، $C(1;1;7)$ و $D(-1;-1;-1)$.

1.أ ـ بيّن أنّ النقط $A$، $B$ و $C$ تعين مستويا $(P)$؛ ثمّ تحقق أنّ معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$ هي $x+y+z-9=0$

ب ـ تحقق أنّ المستقيم $(OD)$ عمودي على $(P)$.

جـ ـ عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(OD)$.

د ـ بيّن أنّ النقطة $H(3;3;3)$ هي المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(P)$؛ وأنها مركز الدائرة $(C)$ المحيطة بالمثلث $ABC$.

2. ليكن $(Q)$ المستوي المحوري للقطعة $[CD]$.

أ ـ تحقق أنّ المعادلة الديكارتية للمستوي $(Q)$ هي $x+y+4z-12=0$.

ب ـ عيّن إحداثيات $\Omega$ نقطة تقاطع $(OD)$ و $(Q)$.

ج ـ بيّن أنّ $\Omega$ هي مركز رباعي الوجوه $ABCD$.

د ـ بيّن أنّ المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع؛ ثمّ احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

3. $(S)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=12\sqrt{3}$.

أ ـ بيّن أنّ $(S)$ هي سطح الكرة التي مركزها $\Omega$ ونصف قطرها $3\sqrt{3}$.

ب ـ اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة $(S)$؛ ثمّ تحقق أنّ $(S)$ تشمل النقط $A$، $B$، $C$ و $D$.

جـ ـ استنتج أن $(P)$ يقطع $(S)$ وفق دائرة يطلب تعيين عناصرها.

**الحل☺**

**1.أ ـ تبيين أنّ النقط $A$، $B$ و $C$ تعين مستويا $(P)$**

لدينا $\overrightarrow{AB}(-6;6;0)$، $\overrightarrow{AC}(-6;0;6)$ و $\frac{-6}{-6}\neq\frac{0}{6}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

ومنه النقط $A$، $B$ و $C$ تعيّن مستويا $(P)$.

**التحقق أنّ معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$ هي $x+y+z-9=0$**

$x_A+y_A+z_A-9=7+1+1-9=0$، $x_B+y_B+z_B-9=1+7+1-9=0$،

$x_C+y_C+z_C-9=1+1+7-9=0$ ومنه إحداثيات النقط $A$، $B$ و $C$ تحقق المعادلة $x+y+z-9=0$

وعليه المعادلة الديكارتية للمستوي $(P)$ هي $x+y+z-9=0$

**ب ـ التحقق أنّ المستقيم $(OD)$ عمودي على $(P)$.**

لدينا $\overrightarrow{OD}(-1;-1;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم $(OD)$ و $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(P)$ و $\overrightarrow{OD}=-\vec{n}$

إذن الشعاعان $\overrightarrow{OD}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا بالتالي المستقيم $(OD)$ عمودي على $(P)$.

**جـ ـ تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(OD)$.**

من أجل كل $M(x;y;z)$ من المستقيم $(OD)$ لدينا: $\overrightarrow{OM}=t\overrightarrow{OD}$ حيث $t\in\mathbb{R}$.

ومنه $\begin{cases}x=-t\\y=-t;(t\in\mathbb{R})\\z=-t\end{cases}$

**د ـ تبيين أنّ النقطة $H(3;3;3)$ هي المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(P)$.**

**يمكن استعمال طريقتين**

طريقة 1: نثبت أن $H$ تنتمي للمستوي $(P)$ و أنّ $\overrightarrow{DH}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا.

طريقة 2: نثبت أن $H$ تنتمي للمستوي $(P)$ و $d(D;(P))=DH$.

نستعمل طريقة 1

لدينا $x_H+y_H+z_H-9=3+3+3-9=0$ ومنه $H\in(P)$

ولدينا $\overrightarrow{DH}(4;4;4)$ ومنه $\overrightarrow{DH}=4\vec{n}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{DH}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا بالتالي $H$ هي المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(P)$.

إثبات أنّ $H$ هي مركز الدائرة $(C)$ المحيطة بالمثلث $ABC$.

$HA=\sqrt{4^2+(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{24}$ ومنه $\overrightarrow{HA}(4;-2;-2)$

$HB=\sqrt{(-2)^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{24}$ ومنه $\overrightarrow{HB}(-2;4;-2)$

$HC=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+4^2}=\sqrt{24}$ ومنه $\overrightarrow{HC}(-2;-2;4)$

بما أنّ $HA=HB=HC$ فإنّ $H$ هي مركز الدائرة $(C)$ المحيطة بالمثلث $ABC$.

**ب ـ تعيين إحداثيات $\Omega$ نقطة تقاطع $(OD)$ و $(Q)$.**

نحل الجملة $\begin{cases}x=-t.....(1)\\y=-t.....(2)\\z=-t.....(3)\\x+y+4z-12=0.....(4)\end{cases}$ ومنه $-t-t-4t-12=0$ وعليه $t=-2$ إذن $\Omega(2;2;2)$.

**ج ـ إثبات أنّ $\Omega$ هي مركز رباعي الوجوه $ABCD$.**

لدينا $\overrightarrow{\Omega A}(5;-1;-1)$ ، $\overrightarrow{\Omega B}(-1;5;-1)$ ، $\overrightarrow{\Omega C}(-1;-1;5)$ ، $\overrightarrow{\Omega D}(-3;-3-3)$

ومنه $\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}+\overrightarrow{\Omega D}(5-1-1-3;-1+5-1-3;-1-1+5-3)$ أي $\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}+\overrightarrow{\Omega D}(0;0;0)$

وهذا يعني أنّ $\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}+\overrightarrow{\Omega D}=\vec{0}$ وبالتالي $\Omega$ هي مركز رباعي الوجوه $ABCD$.

**د ـ إثبات أنّ المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع.**

$AB=\sqrt{(-6)^2+6^2}=6\sqrt{2}$ ومنه $\overrightarrow{AB}(-6;6;0)$

$AC=\sqrt{(-6)^2+6^2}=6\sqrt{2}$ ومنه $\overrightarrow{AC}(-6;0;6)$

$BC=\sqrt{(-6)^2+6^2}=6\sqrt{2}$ ومنه $\overrightarrow{BC}(0;-6;6)$

aziz_mus1@hotmail.fr



Mostefai A/Elaziz
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

بما أنّ $AB=AC=BC$ فإنّ المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع.

**حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.**

$V=\frac{1}{3}S\times d$ حيث $S$ هي مساحة المثلث $ABC$ و $d$ هو بُعد النقطة $D$ عن المستوي $(P)$.

لتكن $I$ منتصف $[AB]$ ومنه $I(4;4;1)$

$$S=\frac{BC\times AI}{2}=\frac{6\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}}{2}=18au \quad ، \quad d=\frac{|-1-1-1-9|}{\sqrt{3}}=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$$

وعليه $V=\frac{1}{3}\times 18\times 4\sqrt{3}=24\sqrt{3}uv$.

3. $(S)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=12\sqrt{3}$.

**أ ـ تبيين أنّ $(S)$ هي سطح الكرة التي مركزها $\Omega$ ونصف قطرها $3\sqrt{3}$.**

$\Omega$ مركز رباعي الوجوه $ABCD$ ومنه $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{M\Omega}$

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=12\sqrt{3}$ معناه $\left\|4\overrightarrow{\Omega M}\right\|=12\sqrt{3}$ أي $\Omega M=3\sqrt{3}$

إذن $(S)$ هي سطح الكرة الذي مركزه $\Omega$ ونصف قطره $3\sqrt{3}$.

**ب ـ كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة $(S)$.**

**تذكير**: المعادلة الديكارتية لسطح الكرة الذي مركزه $\omega(x_0;y_0;z_0)$ ونصف قطره $R$ هي $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$.

المعادلة الديكارتية لسطح الكرة $(S)$ هي $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=27$.

**التحقق أنّ $(S)$ تشمل النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$.**

$\overrightarrow{\Omega A}(5;-1;-1)$ ومنه $\Omega A=\sqrt{5^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

$\overrightarrow{\Omega B}(-1;5;-1)$ ومنه $\Omega B=\sqrt{(-1)^2+5^2+(-1)^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

$\overrightarrow{\Omega C}(-1;-1;5)$ ومنه $\Omega C=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+5^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

$\overrightarrow{\Omega D}(-3;-3-3)$ ومنه $\Omega D=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

إذن $(S)$ تشمل النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$.

**جـ ـ استنتاج أن $(P)$ يقطع $(S)$ وفق دائرة يطلب تعيين عناصرها.**

بما أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تنتمي للمستوي $(P)$ وتنتمي لسطح الكرة $(S)$ فإنّ $(P)$ و $(S)$ يتقاطعان وفق الدائرة التي تشمل النقط $A$ ، $B$ و $C$ أي يتقاطعان وفق الدائرة $(C)$.

**تمرين 28☹**

**I/** $D$ و $H$ نقطتان من الفضاء و $I$ منتصف القطعة المستقيمة $[DH]$.

1) بيّن أنّه، من أجل كل نقطة $M$ من الفضاء يكون: $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH}=MI^2-ID^2$.

2) استنتج أنّ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH}=0$ هي سطح كرة $(S)$ يطلب تعيين مركزه ونصف قطره.

**II/** الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(3;0;0)$ ، $B(0;6;0)$ ، $C(0;0;4)$ و $D(-5;0;1)$.

1) أ) تحقق أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا.

ب) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(4;2;3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$.

جـ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.

2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل $D$ ويعامد المستوي $(ABC)$.

3) نسمي $H$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$؛ احسب احداثيات النقطة $H$.

4) احسب المسافة بين النقطة $D$ والمستوي $(ABC)$، ثمّ اكتب معادلة لسطح الكرة $(S)$ المذكورة في الجزء **I**.

5) نعتبر النقطة $N\left(\frac{12}{5};\frac{6}{5};0\right)$.

أ) أثبت أنّ $N$ هي المسقط العمودي للنقطة $C$ على المستقيم $(AB)$.

ب) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

**الحل☺**

**الجزء I/.**

**1) إثبات أنّه، من أجل كل نقطة $M$ من الفضاء يكون: $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH}=MI^2-ID^2$.**

$\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IH}\right)$ وبما أنّ $I$ منتصف القطعة المستقيمة $[DH]$ فإنّ $\overrightarrow{IH}=-\overrightarrow{ID}$

ومنه $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{ID}\right)=MI^2-ID^2$.

**2) استنتاج أنّ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH}=0$ هي سطح كرة $(S)$**

$\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH}=0$ تكافـئ $MI^2-ID^2=0$ و تكافئ $MI=ID$ بالتالي مجموعة النقط $M$ هي سطح كرة مركزه $I$ ونصف قطره $ID$.

**الجزء II/.**

**1) أ) التحقق أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا.**

لدينا $\overrightarrow{AB}(-3;6;0)$ ، $\overrightarrow{AC}(-3;0;4)$ و $\frac{-3}{-3}\neq\frac{0}{6}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

ومنه النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا.

**ب) تبيين أنّ الشعاع $\vec{n}(4;2;3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$.**

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=4(-3)+2(6)+3(0)=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=4(-3)+2(0)+3(4)=0$

ومنه $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبالتالي $\vec{n}$ ناظم للمستوي $(ABC)$.

**جـ) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.**

معادلة المستوي $(ABC)$ من الشكل $4x+2y+3z+d=0$ وبما أنّ $A$ تنتمي للمستوي $(ABC)$ فإنّ

$4(3)+d=0$ ومنه $d=-12$ وعليه معادلة المستوي $(ABC)$ هي $4x+2y+3z-12=0$.

**2) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل $D$ ويعامد المستوي $(ABC)$.**

بما أنّ $(\Delta)$ يعامد $(P)$ فإنّ $\vec{n}$ هو شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta)$

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم $(\Delta)$ لدينا: $\overrightarrow{DM}=t\vec{n}$ حيث $t$ عدد حقيقي.

ومنه $\begin{cases}x+5=4t\\y=2t\\z-1=3t\end{cases}$ ;$(t\in\mathbb{R})$ أي $\begin{cases}x=-5+4t\\y=2t\\z=1+3t\end{cases}$ ;$(t\in\mathbb{R})$.

3) نسمي $H$ المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$.

aziz_mus1@hotmail.fr

**حساب احداثيات النقطة $H$.**

$H$ هي نقطة تقاطع $(\Delta)$ والمستوي $(ABC)$.

نحل الجملة $\begin{cases} x=-5+4t.....(1) \\ y=2t.....(2) \\ z=1+3t.....(3) \\ 4x+2y+3z-12=0.....(4) \end{cases}$

نعوض كل من $x$ و $y$ و $z$ من $(1)$ و $(2)$ و $(3)$ بقيمهما في $(4)$ نجد: $4(-5+4t)+2(2t)+3(1+3t)-12=0$

ومنه $29t-29=0$ أي $t=1$ إذن $\begin{cases} x=-5+4(1) \\ y=2(1) \\ z=1+3(1) \end{cases}$ وعليه $H(-1;2;4)$

**4) حساب المسافة بين النقطة $D$ والمستوي $(ABC)$.**

يمكن حساب المسافة بطريقتين

**طريقة 1:** $d(D;(ABC))=\dfrac{|4(-5)+2(0)+3(1)-12|}{\sqrt{29}}=\dfrac{29}{\sqrt{29}}=\sqrt{29}$

**طريقة 2:** $d(D;(ABC))=DH$

لدينا $\overrightarrow{DH}(4;2;3)$ وعليه $DH=\sqrt{4^2+2^2+3^2}=\sqrt{29}$ إذن $d(D;(ABC))=\sqrt{29}$.

**كتابة معادلة لسطح الكرة $(S)$.**

**تعيين احداثيات $I$.**

$x_I=\dfrac{x_D+x_H}{2}=-3$ ، $y_I=\dfrac{y_D+y_H}{2}=1$ ، $z_I=\dfrac{z_D+z_H}{2}=\dfrac{5}{2}$ إذن $I\left(-3;1;\dfrac{5}{2}\right)$

$ID=\dfrac{DH}{2}=\dfrac{\sqrt{29}}{2}$

$MI=ID$ معناه $(x+3)^2+(y-1)^2+\left(z-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{29}{4}$ وهي معادلة السطح $(S)$.

5) نعتبر النقطة $N\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{6}{5};0\right)$.

**أ) إثبات أنّ $N$ هي المسقط العمودي للنقطة $C$ على المستقيم $(AB)$.**

تكون $N$ هي المسقط العمودي للنقطة $C$ على المستقيم $(AB)$ إذا تحقق ما يلي: $N\in(AB)$ و $\overrightarrow{CN}\perp\overrightarrow{AB}$

لدينا $\overrightarrow{CN}\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{6}{5};4\right)$ ومنه $\overrightarrow{CN}.\overrightarrow{AB}=\dfrac{12}{5}(-3)+\dfrac{6}{5}(6)+0(0)=0$ وهذا يعني أنّ $\overrightarrow{CN}\perp\overrightarrow{AB}$

ولدينا $\overrightarrow{AN}\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{6}{5};0\right)$ و $\overrightarrow{AB}(-3;6;0)$ ومنه $\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{AN}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AN}$ مرتبطان خطيا ومنه $N$ تنتمي للمستقيم $(AB)$ وبالتالي $N$ هي المسقط العمودي للنقطة $C$ على المستقيم $(AB)$.

**ب) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.**

$V=\dfrac{1}{3}S\times DH$ حيث $S$ هي مساحة المثلث $ABC$.

لدينا $AB=\sqrt{(-3)^2+6^2}=3\sqrt{5}$ ، $CN=\sqrt{\dfrac{144}{25}+\dfrac{36}{25}+16}=\sqrt{\dfrac{580}{25}}=\sqrt{\dfrac{116}{5}}=\dfrac{2\sqrt{29}}{\sqrt{5}}$

aziz_mus1@hotmail.fr



Mostefai A/Elaziz
WWW.DZPEN.COM

ومنه $S=\frac{1}{2}AB\times CN=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{29}}{\sqrt{5}}=3\sqrt{29}$ وعليه $V=\frac{1}{3}\times 3\sqrt{29}\times\sqrt{29}=29uv$.

**تمرين 29☹**

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(3;-1;2)$ ، $B(1;1;-2)$ و $G(4;-2;4)$ والمستوي $(P)$ الذي معادلته $x-2y+3z+8=0$.

1. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(AB)$؛ ثمّ عيّن إحداثيات $L$ نقطة تقاطع المستقيم $(AB)$ والمستوي $(P)$.

2. أ ـ بيّن أن $G$ تنتمي للمستقيم $(AB)$ وأنها مرجح النقطتين $A$ و $B$ المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.

ب ـ عيّن طبيعة وعناصر $(E)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق: $\left\|-3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$.

3 أ ـ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $G$ ويعامد المستوي $(P)$، ثمّ عيّن إحداثيات $H$ نقطة تقاطع المستوي $(P)$ والمستقيم $(\Delta)$.

ب ـ استنتج المسافة بين النقطة $L$ والمستقيم $(\Delta)$.

4. أ ـ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي $(AGH)$، ثمّ استنتج معادلة ديكارتية له.

ب ـ بيّن أنّ المستويين $(AGH)$ و $(P)$ يتقاطعان وفق مستقيم $(d)$ يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

**الحل☺**

**1. كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(AB)$**

المستقيم $(AB)$ شعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}(-2;2;-4)$

$M(x;y;z)\in(AB)$ معناه $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ حيث $t$ عدد حقيقي

ومنه $\begin{cases}x-3=-2t\\y+1=2t\\z-2=-4t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$ أي $\begin{cases}x=3-2t\\y=-1+2t\\z=2-4t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$.

**تعيين إحداثيات $L$ نقطة تقاطع المستقيم $(AB)$ والمستوي $(P)$.**

نحل الجملة $\begin{cases}x=3-2t\\y=-1+2t\\z=2-4t\\x-2y+3z+8=0\end{cases}$ ومنه $3-2t+2-4t+6-12t+8=0$ ومنه $t=\frac{19}{18}$

وعليه $\begin{cases}x=3-2\left(\frac{19}{18}\right)\\y=-1+2\left(\frac{19}{18}\right)\\z=2-4\left(\frac{19}{18}\right)\end{cases}$ إذن $L\left(\frac{8}{9};\frac{10}{9};-\frac{20}{9}\right)$

**2. أ ـ تبيين أن $G$ تنتمي للمستقيم $(AB)$.**

aziz_mus1@hotmail.fr



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$G \in (AB)$ معناه $\begin{cases} 4=3-2t \\ -2=-1+2t \\ 4=2-4t \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} t=-\frac{1}{2} \\ t=-\frac{1}{2} \\ t=-\frac{1}{2} \end{cases}$ إذن من أجل $t=-\frac{1}{2}$ نجد النقطة $G$ من المستقيم $(AB)$.

**تبيين أنّ $G$ مرجح النقطتين $A$ و $B$ المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.**

لدينا $G$ تنتمي للمستقيم $(AB)$ من أجل $t=-\frac{1}{2}$ ومنه $\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ومنه $2\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{AB}$

تكافئ $2\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ وتكافئ $2\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ ومنه $-3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ إذن $G$ مرجح النقطتين $A$ و $B$ المرفقتين بـ $-3$ و $1$ على الترتيب.

**ب ـ تعيين طبيعة وعناصر $(E)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تحقق: $\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$.**

$G$ مرجح الجملة $\{(A;-3),(B;1)\}$ إذن من أجل كل نقطة $M$ من الفضاء لدينا $-3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MG}$

ولدينا $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$

$\left\|-3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$ معناه $\left\|-2\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|$ أي $MG=\frac{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|}{2}$

ولدينا $\left\|\overrightarrow{BA}\right\|=\sqrt{4+4+16}=2\sqrt{6}$ ومنه $MG=\sqrt{6}$ وبالتالي $(E)$ هي سطح الكرة التي مركزها $G$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

**3 أ ـ كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $G$ ويعامد المستوي $(P)$.**

بما أنّ $(\Delta)$ يعامد $(P)$ فإنّ $\vec{n}(1;-2;3)$ يكون شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta)$.

$M(x;y;z)\in(\Delta)$ معناه $\overrightarrow{GM}=t\vec{n}$ حيث $t$ عدد حقيقي.

ومنه $\begin{cases} x-4=t \\ y+2=-2t \\ z-4=3t \end{cases};(t\in\mathbb{R})$ أي $\begin{cases} x=4+t \\ y=-2-2t \\ z=4+3t \end{cases};(t\in\mathbb{R})$.

**تعيين إحداثيات $H$ نقطة تقاطع المستوي $(P)$ والمستقيم $(\Delta)$.**

نحل الجملة $\begin{cases} x=4+t \\ y=-2-2t \\ z=4+3t \\ x-2y+3z+8=0 \end{cases}$ ومنه $4+t+4+4t+12+9t+8=0$ ومنه $t=-2$

وعليه $H(2;2;-2)$

**ب ـ استنتاج المسافة بين النقطة $L$ والمستقيم $(\Delta)$.**

بما أن $(\Delta)$ يعامد $(P)$ فإن المسقط العمودي لكل نقطة من المستوي $(P)$ على المستقيم $(\Delta)$ هي $H$ نقطة تقاطعهما

وبما $L\in(P)$ فإن المسافة بين النقطة $L$ والمستقيم $(\Delta)$ هي $LH$.

$\overrightarrow{LH}\left(\frac{10}{9};\frac{8}{9};\frac{2}{9}\right)$ ومنه $LH=\sqrt{\frac{100}{81}+\frac{64}{81}+\frac{4}{81}}=\frac{\sqrt{168}}{9}$

**4. أ ـ كتابة تمثيلا وسيطيا للمستوي $(AGH)$**

aziz_mus1@hotmail.fr



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لدينا $\overrightarrow{AG}(1;-1;2)$ ، $\overrightarrow{AH}(-1;3;-4)$ و $\frac{-1}{1}\neq\frac{3}{-1}$ ومنه النقط $A$ ، $G$ و $H$ تعين مستويا.

$M(x;y;z)\in(AGH)$ معناه $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{AH}$ حيث $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان.

ومنه $\begin{cases}x-3=\alpha-\beta\\y+1=-\alpha+3\beta\\z-2=2\alpha-4\beta\end{cases}$ ; $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ أي $\begin{cases}x=3+\alpha-\beta\\y=-1-\alpha+3\beta\\z=2+2\alpha-4\beta\end{cases}$ ; $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

**استنتاج معادلة ديكارتية له.**

$\begin{cases}x=3+\alpha-\beta.....(1)\\y=-1-\alpha+3\beta.....(2)\\z=2+2\alpha-4\beta.....(3)\end{cases}$ بضرب المعادلة $(1)$ بـ $-1$ و بجمع $(1)$ و $(2)$ و $(3)$ نجد $-x+y+z+2=0$

وهي معادلة المستوي $(AGH)$.

**ب ـ تبيين أنّ المستويين $(AGH)$ و $(P)$ يتقاطعان وفق مستقيم $(d)$ يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.**

لدينا $\vec{n}(1;-2;3)$ شعاع ناظمي للمستوي $(P)$ و $\vec{n}'(-1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(AGH)$

و $\frac{-1}{1}\neq\frac{1}{-2}$ إذن الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ غير مرتبطين خطيا ومنه المستويان $(AGH)$ و $(P)$ متقاطعان وفق مستقيم $(d)$.

المستقيم $(d)$ معرّف بالجملة $\begin{cases}x-2y+3z+8=0.....(1)\\-x+y+z+2=0.....(2)\end{cases}$ بجمع المعادلتين $(1)$ و $(2)$ نجد $-y+4z+10=0$

ومنه $y=4z+10$ بالتعويض في $(1)$ نجد $x-2(4z+10)+3z+8=0$ ومنه $x=5z+12$

وبوضع $z=t$ نجد $(d):\begin{cases}x=5t+12\\y=4t+10\\z=t\end{cases}$

**تمرين 30☹**

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(8;0;8)$ ، $B(10;3;10)$ ، $C(10;1;6)$ و $D(6;5;4)$.

والمستقيم $(\Delta)$ المعرّف بتمثيله الوسيطي $\begin{cases}x=-5+3t\\y=1+2t\\z=-2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

1- أُكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(d)$ الذي يشمل النقطتين $A$ و $B$.

2- بيّن أنّ المستقيمين $(\Delta)$ و $(d)$ ليسا من نفس المستوي.

3- ليكن المستوي $(P)$ الذي يشمل المستقيم $(d)$ ويوازي $(\Delta)$.

أ ـ بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(2;-2;1)$ ناظمي للمستوي $(P)$.

ب ـ أُكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$.

ج ـ $M$ نقطة كيفية من المستقيم $(\Delta)$، بيّن أنّ بُعد $M$ عن المستوي $(P)$ مستقل عن اختيار النقطة $M$.

د ـ أثبت أنّ $C$ هي المسقط العمودي للنقطة $D$ على $(P)$.

4- ادرس الوضع النسبي للمستويين $(P)$ و $(xOy)$.


Mostefai A/Elaziz
WWW.DZPEN.COM
aziz_mus1@hotmail.fr

**الحل☹**

1- **كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(d)$ الذي يشمل النقطتين $A$ و $B$.**

المستقيم $(d)$ شعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}(2;3;2)$.

من أجل كل $M(x;y;z)$ من المستقيم $(d)$ لدينا: $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$.

ومنه $(\lambda\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=8+2\lambda\\y=3\lambda\\z=8+2\lambda\end{cases}$ وهو تمثيل وسيطي للمستقيم $(d)$.

2- **إثبات أنّ المستقيمين $(\Delta)$ و $(d)$ ليسا من نفس المستوي.**

لدينا $\vec{u}(3;2;-2)$ هو شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta)$ و $\overrightarrow{AB}(2;3;2)$ شعاع توجيه للمستقيم $(d)$.

$\frac{2}{3}\neq\frac{3}{2}$ إذن $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطيا ومنه المستقيمان $(\Delta)$ و $(d)$ غير متوازيين.

ندرس تقاطع $(\Delta)$ و $(d)$.

نحل الجملة $\begin{cases}-5+3t=8+2\lambda.....(1)\\1+2t=3\lambda.....(2)\\-2t=8+2\lambda.....(3)\end{cases}$

بجمع $(2)$ و $(3)$ نجد $1=8+5\lambda$ ومنه $\lambda=-\frac{7}{5}$.

بتعويض قيمة $\lambda$ في $(1)$ و $(2)$ و $(3)$ نجد: $\begin{cases}-5+3t=\frac{26}{5}\\1+2t=-\frac{21}{5}\\-2t=\frac{26}{5}\end{cases}$ إذن $\begin{cases}t=\frac{51}{15}\\t=-\frac{13}{5}\\t=-\frac{13}{5}\end{cases}$ تناقض

ومنه $(\Delta)$ و $(d)$ غير متقاطعين.

بما أنّ $(\Delta)$ و $(d)$ غير متوازيين وغير متقاطعين فهما ليسا من نفس المستوي.

3- ليكن المستوي $(P)$ الذي يشمل المستقيم $(d)$ ويوازي $(\Delta)$.

**أ ـ إثبات أنّ الشعاع $\vec{n}(2;-2;1)$ ناظمي للمستوي $(P)$.**

$(P)$ يشمل المستقيم $(d)$ ويوازي $(\Delta)$ وبما أنّ $(d)$ لايوازي $(\Delta)$ إذن $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ هما شعاعي توجيه للمستوي $(P)$

ولدينا $\vec{n}.\vec{u}=2(3)-2(2)-2=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2(2)-2(3)+2=0$

ومنه $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ وبالتالي $\vec{n}$ ناظمي للمستوي $(P)$.

**ب ـ كتابة معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$.**

المستوي $(P)$ له معادلة من الشكل $2x-2y+z+d=0$ وبما أنّ $A$ تنتمي للمستوي $(P)$ فإنّ

$2(8)-2(0)+8+d=0$ ومنه $d=-24$ وعليه معادلة المستوي $(P)$ هي $2x-2y+z-24=0$

ج ـ $M$ نقطة كيفية من المستقيم $(\Delta)$.

**إثبات أنّ بُعد $M$ عن المستوي $(P)$ مستقل عن اختيار النقطة $M$.**

$d(M;P)=\dfrac{|2(-5+3t)-2(1+2t)-2t-24|}{\sqrt{4+2+1}}=\dfrac{36}{9}=4$.

إذن مهما تكن النقطة $M$ من $(\Delta)$ فإن بُعدها عن المستوي $(P)$ ثابت وهو $d=4$.

**د ـ إثبات أنّ $C$ هي المسقط العمودي للنقطة $D$ على $(P)$.**

$2x_C-2y_C+z_C-24=2(10)-2+6-24=0$ ومنه $C\in(P)$.

ولدينا $\overrightarrow{CD}(-4;4;-2)$ ومنه $\overrightarrow{CD}=-2\vec{n}$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{CD}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا.

إذن $C$ هي المسقط العمودي للنقطة $D$ على $(P)$.

**4- دراسة الوضع النسبي للمستويين $(P)$ و $(xOy)$.**

المستوي $(xOy)$ معادلته $z=0$.

نحل الجملة $\begin{cases}2x-2y+z-24=0.....(1)\\ z=0.....(2)\end{cases}$

نعوض $(2)$ في $(1)$ نجد $2x-2y-24=0$ ومنه $x=y+12$.

وبوضع $y=t$ نجد $\begin{cases}x=12+t\\ y=t\\ z=0\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

ومنه المستويان $(P)$ و $(xOy)$ يتقاطعان وفق المستقيم الذي يشمل النقطة $K(12;0;0)$ ويوازي الشعاع $\vec{v}(1;1;0)$.

**<u>تمرين 31</u>** ☹ بكالوريا تقني رياضي 2014

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ مستقيمان من الفضاء معرّفان بتمثيليهما الوسيطيين التاليين:

$$(\Delta_1):\begin{cases}x=3+2t\\ y=-2-2t\\ z=1-t\end{cases};(t\in\mathbb{R}) \quad \text{و} \quad (\Delta_2):\begin{cases}x=1\\ y=-1-t';(t'\in\mathbb{R})\\ z=4+2t'\end{cases}$$

1) أ) عيّن إحداثيات النقطة $B$ تقاطع المستقيمين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$.

ب) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي $(P)$ المعيّن بالمستقيمين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$.

2) أ) أثبت أنّ النقطة $A(6;4;4)$ لا تنتمي للمستوي $(P)$.

ب) بيّن أنّ النقطة $B$ هي المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستوي $(P)$.

3) أ) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$ الذي يشمل النقطة $A$ و $\vec{n}(5;1;-7)$ شعاع ناظمي له.

ب) عيّن إحداثيات $C$ و $D$ نقطتي تقاطع $(Q)$ مع كل من $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ على الترتيب.

4) أ) عيّن طبيعة المثلث $BCD$، ثمّ احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

ب) استنتج مساحة المثلث $ACD$.

**<u>الحل</u>☺**

**1) أ) تعيين إحداثيات النقطة $B$ تقاطع المستقيمين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$.**

نحل الجملة $\begin{cases}3+2t=1.....(1)\\-2-2t=-1-t'.....(2)\\1-t=4+2t'.....(3)\end{cases}$ من $(1)$ نجد $t=-1$ بالتعويض عن $t$ في $(2)$ نجد $0=-1-t'$

ومنه $t'=-1$ وبتعويض $t$ و $t'$ في التمثيلين الوسيطيين لـ $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ على الترتيب نجد

$\begin{cases}x=1\\y=0\\z=2\end{cases}$ و $\begin{cases}x=1\\y=0\\z=2\end{cases}$ إذن المستقيمان $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ يتقاطعان في النقطة $B(1;0;2)$.

**ب) تعيين تمثيلا وسيطيا للمستوي $(P)$ الذي يشمل المستقيمين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$.**

$\vec{u}(2;-2;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta_1)$ و $\vec{v}(0;-1;2)$ شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta_2)$ وهما أساس للمستوي $(P)$.

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(P)$ معناه $\overrightarrow{BM}=t\vec{u}+t'\vec{v}$ و $\overrightarrow{BM}(x-1;y;z-2)$.

ومنه $(t;t')\in\mathbb{R}^2$ $\begin{cases}x-1=2t\\y=-2t-t'\\z-2=-t+2t'\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2t-t'\\z=2-t+2t'\end{cases}$ $(t;t')\in\mathbb{R}^2$

**2) أ) إثبات أنّ النقطة $A(6;4;4)$ لا تنتمي للمستوي $(P)$.**

نفرض أنّ $A$ تنتمي للمستوي $(P)$ إذن $\begin{cases}6=1+2t.....(1)\\4=-2t-t'.....(2)\\4=2-t+2t'...(3)\end{cases}$

من $(1)$ نجد $t=\frac{5}{2}$ بالتعويض في $(2)$ و $(3)$ نجد $\begin{cases}t=\frac{5}{2}\\4=5-t'\\4=-\frac{1}{2}+2t'\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}t=\frac{5}{2}\\t'=1\\t'=\frac{9}{4}\end{cases}$ تناقض

إذن $A$ لا تنتمي للمستوي $(P)$.

**ب) تبيين أنّ النقطة $B$ هي المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستوي $(P)$.**

تكون $B$ هي المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستوي $(P)$ إذا وفقط إذا كان:

$B\in(P)$ و $\overrightarrow{BA}$ شعاع ناظمي للمستوي $(P)$

لدينا $\overrightarrow{BA}(5;4;2)$ و $\overrightarrow{BA}.\vec{u}=5\times2+4(-2)+2(-1)=0$ و $\overrightarrow{BA}.\vec{v}=5\times0+4(-1)+2(2)=0$

وهذا يعني أنّ $\overrightarrow{BA}\perp\vec{u}$ و $\overrightarrow{BA}\perp\vec{v}$ بالتالي $\overrightarrow{BA}$ شعاع ناظمي للمستوي $(P)$ وبما أنّ $B\in(P)$ فإنّ $B$ هي المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستوي $(P)$.

**3) أ) تعيين معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$ الذي يشمل النقطة $A$ و $\vec{n}(5;1;-7)$ شعاع ناظمي له.**

معادلة المستوي $(Q)$ من الشكل $5x+y-7z+d=0$ وبما أنّ $A\in(Q)$ فإنّ $5(6)+4-7(4)+d=0$

ومنه $d=-6$ وعليه $5x+y-7z-6=0$ هي معادلة للمستوي $(Q)$

**ب) تعيين إحداثيات $C$ و $D$ نقطتي تقاطع $(Q)$ مع كل من $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ على الترتيب.**


Mostefai A/Elaziz
WWW.DZPEN.COM
aziz_mus1@hotmail.fr

**تعيين إحداثيات $C$ نقطة تقاطع $(Q)$ مع $(\Delta_1)$.**

نحل الجملة $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2-2t \\ z=1-t \\ 5x+y-7z-6=0 \end{cases}$ وعليه $5(3+6t)-2-2t-7(1-t)-6=0$ ومنه $35t=0$ أي $t=0$

إذن $C(3;-2;1)$.

**تعيين إحداثيات $D$ نقطة تقاطع $(Q)$ مع $(\Delta_2)$.**

نحل الجملة $\begin{cases} x=1 \\ y=-1-t' \\ z=4+2t' \\ 5x+y-7z-6=0 \end{cases}$ وعليه $5-1-t'-7(4+2t')-6=0$ ومنه $-15t'-30=0$ أي $t'=-2$

إذن $D(1;1;0)$.

**4) أ) تعيين طبيعة المثلث $BCD$.**

$\overrightarrow{BC}(2;-2;-1)$ ومنه $BC=\sqrt{4+4+1}=3$

$\overrightarrow{BD}(0;1;-2)$ ومنه $BD=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

$\overrightarrow{CD}(-2;3;-1)$ ومنه $CD=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$

ومنه $BC^2+BD^2=CD^2$ إذن المثلث $BCD$ قائم في $B$.

**طريقة 2:** لدينا $\vec{u}.\vec{v}=2\times0-2(-1)-1(2)=0$ وهذا يعني أنّ $\vec{u}\perp\vec{v}$ ومنه المستقيمان $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ متعامدان ومتقاطعان في النقطة $B$ وبما أنّ $C\in(\Delta_1)$ و $D\in(\Delta_2)$ فإنّ المثلث $BCD$ قائم في $B$.

**حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.**

حجم رباعي الوجوه يعطى كما يلي $\frac{1}{3}\times$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع.

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{BCD}\times AB$ ( $AB$ هي المسافة بين $A$ والمستوي $(P)=(BCD)$ )

لدينا $AB=3\sqrt{5}$ ، $S_{BCD}=\frac{BC\times BD}{2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}ua$

وعليه $V_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{5}}{2}\times3\sqrt{5}=\frac{15}{2}uv$.

**ب) استنتاج مساحة المثلث $ACD$.**

لدينا $V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ACD}\times d(B;(Q))$ لأنّ المستوي $(ACD)$ هو المستوي $(Q)$.

ومنه $S_{ACD}=\frac{3V_{ABCD}}{d(B;(Q))}$ ولدينا $d(B;(Q))=\frac{|5-14-6|}{5\sqrt{3}}=\frac{15}{5\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

وعليه $S_{ACD}=\frac{3V_{ABCD}}{d(B;(Q))}=\frac{3\times\frac{15}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{3}}{2}ua$.

**تمرين 32** ☹ بكالوريا رياضيات 2013

aziz_mus1@hotmail.fr



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقط $A(0;0;1)$ ، $B(2;2;-1)$ ، $C(-2;-7;-7)$ و $D(-3;4;4)$

و المستوي $(P)$ المعرف بالتمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x=1+3\alpha+\beta \\ y=1-2\alpha \\ z=4+\alpha+\beta \end{cases}$ ، $\alpha$ و $\beta$ وسيطيان حقيقيان.

**1.** أ - بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا.

**ب -** تحقق أنّ الشعاع $\vec{n}(3;-2;1)$ ناظمي للمستوي $(ABC)$، ثمّ اكتب معادلة ديكارتية له.

**2.** أ - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$، ثمّ بيّن أنّ المستويين $(ABC)$ و $(P)$ متعامدان .

**ب -** بيّن أنّ تقاطع $(ABC)$ و $(P)$ هو المستقيم $(\Delta)$ ذو التمثيل الوسيطي:

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=-7+4t \\ z=-7+5t \end{cases} ;t\in\mathbb{R}$$

**جـ -** احسب المسافة بين النقطة $D$ والمستوي $(ABC)$، والمسافة بين النقطة $D$ والمستوي $(P)$، ثمّ استنتج المسافة بين النقطة $D$ والمستقيم $(\Delta)$

**3.** $(Q)$ المستوي الذي يشمل النقطة $D$ والعمودي على كل من المستويين $(ABC)$ و $(P)$.

أ - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$.

**ب -** بيّن أنّ المستويات الثلاثة $(ABC)$، $(P)$ و $(Q)$ تتقاطع في نقطة واحدة $H$، ثمّ عيّن إحداثيات $H$.

**جـ -** احسب بطريقة ثانية، المسافة بين النقطة $D$ والمستقيم $(\Delta)$.

**الحل☺ :**

**1. أ - إثبات أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا.**

لدينا $\overrightarrow{AB}(2;2;-2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-7;-8)$ و $\frac{-2}{2}\neq\frac{-7}{2}$

إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا.

**ب - التحقق أنّ الشعاع $\vec{n}(3;-2;1)$ ناظمي للمستوي $(ABC)$، ثمّ كتابة معادلة ديكارتية له.**

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=3(2)-2(2)-2=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=3(-2)-2(-7)-8=0$

ومنه $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبالتالي $\vec{n}$ ناظم للمستوي $(ABC)$.

**معادلة المستوي $(ABC)$**

$(ABC)$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بحيث $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ و $\overrightarrow{AM}(x;y;z-1)$.

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ معناه $3x-2y+z-1=0$ وهي معادلة للمستوي $(ABC)$.

**2. أ - كتابة معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$، ثمّ تبيين أنّ المستويين $(ABC)$ و $(P)$ متعامدان.**

$$\begin{cases} x = 1+3\alpha+\beta.....(1) \\ y = 1-2\alpha.....(2) \\ z = 4+\alpha+\beta.....(3) \end{cases}$$ لدينا

بجمع $(1)$ و $(2)$ نجد $x+y=2+\alpha+\beta$ ومنه $x+y-2=\alpha+\beta$

ولدينا من $(3)$ $z-4=\alpha+\beta$ ومنه $x+y-2=z-4$ وعليه $x+y-z+2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$.

**تبيين أنّ المستويين $(ABC)$ و$(P)$ متعامدان.**

$\vec{n}(3;-2;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$ و $\vec{n'}(1;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(P)$.

$\vec{n}.\vec{n'}=3(1)-2(1)-1=0$ وهذا يعني $\vec{n}$ يعامد $\vec{n'}$ ومنه $(ABC)$ و $(P)$ متعامدان.

**ب ـ تبيين أنّ تقاطع $(ABC)$ و $(P)$ هو المستقيم $(\Delta)$ ذو التمثيل الوسيطي:**

$$\begin{cases} x = -2+t \\ y = -7+4t\,;t\in\mathbb{R} \\ z = -7+5t \end{cases}$$

بالتعويض في معادلة $(ABC)$ و $(P)$ نجد:

$3(-2+t)-2(-7+4t)+(-7+5t)-1=0$ ومنه $(\Delta)$ محتوى في المستوي $(ABC)$.

و $(-2+t)+(-7+4t)-(-7+5t)+2=0$ ومنه $(\Delta)$ محتوى في المستوي $(P)$.

وعليه تقاطع $(ABC)$ و $(P)$ هو المستقيم $(\Delta)$.

**جـ ـ المسافة بين النقطة $D$ والمستوي $(ABC)$.**

$$.d_1=\frac{|3(-3)-2(4)+4-1|}{\sqrt{14}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$$

**المسافة بين النقطة $D$ والمستوي $(P)$.**

$$.d_2=\frac{|-3+4-4+2|}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

**استنتاج المسافة $d_3$ بين النقطة $D$ والمستقيم $(\Delta)$.**

المستويان $(ABC)$ و$(P)$ متعامدان ومنه حسب نظرية فيتاغورث $d_3^{\,2}=d_1^{\,2}+d_2^{\,2}$

ومنه $d_3=\sqrt{d_1^{\,2}+d_2^{\,2}}$ وعليه $.d_3=\sqrt{\frac{43}{3}}$

**3.** $(Q)$ المستوي الذي يشمل النقطة $D$ والعمودي على كل من المستويين $(ABC)$ و$(P)$.

**أ ـ كتابة معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$.**

$(ABC)$ و$(P)$ يتقاطعان في المستقيم $(\Delta)$ وبما أن $(Q)$ يعامد $(ABC)$ و$(P)$ فإنه يعامد المستقيم $(\Delta)$ أي أنّ $\vec{u}(1;4;5)$ شعاع توجيه $(\Delta)$ هو شعاع ناظمي للمستوي $(Q)$.

معادلة المستوي $(Q)$ من الشكل $x+4y+5z+d=0$ وبما أنّ $D$ تنتمي للمستوي $(Q)$

aziz_mus1@hotmail.fr



WWW.DZPEN.COM

فإنّ $-3+4(4)+5(4)+d=0$ ومنه $d=-33$ وعليه $(Q):x+4y+5z-33=0$.

**ب ـ تبيين أنّ المستويات الثلاثة $(ABC)$، $(P)$ و $(Q)$ تتقاطع في نقطة واحدة $H$.**

بما أنّ $(ABC)\cap(P)=(\Delta)$ فإنّ $(ABC)\cap(P)\cap(Q)=(Q)\cap(\Delta)$.

بما أنّ $(\Delta)$ يعامد $(Q)$ فإنّ $(\Delta)$ و $(Q)$ يتقاطعان في نقطة $H$.

**تعيين $H$ نقطة تقاطع $(\Delta)$ و $(Q)$.**

إحداثيات $H$ هي حل للجملة
$$\begin{cases} x=-2+t.....(1)\\ y=-7+4t.....(2)\\ z=-7+5t.....(3)\\ x+4y+5z-33=0.....(4)\end{cases}$$

ومنه $-2+t+4(-7+4t)+5(-7+5t)-33=0$ وعليه $t=\frac{7}{3}$ إذن $H\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3};\frac{14}{3}\right)$.

**جـ ـ حساب بطريقة ثانية، المسافة بين النقطة $D$ والمستقيم $(\Delta)$.**

المسقط العمودي لكل نقطة من $(Q)$ على $(\Delta)$ هي النقطة $H$ لأنّ $(\Delta)$ عمودي على $(Q)$.

وبما أنّ $D$ نقطة من $(Q)$ فإنّ $H$ هي المسقط العمودي للنقطة $D$ على $(\Delta)$.

بالتالي $d(D;(\Delta))=DH$.

لدينا $\overrightarrow{DH}\left(\frac{10}{3};-\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right)$ ومنه $DH=\sqrt{\frac{100}{9}+\frac{25}{9}+\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{129}{9}}=\sqrt{\frac{43}{3}}$.

**تمرين 33☹ بكالوريا تقني رياضي 2009**

1- نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط:

$A(1;1;2)$ ، $B(-1;0;-2)$ ، $C(-1;0;-6)$

ـ بيّن أنّ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق: $MA^2-MB^2=1$ هي مستو عمودي على المستقيم $(AB)$ نرمز له بالرمز $(P)$ يطلب تعيين معادلة ديكارتية له.

2- لتكن $S$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تُحقق: $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$

ـ بيّن أنّ $S$ هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها $\omega$ ونصف قطرها $R$.

3- $G$ نقطة من الفضاء معرّفة بالعلاقة $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

أ ـ عيّن إحداثيات النقطة $G$ ثمّ تأكد أنّها تنتمي إلى $S$.

ب ـ أُكتب معادلة المستوي $(Q)$ الذي يمسّ سطح الكرة $S$ في النقطة $G$.

**الحل☺:**

**تبيين أنّ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق: $MA^2-MB^2=1$ هي مستو عمودي على المستقيم $(AB)$ نرمز له بالرمز $(P)$ يطلب تعيين معادلة ديكارتية له.**

$AM=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}$ ومنه $AM^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2$

$BM=\sqrt{(x+1)^2+y^2+(z+2)^2}$ ومنه $BM^2=(x+1)^2+y^2+(z+2)^2$


aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefai A/Elaziz

$MA^2-MB^2=1$ تكافئ $\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2\right]-\left[(x+1)^2+y^2+(z+2)^2\right]=1$

وتكافئ $-4x-2y-8z=0$ أي $-2x-y-4z=0$ وهي معادلة مستو شعاعه الناظم $\overrightarrow{AB}(-2;-1;-4)$ ومنه المستوي $(P)$ عمودي على المستقيم $(AB)$.

2- لتكن $S$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق: $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$

**ـ إثبات أنّ $S$ هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها $\omega$ ونصف قطرها $R$.**

$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$ معناه $(x-1)^2-1+(y-1)^2-1+(z-1)^2-1-6=0$

ومنه $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$ إذن $S$ هي سطح كره مركزها $\omega(1;1;1)$

وطول نصف قطرها $R=3$.

3- $G$ نقطة من الفضاء معرّفة بالعلاقة $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ .

**أ ـ تعيين إحداثيات النقطة $G$ ثمّ التأكد أنّها تنتمي إلى $S$.**

$G$ هي مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$ وعليه $x_G=\frac{x_A-x_B+x_C}{1-1+1}=1$

$y_G=\frac{y_A-y_B+y_C}{1-1+1}=1$ ، $z_G=\frac{z_A-z_B+z_C}{1-1+1}=-2$ إذن $G(1;1;-2)$.

**التأكد أنّ $G$ تنتمي إلى $S$.**

يمكن التأكد بسهولة أنّ $G$ تنتمي إلى $S$ بتعويض إحداثيات $G$ في معادلة $S$ نجد:

$(1-1)^2+(1-1)^2+(-2-1)^2=9$ وهذا يعني أنّ $G$ تنتمي إلى $S$.

**ب ـ كتابة معادلة المستوي $(Q)$ الذي يمسّ سطح الكرة $S$ في النقطة $G$ .**

المستوي $(Q)$ ناظمه الشعاع $\overrightarrow{\omega G}$ ويشمل النقطة $G$. ولدينا $\overrightarrow{\omega G}(0.0.-3)$.

ومنه معادلة $(Q)$ من الشكل $-3z+d=0$ وبما أنّ $(Q)$ يشمل $G$ فإنّ $-3(-2)+d=0$ ومنه $d=-6$

وعليه $-3z-6=0$ ومنه $z+2=0$ هي معادلة للمستوي $(Q)$.

**<u>تمرين 34☹ (بكالوريا تقني رياضي 2012)</u>**

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، $(P)$ المستوي الذي

$-4x-3y+1=0$ معادلة ديكارتية له و $(D)$ المستقيم الذي $(k\in\mathbb{R})$ تمثيل وسيطي له $\begin{cases}x=k\\ y=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}k\\ z=-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}k\end{cases}$

1. تحقق أنّ المستقيم $(D)$ محتوى في المستوي $(P)$.
2. أ ـ أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $A(1;1;0)$ و $\vec{u}(4;1;3)$ شعاع توجيه له.

   ب ـ عيّن إحداثيات تقاطع المستقيمين $(D)$ و $(\Delta)$.
3. بيّن أنّ: $3x-4z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$ الذي يحوي المستقيمين $(D)$ و $(\Delta)$.
4. $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

   أ ـ احسب المسافة بين $M$ و كل من $(P)$ و $(Q)$.

aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefai A/Elaziz

**ب ـ** أثبت أن مجموعة النقط $M$ من الفضاء المتساوية المسافة عن كل من $(P)$ و $(Q)$ هي إتحاد مستويين متعامدين $(P_1)$ و $(P_2)$ يطلب تعيين معادلة ديكارتية لكل منهما.

5. عين مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي إحداثياتها حلول للجملة الآتية:

$$\begin{cases} 4x+3y-1=0 \\ 3x-4z-3=0 \\ x+3y+4z+2=0 \end{cases}$$

**الحل☺ :**

1. **التحقق أنّ المستقيم $(D)$ محتوى في المستوي $(P)$.**

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم $(D)$ في معادلة المستوي $(P)$ نجد:

$4(k)-3\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}k\right)+1=-4k-1+4k+1=0$ ومنه المستقيم $(D)$ محتوى في المستوي $(P)$

2. **أ ـ** كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $A(1;1;0)$ و $\vec{u}(4;1;3)$ شعاع توجيه له.

لتكن $M(x;y;z)$ من $(\Delta)$ ومنه $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}\ /\ \lambda\in\mathbb{R}$ و $\overrightarrow{AM}(x-1;y-1;z)$.

ومنه $\begin{cases} x-1=4\lambda \\ y-1=\lambda \\ z=3\lambda \end{cases}$ ;$(\lambda\in\mathbb{R})$ أي $\begin{cases} x=1+4\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=3\lambda \end{cases}$ ;$(\lambda\in\mathbb{R})$.

**ب ـ تعيين إحداثيات تقاطع المستقيمين $(D)$ و $(\Delta)$.**

نحل الجملة $\begin{cases} k=1+4\lambda.....(1) \\ \frac{1}{3}-\frac{4}{3}k=1+\lambda.....(2) \\ -\frac{3}{4}+\frac{3}{4}k=3\lambda.....(3) \end{cases}$

$\begin{cases} k=1+4\lambda.....(1) \\ 1-4k=3+3\lambda.....(2) \\ -3+3k=12\lambda.....(3) \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} k=1+4\lambda.....(1) \\ \frac{1}{3}-\frac{4}{3}k=1+\lambda.....(2) \\ -\frac{3}{4}+\frac{3}{4}k=3\lambda.....(3) \end{cases}$

نعوض $k$ بقيمتها من $(1)$ في $(2)$ نجد $1-4(1+4\lambda)=3+3\lambda$ أي $-19\lambda=6$ ومنه $\lambda=-\frac{6}{19}$

بالتعويض في $(1)$ نجد $k=1+4\left(-\frac{6}{19}\right)$ أي $k=-\frac{5}{19}$.

بتعويض قيمتي $k$ و $\lambda$ في $(3)$ نجد: $-3+3\left(-\frac{5}{19}\right)=12\left(-\frac{6}{19}\right)$ أي $-\frac{72}{19}=-\frac{72}{19}$ محققة.

**نتيجة:** المستقيمان $(D)$ و $(\Delta)$ يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيات $\left(-\frac{5}{19};\frac{13}{19};\frac{18}{19}\right)$.

3. **إثبات أنّ:** $3x-4z-3=0$ **هي معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$ الذي يحوي المستقيمين $(D)$ و $(\Delta)$.**

aziz_mus1@hotmail.fr

بما أنّ المستقيمين $(D)$ و $(\Delta)$ متقاطعان فإنّه يوجد مستو وحيد يشملهما.

$3(k)-4\left(-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}k\right)-3=3k+3-3k-3=0$ ومنه المستقيم $(D)$ محتوى في المستوي $(Q)$

بنفس الطريقة مع المستقيم $(\Delta)$: $3(1+4\lambda)-4(3\lambda)-3=0$ ومنه المستقيم $(\Delta)$ محتوى في المستوي $(Q)$.

إذن $3x-4z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$ الذي يحوي المستقيمين $(D)$ و $(\Delta)$.

**أ ـ حساب المسافة بين $M$ و كل من $(P)$ و $(Q)$.**

$d(M;(P))=\frac{|-4x-3y+1|}{5}$ ، $d(M;(Q))=\frac{|3x-4z-3|}{5}$.

**ب ـ إثبات أنّ مجموعة النقط $M$ من الفضاء المتساوية المسافة عن كل من $(P)$ و $(Q)$ هي إتحاد مستويين متعامدين $(P_1)$ و $(P_2)$ يطلب تعيين معادلة ديكارتية لكل منهما.**

$d(M;(P))=d(M;(Q))$ معناه $\frac{|-4x-3y+1|}{5}=\frac{|3x-4z-3|}{5}$

وتكافئ $|-4x-3y+1|=|3x-4z-3|$ أي $-4x-3y+1=3x-4z-3$ أو

$-4x-3y+1=-(3x-4z-3)$ ومنه $-7x-3y+4z+4=0$ أو $x+3y+4z+2=0$.

إذن مجموعة النقط $M$ من الفضاء المتساوية المسافة عن كل من $(P)$ و $(Q)$ هي إتحاد مستويين متعامدين $(P_1):-7x-3y+4z+4=0$ و $(P_2):x+3y+4z+2=0$.

5. **تعيين مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي إحداثياتها حلول للجملة الآتية:**

$$\begin{cases}4x+3y-1=0\\3x-4z-3=0\\x+3y+4z+2=0\end{cases}$$

الجملة هي تقاطع المستويات الثلاثة $(P)$ و $(Q)$ و $(P_2)$.

لدينا $(P)\cap(Q)=(D)$ لندرس تقاطع $(D)$ والمستوي $(P_2)$.

نحل الجملة $\begin{cases}x=k\\y=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}k\\z=-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}k\\x+3y+4z+2=0\end{cases}$ وعليه $k+3\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}k\right)+4\left(-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}k\right)+2=0$

أي $k-4k+3k+1-3+2=0$ أي $0=0$ ومنه $(D)$ محتوى في $(P_2)$.

ومنه مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي إحداثياتها حلول للجملة هي المستقيم $(D)$.

**تمرين 34☹**

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط: $A(-2;1;2)$ ، $B(2;3;0)$

و $C(-2;0;1)$

لتكن $(P)$ مجموعة النقط $M$ بحيث $AM=BM$

1- بيّن أنّ $(P)$ هو المستوي الذي معادلته الديكارتية: $2x+y-z-1=0$


Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

2- حدد معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$ المار من $C$ والموازي للمستوي $(P)$ .

3- أ ـ حدد تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(D)$ المار من $C$ والعمودي على المستوي $(P)$.

ب ـ احسب المسافة بين النقطة $A$ والمستقيم $(D)$ والمسافة بين النقطة $A$ والمستوي $(P)$

4- أ ـ حدد معادلة ديكارتية لسطح الكرة $(S)$ التي قطرها $[AB]$ .

ب ـ حدد تقاطع المستوي $(P)$ وسطح الكرة $(S)$.

**الحل☺**

1- **تبيين أنّ $(P)$ هو المستوي الذي معادلته الديكارتية:** $2x+y-z-1=0$

$(P)$ هو مجموعة النقط $M$ بحيث $AM=BM$ ومنه $(P)$ هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

لتكن $I$ منتصف $[AB]$ ومنه $I(0;2;1)$ ولدينا $2x_I+y_I-z_I-1=2(0)+2-1-1=0$

و $\overrightarrow{AB}(4;2;-2)$ إذن $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي للمستوي ذو المعادلة $2x+y-z-1=0$.

المستوي ذو المعادلة $2x+y-z-1=0$ شعاعه الناظمي $\overrightarrow{AB}$ وهو يشمل $I$ منتصف $[AB]$ إذن هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ أي هو المستوي $(P)$.

**طريقة ثانية:**

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$AM=\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}$ و $BM=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+z^2}$

$AM=BM$ تعني $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(x-2)^2+(y-3)^2+z^2$

بعد التبسيط نجد

$AM=BM$ معناه $8x+4y-4z-4=0$ أي $2x+y-z-1=0$ وهي معادلة ديكارتية لـ$(P)$.

2- **تحديد معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$ المار من $C$ والموازي للمستوي $(P)$.**

المستوي $(Q)$ يوازي $(P)$ إذن معادلة المستوي $(Q)$ من الشكل $2x+y-z+d=0$ وبما أنّ النقطة $C$ تنتمي للمستوي $(Q)$ فإنّ $2(-2)+0-1+d=0$ ومنه $d=5$ وعليه $2x+y-z+5=0$ معادلة للمستوي $(Q)$

3- أ ـ **تحديد تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(D)$ المار من $C$ والعمودي على المستوي $(P)$.**

$(D)$ عمودي على $(P)$ ومنه $\vec{u}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي لـ$(P)$ يكون شعاع توجيه للمستقيم $(D)$.

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(D)$ معناه $\overrightarrow{CM}=t\vec{u}$ حيث $t$ عدد حقيقي و $\overrightarrow{CM}(x+2;y;z-1)$ و $t\vec{u}(2t;t;-t)$.

$\overrightarrow{CM}=t\vec{u}$ معناه $\begin{cases}x+2=2t\\y=t\\z-1=-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ أي $\begin{cases}x=-2+2t\\y=t\\z=1-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

**ب ـ حساب المسافة بين النقطة $A$ والمستقيم $(D)$.**

لتكن $H$ المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستقيم $(D)$ ومنه $\overrightarrow{AH}\,\vec{u}=0$.

لدينا $H\in(D)$ ومنه $H(-2+2t;t;1-t)$ ومنه $\overrightarrow{AH}(2t;t-1;-1-t)$.

$\vec{u}.\overrightarrow{AH}=0$ معناه $2(2t)+(t-1)+t+1=0$ ومنه $6t=0$ أي $t=0$ إذن $H(-2;0;1)$ وبالتالي

$H$ منطبقة على $C$ أي $C$ هي المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستقيم $(D)$.

ومنه $d(A;(D))=AC$.

$\overrightarrow{AC}(0;-1;-1)$ إذن $AC=\sqrt{2}$ وعليه $d(A;(D))=\sqrt{2}$.

**المسافة بين النقطة $A$ والمستوي $(P)$.**

$d(A;(P))=\dfrac{|2(-2)+1-2-1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\sqrt{6}$.

**4- أ ـ تحديد معادلة ديكارتية لسطح الكرة $(S)$ التي قطرها $[AB]$.**

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(S)$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ بحيث $\overrightarrow{MA}(-2-x;1-y;2-z)$ و $\overrightarrow{MB}(2-x;3-y;-z)$

ومنه $(-2-x)(2-x)+(1-y)(3-y)+(2-z)(-z)=0$

بالتالي المعادلة الديكارتية لسطح الكرة $(S)$ هي: $x^2+y^2+z^2-4y-2z-1=0$

وتكافئ $x^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$.

**ب ـ تحديد تقاطع المستوي $(P)$ وسطح الكرة $(S)$.**

مركز السطح $(S)$ هو $\omega(0;2;1)$ ونصف قطره هو $R=\sqrt{6}$.

$d(\omega;(P))=\dfrac{|2(0)+2-1-1|}{\sqrt{6}}=0$.

بما أنّ $d(\omega;(P))=0$ فإنّ المستوي $(P)$ وسطح الكرة $(S)$ يتقاطعان وفق الدائرة الكبيرة في الكرة $(S)$.

أي الدائرة التي مركزها $\omega(0;2;1)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

**<u>تمرين 36</u>☹**

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط: $A(2;1;-1)$، $B(1;-1;3)$،

$C\left(-\dfrac{3}{2};-2;1\right)$ و $D\left(\dfrac{7}{2};-3;0\right)$ ولتكن $I$ منتصف القطعة $[AB]$.

1) **أ)** أحسب إحداثيات النقطة $I$.

**ب)** ليكن $(P)$ المستوي ذو المعادلة $2x+4y-8z+5=0$ ؛ بين أن $(P)$ هو المستوي المحوري لـ $[AB]$.

2) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $C$ و $\vec{u}(1;2;-4)$ شعاع توجيه له.

3) **أ)** جد إحداثيات $E$ نقطة تقاطع المستوي $(P)$ والمستقيم $(\Delta)$.

**ب)** بيّن أنّ $(\Delta)$ و $(AB)$ من نفس المستوي، ثمّ استنتج أنّ المثلث $IEC$ قائم.

4) **أ)** بيّن أنّ المستقيم $(ID)$ عمودي على كل من المستقيم $(AB)$ والمستقيم $(IE)$.

**ب)** احسب حجم رباعي الوجوه $DIEC$.

**<u>الحل</u>☺**

aziz_mus1@hotmail.com
Mostefai A/Elaziz

1) أ ) **إحداثيات النقطة** $I$.

$x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{3}{2}$ ، $y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=0$ ، $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=1$ إذن $I\left(\frac{3}{2};0;1\right)$.

**ب) تبيين أنّ** $(P)$ **هو المستوي المحوري لـ** $[AB]$.

لدينا $\vec{n}(2;4;-8)$ هو شعاع ناظمي للمستوي $(P)$ ولدينا $\overrightarrow{AB}(-1;-2;4)$ ومنه $\vec{n}=-2\overrightarrow{AB}$ بالتالي الشعاعان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا وعليه $\overrightarrow{AB}$ هو شعاع ناظمي للمستوي $(P)$.

ولدينا $2x_I+4y_I-8z_I+5=2\left(\frac{3}{2}\right)+4(0)-8(1)+5=0$ إذن $I$ تنتمي للمستوي $(P)$.

ومنه $(P)$ هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

2) **كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم** $(\Delta)$ **الذي يشمل النقطة** $C$ **و** $\vec{u}(1;2;-4)$ **شعاع توجيه له.**

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(\Delta)$ معناه يوجد عدد حقيقي $t$ بحيث $\overrightarrow{CM}=t\vec{u}$ و $\overrightarrow{CM}\left(x+\frac{3}{2};y+2;z-1\right)$.

$\overrightarrow{CM}=t\vec{u}$ معناه $\begin{cases}x+\frac{3}{2}=t\\ y+2=2t\\ z-1=-4t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ أي $\begin{cases}x=-\frac{3}{2}+t\\ y=-2+2t\\ z=1-4t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

3) أ ) **إيجاد إحداثيات** $E$ **نقطة تقاطع المستوي** $(P)$ **والمستقيم** $(\Delta)$.

نحل الجملة $\begin{cases}x=-\frac{3}{2}+t\\ y=-2+2t\\ z=1-4t\\ 2x+4y-8z+5=0\end{cases}$ وعليه $2\left(-\frac{3}{2}+t\right)+4(-2+2t)-8(1-4t)+5=0$

أي $-3+2t-8+8t-8+32t+5=0$ ومنه $-14+42t=0$ وعليه $t=\frac{1}{3}$.

إذن $x=-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{7}{6}$ ، $y=-2+\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}$ أي $z=1-\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}$ . $E\left(-\frac{7}{6};-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$

**ب) تبيين أنّ** $(\Delta)$ **و** $(AB)$ **من نفس المستوي.**

لدينا $\vec{u}(1;2;-4)$ هو شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta)$ و $\overrightarrow{AB}(-1;-2;4)$ هو شعاع توجيه للمستقيم $(AB)$.

و $\overrightarrow{AB}=-\vec{u}$ ومنه الشعاعان $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا إذن المستقيمان $(\Delta)$ و $(AB)$ متوازيان وبالتالي فهما من نفس المستوي.

**استنتاج أنّ المثلث** $IEC$ **قائم.**

$(AB)$ و $(\Delta)$ متوازيان ومنه $(\Delta)$ عمودي على $(P)$ في $E$ وبما أنّ $C\in(\Delta)$ فإنّ $(CE)$ عمودي على $(P)$ في $E$ وبما أنّ $I$ تنتمي للمستوي $(P)$ فهذا يعني أنّ المثلث $IEC$ قائم في $E$.

4) أ ) **تبيين أنّ المستقيم** $(ID)$ **عمودي على كل من المستقيم** $(AB)$ **والمستقيم** $(IE)$.

aziz_mus1@hotmail.fr

لدينا $\overrightarrow{ID}(2;-3;-1)$ و $\overrightarrow{IE}\left(-\frac{8}{3};\frac{-4}{3};\frac{-4}{3}\right)$ و $\overrightarrow{AB}(-1;-2;4)$.

ومنه $\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AB}=2(-1)-3(-2)-1(4)=0$ و $\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IE}=2\left(-\frac{8}{3}\right)-3\left(-\frac{4}{3}\right)-1\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{16}{3}+\frac{12}{3}+\frac{4}{3}=0$.

اذن المستقيم $(ID)$ عمودي على كل من المستقيم $(AB)$ والمستقيم $(IE)$.

**ب) حساب حجم رباعي الوجوه $DIEC$.**

لدينا $(ID)$ عمودي على $(AB)$ إذن فهو عمودي على $(CE)$ لأنّ $(CE)$ هو المستقيم $(\Delta)$ و $(\Delta)$ يوازي $(AB)$

ومنه $(ID)$ عمودي على كل من $(CE)$ و $(IE)$ وبالتالي $(ID)$ يعامد المستوي $(ICE)$

فتكون النقطة $I$ هي المسقط العمودي للنقطة $D$ على المستوي $(ICE)$.

وعليه حجم رباعي الوجوه $DIEC$ يعطى كما يلي $V=\frac{1}{3}S_{ICE}\times ID$ حيث $S_{ICE}$ هي مساحة المثلث $ICE$.

$S_{ICE}=\frac{IE.CE}{2}=\frac{\frac{4\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{21}}{3}}{2}=\frac{2\sqrt{14}}{3}$ و $ID=\sqrt{2^2+(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$.

وعليه $V=\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{14}}{3}\times\sqrt{14}=\frac{28}{9}uv$.

**تمرين 37☹ ( بكالوريا تقني رياضي 2012)**

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$، النقط:

$A(3;0;0)$ ، $B(0;4;0)$ ، $C(2;2;2)$.

1. بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية وأنّ الشعاع $\vec{n}(4;3;-1)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.
2. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$ الذي يشمل النقط $A$ ، $B$ و $C$.
3. أ - بيّن أنّ: $6x-8y+7=0$ معادلة ديكارتية للمستوي $(P')$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $AM=BM$.

ب - بيّن أنّ: $2x-4y-4z+3=0$ معادلة ديكارتية للمستوي $(P")$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $AM=CM$.

جـ - بيّن أنّ $(P')$ و $(P")$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

4. احسب إحداثيات النقطة $\omega$ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث $ABC$.

**الحل:**

1. **تبيين أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية.**

لدينا $\overrightarrow{AB}(-3;4;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;2;2)$ و $\frac{-1}{-3}\neq\frac{2}{4}$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

وبالتالي النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست في استقامية.

**إثبات أنّ الشعاع $\vec{n}(4;3;-1)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.**

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=4(-3)+3(4)-1(0)=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=4(-1)+3(2)-1(2)=0$.

ومنه $\vec{n}(4;3;-1)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

2. **كتابة معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$ الذي يشمل النقط $A$ ، $B$ و $C$.**

بما أنّ $\vec{n}(4;3;-1)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ فإنه شعاع ناظمي للمستوي $(P)$

aziz_mus1@hotmail.fr

ومنه معادلة المستوي $(P)$ من الشكل $4x+3y-z+d=0$ وبما أنّ $A$ تنتمي للمستوي $(P)$ فإنّ $4(3)+d=0$ ومنه $d=-12$ وعليه $4x+3y-z-12=0$ هي معادلة للمستوي $(P)$.

3. أ ـ **تبيين أنّ:** $6x-8y+7=0$ **معادلة ديكارتية للمستوي** $(P')$ **مجموعة النقط** $M(x;y;z)$ **من الفضاء حيث:** $AM=BM$.

المستوي $(P')$ هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

$(P')$ شعاعه الناظم $\overrightarrow{AB}$ وهو يشمل النقطة $I$ منتصف القطعة $[AB]$.

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من $(P')$ ومنه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}=0$ مع $\overrightarrow{IM}\left(x-\frac{3}{2};y-2;z\right)$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}=0$ معناه $-3\left(x-\frac{3}{2}\right)+4(y-2)+0(z)=0$ ومنه $-3x+4y-\frac{7}{2}=0$

أي $6x-8y+7=0$ وهي معادلة للمستوي $(P')$.

ب ـ **تبيين أنّ:** $2x-4y-4z+3=0$ **معادلة ديكارتية للمستوي** $(P")$ **مجموعة النقط** $M(x;y;z)$ **من الفضاء حيث:** $AM=CM$.

$(P")$ هو المستوي المحوري للقطعة $[AC]$. نبيّن أنّ $2x-4y-4z+3=0$ هي معادلة $(P")$.

لتكن $I'$ منتصف $[AC]$ ومنه $I'\left(\frac{5}{2};1;1\right)$.

$(P")$ ناظمه الشعاع $\overrightarrow{AC}$ ويشمل النقطة $I'$. ومنه من أجل كل $M(x;y;z)$ من $(P")$ لدينا $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{I'M}=0$

ومنه $-1\left(x-\frac{5}{2}\right)+2(y-1)+2(z-1)=0$ أي $-x+2y+2z-\frac{3}{2}=0$ وهذه الأخيرة تكافئ

$2x-4y-4z+3=0$ وهي معادلة للمستوي $(P")$.

جـ ـ **تبيين أنّ** $(P')$ **و** $(P")$ **يتقاطعان وفق مستقيم** $(\Delta)$ **يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.**

$(P')$ ناظمه الشعاع $\overrightarrow{AB}$ و $(P")$ ناظمه الشعاع $\overrightarrow{AC}$ ولدينا الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

وبالتالي $(P')$ و $(P")$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$.

**تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم** $(\Delta)$.

إذا كانت $M(x;y;z)$ نقطة من $(\Delta)$ فإنّ إحداثياتها هي حلول الجملة $\begin{cases}6x-8y+7=0.....(1)\\2x-4y-4z+3=0.....(2)\end{cases}$.

من $(1)$ نجد $x=\frac{4}{3}y-\frac{7}{6}$ نعوض في $(2)$ نجد $2\left(\frac{4}{3}y-\frac{7}{6}\right)-4y-4z+3=0$ ومنه $z=-\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}$

وبوضع $y=3t$ نجد $\begin{cases}x=4t-\frac{7}{6}\\y=3t\\z=-t+\frac{1}{6}\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

4. **حساب إحداثيات النقطة** $\omega$ **مركز الدائرة المحيطة بالمثلث** $ABC$.

مركز الدائرة المحيطة بالمثلث $ABC$ هي نقطة تقاطع محاوره أي هي نقطة تقاطع $(\Delta)$ و $(P)$.

aziz_mus1@hotmail.fr

تقاطع $(\Delta)$ و $(P)$ هو حل الجملة $\begin{cases} x = 4t - \frac{7}{6} \\ y = 3t \\ z = -t + \frac{1}{6} \\ 4x + 3y - z - 12 = 0 \end{cases}$

وعليه $4\left(4t - \frac{7}{6}\right) + 3(3t) - \left(-t + \frac{1}{6}\right) - 12 = 0$ ومنه $16t - \frac{28}{6} + 9t + t - \frac{1}{6} - 12 = 0$ أي $26t = \frac{101}{6}$

أي $t = \frac{101}{156}$ إذن $\begin{cases} x = 4\left(\frac{101}{156}\right) - \frac{7}{6} \\ y = 3\left(\frac{101}{156}\right) \\ z = -\frac{101}{156} + \frac{1}{6} \end{cases}$ وعليه $\omega\left(\frac{37}{26}; \frac{101}{52}; -\frac{25}{52}\right)$

aziz_mus1@hotmail.fr