تمرين جيد في الحساب للمراجعة و التدرب

نـــص التمرين :

نعتبر المتتالية (a_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $a_n = 2\times 5^n + 7$.

1) أ - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : a_n فردي .

ب - عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 8 .

ج - إستنتج أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون : $a_n \equiv 1[8]$.

2) أ - برهن أنه إذا كان : $\begin{cases} x\equiv 1[8] \\ x\equiv 7[125] \end{cases}$ فإن : $x\equiv 257[1000]$.

ب - بين أنه من أجل كل $n\geq 3$ يكون : $a_n \equiv 257[1000]$.

ج - ما هي الأرقام الثلاث الأخيرة للعدد $\left(2\times 5^{2021}+7\right)\left(2\times 5^{2020}+7\right)$ ؟ .

3) أ - تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$.

ب - نعتبر $PGCD\left(a_{2n};a_{2n+1}\right)=d$ ، بين أن d يختلف عن 7 .

ج – جـــــد عندئذ d .

حل مقترح للتمرين :

لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $a_n = 2\times 5^n + 7$.

1) أ – نلاحظ أن a_n هو عبارة عن مجموع عددين أحدهما زوجي $\left(2\times 5^n\right)$ و الآخر فردي (7) إذن : هو فردي .

<u>أو كطريقة أخرى</u> لدينا : $a_n = 2\times 5^n + 7$ أي : $a_n = 2\times 5^n + 2\times 3 + 1$ و منه : $a_n = 2\left(5^n+3\right)+1$ و هذا ما يدل على أن a_n فردي .

ب – نجد : $5^0 \equiv 1[8]$ ، $5^1 \equiv 5[8]$ ، $5^2 \equiv 1[8]$.

إذن : من أجل $n=2k$ يكون : $\boxed{5^n \equiv 1[8]}$ و من أجل $n=2k+1$ يكون : $\boxed{5^n \equiv 5[8]}$.

ج – نميز حالتين :

حالة : $n=2k$ (زوجي) فإن : $5^n \equiv 1[8]$ أي : $2\times 5^n \equiv 2[8]$ أي : $2\times 5^n + 7 \equiv 9[8]$ و منه : $\boxed{a_n \equiv 1[8]}$.

حالة : $n=2k+1$ (فردي) فإن : $5^n \equiv 5[8]$ أي : $2\times 5^n \equiv 10[8]$ أي : $2\times 5^n + 7 \equiv 17[8]$ و منه : $\boxed{a_n \equiv 1[8]}$.

من الحاتين السابقتين نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $\boxed{a_n \equiv 1[8]}$.

2) أ– لنبرهن أنه إذا كان : $\begin{cases} x\equiv 1[8] \\ x\equiv 7[125] \end{cases}$ فإن : $x\equiv 257[1000]$.

لدينا : $\begin{cases} x\equiv 1[8] & \times 125 \\ x\equiv 7[125] & \times 8 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} 125x\equiv 125[1000] \\ 8x\equiv 56[1000] & \times 16 \end{cases}$ نجد : $\begin{cases} 125x\equiv 125[1000] \\ 128x\equiv 896[1000] \end{cases}$ بالطرح نجد : $3x\equiv 771[1000]$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

بضرب هذه الأخيرة في 3 نجد : $9x\equiv 2313[1000]$ و نعلم أن : $2313\equiv 313[1000]$ أي : $9x\equiv 313[1000]$

و منه تصبح : $\begin{cases}9x\equiv 313[1000]\\8x\equiv 56[1000]\end{cases}$ بالطرح نتحصل على : $\boxed{x\equiv 257[1000]}$ هو المطلوب .

<u>أو كطريقة أخرى :</u>

لدينا : $\begin{cases}x\equiv 1[8]\\x\equiv 7[125]\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x=8\alpha+1\\x=125\beta+1\end{cases}$ و منه : $8\alpha+1=125\beta+7$ أي : $8\alpha=125\beta+6$ أي : $8\alpha\equiv 6[125]$

و منه : $4\alpha\equiv 3[125]$ أي : $124\alpha\equiv 93[125]$ و نعلم أن : $125\alpha\equiv 0[125]$ بالطرح نجد : $\alpha\equiv -93[125]$ و منه :

$\alpha\equiv 32[125]$ أي : $\boxed{\alpha=125k+32}$ نعوض قيمة α في : $x=8\alpha+1$ نجد : $x=8(125k+32)+1$ أي :

$x=1000k+257$ و هذا ما يدل على أن : $\boxed{x\equiv 257[1000]}$.

ب – لدينا من أجل $n\geq 3$ يكون : 5^n مضاعفا لـــ 125 مثلا $(5^3=125)$.

إذن : من أجل $n\geq 3$ فإن : $5^n\equiv 0[125]$ أي : $2\times 5^n+7\equiv 7[125]$ و بالتالي يكون : $\boxed{a_n\equiv 7[125]}$.

لدينا مما سبق أن : $a_n\equiv 1[8]$ و $a_n\equiv 7[125]$ إذن حسب السؤال **(أ)** فإن : $\boxed{a_n\equiv 257[1000]}$ هو المطلوب .

ج – لدينا : $(2\times 5^{2020}+7)(2\times 5^{2021}+7)=a_{2020}\times a_{2021}$.

حسب ما سبق لدينا : $\begin{cases}a_{2020}\equiv 257[1000]\\a_{2021}\equiv 257[1000]\end{cases}$ أي : $a_{2020}\times a_{2021}\equiv 257^2[1000]$ و منه : $a_{2020}\times a_{2021}\equiv 66049[1000]$

إذن : $\boxed{a_{2020}\times a_{2021}\equiv 49[1000]}$ و هذا ما يدل على أن آخر ثلاث أرقام للعدد $(2\times 5^{2020}+7)(2\times 5^{2021}+7)$ هي : $\boxed{049}$

3) أ – لدينا : $5a_{2n}-a_{2n+1}=5(2\times 5^{2n}+7)-(2\times 5^{2n+1}+7)$ أي : $5a_{2n}-a_{2n+1}=2\times 5^{2n+1}+35-2\times 5^{2n+1}-7$

إذن : $\boxed{5a_{2n}-a_{2n+1}=28}$.

ب – لدينا : $PGCD(a_{2n},a_{2n+1})=d$ أي أن : d/a_{2n} و d/a_{2n+1} ، لكن : $a_{2n}=2\times 5^{2n}+7$ و نعلم أن : (2×5^{2n})

ليس مضاعفا لـــ 7 إذن : a_{2n} فردي و لا يقبل القسمة على 7 إذن : $\boxed{d\neq 7}$.

ج – إيجاد قيم d :

لدينا : $PGCD(a_{2n},a_{2n+1})=d$ أي أن : d/a_{2n} و d/a_{2n+1} إذن : $d/5a_{2n}-a_{2n+1}$ و منه : $\boxed{d/28}$.

و بالتالي قيم d الممكنة هي : $28,14,7,4,2,1$ لكن $d\neq 7$ و أيضا حسب السؤال (1) **(أ)** فإن : a_n فردي

بالتالي فحسب الشروط السابقة نستنتج أن : $\boxed{d=1}$.

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM