نص التمرين

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 حيث: $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\dfrac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}}$.

1) أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=2\sqrt{u_n+1}-\dfrac{2}{\sqrt{u_n+1}}$.

ب. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1<u_n<3$.

جـ. بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

د. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

2) أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $9-u_{n+1}^{\,2}<4(3-u_n)$.

ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $3-u_{n+1}<\dfrac{4}{5}(3-u_n)$.

جـ. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $3-u_n<\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

د. أحسب نهاية المتتالية (u_n).

3) لتكن المتتالية العددية (S_n) المعرفة على ب:

$$S_n=\frac{u_0-4}{3-u_0}+\frac{u_1-4}{3-u_1}+\frac{u_2-4}{3-u_2}+\ldots+\frac{u_n-4}{3-u_n}$$

أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n<-n-1+4\left[1-\left(\dfrac{5}{4}\right)^{n+1}\right]$.

ب. استنتج نهاية المتتالية (S_n).

حل مقترح

المتتالية العددية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ:

$$\begin{cases}u_0=2\\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}}\end{cases}$$

1) أ. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=2\sqrt{u_n+1}-\dfrac{2}{\sqrt{u_n+1}}$:

من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1}=\frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}}\Leftrightarrow u_{n+1}=\frac{2u_n+2-2}{\sqrt{u_n+1}}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1}=\frac{2(u_n+1)-2}{\sqrt{u_n+1}}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1}=\frac{2(u_n+1)}{\sqrt{u_n+1}}-\frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1}=\frac{2(u_n+1)\times\sqrt{u_n+1}}{\sqrt{u_n+1}\times\sqrt{u_n+1}}-\frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1}=\frac{2(u_n+1)\times\sqrt{u_n+1}}{(u_n+1)}-\frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1}=2\sqrt{u_n+1}-\frac{2}{\sqrt{u_n+1}}$$

ومنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=2\sqrt{u_n+1}-\dfrac{2}{\sqrt{u_n+1}}$.

1) ب. نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1<u_n<3$:

لتكن الخاصية $p(n)$ التالية:

$$p(n):1<u_n<3$$

نتحقق من صحة الخاصية $p(0)$:

لدينا: $u_0=2$ و $1<2<3$ وعليه: $1<u_0<3$ ومنه: $p(0)$ صحيحة.

نفرض صحة $p(n)$ من أجل n كيفي أي: $1<u_n<3$.

ونبرهن صحة $p(n+1)$ من أجل كل عدد طبيعي n أي: $1<u_{n+1}<3$.

لدينا من فرضية التراجع: $1<u_n<3$.

فينتج:

$$1<u_n<3\Leftrightarrow 2<u_n+1<4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}<\sqrt{u_n+1}<2\ldots(*)$$

من (*) ينتج:

$$2\sqrt{2}<2\sqrt{u_n+1}<4\ldots(1)$$

ومن (*) لدينا:

$$\sqrt{2}<\sqrt{u_n+1}<2\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{u_n+1}}<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{-2}{\sqrt{2}}<\frac{-2}{\sqrt{u_n+1}}<-1$$

$$\Leftrightarrow-\sqrt{2}<\frac{-2}{\sqrt{u_n+1}}<-1\ldots(2)$$

بجمع المتراجحتين (1) و (2) طرف لطرف ينتج:

$$1<\sqrt{2}<2\sqrt{u_n+1}-\frac{2}{\sqrt{u_n+1}}<3$$

نجد: $1<u_{n+1}<3$ ومنه: $p(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1<u_n<3$.

1) جـ. نبين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما:

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ حيث:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}}-u_n$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n-u_n\sqrt{u_n+1}}{\sqrt{u_n+1}}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n\left(2-\sqrt{u_n+1}\right)}{\sqrt{u_n+1}}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n\left(2-\sqrt{u_n+1}\right)\left(2+\sqrt{u_n+1}\right)}{\sqrt{u_n+1}\left(2+\sqrt{u_n+1}\right)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(4-u_n-1)}{\sqrt{u_n+1}\left(2+\sqrt{u_n+1}\right)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(3-u_n)}{\sqrt{u_n+1}\left(2+\sqrt{u_n+1}\right)}$$

لدينا من **1)** ب: $1<u_n<3$.

أي: $0<1<u_n<3$.

ومنه: $u_n>0$ و $3-u_n>0$ و $\sqrt{u_n+1}>0$ و $2+\sqrt{u_n+1}>0$.

فينتج: $\frac{u_n(3-u_n)}{\sqrt{u_n+1}\left(2+\sqrt{u_n+1}\right)}>0$ أي: $u_{n+1}-u_n>0$.

ومنه: المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

1) د. استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة:

بما أن:

- المتتالية (u_n) متزايدة تماما $(u_{n+1}-u_n>0)$.
- المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3 $(u_n<3)$.

فنستنتج أن:

المتتالية (u_n) متقاربة نحو نهاية .

2) أ. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $9-{u_{n+1}}^2<4(3-u_n)$:

من أجل كل عدد طبيعي n:

$$9-{u_{n+1}}^2=9-\left(\frac{2u_n}{\sqrt{u_n+1}}\right)^2$$

$${9-u_{n+1}}^2=9-\frac{4{u_n}^2}{u_n+1}$$

$${9-u_{n+1}}^2=\frac{9(u_n+1)-4{u_n}^2}{u_n+1}$$

$${9-u_{n+1}}^2=\frac{-4{u_n}^2+9u_n+9}{u_n+1}$$

$${9-u_{n+1}}^2=\frac{-4\left(u_n+\frac{3}{4}\right)(u_n-3)}{u_n+1}$$

$${9-u_{n+1}}^2=\frac{(4u_n+3)(-u_n+3)}{u_n+1}$$

$${9-u_{n+1}}^2=\frac{(4u_n+3)(3-u_n)}{u_n+1}$$

$${9-u_{n+1}}^2=\frac{4u_n+3}{u_n+1}(3-u_n)$$

$${9-u_{n+1}}^2=\frac{4(u_n+1)-1}{u_n+1}(3-u_n)$$

$${9-u_{n+1}}^2=\left(\frac{4(u_n+1)}{u_n+1}-\frac{1}{u_n+1}\right)(3-u_n)$$

$${9-u_{n+1}}^2=\left(4-\frac{1}{u_n+1}\right)(3-u_n)$$

لاحظ أن: $4-\frac{1}{u_n+1}<4$ لأن: $\frac{1}{u_n+1}>0$.

فينتج: $\left(4-\frac{1}{u_n+1}\right)(3-u_n)<4(3-u_n)$ لأن: $3-u_n>0$.

ومنه:

$${9-u_{n+1}}^2<4(3-u_n)$$

2) ب. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $3-u_{n+1}<\frac{4}{5}(3-u_n)$:

لدينا من **2)** أ. : ${9-u_{n+1}}^2<4(3-u_n)$.

فينتج: $(3-u_{n+1})(3+u_{n+1})<4(3-u_n)$.

ومنه: $3-u_{n+1}<\frac{4}{3+u_{n+1}}(3-u_n)\ldots(3)$ لأن: $3+u_{n+1}>0$.

ولدينا: المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

أي: $u_{n+1}>u_n>u_0$ و $u_0=2$.

ومنه: $u_{n+1}>2$.

فينتج:

$$u_{n+1}>2\Leftrightarrow 3+u_{n+1}>5$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3+u_{n+1}}<\frac{1}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{4}{3+u_{n+1}}<\frac{4}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{4}{3+u_{n+1}}(3-u_n)<\frac{4}{5}(3-u_n)\ldots(4)$$

من (3) و (4) ينتج (بالتعدي):

$$3-u_{n+1}<\frac{4}{5}(3-u_n)$$

2) جـ. استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n$:

لدينا من 2) بـ: $3-u_{n+1}<\frac{4}{5}(3-u_n)$.

فينتج:

$$\begin{cases} n=0\Leftrightarrow 3-u_1<\frac{4}{5}(3-u_0)\\ n=1\Leftrightarrow 3-u_2<\frac{4}{5}(3-u_1)\\ n=2\Leftrightarrow 3-u_3<\frac{4}{5}(3-u_2)\\ \vdots\\ n-2\Leftrightarrow 3-u_{n-1}<\frac{4}{5}(3-u_{n-2})\\ n-1\Leftrightarrow 3-u_n<\frac{4}{5}(3-u_{n-1}) \end{cases}$$

بضرب كل المتراجحات طرف في طرف (عموديا) وبعد الاختزال ينتج:

$$3-u_n<(3-u_0)\left(\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\ldots\times\frac{4}{5}\right)^n$$

$$3\ u_n<(3-u_0)\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$3\ u\ <(3-2)\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$3^{-}u_n\quad\frac{4}{5}^n$$

ومنه نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

2) د. نحسب نهاية المتتالية (u_n):

لدينا من **2)** جـ: $3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n$ ولدينا: $3-u_n>0$.

فينتج:

$$0<3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

حيث: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$ لأن: $-1<\frac{4}{5}<1$ وعليه: $0<\lim\limits_{n\to+\infty}(3-u_n)<0$.

وحسب مبدأ النهايات بالحصر فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty}(3-u_n)=0$.

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=3$$

3) لتكن المتتالية العددية (S_n) المعرفة على بـ:

$$S_n=\frac{u_0-4}{3-u_0}+\frac{u_1-4}{3-u_1}+\ldots+\frac{u_n-4}{3-u_n}$$

3) أ. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n<-n-1+4\left[1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right]$:

من أجل كل عدد طبيعي n:

$$S_n=\frac{u_0-4}{3-u_0}+\frac{u_1-4}{3-u_1}+\ldots+\frac{u_n-4}{3-u_n}$$

$$S_n=\frac{u_0-3-1}{3-u_0}+\frac{u_1-3-1}{3-u_1}+\ldots+\frac{u_n-3-1}{3-u_n}$$

$$S_n=\frac{-(3-u_0)-1}{3-u_0}+\frac{-(3-u_1)-1}{3-u_1}+\ldots+\frac{-(3-u_n)-1}{3-u_n}$$

$$S_n=\left(-1+\frac{-1}{3-u_0}\right)+\left(-1+\frac{-1}{3-u_1}\right)+\ldots+\left(-1+\frac{-1}{3-u_n}\right)$$

$$S_n=-(1+1+\ldots+1)+\left(\frac{-1}{3-u_0}+\frac{-1}{3-u_1}+\ldots+\frac{-1}{3-u_n}\right)$$

$$S_n=-(n+1)+\left(\frac{-1}{3-u_0}+\frac{-1}{3-u_1}+\ldots+\frac{-1}{3-u_n}\right)$$

$$S_n=-n-1+\left(\frac{-1}{3-u_0}+\frac{-1}{3-u_1}+\ldots+\frac{-1}{3-u_n}\right)$$

لدينا من **2)** جـ: $3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

ومنه:

$$3-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n\Leftrightarrow\frac{1}{3-u_n}>\left(\frac{5}{4}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow\frac{-1}{3-u_n}<-\left(\frac{5}{4}\right)^n$$

فينتج:

$$\begin{cases}n=0: \dfrac{-1}{3-u_0}<-\left(\dfrac{5}{4}\right)^0\\ n=1: \dfrac{-1}{3-u_1}<-\left(\dfrac{5}{4}\right)^1\\ \vdots\\ n: \dfrac{-1}{3-u_n}<-\left(\dfrac{5}{4}\right)^n\end{cases}$$

بجمع المتراجحات طرف إلى طرف (عموديا) ينتج:

$$\frac{-1}{3-u_0}+\frac{-1}{3-u_1}+\ldots+\frac{-1}{3-u_n}<-\left[\left(\frac{5}{4}\right)^0+\left(\frac{5}{4}\right)^1+\ldots+\left(\frac{5}{4}\right)^n\right]$$

$$\frac{-1}{3-u_0}+\frac{-1}{3-u_1}+\ldots+\frac{-1}{3-u_n}<-\left[\left(\frac{5}{4}\right)^0\times\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}-1}{\frac{5}{4}-1}\right]$$

$$\frac{-1}{3-u_0}+\frac{-1}{3-u_1}+\ldots+\frac{-1}{3-u_n}<-\left[1\times\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{4}}\right]$$

$$\frac{-1}{3-u_0}+\frac{-1}{3-u_1}+\ldots+\frac{-1}{3-u_n}<-4\left[\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}-1\right]$$

$$\frac{-1}{3-u_0}+\frac{-1}{3-u_1}+\ldots+\frac{-1}{3-u_n}<4\left[1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right]$$

$$-n-1+\left(\frac{-1}{3-u_0}+\frac{-1}{3-u_1}+\ldots+\frac{-1}{3-u_n}\right)<-n-1+4\left[1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right]$$

$$S_n<-n-1+4\left[1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right]$$

3) بـ استنتاج نهاية المتتالية (S_n):

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n=+\infty$ لأن: $\frac{5}{4}>1$.

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-n-1+4\left[1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}\right]\right)=-\infty$$

فينتج:

$$\begin{cases}S_n<-n-1+4\left[1-\left(\dfrac{5}{4}\right)^{n+1}\right]\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-n-1+4\left[1-\left(\dfrac{5}{4}\right)^{n+1}\right]\right)=-\infty\end{cases}$$

وحسب مبدأ النهايات بالمقارنة فإن:

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=-\infty$$

ـ حقوق النشر محفوظة ـ
الأستاذ عبد الحميد