# لشعبة : علوم تجريبية

# من 2008 إلى 2019

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

# أسئلة الدوال الأصلية و التكاملات

## التمرين [1] [باك 2008][م1]

$g$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$ .

- $H$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان .

ـ عيّن $\alpha$ و $\beta$ بحيث تكون $H$ دالة أصلية للدالة : $g(x)-1$ . $x$ استنتج الدالة الأصلية للدالة $g$ و التي تنعدم عند القيمة 0

## التمرين[2] [باك 2008][م2]

$f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$ .

- أكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=x+a+\dfrac{b}{(x-1)^2}$ حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان .
- عيّن $F$ الدالة الأصلية للدالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$ و التي تحقق $F(1)=2$ .

## التمرين [3] [باك 2009][م1]

$k$ الدالة المعرفة على $-\{-1\}$ كما يلي : $k(x)=|x|+\dfrac{4}{x+1}$ ، $(C_k)$ تمثيلها البياني .

- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_k)$ و المستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=\dfrac{1}{2}$ ، $x=-\dfrac{1}{2}$ .

## التمرين [4] [باك 2009][م2]

$f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني .

- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(C_f)$ و المستقيمات التي معادلاتها : $y=x-1$ ، $x=0$ و $x=1$ .

## التمرين [5] [باك 2011][م1]

$g$ الدالة المعرفة على $-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ ، و $f$ الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

- $\alpha$ عدد حقيقي . بيّن أن الدالة $(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$ .
- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x)=1-\dfrac{2}{x+1}$ ثم عيّن دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]1;+\infty[$

## التمرين [6] [باك 2011][م2]

$f$ الدالة العددية المعرفة على بـ : $f(x)=e^x-ex-1$ . $(C_f)$ تمثيلها البياني .

- أحسب بدلالة $\alpha$ ، المساحة $A(\alpha)$ للحيّز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x=0$ ؛ $x=\alpha$ . $(f(\alpha)=0$ و يحقق $\alpha\in]1,75;1,76[)$
- أثبت أن : $A(\alpha)=\left(\dfrac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$ ($ua$ هي وحدة المساحات)

## التمرين [7] [باك 2012][م1]

$f$ الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي : $f(x)=x+5+6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني .

- لتكن $g$ الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ كما يلي : $g(x)=\dfrac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ .

بيّن أن $g$ دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]-\infty;0[$ .



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## التمرين [8] [باك 2012][م2]

$g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-xe^{x}$.

- $h$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=(ax+b)e^{x}$

أ- عيّن العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث تكون $h$ دالة أصلية للدالة $xe^{x}$ على $\mathbb{R}$.

ب- إستنتج دالة أصلية للدالة $g$ على $\mathbb{R}$.

## التمرين [9] [باك 2015][م1]

$f$ الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$.

- $F$ الدالة الأصلية للدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$ و التي تحقق: $F(1)=-3$.

1) بيّن أن منحنى الدالة $F$ يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

2) بيّن أن $x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $\ln x$ على $]0;+\infty[$، ثم إستنتج عبارة الدالة $F$.

## التمرين [10] [باك 2015][م2]

$f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

- تحقق أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.
- إستنتج دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$.

## التمرين [11] [باك 2016][الدورة الأولى][م1]

$f$ الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x-1$، $(C_f)$ تمثيلها البياني.

- أ- جد دالة أصلية للدالة $\frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب- أحسب $I_n$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(C_f)$، المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x-1$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$ حيث $n$ عدد طبيعي $(n>1)$.

جـ- عيّن أصغر عدد طبيعي $n_0$ بحيث إذا كان $n>n_0$ فإن: $I_n>2$.

## التمرين [12] [باك 2016][الدورة الأولى][م2]

$f$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$، $(C_f)$ تمثيلها البياني.

- $h$ و $H$ الدالتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=x+f(x)$ و $H(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

1) عيّن الأعداد الحقيقية $a$، $b$ و $c$ بحيث تكون الدالة $H$ دالة أصلية للدالة $h$ على $\mathbb{R}$.

2) أ- أحسب التكامل التالي: $A(\lambda)=\int_0^{\lambda}h(x)dx$، حيث $\lambda$ عدد حقيقي موجب تماما و فسّر النتيجة هندسيا.

ب- أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$.

## التمرين [13] [باك 2016] [الدورة الثانية] [م1]

$f$ الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$، $(C_f)$ تمثيلها البياني.

- بيّن أن الدالة $\frac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ هي دالة أصلية للدالة $\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1;+\infty[$ $x$
- أحسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بحامل محور الفواصل و المنحنى $(C_f)$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$.



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## التمرين [14] [باك 2017] [الدورة العادية] [م2]

$f$ الدالة العددية المعرّفة على بـ: $f(x)=2-x^2e^{1-x}$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني.

- $F$ الدالة المعرفة على بـ: $F(x)=2x+\left(x^2+2x+2\right)e^{1-x}$.

تحقق أن $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على ، ثم أحسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني $(C_f)$ ، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.

## التمرين [15] [باك 2017] [الدورة الإستثنائية] [م2]

$f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=e^{-x}-2-\dfrac{e}{x}$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني.

$(\gamma)$ المنحنى الذي معادلته: $y=e^{-x}-2$.

- ليكن $n$ عددا طبيعيا و $A(n)$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين $(C_f)$ و $(\gamma)$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=-e^n$ و $x=-e^{n+1}$.

أحسب العدد الحقيقي $l$ حيث: $l=A(0)+A(1)+....+A(2016)$.

## التمرين [16] [باك 2018] [م1]

$f$ الدالة المعرفة على بـ: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني.

- باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن دالة أصلية للدالة $xe^{-x}$ و التي تنعدم من أجل $x=1$.
- أحسب العدد $A$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني $(C_f)$ و المستقيمات التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=3$ و $y=2x+1$

## التمرين [17] [باك 2018] [م2]

$f$ الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1+x\ln x}$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني.

- $n$ عدد طبيعي حيث $n>1$ ، $I_n$ مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى $(C_f)$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$.

1) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n>1$: $I_n=\ln(1+n\ln n)$.

2) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية $(I_n)$.

## التمرين [18] [باك 2019] [م1]

$f$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\ln x$. $(C_f)$ تمثيلها البياني.

- $H$ الدالة المعرّفة على المجال $]3;+\infty[$ بـ: $H(x)=\int_3^x \ln(t)dt$ حيث $t$ متغيّر حقيقي موجب تماما.

أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة، عيّن عبارة $H(x)$ بدلالة $x$.

بـ- أحسب $A$ مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ و حامل محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين: $x=3$ و $x=4$.



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

# حلول مقترحة

## حل مقترح للتمرين[1]

$g$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$ .

$H$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان

ـ تعيين $\alpha$ و $\beta$ بحيث تكون $H$ دالة أصلية للدالة : $g(x)-1$ $x$ .

الدالة $H$ قابلة للإشتقاق على المجال $]-2;+\infty[$ ، و $H'(x)=\alpha e^{-x}+\left(-e^{-x}\right)(\alpha x+\beta)=(-\alpha x-\beta+\alpha)e^{-x}$ .

$H$ دالة أصلية للدالة : $g(x)-1$ $x$ معناه : $(-\alpha x-\beta+\alpha)e^{-x}=(-x-1)e^{-x}$ ومنه نجد : $\alpha=1$ و $\beta=2$ .

لدينا : $g(x)=g(x)+1-1=H'(x)+1$ ومنه الدالة الأصلية للدالة $g$ من الشكل : $G(x)=H(x)+x+c$

الدالة الأصلية للدالة $g$ و التي تنعدم عند 0 هي : $G(x)=(x+2)e^{-x}+x+2$ .

## حل مقترح للتمرين[2]

$f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$ .

كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=x+a+\dfrac{b}{(x-1)^2}$ حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان .

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}=\frac{x^3+3x^2+3x+1+1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^3+1}{(x+1)^2}=x+1+\frac{1}{(x+1)^2}$$

تعيين $F$ الدالة الأصلية للدالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$ و التي تحقق $F(1)=2$ .

الدالة $f$ مستمرة على $]-1;+\infty[$ و بالتالي فدالتها الأصلية التي تحقق $F(1)=2$ هي الدالة $F$ المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ :

$F(x)=\int_1^x f(t)dt$ ومنه : $F(x)=\int_1^x\left(t+1+\dfrac{1}{(t+1)^2}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+t-\frac{1}{t+1}\right]_1^x=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x+1}+1$ .

## حل مقترح للتمرين[3]

حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_k)$ و المستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=\dfrac{1}{2}$ ، $x=-\dfrac{1}{2}$ .

$$A=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}k(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}f(x)dx+\int_0^{\frac{1}{2}}g(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(-x+\frac{4}{x+1}\right)dx+\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{4}{x+1}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+4\ln(x+1)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2+4\ln(x+1)\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}+4\ln 3\,uv$$

## حل مقترح للتمرين[4]

$f$ دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني .

حساب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(C_f)$ و المستقيمات التي معادلاتها : $y=x-1$ ، $x=0$ و $x=1$ .

$$S=\int_0^1\left[(x-1)-f(x)\right]dx=\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx=\left[\frac{1}{2}\left(\ln(x+1)\right)^2\right]_0^1=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$$



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## حل مقترح للتمرين[5]

$g$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ ، و $f$ الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

- تبيان أن الدالة $h$ بحيث $h(x)=(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

الدالة $h$ قابلة للإشتقاق على المجال $]\alpha;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]\alpha;+\infty[$ :

$$h'(x)=1\times\ln(x-\alpha)+\frac{1}{x-\alpha}\times(x-\alpha)-1=\ln(x-\alpha)$$

- التحقق :

من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{x+1-2}{x+1}=\dfrac{x+1}{x+1}-\dfrac{2}{x+1}=1-\dfrac{2}{x+1}$ .

تعيين دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]1;+\infty[$ :

من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1;+\infty[$ ، $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=1-\dfrac{2}{x+1}+\ln(x-1)-\ln(x+1)$

و بالتالي دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]1;+\infty[$ من الشكل :

$$F(x)=x-2\ln(x+1)+\left[(x-1)\ln(x-1)-x\right]-\left[(x+1)\ln(x+1)-x\right]=x-(x+3)\ln(x+1)+(x-1)\ln(x-1)$$

## حل مقترح للتمرين[6]

$f$ الدالة العددية المعرفة على بـ: $f(x)=e^x-ex-1$ . $(C_f)$ تمثيلها البياني .

- حساب ، بدلالة $\alpha$ ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ ، $x=\alpha$ .

$$A(\alpha)=-\int_0^{\alpha}f(x)dx=-\int_0^{\alpha}(e^x-ex-1)dx=-\left[e^x-\frac{1}{2}ex^2-x\right]_0^{\alpha}=1-\left(e^{\alpha}-\frac{1}{2}e\alpha^2-\alpha\right)$$

- إثبات أن : $A(\alpha)=\left(\dfrac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$ ( $ua$ هي وحدة المساحات)

لدينا : $f(\alpha)=0$ ومنه $e^{\alpha}-e\alpha-1=0$ أي $e^{\alpha}=e\alpha+1$ و بالتالي :

$$A(\alpha)=-e^{\alpha}+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha+1=-(e\alpha+1)+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha+1=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$$

## حل مقترح للتمرين[7]

$f$ الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي : $f(x)=x+5+6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ .

- لتكن $g$ الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ كما يلي : $g(x)=\dfrac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ .

تبيان أن $g$ دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]-\infty;0[$ :

الدالة $g$ قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و من أجل كل $x\in]-\infty;0[$ :

$$g'(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{6x}{x(x-1)}-\frac{6}{1-x}=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{6}{x-1}+\frac{6}{x-1}=f(x)$$

و منه الدالة $g$ دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]-\infty;0[$ .



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## حل مقترح للتمرين[8]

$g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-xe^{x}$.

$h$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=(ax+b)e^{x}$.

أ ـ تعيين العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث تكون $h$ دالة أصلية للدالة $xe^{x}$ على $\mathbb{R}$.

الدالة $h$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي $x$، $h'(x)=ae^{x}+(ax+b)e^{x}=(ax+a+b)e^{x}$.

الدالة $h$ أصلية للدالة $xe^{x}$ يعني: $x$، $h'(x)=xe^{x}$، و منه بالمطابقة نجد: $a=1$ و $b=-1$. أي $h(x)=(x-1)e^{x}$.

بـ ـ إستنتاج دالة أصلية للدالة $g$ على $\mathbb{R}$:

لدينا: $g(x)=1-xe^{x}$ و منه دالة أصلية للدالة $g$ من الشكل: $G(x)=x-(x-1)e^{x}$.

## حل مقترح للتمرين[9]

$f$ الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$.

$F$ الدالة الأصلية للدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$ و التي تحقق: $F(1)=-3$.

تبيان أن منحنى الدالة $F$ يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

$F$ دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$ يعني: من أجل كل $x\in]0;+\infty[$، $F'(x)=f(x)$.

$F'(x)=0$ تكافئ $f(x)=0$ تكافئ: $x=1$ أو $x=e^{2}$، و منه منحنى الدالة $F$ يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و $e^{2}$.

تبيان أن $x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $\ln x$ على $]0;+\infty[$:

نضع: $u(x)=x\ln x-x$

الدالة $u$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]0;+\infty[$، $u'(x)=\ln x+\frac{1}{x}\times x-1=\ln x$.

و منه الدالة $u$ هي دالة أصلية للدالة $\ln x$ على $]0;+\infty[$.

إستنتاج عبارة الدالة $F$:

$$F(x)=\int_{1}^{x}f(t)dt=\int_{1}^{x}\left(\ln t-2-\frac{\ln t}{t}+\frac{2}{t}\right)dt=\left[t\ln t-t-2t-\frac{1}{2}(\ln t)^{2}-2\ln t\right]_{1}^{x}=(2+x)\ln x-\frac{1}{2}(\ln x)^{2}-3x$$

## حل مقترح للتمرين[10]

$f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

التحقق: من أجل كل عدد حقيقي $x$:

$$2f(x)+f'(x)-f''(x)=2xe^{2x+2}-2x+2+e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1-(4x+4)e^{2x+2}=1-2x-3e^{2x+2}$$

إستنتاج دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$.

لدينا: من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

و منه $f(x)=-\frac{1}{2}f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}-x-\frac{3}{2}e^{2x+2}$.

و بالتالي دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ من الشكل: $F(x)=\frac{1}{2}\left[-f(x)+f'(x)+x-x^{2}-\frac{3}{2}e^{2x+2}\right]+c$

أي: $F(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x+2}-\frac{1}{2}x^{2}+x-1+c$.

## حل مقترح للتمرين[11]

$f$ الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+x-1$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني.

- أ- إيجاد دالة أصلية للدالة $\dfrac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

دالة أصلية للدالة $\dfrac{\ln x}{x}$ على $]0;+\infty[$ من الشكل: $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$. (لاحظ أن $\dfrac{\ln x}{x}$ من الشكل $u'\times u$ )

بـ- حساب $I_n$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$، المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x-1$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$ حيث $n$ عدد طبيعي $(n>1)$.

$$I_n=\int_1^n\left[f(x)-(x-1)\right]dx=\int_1^n\frac{\ln x}{x}dx=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^n=\frac{1}{2}(\ln n)^2$$

جـ- تعيين أصغر عدد طبيعي $n_0$ بحيث إذا كان $n>n_0$ فإن: $I_n>2$.

$I_n>2$ معناه $(\ln n)^2>4$ أي $\ln n>2$ أو $\ln n<-2$ (مرفوض) ومنه $n>e^2$ وعليه: أصغر قيمة لـ $n_0$ هي $n_0=8$.

## حل مقترح للتمرين[12]

$f$ الدالة المعرفة على بـ: $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني.

- $h$ و $H$ الدالتان المعرفتان على كما يلي: $h(x)=x+f(x)=(x^2+2x+3)e^{-x}$ و $H(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

1) تعيين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ بحيث تكون الدالة $H$ دالة أصلية للدالة $h$ على :

$H$ دالة أصلية للدالة $h$ على يعني: من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $H'(x)=h(x)$.

الدالة $H$ قابلة للإشتقاق على ومن أجل كل عدد حقيقي $x$ ،

$$H'(x)=(2ax+b)e^{-x}-(ax^2+bx+c)e^{-x}=(-ax^2+(2a-b)x+b-c)e^{-x}$$

ومنه بالمطابقة نجد: $a=-1$ ، $b=-5$ و $c=-7$ أي $H(x)=(-x^2-5x-7)e^{-x}$.

2) أ- حساب التكامل: $A(\lambda)=\int_0^{\lambda}h(x)dx$ ، حيث $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$.

$$A(\lambda)=\int_0^{\lambda}h(x)dx=\left[H(x)\right]_0^{\lambda}=(-\lambda^2-5\lambda-7)e^{-\lambda}+7$$

التفسير الهندسي:

$A(\lambda)$ يمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$، المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=-x$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=\lambda$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$.

بـ- $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[(-\lambda^2-5\lambda-7)e^{-\lambda}+7\right]=7$.

## حل مقترح للتمرين[13]

$f$ الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني.

- تبيان أن الدالة $\dfrac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ هي دالة أصلية للدالة $\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1;+\infty[$

نضع: $h(x)=\dfrac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ ، الدالة $h$ قابلة للإشتقاق على $]-1;+\infty[$ ومن أجل كل $x\in]-1;+\infty[$:

$$h'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}\left[1+\ln(x+1)\right]+\left(\frac{1}{x+1}\right)\times\left(\frac{-1}{x+1}\right)=\frac{1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

بـ حساب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بحامل محور الفواصل و المنحنى $(C_f)$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left[\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]dx=\left[e\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]\right]_0^1=\frac{1+(2e-1)\ln 2}{2}$$

## حل مقترح للتمرين[14]

$f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2-x^2e^{1-x}$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني.

- $F$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x)=2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}$.

ـ التحقق أن $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ :

الدالة $F$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي $x$ :

$$F'(x)=2+(2x+2)e^{1-x}-(x^2+2x+2)e^{1-x}=2-x^2e^{1-x}=f(x)$$

ـ حساب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(C_f)$ ، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^1=F(1)-F(0)=(7-2e)u.a$$

## حل مقترح للتمرين[15]

$f$ الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=e^{-x}-2-\frac{e}{x}$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني. $(\gamma)$ المنحنى الذي معادلته : $y=e^{-x}-2$ .

- $n$ عدد طبيعي و $A(n)$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين $(C_f)$ و $(\gamma)$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما:

$x=-e^n$ و $x=-e^{n+1}$ .

$$A(n)=\int_{-e^{n+1}}^{-e^n}\left[f(x)-e^{-x}+2\right]dx=\int_{-e^{n+1}}^{-e^n}\left(-\frac{e}{x}\right)dx=-e\int_{-e^{n+1}}^{-e^n}\left(\frac{1}{x}\right)dx=-e\left[\ln|x|\right]_{-e^{n+1}}^{-e^n}=e$$

حساب العدد الحقيقي $l$ : $l=A(0)+A(1)+....+A(2016)=2017e$ .

## حل مقترح للتمرين[16]

$f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني.

- تعيين دالة أصلية للدالة $xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من أجل $x=1$.

الدالة $xe^{-x}$ $x$ مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالتالي فدالتها الأصلية التي تنعدم عند 1 هي الدالة $F$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=\int_1^x te^{-t}dt$.

نضع $u(t)=t$ ، $v'(t)=e^{-t}$ ومنه $u'(t)=1$ ، $v(t)=-e^{-t}$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا:

$$F(x)=\left[-te^{-t}\right]_1^x-\int_1^x -e^{-t}dt=-xe^{-x}+e^{-1}-\int_1^x -e^{-t}dt=-xe^{-x}+e^{-1}-e^{-x}+e^{-1}=(-x-1)e^{-x}+2e^{-1}$$

و منه الدالة الأصلية للدالة $xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من أجل $x=1$ هي: $F(x)=(-x-1)e^{-x}+2e^{-1}$ .

- حساب العدد $A$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(C_f)$ و المستقيمات التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=3$ و $y=2x+1$

$$A=\int_1^3\left((2x+1)-f(x)\right)dx=\int_1^3 xe^{-x}dx=F(3)-F(1)=2e^{-1}-4e^{-3}(u.a)$$



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## حل مقترح للتمرين[17]

$f$ الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1+x\ln x}$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني .

$n$ عدد طبيعي حيث $n>1$ ، $I_n$ مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى $(C_f)$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$.

1) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n>1$ : $I_n=\ln(1+n\ln n)$ .

لدينا : $I_n=\int_1^n f(x)dx=\int_1^n\left(\dfrac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)dx=\left[\ln(1+x\ln x)\right]_1^n=\ln(1+n\ln n)$ .(لاحظ أن $f$ من الشكل : $\dfrac{u'}{u}$ )

2) دراسة إتجاه تغيّر المتتالية $(I_n)$ :

ندرس إشارة الفرق : $I_{n+1}-I_n$

لدينا : $I_{n+1}-I_n=\int_1^{n+1}f(x)dx-\int_1^n f(x)dx=\int_1^n f(x)dx+\int_n^{n+1}f(x)dx-\int_1^n f(x)dx=\int_n^{n+1}f(x)dx$

و من أجل $n>1$ : $\int_n^{n+1}f(x)dx>0$ و بالتالي المتتالية $(I_n)$ متزايدة تماما .

## حل مقترح للتمرين[18]

$f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\ln x$ . $(C_f)$ تمثيلها البياني .

1) $H$ الدالة المعرفة على المجال $]3;+\infty[$ بـ : $H(x)=\int_3^x\ln(t)dt$ حيث $t$ متغيّر حقيقي موجب تماما .

أ- تعيين عبارة $H(x)$ بدلالة $x$ .

نضع $u(t)=\ln(t)$ ، $v'(t)=1$ و منه $u'(t)=\dfrac{1}{t}$ ، $v(t)=t$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا :

$$H(x)=\left[t\ln t\right]_3^x-\int_3^x\frac{1}{t}\times t\,dt=x\ln x-3\ln 3-\int_3^x dt=x\ln x-3\ln 3-\left[t\right]_3^x$$

و منه $H(x)=x\ln x-3\ln 3-(x-3)$ أي : $H(x)=-x+3+x\ln x-3\ln 3$ .

بـ- حساب $A$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ و حامل محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين : $x=3$ و $x=4$.

$$A=\int_3^4 f(x)dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}+\ln x\right)dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}\right)dx+\int_3^4\ln x dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}\right)dx+H(4)=\left[\ln|x-2|\right]_3^4+H(4)$$

و منه $A=\ln 2+4\ln 4-4-3\ln 3+3$ أي : $A=(-1+9\ln 2-3\ln 3)(u.a)$ .

بالتوفيق للجميع في بكالوريا 2020