## تمرين 19

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ بمايلي : $f(x)=e^{-x}\ln\left(e^{x}+1\right)$

و $(C_f)$ تمثلهما البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) احسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$

نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ كمايلي : $g(x)=\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}-\ln\left(e^{x}+1\right)$

1) بين أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

2)احسب نهايات الدالة $g$ عند حدود مجموعة التعريف.

3)احسب $g'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة $g$

4)عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x ثم استنتج اشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;+\infty[$

5) بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ يمكن وضع ( $t=e^{x}$ يمكن

ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$

6) أنشئ $(C_f)$ ، $T$ والمستقيمات المقاربة .

7) نعتبر دالة $h$ المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ بـ: $h(x)=e^{x}\ln\left(e^{x}+1\right)-xe^{x}$

و $(C_h)$ تمثلهما البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

أ) بين أن المعادلة $h(-x)=f(x)$

ب) بين أن المنحنى $(C_h)$ هو صورة المنحنى $(C)$ بتحويل بسيط يطلب نعينه .

أنشئ $(C_h)$

# حل تمرين 19

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ بمايلي : $f(x)=e^{-x}\ln\left(e^{x}+1\right)$

و $(C_f)$ تمثلهما البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) احسب $f'(x)$

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty;+\infty[$ و لدينا من أجل كل $x$ من $]-\infty;+\infty[$ ،

$$f'(x)=e^{-x}\times\frac{e^{x}+1}{e^{x}+1}+\left(-e^{-x}\right)\ln\left(e^{x}+1\right)$$

نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ كمايلي : $g(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}-\ln\left(e^{x}+1\right)$

1) بين أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

لدينا $f'(x)=e^{-x}\times\frac{e^{x}+1}{e^{x}+1}+\left(-e^{-x}\right)\ln\left(e^{x}+1\right)$ ومنه $f'(x)=e^{-x}\times\left[\frac{1}{e^{x}+1}-\ln\left(e^{x}+1\right)\right]$

ومنه $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$

بمأن $e^{-x}>0$ من اجل كل $x\in]-\infty;+\infty[$ و منه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

2)احسب نهايات الدالة $g$ عند حدود مجموعة التعريف.

لدينا $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{x}}{e^{x}+1}=\frac{0}{0+1}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(e^{x}+1\right)=\ln(0+1)=0\end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{x}}{e^{x}+1}-\ln\left(e^{x}+1\right)=0$

وبتالي $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$

لدينا $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{e^{x}+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{e^{x}}}=\frac{1}{0+1}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}-\ln\left(e^{x}+1\right)=-(+\infty)\end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{e^{x}+1}-\ln\left(e^{x}+1\right)=-\infty$

وبتالي $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

3)احسب $g'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة $g$

الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty;+\infty[$ و لدينا من أجل كل $x$ من $]-\infty;+\infty[$ ،

$$g'(x)=\frac{(e^x+1)e^x-(e^x)e^x}{(e^x+1)^2}-\frac{e^x}{e^x+1}$$

$$g'(x)=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^2}-\frac{(e^x+1)e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$g'(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}-\frac{e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$g'(x)=\frac{e^x-e^{2x}-e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$g'(x)=\frac{-e^{2x}}{(e^x+1)^2}$$

بمأن $(e^x+1)^2>0$ من اجل كل $x\in]-\infty;+\infty[$ و منه إشارة $g'(x)$ من إشارة $-e^{2x}$

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $-e^{2x}$ | - | |
| $g'(x)$ | - | |

**جدول التغيرات**

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | - | |
| $g'(x)$ | 0 ↘ | $-\infty$ |

4)عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x ثم استنتج اشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;+\infty[$

الدالة $g$ مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;+\infty[$ و تأخذ قيمها في المجال $]-\infty;0[$

ومنه من أجل اجل كل $x\in]-\infty;+\infty[$ فإن إشارة $g(x)<0$

اشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;+\infty[$

بمأن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ فإن $f'(x)<0$ من أجل اجل كل $x\in]-\infty;+\infty[$ و $f$ متناقصة تماما على $]-\infty;+\infty[$ .

5) بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ يمكن وضع ( $t=e^x$ يمكن

**حساب النهاية** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

لدينا $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(e^x+1\right)=\ln(0+1)=0\end{cases}$ نهاية $f$ عند $-\infty$ حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty\times 0$

إزالة حالة عدم التعيين .

نضع $t=e^x$ ومنه $\frac{1}{t}=\frac{1}{e^x}$ أي $\frac{1}{t}=e^{-x}$

لما $x$ يؤول الى $-\infty$ فإن $t$ يؤول الى $0$ .

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}\times\ln(t+1)$ أي $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)=\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(t+1)}{t}$

أي $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)=1$ لأن نهاية شهيرة $\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(t+1)}{t}=1$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

بمأن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ و فإن المستقيم ذو المعادلة $y=0$ هو مستقيم مقارب أفقي للمنحنى $(\mathcal{C})$ بجوار $-\infty$

**حساب النهاية** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(e^x+1\right)=+\infty\end{cases}$ نهاية $f$ عند $+\infty$ حالة عدم التعيين من الشكل $0\times+\infty$

إزالة حالة عدم التعيين .

نضع $t=e^x$ ومنه $\frac{1}{t}=\frac{1}{e^x}$ أي $\frac{1}{t}=e^{-x}$

لما $x$ يؤول الى $+\infty$ فإن $t$ يؤول الى $+\infty$ .

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\times\ln(t+1)$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(t+1)}{t}$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t+1}{t}\times\frac{\ln(t+1)}{t+1}$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)=1\times0$

لاحظ أن $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t+1}{t}=1$ و أن $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(t+1)}{t+1}=0$

أي $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)=0$ لأن نهاية شهيرة $\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(t+1)}{t}=1$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

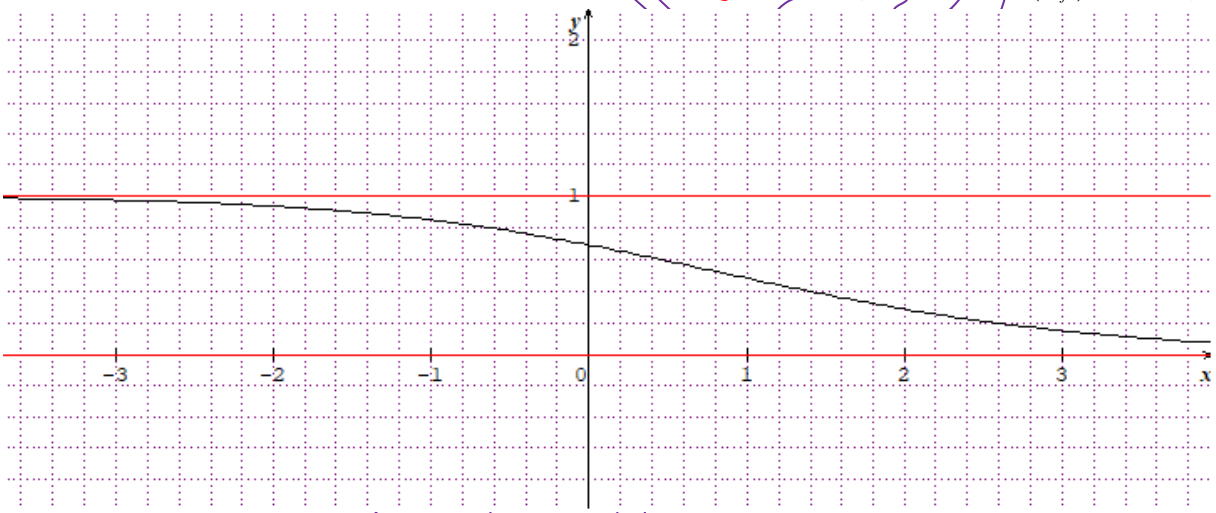
بمأن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y=0$ هو مسنقيم مقارب افقي للمنحنى $(\mathcal{C})$ بجوار $+\infty$.

ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$

**جدول التغيرات** $f$

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | |
| $f'(x)$ | 1 ↘ | 0 |

6) أنشئ $(C_f)$، $T$ والمستقيمات المقاربة .



7) نعتبر دالة $h$ المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ بـ: $h(x)=e^x\ln\left(e^x+1\right)-xe^x$

و $(C_h)$ تمثلهما البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

أ) بين أن المعادلة $h(-x)=f(x)$

$$f(-x)=e^{-(-x)}\ln\left(e^{-x}+1\right)$$
$$f(-x)=e^{x}\ln\left(e^{-x}+1\right)$$
$$f(-x)=e^{x}\ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)$$
$$f(-x)=e^{x}\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)$$
لدينا
$$f(-x)=e^{x}\left[\ln\left(1+e^x\right)-\ln\left(e^x\right)\right]$$
$$f(-x)=e^{x}\left[\ln\left(1+e^x\right)-x\ln(e)\right]$$
$$f(-x)=e^{x}\left[\ln\left(1+e^x\right)-x\right]$$
$$f(-x)=e^{x}\ln\left(1+e^x\right)-xe^x$$
$$f(-x)=h(x)$$

بين أن المنحنى $(C_h)$ هو صورة المنحنى $(C)$ بتحويل بسيط يطلب تعينه .

بما أن $h(-x)=f(x)$ فإن $h(-x)=f(x)$ المنحنى $(C_h)$ هو صورة المنحنى $(C)$ بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب .

أنشئ $(C_h)$

