حلول تمارين
الدوال اللوغاريتمية

لشعبة علوم تجريبية

إعداد : خالد بخاخشة

نوفمبر 2019

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمارين

التمرين 1 باك 2009 م1 ن7

I) h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} h(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

و إستنتج اتجاه تغيّر الدالة h ثم أنجز جدول تغيّراتها .

3) أحسب $h(0)$ و إستنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن f دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ ثم فسّر هذه النتيجة بيانيا .

بـ ـ باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ ، برهن أن $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

جـ ـ إستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

د ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

هـ ـ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل .

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيّرات الدالة f .

3) بيّن أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4 .

4) أرسم (C_f) .

5) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=x-1$ ، $x=0$ و $x=1$.

التمرين 2 باك 2010 م1 ن10

I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ بـ : $f(x)=1+\ln(2x-1)$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}} f(x)$.

2) بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) عيّن فاصلة النقطة من (C_f) التي تكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y=x$.

4) أ ـ أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=\ln(x+a)+b$ حيث a ، b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

بـ ـ استنتج أنه يمكن رسم (C_f) إنطلاقا من $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية $\ln$ ثم أرسم $(\mathcal{C})$ و (C_f) .

II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بـ : $g(x)=f(x)-x$

1) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}} g(x)$ ثم بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g على I ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) أ- أحسب $g(1)$ ثم بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α . تحقق أن $2<\alpha<3$.

ب- أرسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $\left]\frac{1}{2};5\right[$ في المعلم السابق .

4) إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) .

5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]1;\alpha[$ فإن : $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1;\alpha[$.

III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي : $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)$.

1) عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$.

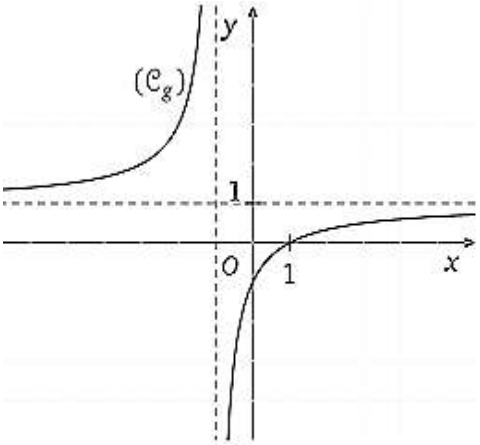
2) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$.

التمرين 3 باك 2011 م1 ن7

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$

و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الشكل المقابل) ،

بقراءة بيانية :



أ- شكّل جدول تغيرات الدالة g .

ب- حل بيانيا المتراجحة $g(x)>0$.

جـ- عيّن بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$ ثم فسّر النتيجتين هندسيا.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$.

ب- أحسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) أ- باستعمال الجزء **I)** السؤال جـ ، عيّن إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

ب- α عدد حقيقي . بيّن أن الدالة $x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

جـ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x)=1-\frac{2}{x+1}$ ثم عيّن دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$

التمرين 4 باك 2012 م2 ن7

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي : $f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا .

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$.

إستنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

3) أ- بيّن المستقيم (Δ) الذي معادلة له : $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

بـ- أدرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و $-1.1<\beta<-1$.

5) أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

6) أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بيّن أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

بـ- بيّن أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتها .

7) لتكن g الدالة المعرّفة على $]-\infty;0[$ كما يلي : $g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

بيّن أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

التمرين 5 باك 2013 م2 ن7

I g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$.

1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) إستنتج أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1) أ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)$. فسّر النتيجة بيانيا.

بـ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$

بـ- أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

جـ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ، ثم تحقق أن $0<\alpha<0,5$.

3) أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة $y=x+\frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0.

أ- أحسب x_0.

بـ- أرسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f).

جـ- عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين.

التمرين 6 باك 2014 م1 ن6

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}} f(x)$ ، فسّر النتيجتين هندسيا.

بـ- أدرس إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2) أ ـ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=1$.

بـ ـ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

جـ ـ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

3) أنشئ (T) و (C_f) .

4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}$.

و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

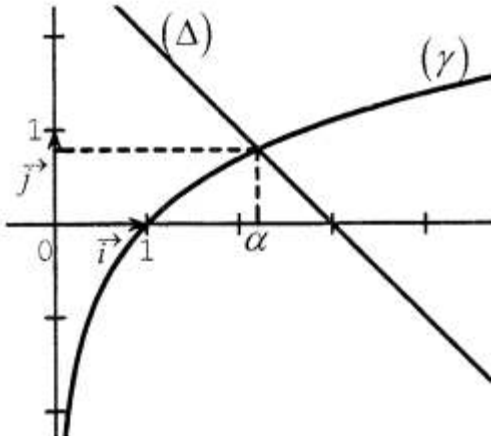
أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $h(x)-h(-x)=0$. ماذا تستنتج ؟

بـ ـ أنشئ المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f) .

جـ ـ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2=(m-1)|x|$.

التمرين 7 ﴿باك 2015﴾ ﴿م1﴾ ﴿7 ن﴾

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.



I) (γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto\ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$

α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ) .

1) بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $]0;+\infty[$.

2) g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x-3+\ln x$.

إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

3) تحقق أن : $2,2<\alpha<2,3$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)$ و (C_f) تمثيلها البياني .

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2) أثبت أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3) بيّن أن: $f(\alpha)=\dfrac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ، ثم إستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل؛ ثم أنشئ (C_f) على المجال $]0;e^2]$.

III) F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و التي تحقق: $F(1)=-3$.

1) بيّن أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

2) بيّن أن $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln x$ على $]0;+\infty[$ ، ثم إستنتج عبارة الدالة F .

التمرين 8 ﴿باك 2016 - الدورة الأولى- ﴿م1﴾ ﴿6,5 ن﴾

I) g الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+1-\ln x$.

1) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g .

2) أحسب $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثم بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+x-1$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

بـ ـ شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1 .

4) بيّن أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث : $y=x-1$ معادلة له .

بـ ـ أدرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ).

5) أرسم المستقيمين (T) و (Δ) ثم المنحنى (C) .

6) m عدد حقيقي . (Δ_m) المستقيم حيث : $y=mx-m$ معادلة له .

أ ـ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي ، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) .

بـ ـ ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=mx-m$.

7) أ ـ جد دالة أصلية للدالة $x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

بـ ـ أحسب I_n مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$ حيث n عدد طبيعي $(n>1)$.

جـ ـ عيّن أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n>n_0$ فإن : $I_n>2$.

التمرين 9 باك 2016 - الدورة الثانية - م1 ث7

I) g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=-1+(x+1)e+2\ln(x+1)$. (العدد e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

2) بيّن أن للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α حيث $-0,34<\alpha<-0,33$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x على المجال $]-1;+\infty[$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ ـ بيّن أن $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=-\infty$ و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، فسّر النتيجتين هندسيا .

بـ ـ بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(x+1)^3}$

جـ ـ أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

د ـ أرسم المنحنى (C_f) .(نقبل أن : $f(\alpha)=3,16$)

2) أ ـ بيّن أن الدالة $x\mapsto\dfrac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1;+\infty[$

بـ ـ أحسب مساحة الحيّز المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$.

3) نعتبر الدالة العددية k المعرفة على $]-1;1[$ بـ : $k(x)=f(-|x|)$ ، (C_k) تمثيلها لبياني في المعلم السابق.

أ ـ بيّن أن الدالة k زوجية .

بـ ـ بيّن كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم أرسمه . (دون دراسة تغيرات الدالة k)

جـ ـ ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $k(x)=m$.

التمرين 10 باك 2017 - الدورة العادية - م1 ن7

نعتبر الدالة f المعرفة على D حيث $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أن الدالة f فردية ثم فسّر ذلك بيانيا .

2) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب .

3) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$.

إستنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

4) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$

5) أ- بيّن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=\frac{2}{3}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

6) أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

7) m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$

التمرين 11 باك 2017 - الدورة الإستثنائية - م1 ن7

I) نعتبر f الدالة العددية المعرّفة على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $f(x)=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب النهايتين : $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{1}{2}\\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسّر النتيجتين بيانيا .

2) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ ، $f'(x)=\frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$

ب- أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) حل في المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة $f(x)=0$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

4) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها ، ثم أنشئ (C_f) .

II) لتكن الدالة g المعرّفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $g(x)=2\left[-x+\ln(2x+1)\right]$.

1) أ- أدرس إتجاه تغيّر الدالة g .

ب- بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $1,2<\alpha<1,3$.

جـ- استنتج إشارة $g(x)$.

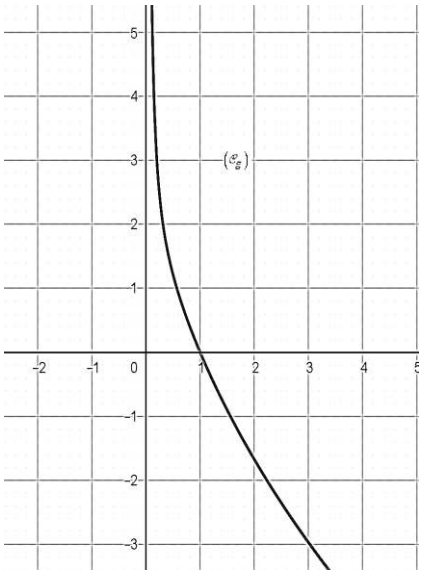
2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من : $I_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$.

أثبت أن : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $0<f(x)<\frac{1}{2x+1}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

التمرين 12 باك 2018 م2 7 ن

I) g الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$

(C_g) المنحنى البياني الممثل لها كما هو مبين في الشكل المقابل :



ـ أحسب $g(1)$ ثم استنتج بيانيا إشارة $g(x)$.

II) f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

ثم فسر النتيجتين بيانيا.

2) أ ـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$

بـ ـ استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

3) بين أن $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل ، ثم أرسم المماس (T) و المنحنى (C_f).

4) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ حلين متمايزين .

III) n عدد طبيعي حيث $n>1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$.

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$: $I_n=\ln(1+n\ln n)$.

2) أدرس إتجاه تغير المتتالية (I_n) .

التمرين 13 باك 2019 م1 7 ن

f الدالة العددية المعرفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x-2}+\ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا .

بـ ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3) نسمي (Γ) المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية النيبيرية " $\ln$ " في المعلم السابق .

أ ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

بـ ـ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ) .

4) أرسم بعناية المنحنى (Γ) ثم المنحنى (C_f) .

5) H الدالة المعرفة على المجال $]3;+\infty[$ بـ : $H(x)=\int_3^x \ln(t)\,dt$ حيث t متغير حقيقي موجب تماما .

أ ـ باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عين عبارة $H(x)$ بدلالة x .

بـ ـ أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين : $x=3$ و $x=4$.

6) g الدالة المعرفة على $]-1;0[\cup]-\infty;-1[$ بـ : $g(x)=f(-2x)$.

دون حساب عبارة $g(x)$ حدد إتجاه تغير الدالة g على مجموعة تعريفها .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

حل مقترح للتمرين 1 باك 2009

I) h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$.

1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} h(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+2x+\ln(x+1)\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1} h(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\left(x^2+2x+\ln(x+1)\right)=-\infty$$

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$:

$$h'(x)=2x+2+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)(x+1)+1}{x+1}=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$$

إتجاه تغيّر الدالة h :

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $x+1>0$ و $1+2(x+1)^2>0$ ومنه $h'(x)>0$

و بالتالي الدالة h متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة h :

x	-1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	
$h(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

حساب $h(0)$ و إستنتاج إشارة $h(x)$ حسب قيم x :

$$h(0)=0^2+2\times0+\ln(0+1)=0$$

- إشارة $h(x)$:

x	-1		0		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II) f الدالة العددية المعرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

1) حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=+\infty$$ لأن :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\ln(x+1)=-\infty\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\left(-\dfrac{1}{x+1}\right)=-\infty\end{cases}$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

بـ- باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ ، نبرهن أن $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

نضع $t=\ln u$ فيكون $u=e^t$ ومنه : $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{\left(\frac{e^t}{t}\right)}=0$.

جـ- إستنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=0$ حسب السؤال (بـ)

د- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=0$$

التفسير البياني : المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

هـ- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل :

لندرس إشارة الفرق $f(x)-(x-1)$.

$f(x)-(x-1)=-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ و بالتالي إشارة $f(x)-(x-1)$ من إشارة $-\ln(x+1)$ لأن $x+1>0$.

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;-1)$		(C_f) تحت (Δ)

2) أ- تبيان أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=1-\left[\frac{\frac{1}{x+1}\times(x+1)-1\times\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]=1-\left(\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right)$$

$$=\frac{(x+1)^2-1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

و منه : من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

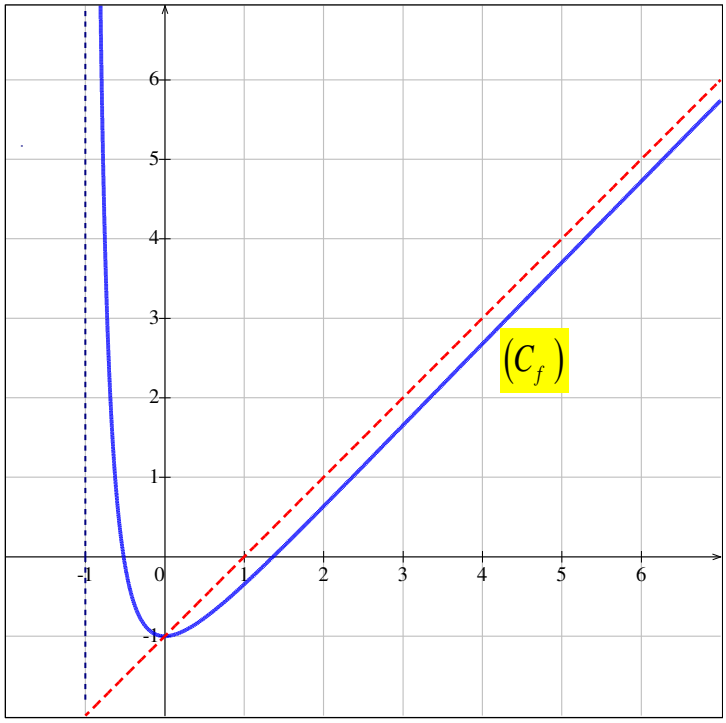
3) تبيان أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين $3,3$ و $3,4$.

معناه لنثبت أن المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا محصورا بين $3,3$ و $3,4$.

الدالة f مستمرة على المجال $]-1;+\infty[$ و بالتالي فهي مستمرة على $[3,3;3,4]$ كون $[3,3;3,4]\subset]-1;+\infty[$.

و لدينا $\begin{cases}f(3,3)\approx 1,96\\ f(3,4)\approx 2,06\end{cases}$ و بالتالي $f(3,3)<2<f(3,4)$ ، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا في المجال $[3,3;3,4]$.

4) الرسم :



5) حساب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $y=x-1$ ، $x=0$ و $x=1$.

$$S=\int_0^1\left[(x-1)-f(x)\right]dx=\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx=\left[\frac{1}{2}\left(\ln(x+1)\right)^2\right]_0^1=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

حل مقترح للتمرين 2 باك 2010

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ : $f(x)=1+\ln(2x-1)$.

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\ln(2x-1)\right)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}\left(1+\ln(2x-1)\right)=-\infty$.

2) تبيان أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I :

الدالة f قابلة للإشتقاق على I ، و من أجل كل x من I ، $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$

لدينا :من أجل كل عدد حقيقي x من I ، $2x-1>0$ أي $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال I .

جدول تغيرات الدالة f :

x	$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3) تعيين فاصلة النقطة من (C_f) التي تكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y=x$.

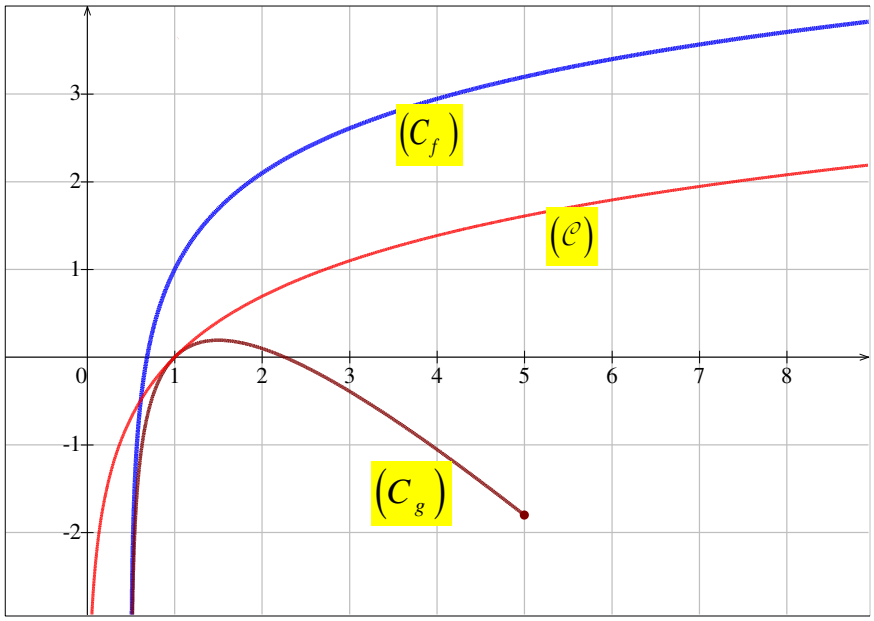
فاصلة هذه النقطة هي حل للمعادلة $f'(x)=1$ في I .

$f'(x)=1$ تكافئ $\frac{2}{2x-1}=1$ تكافئ $2=2x-1$ أي $x=\frac{3}{2}$.

4) أ- من أجل كل x من I : $f(x)=1+\ln(2x-1)=1+\ln\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)=1+\ln 2+\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)$ ، ومنه : $a=-\frac{1}{2}$ و $b=1+\ln 2$.

بـ- لدينا : $f(x)=h(x+a)+b$ حيث : $h(x)=\ln x$ ومنه (C_f) هو صورة $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-a\\ b\end{pmatrix}$ أي $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1+\ln 2\end{pmatrix}$.

الرسم :



II) g الدالة العددية المعرفة على المجال I بـ : $g(x)=f(x)-x$

1) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}\left(1-x+\ln(2x-1)\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\left[\frac{1-x}{2x-1}+\frac{\ln(2x-1)}{2x-1}\right]=-\infty$ (تذكّر أن : $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u}=0$)

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g على I :

الدالة g قابلة للإشتقاق على I ، و $g'(x)=-1+\frac{2}{2x-1}=\frac{-2x+3}{2x-1}$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من I ، $2x-1>0$ وبالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x+3$.

إشارة $g'(x)$:

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الدالة g متزايدة على المجال $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ ومتناقصة على المجال $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}+\ln 2$	↘	$-\infty$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3) أ- لدينا : $g(1)=0$.

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ و $\begin{cases} g\left(\frac{3}{2}\right)=\ln 2-\frac{1}{2}\approx 0,19 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$ ، و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α .

التحقق أن $2<\alpha<3$:

لدينا : $\begin{cases} g(2)\approx 0,09 \\ g(3)\approx -0,39 \end{cases}$ أي : $g(2)\times g(3)<0$ ومنه $2<\alpha<3$.

ب- رسم المنحنى (C_g) : أنظر الشكل السابق .

4) إشارة $g(x)$:

x	$\frac{1}{2}$		1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) :

لدينا : $f(x)-y=f(x)-x=g(x)$ و منه إشارة الفرق من إشارة $g(x)$.

إذن : من أجل $x\in\left]\frac{1}{2};1\right[\cup]\alpha;+\infty[$ ، يكون (C_f) واقعا أسفل (d) .

من أجل $x\in]1;\alpha[$ ، يكون (C_f) واقعا أعلى من (d) .

(C_f) يقطع (d) في النقطتين $A(1;1)$ و $B(\alpha;\alpha)$.

5) الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;\alpha[$ و منه : من أجل كل $x\in]1;\alpha[$ فإن : $f(x)\in]f(1);f(\alpha)[$.

و لدينا : $f(1)=1$ و $f(\alpha)=g(\alpha)+\alpha=\alpha$.

إذن : من أجل كل $x\in]1;\alpha[$ فإن : $f(x)\in]1;\alpha[$.

III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي : $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)$.

1) تعيين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$.

لدينا : $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)=1+\ln\left[2\left(1+\frac{1}{2n}\right)-1\right]=1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

و منه : $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$ يعني $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln 3^2-\ln 2^3=\ln 9-\ln 8=\ln\frac{9}{8}$ أي : $n=8$.

2) حساب ، بدلالة n ، المجموع S_n بحيث : $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$.

لدينا : من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_n=1+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

و منه : $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=1+\ln\left(\frac{2}{1}\right)+1+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ldots+1+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

أي : $S_n=(1+1+\ldots+1)+\ln\left(\frac{2}{1}\right)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=n+\ln\left(\frac{2\times 3\times\ldots\times n\times(n+1)}{1\times 2\times\ldots\times n}\right)=n+\ln(n+1)$

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

أ ـ جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	
$g(x)$	1	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	1

بـ ـ حل المتراجحة $g(x)>0$ بيانيا :

$g(x)>0$ تكافئ $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

جـ ـ تعيين قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$:

$0<g(x)<1$ تكافئ $x\in]1;+\infty[$.

II) الدالة f معرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\left[\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=0\\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=-\infty\end{cases}$.

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]=1$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=0\end{cases}$.

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f).

2) أ ـ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ يكون : $g'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$:

$$g'(x)=\frac{1\times(x+1)-1\times(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

بـ ـ حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{\dfrac{2}{(x+1)^2}}{\dfrac{x-1}{x+1}}=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^2}\times\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{(x+1)^2}\left(\frac{2x}{x-1}\right)=\frac{4x}{(x-1)(x+1)^2}$$

ولدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1

3) أ- باستعمال الجزء **I** السؤال جـ ، تعيين إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

لدينا حسب الجزء **I** السؤال جـ : من أجل كل $x \in]1;+\infty[$ ، فإن $0<\frac{x-1}{x+1}<1$ ومنه $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)<0$.

بـ- α عدد حقيقي .

تبيان أن الدالة h بحيث $h(x)=(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على المجال $]\alpha;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]\alpha;+\infty[$:

$$h'(x)=1\times\ln(x-\alpha)+\frac{1}{x-\alpha}\times(x-\alpha)-1=\ln(x-\alpha)$$

جـ- التحقق :

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x)=\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}-\frac{2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$.

تعيين دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1-\frac{2}{x+1}+\ln(x-1)-\ln(x+1)$

و بالتالي دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$ من الشكل :

$$F(x)=x-2\ln(x+1)+\left[(x-1)\ln(x-1)-x\right]-\left[(x+1)\ln(x+1)-x\right]=x-(x+3)\ln(x+1)+(x-1)\ln(x-1)$$

حل مقترح للتمرين 4 باك 2012

f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ : $f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

1) أ- $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ <}}\left[x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ <}}(x+5)=5\\ \lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ <}}\left[6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty\end{cases}$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

بـ- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x+5)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=0\end{cases}$

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$:

$$f'(x)=1+6\left(\frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}\right)=1-\frac{6}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x}=1-\frac{6}{x(x-1)}=\frac{x(x-1)-6}{x(x-1)}=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $\frac{x}{x-1}>0$ ومنه $x(x-1)>0$.

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$ ومنه :

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;-2]$ و متناقصة على المجال $[-2;0[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$3+6\ln\frac{2}{3}$	↘	$-\infty$

3) أ- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+5)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=0$ ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلة له : $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-y=f(x)-(x+5)=6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$:

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $x>x-1$ ومنه $\frac{x}{x-1}<1$ و بالتالي $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)<0$.

إذن نستنتج أن (C_f) يقع تحت (Δ) .

4) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و $-1.1<\beta<-1$.

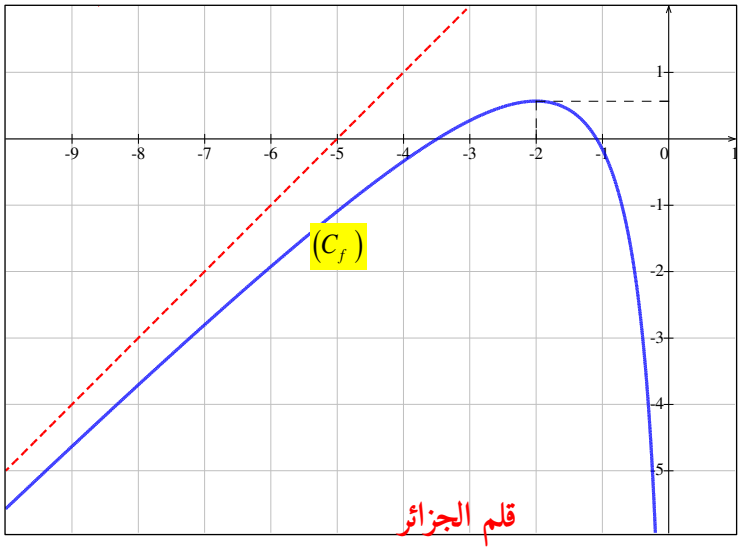
- الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2]$ و $]-3,5;-3,4[\subset]-\infty;-2]$ و $\begin{cases}f(-3.4)\approx 0,05\\ f(-3.5)\approx -0,01\end{cases}$

أي $f(-3,5)\times f(-3,4)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و يحقق $f(\alpha)=0$.

- الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[-2;0]$ و $]-1,1;-1[\subset[-2;0]$ و $\begin{cases}f(-1.1)\approx 0,02\\ f(-1)\approx -0,16\end{cases}$

أي $f(-1,1)\times f(-1)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي β حيث $-1.1<\beta<-1$ و يحقق $f(\beta)=0$.

5) الرسم :



WWW.DZPEN.COM

6) أ ـ لدينا : $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

تبيان أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

يمكن التحقق أن إحداثيات كلا من النقطتين A و B تحقق المعادلة المعطاة .

$y_A=\frac{1}{2}x_A+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}=3+6\ln\frac{3}{4}$ ، $y_B=\frac{1}{2}x_B+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}=\frac{5}{2}+6\ln\frac{3}{4}$

(أو يمكن كتابة معادلة للمستقيم (AB) و الحصول على المعادلة المعطاة)

بـ ـ تبيان أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتها .

لدينا : معامل توجيه المستقيم (AB) هو $\frac{1}{2}$ و بالتالي نحل في المجال $]-\infty;0[$ المعادلة $f'(x)=\frac{1}{2}$.

$f'(x)=\frac{1}{2}$ تكافئ $\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}=\frac{1}{2}$ تكافئ $x^2-x-12=0$.

المعادلة $f'(x)=\frac{1}{2}$ تقبل في المجال $]-\infty;0[$ حل وهو $x_0=-3$.

إذن : المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في النقطة $M_0(x_0;y_0)$ ، مع $y_0=f(-3)=2+6\ln\frac{3}{4}$.

7) لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ كما يلي : $g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$.

تبيان أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و من أجل كل $x\in]-\infty;0[$:

$$g'(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{6x}{x(x-1)}-\frac{6}{1-x}=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{6}{x-1}+\frac{6}{x-1}=f(x)$$

و منه الدالة g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

حل مقترح للتمرين 5 باك 2013

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$.

1) دراسة تغيرات الدالة g :

$\lim\limits_{x\to-1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left[x^2+2x+4-2\ln(x+1)\right]=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-1^+}\ln(x+1)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left[\frac{x^2+2x+4}{x+1}-2\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=+\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+4}{x+1}\right)=+\infty\end{cases}$.

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ ، و $g'(x)=2x+2-\frac{2}{x+1}=\frac{2x(x+2)}{x+1}$.

إشارة $g'(x)$ من إشارة x ، لأنه من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ فإن : $x+1>0$ و $x+2>0$.

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة g متناقصة على المجال $]-1;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

2) من جدول التغيرات :من أجل كل $x \in]-1;+\infty[$ ، $g(x) \geq 4$ و بالتالي نستنتج أنه من أجل كل $x \in]-1;+\infty[$ ، $g(x) > 0$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x) = x - \dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$.

1) أ- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left[x - \dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1} \right] = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left(\dfrac{1}{x+1} \right) \left[x(x+1) - 1 + 2\ln(x+1) \right] = -\infty$.

التفسير البياني : المستقيم ذا المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

بـ- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x - \dfrac{1}{x+1} + 2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = +\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$.

2) أ-تبيان أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ ، و من أجل كل $x \in]-1;+\infty[$:

$$f(x) = 1 - \frac{\frac{-2}{x+1}(x+1) - 1 \times (1 - 2\ln(x+1))}{(x+1)^2} = 1 - \frac{-3 + 2\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 + 3 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

بـ-دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$:

لدينا :من أجل كل $x \in]-1;+\infty[$ ، $g(x) > 0$ و بالتالي $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f:

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

جـ-تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$:

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1[$ و $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty \end{cases}$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]-1;+\infty[$ حلا وحيدا α.

التحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.

لدينا : $]0;0,5[\subset]-1;+\infty[$ و $\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(0.5) \approx 0,37 \end{cases}$ أي $f(0) \times f(0,5) < 0$ ومنه $0 < \alpha < 0,5$.

3) أ-لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[-\dfrac{1}{x+1} + 2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = 0$ ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ-دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لدينا : $f(x)-x=\dfrac{-1+2\ln(x+1)}{x+1}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-1+2\ln(x+1)$.

x	-1		$-1+\sqrt{e}$		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	(Δ) تحت (C_f)		(C_f) يقطع (Δ) في $A(-1+\sqrt{e};-1+\sqrt{e})$		(Δ) فوق (C_f)

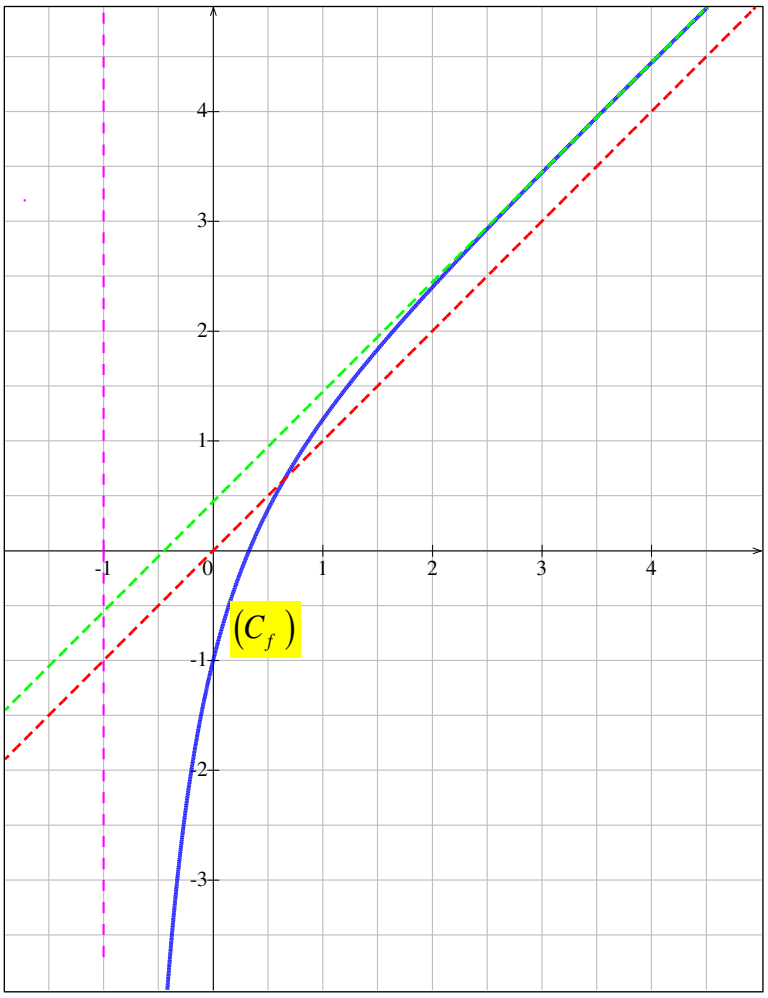
4) المستقيم (T) ذا المعادلة $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

أ- حساب x_0 :

لدينا :

$f'(x_0)=1$ تكافئ $\dfrac{g(x_0)}{(x_0+1)^2}=1$ تكافئ $g(x_0)=(x_0+1)^2$ تكافئ $2\ln(x_0+1)=3$ تكافئ $x_0=-1+\sqrt{e^3}$.

ب- الرسم :



جـ- بيانيا ، حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$.

إذن : تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين إذا و فقط إذا كان $0<m<\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$.

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\dfrac{2\ln x}{x}$

1) أ ـ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(1+\dfrac{2\ln x}{x}\right)=-\infty$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2\ln x}{x}\right)=1$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ ـ دراسة إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ، ومن أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-1\times 2\ln x}{x^2}=\frac{2-2\ln x}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $1-\ln x$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $]0;e]$ و متناقصة على المجال $[e;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$1+2e^{-1}$	↘	$+\infty$

2) أ ـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=1$.

لدينا : $f(x)-y=1+\dfrac{2\ln x}{x}-1=\dfrac{2\ln x}{x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ لأن $\dfrac{2}{x}>0$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	‖ (C_f) تحت (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$		(C_f) فوق (Δ)

بـ ـ كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

لدينا : $(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(T):y=2x-1$.

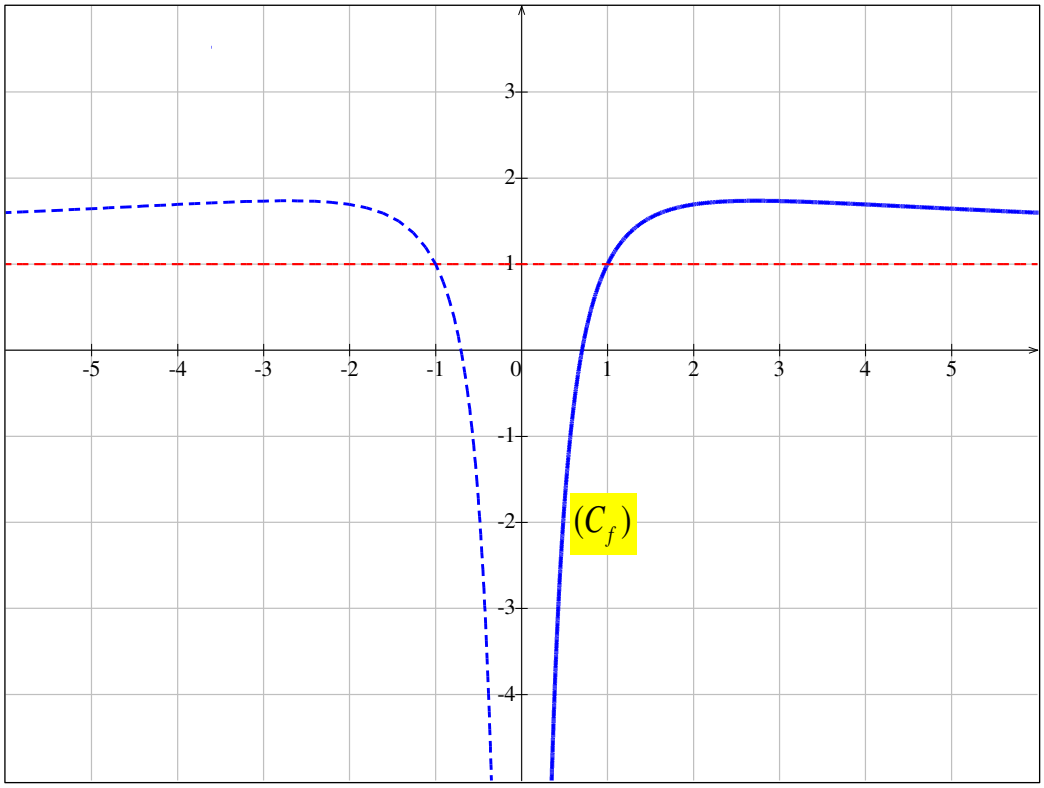
جـ ـ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ و $]e^{-0,4};e^{-0,3}[\subset]0;1]$ و $\begin{cases} f(e^{-0,4})\approx -0,2 \\ f(e^{-0,3})\approx 0,2 \end{cases}$

أي $f(e^{-0,4})\times f(e^{-0,3})<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا

وحيدا α بحيث $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$.

3) الرسم :



4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}$.

أ- من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :

$$h(x)-h(-x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}-1-\frac{2\ln|-x|}{|-x|}=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}-1-\frac{2\ln|x|}{|x|}=0$$

نستنتج أن الدالة h زوجية و تمثيلها البياني (C_h) متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب .

ب- كيفية إنشاء المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f) :

من أجل $x \in]0;+\infty[$ ، يكون $f(x)=h(x)$ و بالتالي (C_h) منطبق على (C_f) .

من أجل $x \in]-\infty;0[$ ، (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور التراتيب لكون الدالة h زوجية .

الرسم : أنظر الشكل .

جـ- المناقشة البيانية :

$2\ln|x|=(m-1)|x|$ تكافئ $\ln x^2=(m-1)|x|$

$1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}=m$ أي $h(x)=m$ تكافئ

و منه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_h) و المستقيم ذي المعادلة $y=m$.

لما $m \in]-\infty;0[$ المعادلة تقبل حلين .

لما $m \in \left]0;1+\dfrac{2}{e}\right[$ المعادلة تقبل أربعة حلول .

لما $m=1+\dfrac{2}{e}$ المعادلة تقبل حلين (مضاعفين).

لما $m \in \left]1+\dfrac{2}{e};+\infty\right[$ المعادلة ليس لها حلول .

I) (γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$ ، α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ).

1) بقراءة بيانية :

تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على المجال $]0;+\infty[$:

من أجل $x \in]0;\alpha[$ ، (γ) يقع تحت (Δ) .

من أجل $x \in]\alpha;+\infty[$ ، (γ) يقع فوق (Δ) .

2) إشارة $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

3) التحقق أن : $2,2<\alpha<2,3$.

لدينا : $\begin{cases} g(2,2)\approx -0,011 \\ g(2,3)\approx 0,13 \end{cases}$ ومنه $g(2,2)\times g(2,3)<0$ أي $2,2<\alpha<2,3$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$.

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)\right]=+\infty$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}}\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}}(\ln x-2)=-\infty \end{cases}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)\right]=+\infty$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-2)=+\infty \end{cases}$

2) تبيان أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{\ln x-2+x-1}{x^2}=\frac{-3+x+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) تبيان أن : $f(\alpha)=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$

لدينا : $g(\alpha)=0$ أي $\ln\alpha=-\alpha+3$ وبالتالي : $f(\alpha)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(\ln\alpha-2)=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(-\alpha+1)=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$:

لدينا : $2,2<\alpha<2,3$ يكافئ : $\begin{cases}\frac{1}{2,3}<\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{2,3}\\1,2<\alpha-1<1,3\\(1,2)^2<(\alpha-1)^2<(1,3)^2\end{cases}$ ومنه $\frac{(1,2)^2}{2,3}<\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<\frac{(1,3)^2}{2,2}$

ومنه : $-\frac{(1,3)^2}{2,2}<f(\alpha)<-\frac{(1,2)^2}{2,3}$ أي : $-0,76<f(\alpha)<-0,62$.

4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.

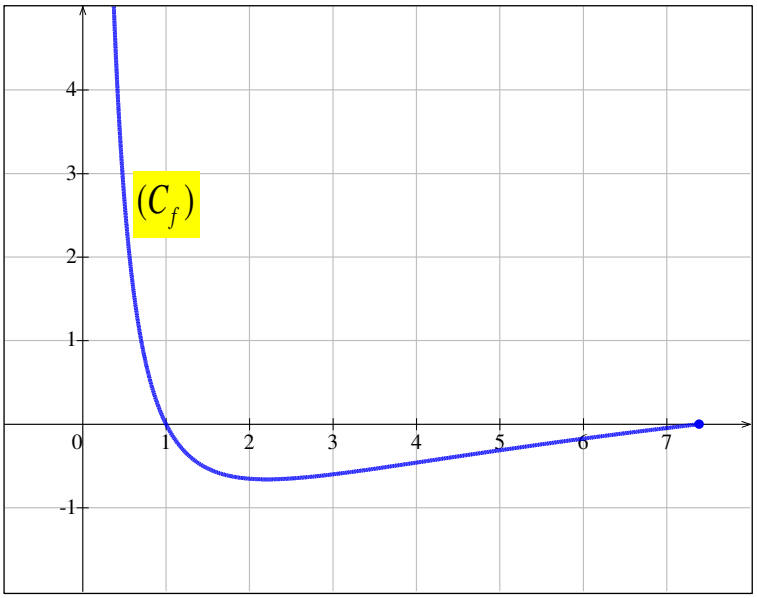
لندرس إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)=\frac{1}{x}(x-1)(-2+\ln x)$ ومنه إشارة $f(x)$ من إشارة $(x-1)(-2+\ln x)$.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه (C_f) فوق حامل محور الفواصل على كل من المجالين $]e^2;+\infty[$ و $]0;1[$ وتحته على المجال $]1;e^2[$ ، ويتقاطعان في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و e^2 .

الرسم :



III) F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تحقق: $F(1)=-3$.

1) تبيان أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ يعني : من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $F'(x)=f(x)$.

$F'(x)=0$ تكافئ $f(x)=0$ تكافئ : $x=1$ أو $x=e^2$ ، ومنه منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و e^2 .

2) تبيان أن $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln x$ على $]0;+\infty[$:

نضع : $u(x)=x\ln x-x$

الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ومن أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $u'(x)=\ln x+\frac{1}{x}\times x-1=\ln x$.

ومنه الدالة u هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln x$ على $]0;+\infty[$.

إستنتاج عبارة الدالة F :

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt=\int_1^x\left(\ln t-2-\frac{\ln t}{t}+\frac{2}{t}\right)dt=\left[t\ln t-t-2t-\frac{1}{2}(\ln t)^2-2\ln t\right]_1^x=(2+x)\ln x-\frac{1}{2}(\ln x)^2-3x$$

حل مقترح للتمرين 8 باك 2016 – الدورة الأولى -

I) g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+1-\ln x$.

1) دراسة إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$.

إشارة $g'(x)$ من إشارة $2x^2-1$:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

الدالة g متناقصة على المجال $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ و متزايدة على المجال $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$.

2) $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$.

الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]0;+\infty[$ هي $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و بالتالي من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x-1$.

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{\ln x}{x}+x-1\right)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+x-1\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

2) أ ـ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+1=\frac{x^2+1-\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$.

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$ ، إذن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ب ـ جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1 :

لدينا : $(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(T):y=2x-2$.

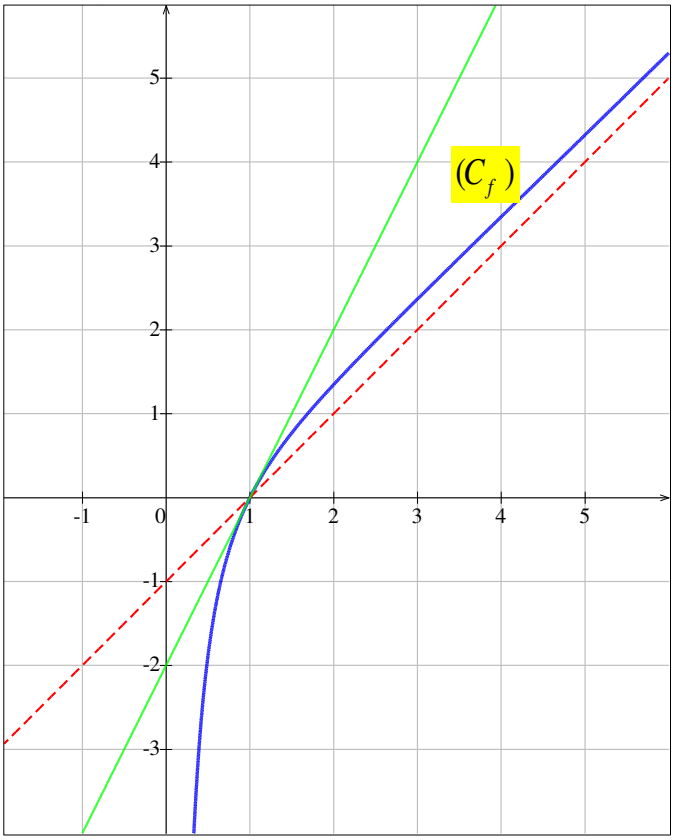
4) أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=0$ المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث : $y=x-1$ معادلة له .

ب- دراسة الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) :

لدينا $f(x)-y=\dfrac{\ln x}{x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln x$:

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$	$\|\!\|$	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	$\|\!\|$	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;0)$		(C_f) فوق (Δ)

5) الرسم :



6) m عدد حقيقي . (Δ_m) المستقيم حيث : $y=mx-m$ معادلة له .

أ- التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي m ، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) .

لدينا $y_A=mx_A-m$ أي $0=m-m$ و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي m ، $A\in(\Delta_m)$

ب- المناقشة البيانية :

لدينا : (Δ_m) معامل توجيهه m و يشمل النقطة $A(1;0)$.

إذا كان $m\in]-\infty;1[$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا .

إذا كان $m\in]1;2[$ فإن المعادلة تقبل حلين .

إذا كان $m=2$ فإن المعادلة تقبل حل (مضاعف) و هو 1.

إذا كان $m\in]2;+\infty[$ فإن المعادلة تقبل حلين .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

7) أ- إيجاد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

دالة أصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ على $]0;+\infty[$ من الشكل : $x \mapsto \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$. (لاحظ أن $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ من الشكل $u' \times u$)

بـ- حساب I_n مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = n$ حيث n عدد طبيعي $(n > 1)$.

$$I_n = \int_1^n [f(x) - (x-1)]dx = \int_1^n \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^n = \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

جـ- تعيين أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن : $I_n > 2$.

$I_n > 2$ معناه $(\ln n)^2 > 4$ أي $\ln n > 2$ أو $\ln n < -2$ (مرفوض) ومنه $n > e^2$ وعليه : أصغر قيمة لـ n_0 هي $n_0 = 8$.

حل مترجّ للتمرين (9) باك 2016 – الدورة الثانية -

I) g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$.

1) دراسة تغيّرات الدالة g :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} [-1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)] = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ > }} g(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ > }} [-1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)] = -\infty$$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $g'(x) = e + \dfrac{2}{x+1}$

من أجل كل $x \in]-1;+\infty[$ ، $g'(x) > 0$ وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	-1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2) تبيان أنه للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث $-0,34 < \alpha < -0,33$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ و $\begin{cases} g(-0,34) \approx -0,03 \\ g(-0,33) \approx 0,02 \end{cases}$ أي $g(-0,34) \times g(-0,33) < 0$ ومنه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0,34 < \alpha < -0,33$.

3) إشارة $g(x)$:

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{e}{x+1} + \dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

1) أ- تبيان أن $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ > }} f(x) = -\infty$.

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ > }} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ > }} \left[\frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right] = -\infty$$ لأن :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ > }} \left(\dfrac{e}{x+1}\right) = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ > }} \dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ > }} \left[\dfrac{1}{(x+1)^2} \times \ln(x+1)\right] = -\infty \end{cases}$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$: لأن ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\left[e+\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=0$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ (حامل محور الفواصل) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ ـ تبيان أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(x+1)^3}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=-\frac{e}{(x+1)^2}+\frac{\frac{1}{x+1}\times(x+1)^2-2(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-e(x+1)+1-2\ln(x+1)}{(x+1)^3}=\frac{-g(x)}{(x+1)^3}$$

جـ ـ دراسة إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$:

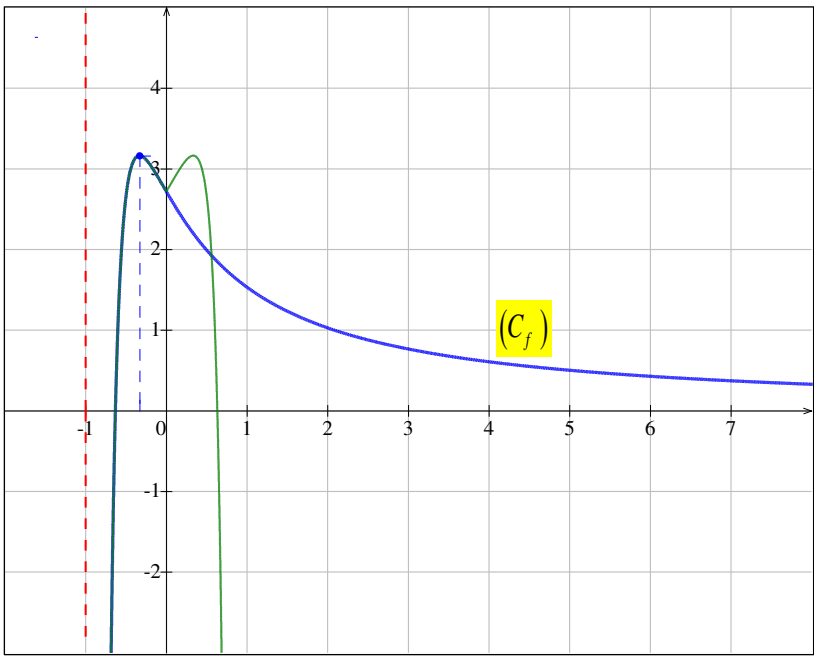
x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha;+\infty[$ و متزايدة على المجال $]-1;\alpha]$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	$f(\alpha)$	↘	0

د ـ الرسم :



2) أ ـ تبيان أن الدالة $x\mapsto\dfrac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1;+\infty[$

نضع : $h(x)=\dfrac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ ، الدالة h قابلة للإشتقاق على $]-1;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$:

$$h'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}\left[1+\ln(x+1)\right]+\left(\frac{1}{x+1}\right)\times\left(\frac{-1}{x+1}\right)=\frac{1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

بـ ـ حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left[\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]dx=\left[e\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]\right]_0^1=\frac{1+(2e-1)\ln 2}{2}$$

3) k الدالة العددية المعرفة على $]-1;1[$ بـ : $k(x)=f(-|x|)$

أ ـ تبيان أن الدالة k زوجية :

المجال $]-1;1[$ متناظر بالنسبة للصفر و من أجل كل $x\in]-1;1[$: $k(-x)=f(-|-x|)=f(-|x|)=k(x)$.

و بالتالي الدالة k زوجية .

بـ ـ شرح كيفية إنشاء المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) :

لدينا : $k(x)=f(-|x|)=\begin{cases}f(x);x\in]-1;0]\\ f(-x);x\in[0;1[\end{cases}$

إذن : من أجل $x\in]-1;0]$ ، (C_k) ينطبق على (C_f) و نتم الرسم باستخدام التناظر بالنسبة لمحور التراتيب لكون k زوجية .

الرسم : أنظر الشكل .

جـ ـ المناقشة البيانية :

حلول المعادلة $k(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_k) مع المستقيم ذو المعادلة $y=m$.

إذا كان $m>f(\alpha)$ فإن المعادلة لا تقبل حلولا .

إذا كان $m=f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل حلين (مضاعفين) مختلفين في الإشارة .

إذا كان $e<m<f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل 4 حلول ، حلان سالبان و حلان موجبان .

إذا كان $m=e$ فإن المعادلة تقبل 3 حلول ، حل سالب و آخر موجب و الثالث معدوم .

إذا كان $m<e$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

حل مقترح للتمرين 10 باك 2017 – الدورة العادية -

f الدالة المعرفة على D حيث $]1;+\infty[\cup]-\infty;-1[$ بـ : $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ $f(x)=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

1) تبيان أن الدالة f فردية :

المجموعة D متناظرة بالنسبة إلى الصفر (من أجل كل $x\in D$ ، $-x\in D$)

و من أجل كل $x\in D$ ، $f(-x)=-\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)=-\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-\frac{2}{3}x-\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-f(x)$

التفسير البياني : مبدأ المعلم O مركز تناظر بالنسبة للمنحنى (C_f) .

2) حساب النهايات :

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\ <}}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=+\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\ >}}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty$$

التفسير البياني : المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب معادلتيهما : $x=1$ و $x=-1$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad ، \quad \text{لأن} : \lim_{|x|\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1 .$$

3) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على D ، من أجل كل عدد حقيقي x من D :

$$f'(x)=\frac{2}{3}+\frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}=\frac{2}{3}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}=\frac{2}{3}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{2(x^2-1)+6}{3(x^2-1)}=\frac{2x^2+4}{3(x^2-1)}=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$$

إتجاه تغيّر الدالة f :

لدينا : من أجل كل x من D ، $x^2-1>0$ و منه $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على D .

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		‖		$+$		
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$		

4) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$:

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و $]1,8;1,9[\subset]1;+\infty[$ و $\begin{cases} f(1,9)\approx 0,10 \\ f(1,8)\approx -0,05 \end{cases}$

أي $f(1,9)\times f(1,8)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1;+\infty[$ حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$.

5) لدينا : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\frac{2}{3}x\right]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ ، لأن : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1$

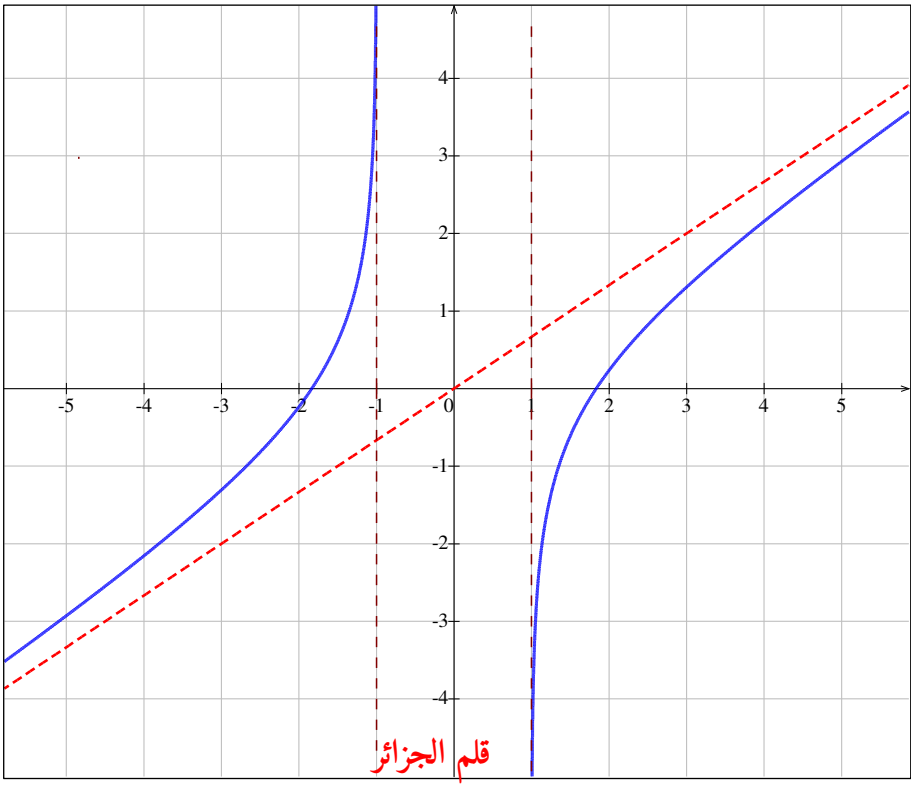
و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=\frac{2}{3}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-y=f(x)-\frac{2}{3}x=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)-y$	$+$		‖		$-$		
الوضع النسبي	(Δ) فوق (C_f)		‖		(Δ) تحت (C_f)		

6) الرسم :



WWW.DZPEN.COM

7) المناقشة البيانية :

$\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=|m|x$ تكافئ $2x-3|m|x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ تكافئ $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$

أي $f(x)=|m|x$ و منه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=|m|x$.

(مناقشة دورانية)

إذا كان $m\in\left]-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right[$ أي $|m|\in\left[0;\frac{2}{3}\right[$ فإن المعادلة تقبل حلين متمايزين .

إذا كان $m\in\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right[\cup\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$ أي $|m|\in\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

حل مقترح للتمرين 11 باك 2017 – الدورة الإستثنائية -

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $f(x)=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$.

1) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to\frac{-1}{2}^{>}} f(x)=\lim_{x\to\frac{-1}{2}^{>}}\left[\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=\lim_{x\to\frac{-1}{2}^{>}}\left[\left(\frac{1}{(2x+1)^2}\right)\left[1+2\ln(2x+1)\right]\right]=-\infty$$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $x=-\frac{1}{2}$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{(2x+1)^2}+2\frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=0$$ لأن : $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=0$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

2) أ ـ الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

$$f'(x)=\frac{\frac{4}{2x+1}\times(2x+1)^2-4(2x+1)\left[1+2\ln(2x+1)\right]}{(2x+1)^4}=\frac{(2x+1)\left[-8\ln(2x+1)\right]}{(2x+1)^4}=\frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$$

بـ ـ دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-8\ln(2x+1)$ لأن : $(2x+1)^3>0$ من أجل x من $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right]$ و متناقصة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3) حل في المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة $f(x)=0$:

$f(x)=0$ تكافئ $1+2\ln(2x+1)=0$ تكافئ $\ln(2x+1)=-\frac{1}{2}$ أي : $2x+1=e^{-\frac{1}{2}}$: $x=\frac{1}{2\sqrt{e}}-\frac{1}{2}$

إشارة $f(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}-1\right)$		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

4) تبيان المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها :

الدالة f' قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

$$f''(x)=\frac{\frac{-8\times 2}{2x+1}\times(2x+1)^3-3\times 2(2x+1)^2\times\left[-8\ln(2x+1)\right]}{(2x+1)^6}=\frac{16\left(-1+3\ln(2x+1)\right)}{(2x+1)^4}$$

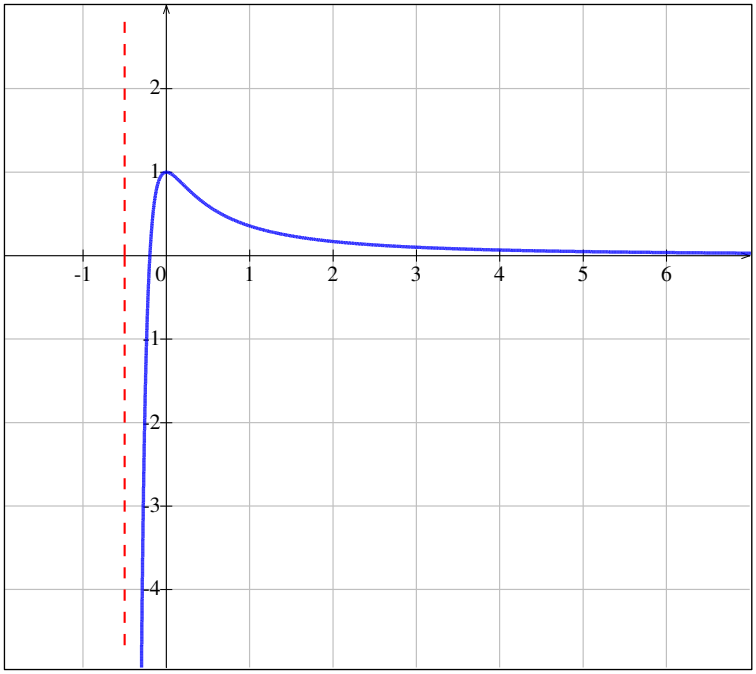
$f''(x)=0$ تكافئ $-1+3\ln(2x+1)=0$ تكافئ $\ln(2x+1)=\frac{1}{3}$ أي : $2x+1=e^{\frac{1}{3}}$: $x=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{3}}-1\right)$

إشارة $f''(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{3}}-1\right)$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

إذن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω إحداثييها : $\left(\frac{e^{\frac{1}{3}}-1}{2};\frac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}}\right)$.

الرسم :



II) لتكن الدالة g المعرفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $g(x)=2\left[-x+\ln(2x+1)\right]$.

1) أ ـ دراسة إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

$$g'(x)=2\left[-1+\frac{2}{2x+1}\right]=2\left[\frac{-2x+1}{2x+1}\right]$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x+1$:

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الدالة g متزايدة على المجال $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ و متناقصة على المجال $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

بـ ـ تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $1,2<\alpha<1,3$.

لدينا : $g(0)=0$.

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ و $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\supset\,]1,2;1,3[$ و $\begin{cases} g(1,2)\approx 0,05 \\ g(1,3)\approx -0,04 \end{cases}$

أي $g(1,3)\times g(1,2)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α حيث $1,2<\alpha<1,3$.

جـ ـ إشارة $g(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$		0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 : $I_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$.

إثبات أن : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $0<f(x)<\frac{1}{2x+1}$.

لدينا : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $f(x)-\frac{1}{2x+1}=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}-\frac{2x+1}{(2x+1)^2}=\frac{g(x)}{(2x+1)^2}$.

و لدينا : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $g(x)<0$ و بالتالي $f(x)<\frac{1}{2x+1}$.

و من جهة أخرى لدينا : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $f(x)>0$.

إذن : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $0<f(x)<\frac{1}{2x+1}$.

استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$:

لدينا : $0<\int_n^{n+1} f(x)dx<\int_n^{n+1}\frac{1}{2x+1}dx$ ومنه $0<I_n<\int_n^{n+1}\frac{1}{2x+1}dx$

و لدينا $\int_n^{n+1}\frac{1}{2x+1}dx=\left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_n^{n+1}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$ ومنه $0<I_n<\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$.

و بالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$

I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$.

- حساب $g(1)$: $g(1)=1-(\ln 1)^2-\ln 1-1=0$
- إشارة $g(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

II) f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$

1) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(1+\ln x)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(1+x\ln x)=1\end{cases}$ (تذكر أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x=0$)

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

- تبيان أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x}+\ln x}\right)=0$ ، (تذكر أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$)

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

2) أ- تبيان أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(1+x\ln x)-(\ln x+1)(1+x\ln x)}{(1+x\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}+\ln x-(1+\ln x)^2}{(1+x\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1}{(1+x\ln x)^2}$$

ومنه : من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$.

ب- إتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $]0;1]$ و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3) تبيان أن $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل :

أولا : تعيين نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

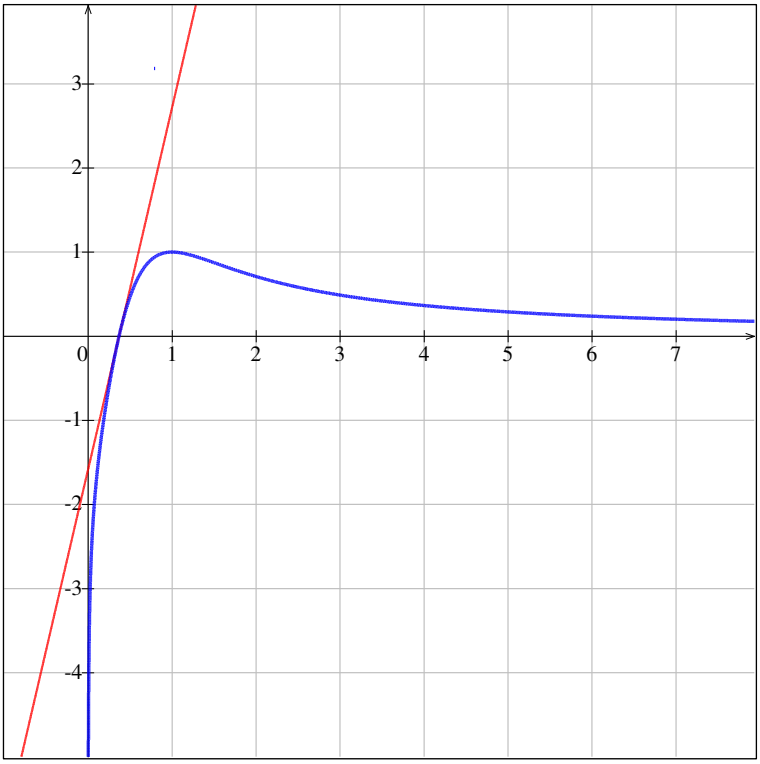
نحل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة : $f(x)=0$.

$f(x)=0$ تكافئ $\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}=0$ تكافئ $1+\ln x=0$ تكافئ $\ln x=-1$ أي : $x=\frac{1}{e}$.

معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{e}$:

لدينا : $(T):y=f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x-\frac{1}{e}\right)+f\left(\frac{1}{e}\right)$ و منه $(T):y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$.

الرسم :



4) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ حلين متمايزين .

$(e-1)f(x)=e^2x-me$ تكافئ $f(x)=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}m$

حلول المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (T_m) ذي المعادلة $y=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}m$.

من البيان : المعادلة تقبل حلين متمايزين لما $-\frac{e}{e-1}m<-\frac{e}{e-1}$ أي $m>1$.

III n عدد طبيعي حيث $n>1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$.

1) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$: $I_n=\ln(1+n\ln n)$.

لدينا : $I_n=\int_1^n f(x)dx=\int_1^n\left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)dx=\left[\ln(1+x\ln x)\right]_1^n=\ln(1+n\ln n)$.(لاحظ أن f من الشكل : $\frac{u'}{u}$)

2) دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (I_n) :

ندرس إشارة الفرق : $I_{n+1}-I_n$

لدينا : $I_{n+1}-I_n=\int_1^{n+1} f(x)dx-\int_1^{n} f(x)dx=\int_1^{n} f(x)dx+\int_n^{n+1} f(x)dx-\int_1^{n} f(x)dx=\int_n^{n+1} f(x)dx$

و من أجل $n>1$: $\int_n^{n+1} f(x)dx>0$ و بالتالي المتتالية (I_n) متزايدة تماما .

حل مقترح للتمرين 13 باك 2019

f الدالة العددية المعرّفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\ln x$.

1) أ ـ حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\dfrac{1}{x-2}+\ln x\right]=-\infty$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}}\left[\dfrac{1}{x-2}+\ln x\right]=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}}\left[\dfrac{1}{x-2}+\ln x\right]=-\infty$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=2$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

بـ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x-2}+\ln x\right]=+\infty$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;2[\cup]2;+\infty[$:

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{x}=\frac{-x+(x-2)^2}{x(x-2)^2}=\frac{-x+x^2-4x+4}{x(x-2)^2}=\frac{x^2-5x+4}{x(x-2)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة x^2-5x+4 لكون $x(x-2)^2>0$ من أجل كل x من $]0;2[\cup]2;+\infty[$.

- إشارة $f'(x)$:

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

و منه : الدالة f متزايدة على المجالين $[4;+\infty[$ و $]0;1]$ و متناقصة على المجالين $[2;4]$ و $[1;2[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	$\frac{1}{2}+\ln 4$	↗	$+\infty$

3) أ ـ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x-2}\right)=0$.

التفسير : المنحنى (Γ) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

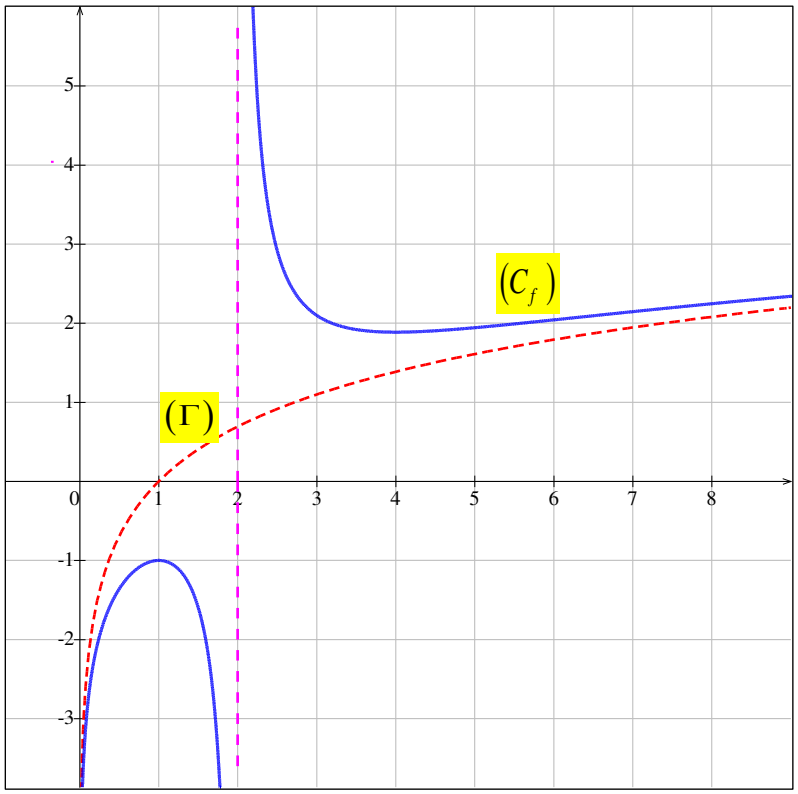
بـ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ) :

لدينا : $f(x)-\ln x=\dfrac{1}{x-2}$ و منه إشارة الفرق $f(x)-\ln x$ من إشارة $x-2$.

على المجال $]0;2[$: (C_f) يقع تحت (Γ) .

على المجال $]2;+\infty[$: (C_f) يقع فوق (Γ) .

4) الرسم :



5) H الدالة المعرّفة على المجال $]3;+\infty[$ بـ : $H(x)=\int_3^x \ln(t)dt$ حيث t متغيّر حقيقي موجب تماما .

أ- تعيين عبارة $H(x)$ بدلالة x .

نضع $u(t)=\ln(t)$ ، $v'(t)=1$ و منه $u'(t)=\frac{1}{t}$ ، $v(t)=t$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا :

$$H(x)=[t\ln t]_3^x-\int_3^x \frac{1}{t}\times t\,dt=x\ln x-3\ln 3-\int_3^x dt=x\ln x-3\ln 3-[t]_3^x$$

ومنه $H(x)=x\ln x-3\ln 3-(x-3)$ أي : $H(x)=-x+3+x\ln x-3\ln 3$.

بـ- حساب A مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين : $x=3$ و $x=4$.

$$A=\int_3^4 f(x)dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}+\ln x\right)dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}\right)dx+\int_3^4 \ln x dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}\right)dx+H(4)=\left[\ln|x-2|\right]_3^4+H(4)$$

ومنه $A=\ln 2+4\ln 4-4-3\ln 3+3$ أي : $A=(-1+9\ln 2-3\ln 3)(u.a)$.

6) g الدالة المعرّفة على $]-1;0[\cup]-\infty;-1[$ بـ : $g(x)=f(-2x)$.

الدالة g قابلة للإشتقاق على $]-1;0[\cup]-\infty;-1[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق ، و $g'(x)=-2f'(-2x)$.

إتجاه تغيّر الدالة g :

$g'(x)>0$ تكافئ $f'(-2x)<0$ تكافئ : $\begin{cases}1<-2x<2\\ \text{أو}\\ 2<-2x<4\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}-1<x<-\frac{1}{2}\\ \text{أو}\\ -2<x<-1\end{cases}$.

ومنه الدالة g متزايدة على $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ و متناقصة على $]-2;-1[\cup\left]-\frac{1}{2};0\right[$ و $]-\infty;-2[$.

بالتوفيق للجميع
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM