

طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

دراسة دالة لوغارتمية

$\ln x$

④

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

24 / 12 / 2020

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمريـــــن

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = (\ln x)^3 + 1$$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) حل المعادلة $g(x) = 0$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = (\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$ يكون:

$$f'(x) = 2\frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$$

3) استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x) = (\ln x)^2 + 1$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة h .

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-h(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

3) ادرس الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_h) .

4) بين أن (C_h) يقبل A نقطة انعطاف يُطلب احداثييها .

5) اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_h) في النقطة A .

6) احسب $f(e)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

7) مثل بيانيا في نفس المعلم كلا من (C_f) ، (C_h) و (T) .

8) نعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية:

$$e^m(\ln x)^3 + e^m(\ln x) - \ln x - 2e^m = 0 \dots (E)$$

- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E)

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}[g(x)] = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}[(\ln x)^3+1]$$
$$= -\infty$$
$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim_{x\to+\infty}[(\ln x)^3+1]$$
$$= +\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 3\frac{1}{x}(\ln x)^2$$

لدينا: $g'(x) > 0$

و $g'(1) = 0$

ومنه

- جدول التغيرات:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$+$		0		$+$
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

2) حل المعادلة $g(x) = 0$:

لدينا:

$$g(x) = 0 \Rightarrow (\ln x)^3 + 1$$
$$\Rightarrow (\ln x)^3 = -1$$
$$\Rightarrow \ln x = -1$$
$$\Rightarrow x = e^{-1}$$

اذن حلول المعادلة $g(x) = 0$:

$$s = \{e^{-1}\}$$

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

(II)

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}[f(x)] = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[(\ln x)^2+1-\dfrac{2}{\ln x}\right]$
$= +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}[f(x)] = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\left[(\ln x)^2+1-\dfrac{2}{\ln x}\right]$
$= -\dfrac{2}{0^-}$
$= +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}[f(x)] = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\left[(\ln x)^2+1-\dfrac{2}{\ln x}\right]$
$= -\dfrac{2}{0^+}$
$= -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\ln x)^2+1-\dfrac{2}{\ln x}\right]$
$= +\infty$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x=0$
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x=1$

2) تبيين أنه من أجل كل x من المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$ يكون: $f'(x)=2\frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$:

$$f'(x) = 2\frac{1}{x}\ln x - \left(\frac{-\frac{2}{x}}{(\ln x)^2}\right)$$
$$= \frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{x(\ln x)^2}$$
$$= 2\left[\frac{(\ln x)^3+1}{x(\ln x)^2}\right]$$
$$= \frac{2g(x)}{x(\ln x)^2}$$

3) استنتاج إشارة $f'(x)$:

لدينا: $x(\ln x)^2 > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

- جدول تغيرات الدالة f :

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$\|$ $+\infty$	↘	4	↗	$\|$ $-\infty$	↗	$+\infty$

(III)

1) دراسة تغيرات الدالة h :

- **النهايات:**

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}[h(x)] = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}[(\ln x)^2+1] = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[h(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}[(\ln x)^2+1] = +\infty$

- **دراسة $h'(x)$:**

$$h'(x) = \frac{2}{x}\ln x$$

لدينا $\frac{2}{x} > 0$ ومنه :

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

- **جدول تغيرات الدالة h:**

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$\|$ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

2) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-h(x)]$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-h(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[(\ln x)^2+1-\frac{2}{\ln x}-(\ln x)^2-1\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2}{\ln x}\right]$$
$$= 0$$

- **التفسير الهندسي:**

(C_h) و (C_f) متقاربان بجوار $+\infty$

3) دراسة الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_h) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-h(x)$:

$$f(x)-h(x) = \frac{2}{-\ln x}$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لدينا:

$$-\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

ومنه:

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-h(x)$	$+$	$-$	

- الوضعية:

- (C_f) فوق (C_h) لما $x \in]0;1[$.
- (C_f) تحت (C_h) لما $x \in]1;+\infty[$

4) تبيين أن (C_h) يقبل A نقطة انعطاف:

لدينا:

$$\begin{aligned} h''(x) &= \frac{-2}{x^2}\ln x + \frac{1}{x}\times\frac{2}{x} \\ &= \frac{-2\ln x + 2}{x^2} \\ &= \frac{2}{x^2}(1-\ln x) \end{aligned}$$

لدينا $\frac{2}{x^2} > 0$ ومنه الإشارة من $(1-\ln x)$:

$$1-\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1$$
$$\Rightarrow x = e$$

x	0	e	$+\infty$
$h''(x)$	$+$	0	$-$

لدينا $h''(x)$ انعدمت وغيرت اشارتها ومنه المنحني (C_h) يقبل نقطة انعطاف احداثييها $A(e;2)$

5) كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_h) في النقطة A :

$$\begin{aligned} (T): y &= h'(e)(x-e)+h(e) \\ &= \frac{2}{e}\ln e\,(x-e) + (\ln e)^2 + 1 \\ &= \frac{2}{e}x \end{aligned}$$

6) حساب $f(e)$:

$$f(e) = (\ln e)^2 + 1 - \frac{2}{\ln e} = 0$$

- الاستنتاج:

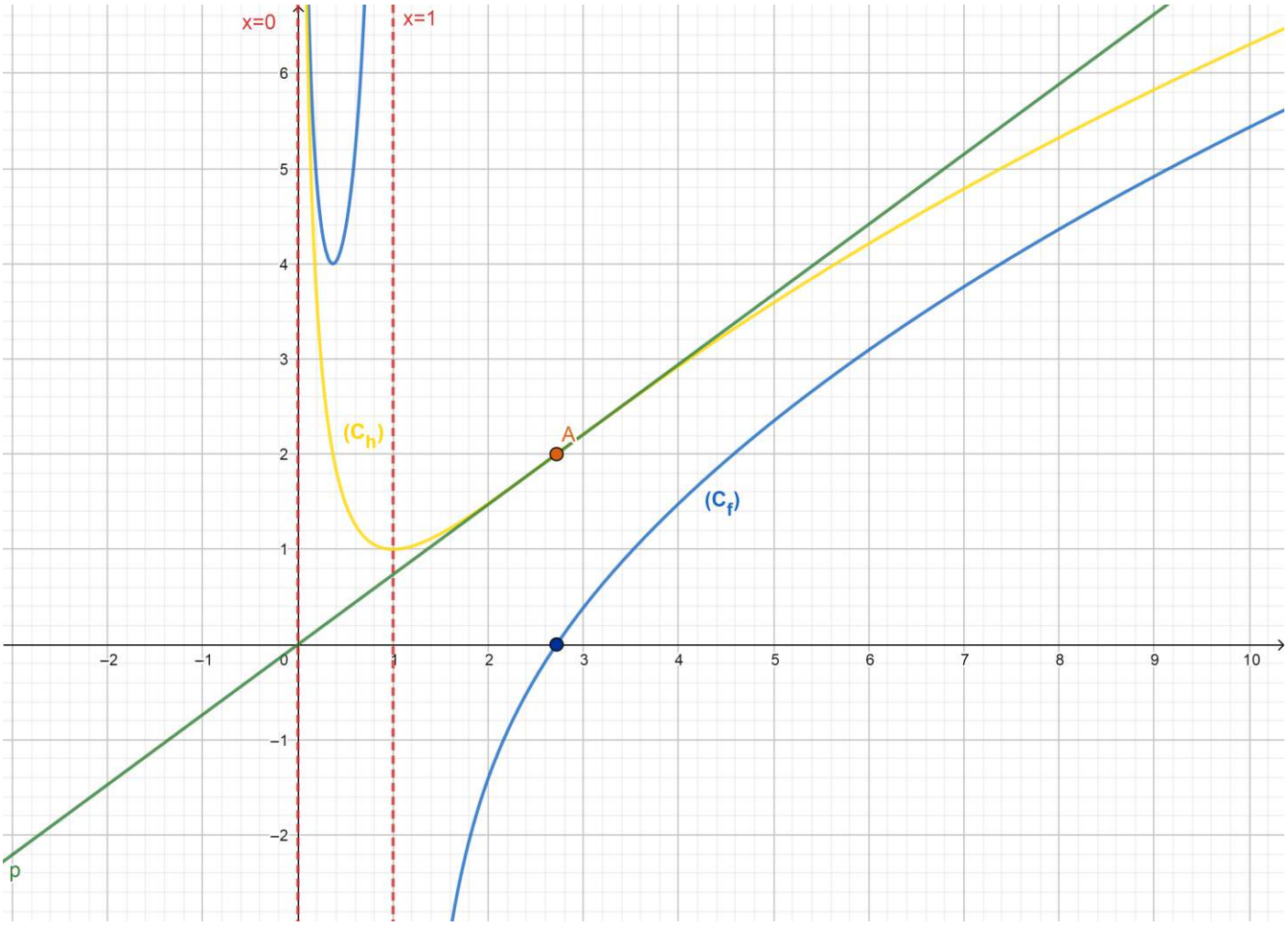
(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة e .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

7) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x=1$ و $x=0$
- نرسم المماس (T)
- نعين A نقطة انعطاف المنحني (C_h)
- باستعمال جدول تغيرات الدالة h نرسم (C_h)
- نعين نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



8) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$e^m(\ln x)^3 + e^m \ln x - \ln x - 2e^m = 0$$
$$\Rightarrow e^m[(\ln x)^3 + \ln x - 2] = \ln x$$
$$\Rightarrow e^m\left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}\right] = 1$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$\Rightarrow e^{m}[f(x)] = 1$$
$$\Rightarrow f(x) = e^{-m}$$

ومنه حلول المعادلة (E) هل فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = e^{-m}$

اذن:

لما $e^{-m} < 4$ أي $-m < \ln 4$ أي $m > -\ln 4$ المعادلة تقبل حل وحيد

لما $e^{-m} = 4$ أي $-m = \ln 4$ أي $m = -\ln 4$ المعادلة تقبل حلين احدهما مضاعف

لما $e^{-m} > 4$ أي $-m > \ln 4$ أي $m < -\ln 4$ المعادلة تقبل ثلاث حلول

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►

قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM