مسألة أسية رقم 1

✓ نعتبر الدّالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + (x^2 - 1)e^{-x}$

1) أ – أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

ب- أدرس إتجاه تغير الدّالة g . ثم شكل جدول تغيراتها .

2) أ- بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ ثم تحقق أن أحدهما معدوم و الاخر α حيث $-0,8 < \alpha < -0,7$

ب- إستنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

✓✓ لتكن الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - (x+1)^2 e^{-x}$ و ليكن C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$

ج- أدرس إتجاه تغير الدّالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها . (نأخذ $f(\alpha) = -0,9$

2) أ – بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل لـ C_f بجوار $+\infty$.

ب- أدرس الوضع النسبي بين المنحنى C_f و المستقيم (Δ) .

3) بيّن أن المنحنى C_f يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما يساوي 1 ، يطلب تعيين معادلة لكل منهما

4) أنشئ (Δ) و C_f و المماسين .

5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x :

$$(x+1)^2 + me^x = 0$$

بالتوفيق للجميع : بكالوريا 2021

حل مقترح للتمرين،

I. $D_g =]-\infty;+\infty[$; $g(x) = 1+(x^2-1)e^x$

1. دراسة تغيرات الدالة g.

1.1. حساب النهايات عند $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 1+(x^2-1)e^x = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1+(x^2-1)e^x = \boxed{1}$$

لأن، $\left(\lim_{x\to+\infty}(x^2-1)e^x = 0\right)$

ب. دراسة إتجاه تغير الدالة g.

g معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

ودالتها المشتقة هي، -

$$g'(x) = 2xe^x - (x^2-1)e^x$$

$$\boxed{g'(x) = (-x^2+2x+1)e^x}$$

إشارة g' من إشارة $(-x^2+2x+1)$

$\Delta = 8$

$x_1 = \frac{-2-2\sqrt{2}}{-2}$ ، $x_2 = \frac{-2+2\sqrt{2}}{-2}$

أي $x_1 = 1+\sqrt{2}$ ، $x_2 = 1-\sqrt{2}$

x	$-\infty$	$(1-\sqrt{2})$	$(1+\sqrt{2})$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;1-\sqrt{2}[$ و $]1+\sqrt{2};+\infty[$ ، و متزايدة تماما على المجال $[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}]$

جدول التغيرات.

x	$-\infty$	$(1-\sqrt{2})$	$(1+\sqrt{2})$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-0,25$ ↗	$1,43$ ↘	1

2. تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

لدينا من جدول التغيرات،

g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty,1-\sqrt{2}[$

و $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ ، $g(1-\sqrt{2}) \approx -0,25$ ومنه

المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على هذا المجال.

g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}[$

و $g(1-\sqrt{2}) \approx -0,25$ ، $g(1+\sqrt{2}) = 0$ ومنه

المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على هذا المجال، إذا المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلان في $\mathbb{R}$

التحقق،

$$g(0) = 1+(0^2-1)e^0 = 0$$

g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0,8;-0,7]$

$g(-0,8) = 0,19$; $g(-0,7) \approx -0,27$

$$g(-0,8)\cdot g(-0,7) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,8 < \alpha < -0,7$

ب. إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

II. $D_f =]-\infty;+\infty[$; $f(x) = x-(x+1)^2e^{-x}$

1. حساب النهايات عند $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x-(x+1)^2e^{-x} = \boxed{+\infty}$$

لأن $\left(\lim_{x\to+\infty}(x+1)^2e^{-x} = 0\right)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x-(x+1)^2e^{-x} = \text{ح ع ت}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(1+(x+1)^2\frac{e^{-x}}{-x}\right) = \boxed{-\infty}$$

لأن $\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{-x} = \boxed{+\infty}\right)$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ب. تبيان أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$ ؛ f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' هي:

$f'(x) = 1 - 2(x+1)e^{-x} + (x+1)^2 e^{-x}$

$= 1 + (-2x - 2 + x^2 + 2x + 1)e^{-x}$

$f'(x) = 1 + (x^2 - 1)e^{-x} = g(x)$

ج. دراسة إتجاه تغير الدالة f

إشارة f' من إشارة الدالة g

ومنه:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;\alpha[$ و $]0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;0]$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$-0,3$ ↘	1 ↗	$+\infty$

2-أ) تبيان أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x \to +\infty} [x - (x+1)e^{-x} - x]$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (-(x+1)e^{-x}) = 0$

ومنه $(\Delta): y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

$f(x) - y = x - (x+1)e^{-x} - x$

$= -(x+1)e^{-x} < 0$

لأن: $e^{-x} > 0$ و $-(x+1)^2 < 0$ إذا:

(C_f) يقع تحت (Δ).

3. تبيان أن (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما يساوي 1

معناه $f'(x) = 1$ أي $1 + (x^2+1)e^{-x} = 1$

لأن $(x^2+1)e^{-x} = 0$ $(e^{-x} \neq 0)$

ومنه $\begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ x = -1 \end{cases}$ ، $\begin{cases} x^2 + 1 = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases}$

$y_1 = f'(1)(x-1) + f(1)$

$= 1(x-1) + 1 + 4e^{-1}$

$y_1 = x - 4e^{-1}$

$y_2 = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

$= 1(x+1) - 1$

$y_2 = x$

4- الإنشاء: (أنظر الرسم)

5. المناقشة البيانية:

$(x^2+1)^2 + me^x = 0$

$(x+1)^2 = -me^x$

$-(x+1)^2 e^{-x} = m$

$x - (x+1)^2 e^{-x} = x + m$

$f(x) = x + m$ (مناقشة مائلة)

حلول المعادلة $f(x) = x + m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم الذي معادلته $y = x + m$

$m \in]-\infty, -4e^{-1}[$ المعادلة حل وحيد

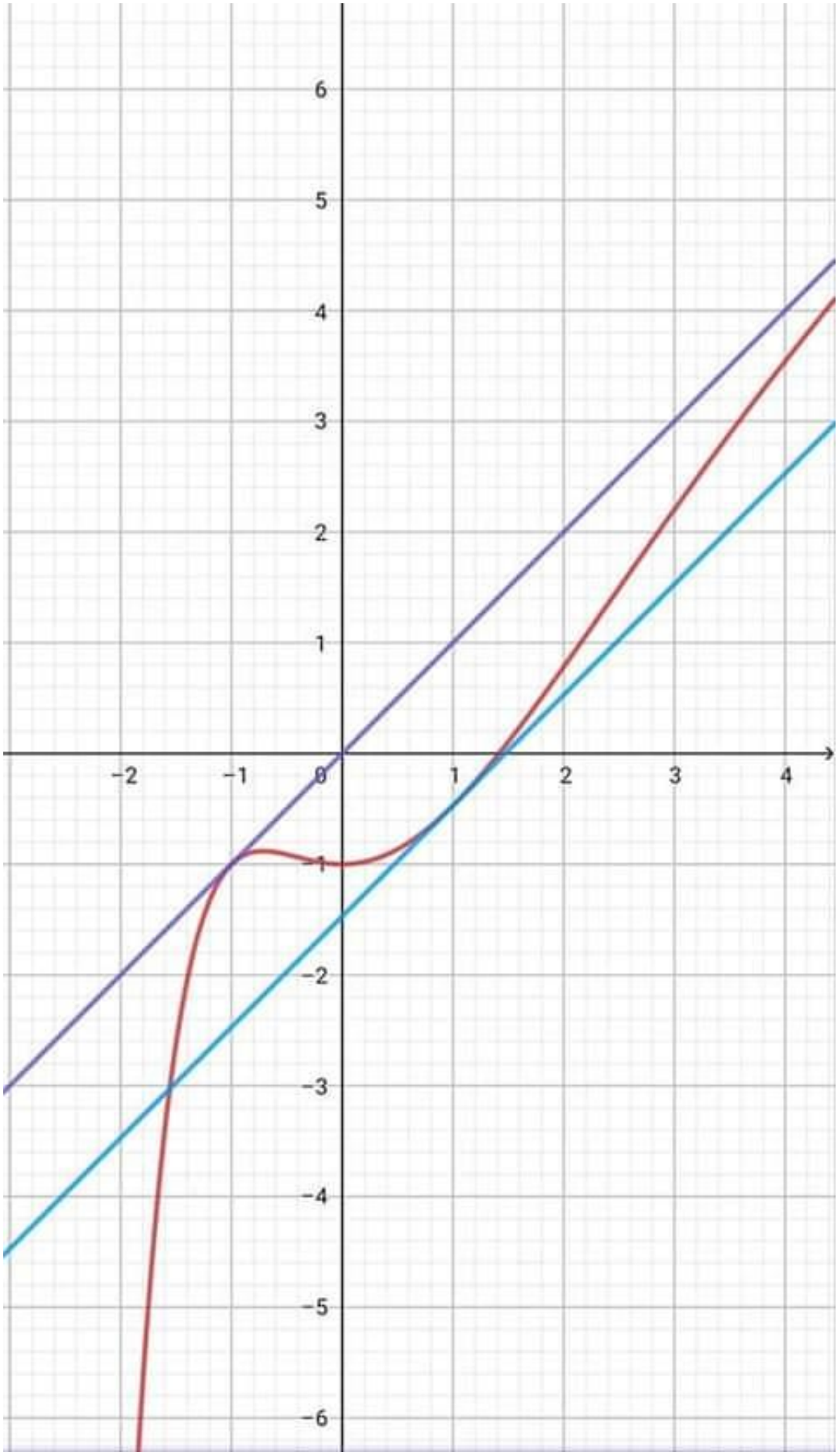
$m = -4e^{-1}$ المعادلة حلان

$m \in]-4e^{-1}; 0[$ المعادلة ثلاث حلول

$m = 0$ المعادلة حل وحيد

$m \in]0; +\infty[$ ليس للمعادلة حلول.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM