سلسلة الرياضيات السهلة

حوليات الرياضيات

شعبة : علوم تجريبية

من 2008 إلى 2019

إعداد : خالد بخاخشة ©
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

مقدمة

المقدمات لا يقرأها أحد ..

إقلب الصفحة

الفهرس

تصحيح مقترح لبكالوريا 2008 3

تصحيح مقترح لبكالوريا 2009 16

تصحيح مقترح لبكالوريا 2010 29

تصحيح مقترح لبكالوريا 2011 43

تصحيح مقترح لبكالوريا 2012 54

تصحيح مقترح لبكالوريا 2013 69

تصحيح مقترح لبكالوريا 2014 84

تصحيح مقترح لبكالوريا 2015 98

تصحيح مقترح لبكالوريا 2016 المسرّب 113

تصحيح مقترح لبكالوريا 2016 131

تصحيح مقترح لبكالوريا 2017 الدورة العادية 148

تصحيح مقترح لبكالوريا 2017 الدورة الإستثنائية 161

تصحيح مقترح لبكالوريا 2018 177

تصحيح مقترح لبكالوريا 2019 192

الموضوع الأول

التمرين الأول(4,5ن)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة: $z^2-(1+2i)z-1+i=0$.

نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 حيث $|z_1|<|z_2|$. بيّن أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي.

2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

لتكن A، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: 1، z_1 و z_2.

ليكن z العدد المركّب حيث: $z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$.

أ- إنطلاقا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و من الخاصية $e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

برهن أن: $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ و أن: $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ بحيث θ، θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية.

بـ- أكتب z على الشكل الأسّي.

جـ- أكتب z على الشكل المثلثي و استنتج أن C هي صورة B بتشابه مباشر مركزه A، يطلب تعيين نسبته و زاويته.

التمرين الثاني(4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر المستوي (P) الذي معادلته: $x+2y-z+7=0$.

و النقط: $A(2;0;1)$، $B(3;2;0)$، $C(-1;-2;2)$.

1) تحقق أن النقط A، B و C ليست على استقامية، ثم بيّن أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $y+2z-2=0$.

2) أ- تحقق أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان، ثم عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (ABC).

بـ- أحسب المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ).

3) لتكن G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;\alpha),(C;\beta)\}$ حيث α,β عددان حقيقيان يحققان $\alpha+\beta+1\neq 0$.

4) عيّن α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ).

التمرين الثالث(4ن)

1) نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $I=[1;2]$ بالعبارة: $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$

أ- بيّن أن الدالة f متزايدة على I.

بـ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I، $f(x)$ ينتمي إلى I.

2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي: $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، u_n ينتمي إلى I.

بـ- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$.

بـ- عيّن النهاية: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الرابع(7,5ن)

I) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $1\ cm$.

عيّن قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$.

(C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

1) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ و فسر النتيجة بيانيا. (نذكر أن $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$)

2) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها .

3) بيّن أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I يطلب تعيين إحداثييها .

4) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I.

5) أرسم (C_g) .

6) H الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان .

ـ عيّن α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$. استنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند 0 .

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي : $k(x)=g(x^2)$

باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عيّن اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها .

الموضوع الثاني

التمرين الأول(3ن)

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد فقط صحيح ، عيّن الجواب الصحيح معللا اختيارك .

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(1;3;-1)$ ، $B(4;1;0)$ ، $C(-2;0;-2)$ و $D(3;2;1)$.

و المستوي (P) الذي معادلته $x-3z-4=0$.

1) المستوي (P) هو : ج1) (BCD) ج2) (ABC) ج3) (ABD)

2) شعاع ناظمي للمستوي (P) هو : ج1) $\vec{n_1}(1;2;1)$ ج2) $\vec{n_2}(-2;0;6)$ ج3) $\vec{n_3}(2;0;-1)$

3) المسافة بين النقطة D و المستوي (P) هي : ج1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ج2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ج3) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

التمرين الثاني(5ن)

(u_n) متتالية عددية معرّفة كما يلي : $u_0=\frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+2$

1) أ- أرسم في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحنى (d) الممثل للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{2}{3}x+2$.

بـ- باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود : u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4 .

جـ- ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 6$

بـ- تحقق أن (u_n) متزايدة .

جـ- هل (u_n) متقاربة ؟ برّر إجابتك.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

بـ- أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث(5ن)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$

2) نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب حيث : $z_A = 2 + i$ و $z_B = -2 - 2i$.

عيّن z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

3) لتكن C النقطة ذات الاحقة z_C حيث : $z_C = \dfrac{4-i}{1+i}$.

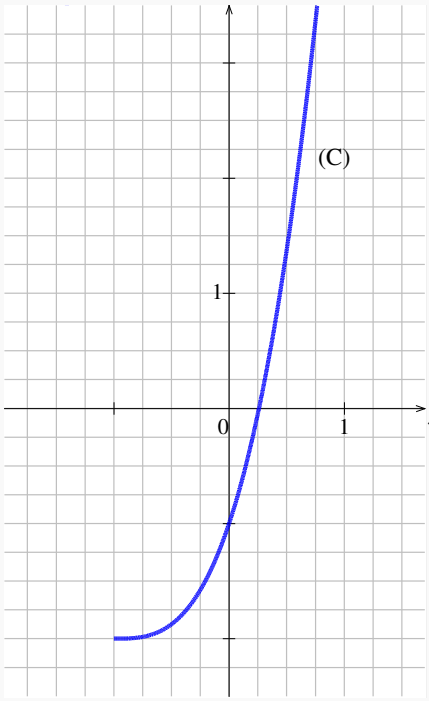
أكتب z_C على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) .

4) أ- برهن أن عبارة التشابه المباشر الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته k $(k>0)$ و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$

بـ- **تطبيق** : عيّن الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرّف بـ : $z' + \dfrac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \dfrac{1}{2}i\right)$.

التمرين الرابع(7ن)

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$



1) أ- بقراءة بيانية شكّل جدول تغيّرات الدالة g وحدد $g(0)$ و إشارة $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

بـ- علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$ يحقق $g(\alpha) = 0$.

جـ- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

2) f هي الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$

و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O,\vec{i};\vec{j})$

أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$.

بـ- عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ و فسّر النتيجة بيانيا .

جـ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (x+1)]$ و فسّر النتيجتين بيانيا .

د- شكّل جدول تغيّرات f .

3) نأخذ $\alpha \approx 0.26$ ،

أ- عيّن مدوّر $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} .

بـ- أرسم المنحنى (Γ) .

4) أ- أكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=x+a+\dfrac{b}{(x-1)^2}$ حيث a و b عددان حقيقيان .

بـ- عيّن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ و التي تحقق $F(1)=2$.

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

1) حل في $\mathbb{C}$ ، المعادلة : $z^2-(1+2i)z-1+i=0$.

لدينا : $\Delta=(1+2i)^2-4\times1\times(-1+i)=1$ و منه للمعادلة حلين هما :

$z_1=\dfrac{1+2i-1}{2}=i$ و $z_2=\dfrac{1+2i+1}{2}=1+i$.

- تبيان أن $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ حقيقي :

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}=\left(\frac{i}{1+i}\right)^{2008}=\left(\frac{i(1-i)}{2}\right)^{2008}=\left(\frac{i+1}{2}\right)^{2008}=\left(\frac{(i+1)^2}{4}\right)^{1004}=\left(\frac{2i}{4}\right)^{1004}=\left(\frac{i}{2}\right)^{1004}=\frac{(i^4)^{251}}{2^{1004}}=\frac{1}{2^{1004}}$$

2) أ- إعتمادا على التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و من الخاصية $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$.

- لبرهان أن : $e^{-i\theta}=\dfrac{1}{e^{i\theta}}$ يكفي إثبات أن : $e^{-i\theta}\times e^{i\theta}=1$.

لدينا : $e^{-i\theta}\times e^{i\theta}=e^{(-i\theta+i\theta)}=e^0=\cos0+i\sin0=1$

- إثبات : $\dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

لدينا : $\dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i\theta_1}\times\dfrac{1}{e^{i\theta_2}}=e^{i\theta_1}\times e^{-i\theta_2}=e^{i\theta_1-i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

بـ- كتابة z على الشكل الأسّي .

لدينا : $z=\dfrac{z_2-1}{z_1-1}$ ومنه $z=\dfrac{1+i-1}{i-1}=\dfrac{i}{i-1}=\dfrac{i(-i-1)}{2}=\dfrac{1-i}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

لدينا : $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ ومنه : $|z|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

وبفرض θ عمدة للعدد المركب z ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ ، ومنه $\arg(z)=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

جـ- كتابة z على الشكل المثلثي :

$$z=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

• استنتاج أن C هي صورة B بتشابه مباشر مركزه A، مع تعيين نسبته و زاويته له :

لدينا : $z=\dfrac{z_2-1}{z_1-1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ يكافئ $z_2-1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}(z_1-1)$ ومنه C هي صورة B بالتشابه المباشر الذي مركزه A ونسبته $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته له $-\dfrac{\pi}{4}$.

حل مقترح التمرين الثاني

1) التحقق من أن النقط A ، B و C ليست على استقامية :

لدينا : $A(2;0;1)$ ، $B(3;2;0)$ ، $C(-1;-2;2)$ ، ومنه $\overrightarrow{AB}(1;2;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(-3;-2;1)$.

لدينا $\dfrac{-3}{1}\neq\dfrac{-2}{2}$ وبالتالي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا أي أن النقط A ، B و C ليست في استقامية و تعيّن مستويا وحيدا و هو المستوي (ABC) .

• تبيان أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $y+2z-2=0$.

علما أن النقط A ، B و C ليست في استقامية ، يكفي إثبات أن إحداثياتها تحقق المعادلة .

$A\in(ABC)$ لأن : $y_A+2z_A-2=0+2\times1-2=0$.

$B\in(ABC)$ لأن : $y_B+2z_B-2=2+2\times0-2=0$.

$C\in(ABC)$ لأن : $y_C+2z_C-2=-2+2\times2-2=0$.

2) أ- التحقق أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان :

لدينا : $(P):x+2y-z+7=0$ و $(ABC):y+2z-2=0$.

ومنه : $\overrightarrow{n_1}(1;2;-1)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\overrightarrow{n_2}(0;1;2)$ شعاع ناظمي لـ (ABC).

لدينا $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=1\times0+2\times1+(-1)\times2=0$ وبالتالي $\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$ متعامدان أي أن (P) و (ABC) متعامدان .

• تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (ABC) :

لدينا : تمثيل ديكارتي للمستقيم (Δ) من الشكل : $\begin{cases}x+2y-z+7=0\\y+2z-2=0\end{cases}$ ، بوضع مثلا : $z=t$

نجد : $\begin{cases}x=-2y+t-7\\y=-2t+2\end{cases}$ ومنه تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) من الشكل : $\begin{cases}x=5t-11\\y=-2t+2\\z=t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

بـ- حساب المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) :

المستويان (P) و (ABC) متقاطعان وفق المستقيم (Δ) و $A\in(ABC)$ ومنه :

$$d\left(A;(\Delta)\right)=d\left(A;(P)\right)=\frac{|2+2\times0-1+7|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

3) G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;\alpha),(C;\beta)\}$ حيث α,β عددان حقيقيان يحققان $\alpha+\beta+1\neq0$

تعيين α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ).

لدينا إحداثيات G هي : $\begin{cases}x_G=\dfrac{3\alpha-\beta+2}{1+\alpha+\beta}\\y_G=\dfrac{2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta}\\z_G=\dfrac{2\beta+1}{1+\alpha+\beta}\end{cases}$

$G \in (\Delta)$ معناه $G \in (P)$ لأن $G \in (ABC)$، وبالتالي $x_G + 2y_G - z_G + 7 = 0$ ، نجد : $\alpha = -\frac{4}{7}$.

حل مقترح التمرين الثالث

1) $I = [1;2]$ ، $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$

أ- تبيان أن الدالة f متزايدة على I.

الدالة f قابلة للإشتقاق على I و $f'(x) = \frac{6}{(-x+4)^2}$.

ومنه من أجل كل x من I، $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على I.

بـ- تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على I ومنه من أجل كل $x \in [1;2]$، $f(x) \in [f(1);f(2)]$

ولدينا : $f(2) = 2$ و $f(1) = 1$ ، إذن من أجل كل $x \in I$ ، $f(x) \in I$

2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي : $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \le u_n \le 2$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$، لدينا $u_0 = \frac{3}{2}$ ومنه $1 \le u_0 \le 2$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $1 \le u_n \le 2$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $1 \le u_{n+1} \le 2$.

لدينا حسب الفرض $1 \le u_n \le 2$ ومنه حسب السؤال (أ) $1 \le f(u_n) \le 2$ أي : $1 \le u_{n+1} \le 2$. وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n، $1 \le u_n \le 2$.

بـ- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2}{-u_n + 4} - u_n = \frac{{u_n}^2 - 3u_n + 2}{-u_n + 4} = \frac{(u_n - 1)(u_n - 2)}{-u_n + 4}$.

وبما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \le u_n \le 2$ فإن $u_n - 1 \ge 0$ و $u_n - 2 \le 0$ و $-u_n + 4 > 0$

وبالتالي $u_{n+1} - u_n < 0$. إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة.

3) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$، لدينا $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^0 + 1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$

أي $u_{n+1}=1+\dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$.

لدينا $u_{n+1}=f\left(u_n\right)=\dfrac{u_n+2}{-u_n+4}=-1+\dfrac{6}{-u_n+4}=-1+\dfrac{6}{4-u_n}=\dfrac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+4}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}=1+\dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة.

• الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=1+\dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$.

بـ- $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}\right)=1$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=+\infty$.

حل مقترح التمرين الرابع

I) f الدالة العددية المعرفة على $[-2;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$

تعيين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

$A\in(C_f)$ معناه: $f(-1)=1$ أي: $(-a+b)e+1=1$ ومنه: $a=b$.

معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$ معناه: $f'(-1)=-e$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $[-2;+\infty[$ و: $f'(x)=ae^{-x}+\left(-e^{-x}\right)(ax+b)=(-ax-b+a)e^{-x}$.

ومنه $f'(-1)=(2a-b)e$. ومما سبق $f'(-1)=-e$.

بالمطابقة لدينا $2a-b=-1$ و $a=b$ ومنه نجد: $a=b=-1$.

II) الدالة g معرفة على المجال $[-2;+\infty[$ بـ: $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$.

1) تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-1)e^{-x}+1=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}-e^{-x}+1\right)=1$، لأن $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(-xe^{-x}\right)=\lim\limits_{u\to-\infty}ue^u=0$.

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_g) عند $+\infty$.

2) دراسة تغيرات الدالة g:

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $[-2;+\infty[$، و $g'(x)=-e^{-x}+\left(-e^{-x}\right)(-x-1)=xe^{-x}$.

ـ إتجاه تغير الدالة g:

إشارة $g'(x)$ من إشارة x، ومنه الدالة g متناقصة على المجال $[-2;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g:

x	-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	e^2+1	↘	0	↗	1

3) تبيان أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I مع تعيين إحداثييها.

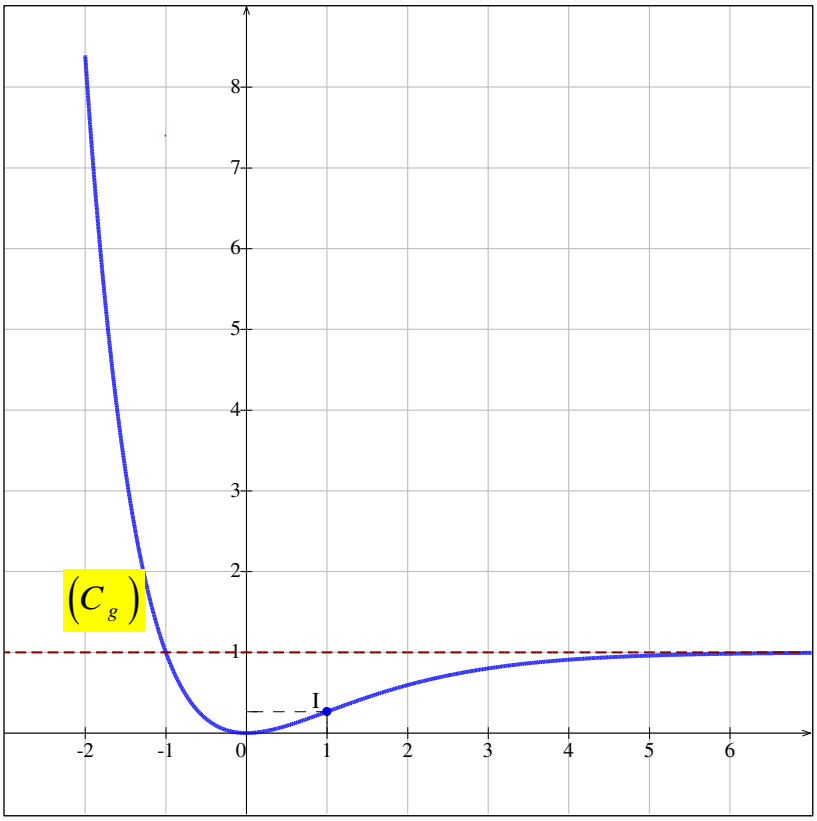
الدالة g' قابلة للإشتقاق على المجال $[-2;+\infty[$، و $g''(x)=(1-x)e^{-x}$.

إشارة $g''(x)$ من إشارة $1-x$ وبالتالي $g''(x)$ ينعدم عند 1 مغيرا إشارته، ومنه $I\left(1;1-\frac{2}{e}\right)$ هي نقطة إنعطاف لـ (C_g)

4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_g) عند النقطة I.

لدينا: $(T): y = g'(1)(x-1)+g(1)$ ومنه $(T): y = \frac{1}{e}x + 1 - \frac{3}{e}$.

5) الرسم:



6) H الدالة العددية المعرفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يلي: $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان.

ـ تعيين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة: $x \mapsto g(x)-1$:

الدالة H قابلة للإشتقاق على المجال $[-2;+\infty[$، و $H'(x)=\alpha e^{-x}+\left(-e^{-x}\right)(\alpha x+\beta)=(-\alpha x-\beta+\alpha)e^{-x}$.

H دالة أصلية للدالة: $x \mapsto g(x)-1$ معناه: $(-\alpha x-\beta+\alpha)e^{-x}=(-x-1)e^{-x}$ ومنه نجد: $\alpha=1$ و $\beta=2$.

لدينا: $g(x)=g(x)+1-1=H'(x)+1$ ومنه الدالة الأصلية للدالة g من الشكل: $G(x)=H(x)+x+c$

الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند 0 هي: $G(x)=(x+2)e^{-x}+x+2$.

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يأتي: $k(x)=g\left(x^2\right)$

الدالة k قابلة للإشتقاق على المجال $[-2;+\infty[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق،

و $k'(x)=2xg'\left(x^2\right)=2x\left(x^2e^{-x^2}\right)=2x^3e^{-x^2}$.

إتجاه تغير الدالة k:

إشارة $k'(x)$ من إشارة x، ومنه الدالة k متناقصة على المجال $[-2;0]$ ومتزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة k:

x	-2		0		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	$1-5e^{-4}$	↘	0	↗	1

حل مقترح التمرين الأول

تعيين الجواب الصحيح مع التعليل :

لدينا : $A(1;3;-1)$ ، $B(4;1;0)$ ، $C(-2;0;-2)$ ، $D(3;2;1)$ و $(P): x-3z-4=0$.

1) المستوي (P) هو : ج2) (ABC)

التبرير :

يكفي إثبات أن النقط ليست في إستقامية و أن إحداثياتها تحقق معادلة (P) .

لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;-2;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-3;-3;-1)$ و $\frac{-3}{3}\neq\frac{-2}{-3}$ و بالتالي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا أي أن النقط A ، B و C ليست في إستقامية .

$A\in(P)$ لأن $x_A-3z_A-4=1-3\times(-1)-4=0$

$B\in(P)$ لأن $x_B-3z_B-4=4-3\times0-4=0$

$C\in(P)$ لأن $x_C-3z_C-4=-2-3\times(-2)-4=0$

2) شعاع ناظمي للمستوي (P) هو : ج2) $\overrightarrow{n_2}(-2;0;6)$

التبرير :

لدينا : $\vec{n}(1;0;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) و $\overrightarrow{n_2}=-2\vec{n}$ ومنه $\overrightarrow{n_2}$ شعاع ناظمي للمستوي (P).

(لاحظ أن : كلا من $\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_3}$ ليسا مرتبطين خطيا مع $\vec{n}$)

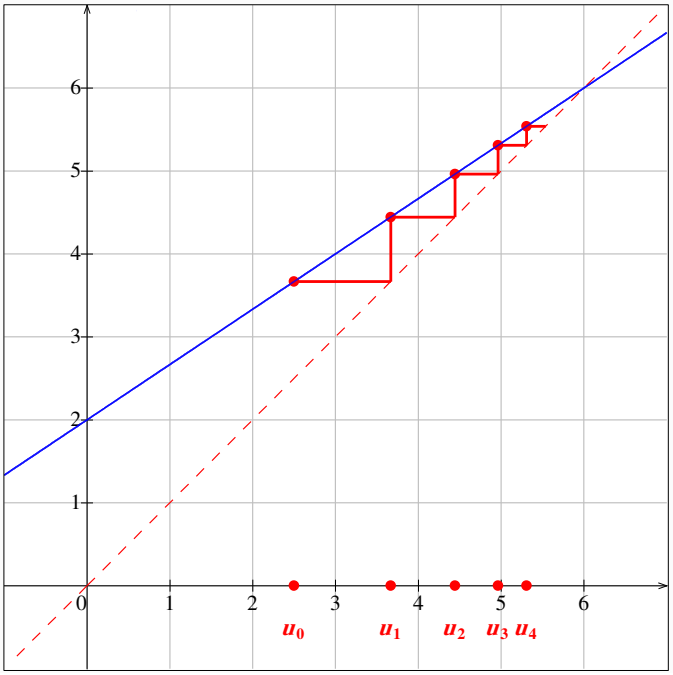
3) المسافة بين النقطة D و المستوي (P) هي: ج3) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

التبرير : $d=(D;(P))=\frac{|1\times3-0\times2-3\times1-4|}{\sqrt{1^2+0^2+(-3)^2}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{10}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

حل مقترح التمرين الثاني

(u_n) متتالية عددية معرّفة كما يلي : $u_0=\frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+2$

1) أ- بـ- الرسم و تمثيل الحدود :



جـ- التخمين :

نلاحظ من الرسم أن : $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4$

الحدود تتراكم حول العدد 6 .

وضع تخمين : المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة نحو 6 .

2) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 6$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 6$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0 = \frac{5}{2}$ و منه $u_0 \leq 6$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_n \leq 6$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} \leq 6$.

لدينا حسب الفرض $u_n \leq 6$ و منه $\frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}\times 6$ و منه $\frac{2}{3}u_n + 2 \leq \frac{2}{3}\times 6 + 2$ أي $u_{n+1} \leq 6$.

و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq 6$.

بـ- التحقق أن (u_n) متزايدة :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 2 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 2 = -\frac{1}{3}(u_n - 6)$

و لدينا مما سبق أن : $u_n \leq 6$ و منه $u_n - 6 \leq 0$. إذن $-\frac{1}{3}(u_n - 6) \geq 0$.

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ، و عليه المتتالية (u_n) متزايدة .

جـ- المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى إذن هي متقاربة .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$

أ- إثبات أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{2}{3}u_n + 2 - 6 = \frac{2}{3}u_n - 4 = \frac{2}{3}u_n - \frac{12}{3} = \frac{2}{3}u_n - \frac{2\times 6}{3} = \frac{2}{3}(u_n - 6) = \frac{2}{3}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$. الحد الأول : $v_0 = u_0 - 6 = \frac{5}{2} - 6 = -\frac{7}{2}$.

بـ- كتابة عبارة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{7}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

كتابة u_n بدلالة n : $u_n = v_n + 6 = -\frac{7}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n + 6$

جـ- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{7}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n + 6\right) = 6$. لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ (لاحظ أن $0 < \frac{2}{3} < 1$)

حل مقترح التمرين الثالث

1) حل في $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$

لدينا : $\Delta = i^2 - 4\times 1\times(-2-6i) = 7 + 24i = 7 + 2\times 4\times 3i = 16 - 9 + 2\times 4\times 3i = (4+3i)^2$.

(يمكن إستخدام طريقة أخرى للبحث عن الجذرين التربيعيين لـ Δ)

و منه للمعادلة حلين مركبين هما : $z_1 = \frac{-i + 4 + 3i}{2} = 2 + i$ و $z_2 = \frac{-i - 4 - 3i}{2} = -2 - 2i$.

2) تعيين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$:

$$z_\omega = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-2-2i+2+i}{2} = -\frac{1}{2}i$$

3) كتابة z_C على الشكل الجبري :

$$z_C = \frac{4-i}{1+i} = \frac{(4-i)(1-i)}{2} = \frac{4-i-4i-1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$$

- إثبات أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) :

يكفي أن نثبت أن : $\omega C = \frac{1}{2}AB$ أي : $|z_C - z_\omega| = \frac{1}{2}|z_B - z_A|$.

$$|z_C - z_\omega| = \left|\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i - \left(-\frac{1}{2}i\right)\right| = \left|\frac{3}{2} - 2i\right| = \frac{5}{2} = \frac{1}{2}|z_B - z_A| \text{ ، و } |z_B - z_A| = |-2-2i-2-i| = |-4-3i| = 5$$

ومنه $C \in (\Gamma)$.

4) أ- S التشابه المباشر الذي مركزه $M_0(z_0)$ نسبته k $(k > 0)$ وزاويته θ معناه :

- $S\ M_0 = M_0$.
- من أجل كل نقطة M من المستوي تختلف عن M_0 ، $S\ M = M'$ معناه :

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z'-z_0}{z-z_0}\right| = k \\ \arg\left(\dfrac{z'-z_0}{z-z_0}\right) = \theta + 2k\pi \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} |z'-z_0| = k\,|z-z_0| \\ \arg\left(\dfrac{z'-z_0}{z-z_0}\right) = \theta + 2k\pi \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} M_0M' = k\,M_0M \\ \left(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M'}\right) = \theta \end{cases}$$

ومنه $\frac{z'-z_0}{z-z_0} = ke^{i\theta}$ أي : $z'-z_0 = ke^{i\theta}(z-z_0)$ هي عبارة التشابه S .

بـ- **تطبيق** : تعيين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرف بـ : $z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \frac{1}{2}i\right)$.

التحويل S هو التشابه المباشر الذي مركزه النقطة ذات اللاحقة $-\frac{1}{2}i$ أي ω ونسبته 2 وزاوية له $\frac{\pi}{3}$.

حل مقترح التمرين الرابع

1) أ- بقراءة بيانية :

جدول تغيرات الدالة g :

x	-1	$+\infty$
$g(x)$	-2 ↗	$+\infty$

$g(0) = -1$ و $g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

بـ- الدالة g مستمرة و رتيبة على المجال $]-1;+\infty[$ و $]-1;+\infty[\supset \left]0;\frac{1}{2}\right[$ و $g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يحقق $g(\alpha) = 0$.

جـ- إشارة $g(x)$:

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2) f الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$

أ ـ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و :

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x+3)\times(x+1)^2-2(x+1)(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{(3x^2+6x+3)\times(x+1)-2(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{x^3+3x^2+3x-1}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

بـ ـ $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)$ و $f'(\alpha)=\dfrac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=0$

التفسير : (Γ) يقبل عند النقطة $A(\alpha;f(\alpha))$ مماسا يوازي حامل محور الفواصل .

جـ ـ $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x>-1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x>-1}}\left[\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}\right]=+\infty$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى (Γ).

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)=0$$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (Γ).

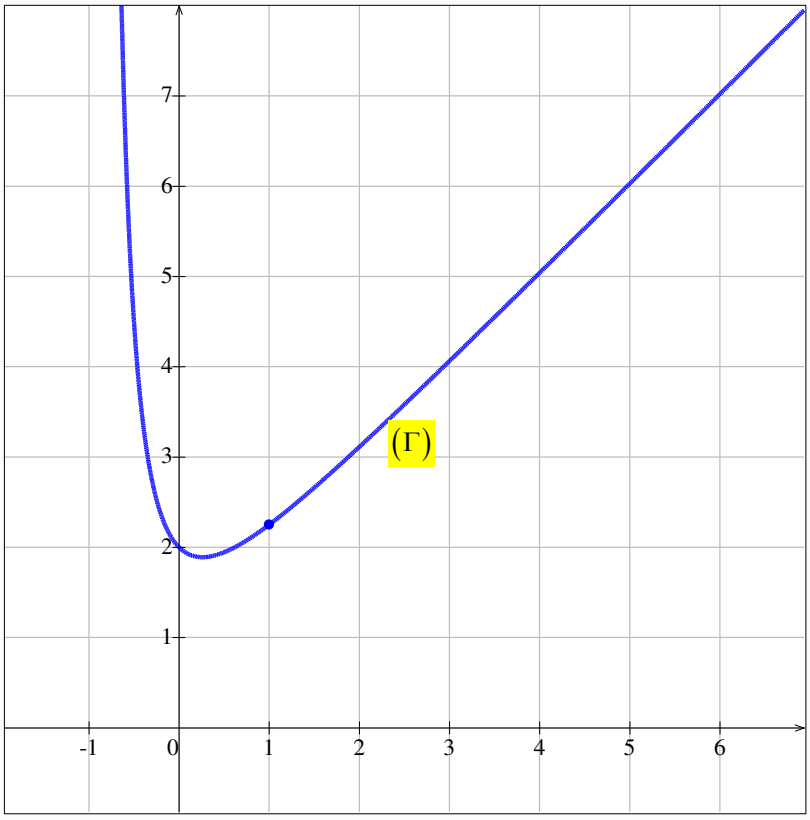
د ـ جدول تغيرات الدالة f :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ‖	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) بأخذ $\alpha\approx0.26$ ،

أ ـ $f(\alpha)\approx1,89$.

بـ ـ الرسم :



4) أ- كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=x+a+\dfrac{b}{(x-1)^2}$ حيث a و b عددان حقيقيان.

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}=\frac{x^3+3x^2+3x+1+1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^3+1}{(x+1)^2}=x+1+\frac{1}{(x+1)^2}$$

بـ- تعيين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تحقق $F(1)=2$.

الدالة f مستمرة على $]-1;+\infty[$ وبالتالي فدالتها الأصلية التي تحقق $F(1)=2$ هي الدالة F المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ:

$$F(x)=\int_1^x\left(t+1+\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+t-\frac{1}{t+1}\right]_1^x=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x+1}+1 \text{ ومنه: } F(x)=\int_1^x f(t)dt$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الموضوع الأول

التمرين الأول(3,5ن)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_{n+2}=\frac{4}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n$ و $u_1=2$ و $u_0=1$.

المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=u_{n+1}-u_n$.

1) أحسب v_0 و v_1 .

2) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

3) أ- أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n=v_1+v_2+...+v_{n-1}$.

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1$

جـ- بيّن أنّ (u_n) متقاربة.

التمرين الثاني(5ن)

$P(z)$ كثير حدود حيث : $P(z)=(z-1-i)(z^2-2z+4)$ و z عدد مركب .

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

2) نضع : $z_1=1+i$ ، $z_2=1-i\sqrt{3}$.

أ- أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي .

ب- أكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي .

جـ- إستنتج القيمة المضبوطة لكل من $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3) أ- n عدد طبيعي ، عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا.

ب- أحسب قيمة العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$.

التمرين الثالث(4ن)

الفضاء مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط : $A(1;0;2)$ ، $B(0;2;1)$ ، $C(2;1;3)$.

1) (P) مستو معادلة له من الشكل : $x-z+1=0$.

أ- بيّن أن المستوي (P) هو المستوي (ABC).

ب- ما طبيعة المثلث ABC ؟

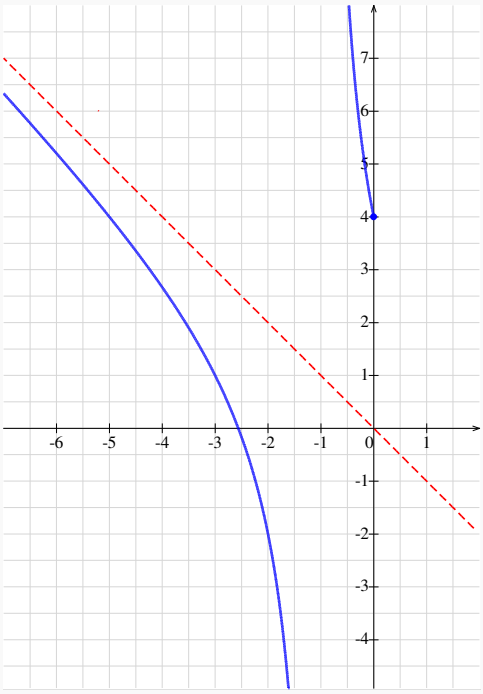
2) أ- تحقق من أن النقطة $D(2;3;4)$ لا تنتمي إلى المستوي (ABC) .

ب- ما طبيعة $ABCD$ ؟

3) أ- أحسب المسافة بين النقطة D و المستوي (ABC).

ب- أحسب حجم $ABCD$.

التمرين الرابع(7,5ن)



I) f دالة معرّفة على $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بـ: $f(x)=-x+\dfrac{4}{x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (الشكل)

1) أ- أحسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I.

ب- بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيّر f شكّل جدول تغيّراتها.

2) g دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+\dfrac{4}{x+1}$

(C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

أ- أحسب نهاية g عند $+\infty$.

ب- تحقق من أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

جـ- أدرس تغيّرات g.

II) k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $k(x)=|x|+\dfrac{4}{x+1}$

1) أ- أحسب $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ ، $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$. ماذا تستنتج ؟

ب- أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

2) أكتب معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$.

3) أرسم (Δ_1)، (Δ_2) و (C_k).

4) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) و المستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=\dfrac{1}{2}$ ، $x=-\dfrac{1}{2}$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول(4ن)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط:

$A(2;3;-1)$ ، $B(1;-2;4)$ ، $C(3;0;-2)$ ، $D(1;-1;-2)$

و ليكن (π) المستوي المعرّف بمعادلته الديكارتية: $2x-y+2z+1=0$.

المطلوب: أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية:

1) النقط A ، B و C في إستقامية.

2) (ABD) مستو معادلة ديكارتية له: $25x-6y-z-33=0$.

3) المستقيم (CD) عمودي على المستوي (π).

4) المسقط العمودي للنقطة B على (π) هو النقطة $H(1;1;-1)$.

التمرين الثاني(4ن)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2z+4=0$.

2) نسمي z_1 و z_2 حلي هذه المعادلة.

أ- أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

بـ- A ، B و C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 1 - i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = \frac{1}{2}\left(5 + i\sqrt{3}\right)$

أحسب الأطوال AB ، AC و BC ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

جـ- جد الطويلة و عمدة للعدد المركب z حيث : $z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.

د- أحسب z^3 ، z^6 ثم استنتج أن z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k .

التمرين الثالث(5ن)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 و أساسها q حيث : $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$

1) أ- أحسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول u_1

بـ- أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

جـ- أحسب S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$.

2) (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

أ- أحسب v_2 ، v_3 .

بـ- نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$ ، بيّن أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ- أكتب w_n بدلالة n ثم إستنتج v_n بدلالة n .

التمرين الرابع(7ن)

I) h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$.

1) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} h(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $h'(x) = \frac{1 + 2(x+1)^2}{x+1}$

و إستنتج اتجاه تغيّر الدالة h ثم أنجز جدول تغيّراتها .

3) أحسب $h(0)$ و إستنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن f دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$ ثم فسّر هذه النتيجة بيانيا .

بـ- باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أن $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$.

جـ- إستنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

د- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)]$ و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

هـ- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل .

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيّرات الدالة f .

3) بيّن أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4 .

4) أرسم (C_f) .

5) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y = x - 1$ ، $x = 0$ و $x = 1$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

حل مقترح التمرين الأول

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_{n+2}=\frac{4}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n$ و $u_1=2$ و $u_0=1$.

المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=u_{n+1}-u_n$.

1) حساب v_0 و v_1 :

لدينا : $v_0=u_1-u_0=2-1=1$ ، $v_1=u_2-u_1=\frac{7}{3}-2=\frac{1}{3}$

2) برهان أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{4}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n-u_{n+1}=\frac{1}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n=\frac{1}{3}(u_{n+1}-u_n)=\frac{1}{3}v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$.

3) أ- حساب المجموع S_n بدلالة n بحيث : $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$.

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن : $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}=v_0\left[\frac{1-q^n}{1-q}\right]=\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\right]=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

ب- برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}=(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+....+(u_n-u_{n-1})=-u_0+u_n$$

ومنه $u_n=S_n+u_0$ أي : $u_n=S_n+1=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1$.

(يمكن إستخدام البرهان بالتراجع)

جـ- تبيان أن المتتالية (u_n) متقاربة :

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$ (لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$) ومنه المتتالية (u_n) متقاربة .

حل مقترح التمرين الثاني

$P(z)$ كثير حدود حيث : $P(z)=(z-1-i)(z^2-2z+4)$ و z عدد مركب .

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

$P(z)=0$ تكافئ $(z-1-i)(z^2-2z+4)=0$ تكافئ $z=1+i$ أو $z^2-2z+4=0$

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-2z+4=0$:

لدينا : $\Delta=(-2)^2-4\times1\times4=-12=\left(i\sqrt{12}\right)^2=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_1=\frac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_2=\frac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}$$.

إذن مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي : $S=\{1+i;1+i\sqrt{3};1-i\sqrt{3}\}$.

2) نضع : $z_1=1+i$ ، $z_2=1-i\sqrt{3}$.

أ- كتابة z_1 و z_2 على الشكل الأسي :

لدينا : $z_1=1+i$ ومنه : $|z_1|=\sqrt{2}$.

وبفرض θ_1 عمدة للعدد المركب z_1 ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ ، ومنه $\arg(z_1)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

لدينا : $z_2=1-i\sqrt{3}$ و منه : $|z_2|=2$.

وبفرض θ_2 عمدة للعدد المركب z_2 ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_2=\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ، ومنه $\arg(z_2)=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_2=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

بـ- كتابة $\dfrac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي :

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{4}=\frac{1+i\sqrt{3}+i-\sqrt{3}}{4}=\frac{1-\sqrt{3}}{4}+i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

جـ- إستنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$:

لدينا : $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ و بالمطابقة مع الشكل الجبري نجد :

ومنه $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\end{cases}$ أي : $\begin{cases}\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{2\left(1-\sqrt{3}\right)}{4\sqrt{2}}\\ \sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{4\sqrt{2}}\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{cases}$.

3)أ- n عدد طبيعي ، تعيين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا.

لدينا : $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^n=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{7n\pi}{12}}$,

$\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n\in\mathbb{R}$ يكافئ $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n=k\pi$ يكافئ $\dfrac{7n\pi}{12}=k\pi$ يكافئ $n=12k$ ، مع $k\in\mathbb{N}$.

بـ- حساب قيمة العدد $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{456}$:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}e^{i\frac{7\times456\pi}{12}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{456}e^{266i\pi}=\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{228}=\frac{1}{2^{228}}$$

حل مقترح التمرين الثالث

A ، B و C النقط من الفضاء بحيث : $A(1;0;2)$ ، $B(0;2;1)$ ، $C(2;1;3)$.

1) (P) مستو معادلة له من الشكل : $x-z+1=0$

أ ـ تبيان أن المستوي (P) هو المستوي (ABC).

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1;2;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(1;1;1)$ و بالتالي $\frac{-1}{1}\neq\frac{2}{1}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا أي أن النقط A ، B و C ليست في استقامية و تعيّن مستويا وحيدا و هو المستوي (ABC). و لدينا من جهة :

$A\in(P)$ لأن $x_A-z_A+1=1-2+1=0$

$B\in(P)$ لأن $x_B-z_B+1=0-1+1=0$

$C\in(P)$ لأن $x_C-z_C+1=2-3+1=0$

إذن : المستوي (P) هو المستوي (ABC).

بـ ـ طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-1\times1+2\times1+(-1)\times1=0$ ومنه المثلث ABC قائم في A .

2) أ ـ التحقق من أن النقطة $D(2;3;4)$ لا تنتمي إلى المستوي (ABC) .

لدينا : $x_D-z_D+1=2-4+1\neq0$ ومنه $D\notin(ABC)$.

بـ ـ طبيعة $ABCD$:

بما أن $D\notin(ABC)$ فإن $ABCD$ رباعي وجوه .

3) أ ـ حساب المسافة بين D و المستوي (ABC).

$$d\left(D;(ABC)\right)=\frac{|2-4+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

بـ ـ حساب حجم $ABCD$.

$V=\frac{1}{3}\times S_{ABC}\times h$ حيث : $h=d\left(D;(ABC)\right)$.

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ومنه : $V=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}.uv$.

حل مقترح التمرين الرابع

I) f دالة معرّفة على $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بـ : $f(x)=-x+\frac{4}{x+1}$

1) أ ـ حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x\to-1\\<}}f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\<}}\left(-x+\frac{4}{x+1}\right)=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\>}}\left(-x+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty$$

بـ ـ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	‖ $+\infty$	↘	4
			‖		
		$-\infty$			

2) g دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x+\dfrac{4}{x+1}$

أ- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac{4}{x+1}\right)=+\infty$.

بـ- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{x+1}\right)=0$

و منه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_g) عند $+\infty$.

جـ- دراسة تغيّرات الدالة g .

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ ، و $g'(x)=1-\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$.

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$ ، $x+3>0$ و بالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $x-1$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة g متناقصة على المجال $[0;1]$ و متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	4	↘	3	↗	$+\infty$

II) k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي : $k(x)=|x|+\dfrac{4}{x+1}$

1) أ- $\lim\limits_{\substack{h\to0\\ h>0}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\ h>0}}\left(\dfrac{h+\dfrac{4}{h+1}-4}{h}\right)=\lim\limits_{\substack{h\to0\\ h>0}}\left(\dfrac{h-3}{h+1}\right)=-3$

$\lim\limits_{\substack{h\to0\\ h<0}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\ h<0}}\left(\dfrac{-h+\dfrac{4}{h+1}-4}{h}\right)=\lim\limits_{\substack{h\to0\\ h<0}}\left(\dfrac{-h-5}{h+1}\right)=-5$.

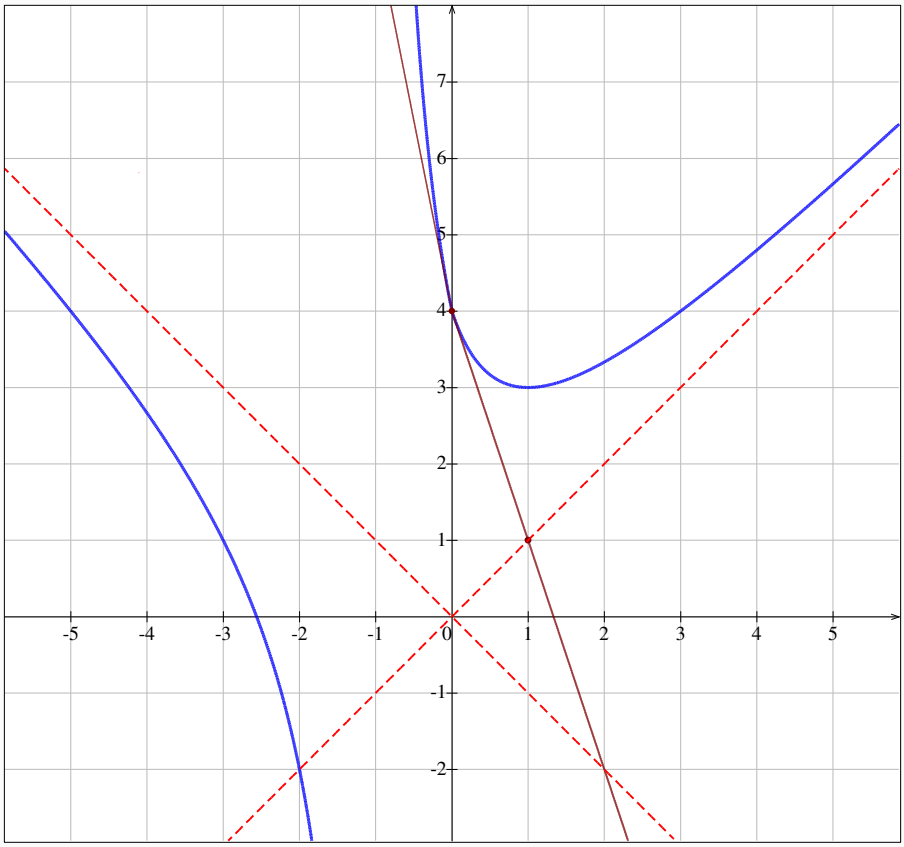
نستنتج أن الدالة k غير قابلة للإشتقاق عند 0 .

بـ- النقطة ذات الفاصلة 0 هي نقطة زاوية و المنحنى (C_k) يقبل نصفي مماسين .

2) كتابة معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$:

$(\Delta_1): y=-3x+4$ و $(\Delta_2): y=-5x+4$

3) الرسم :



4) حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=\frac{1}{2}$ ، $x=-\frac{1}{2}$.

$$A=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}} g(x)dx=\left[-\frac{1}{2}x^2+4\ln(x+1)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2+4\ln(x+1)\right]_{0}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}+4\ln 3uv$$

تصحيح مقترح للموضوع الثاني

حل مقترح التمرين الأول

لدينا : $A(2;3;-1)$ ، $B(1;-2;4)$ ، $C(3;0;-2)$ ، $D(1;-1;-2)$ و $(\pi):2x-y+2z+1=0$.

الإجابة بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة :

1) النقط A ، B و C في إستقامية . ⟵ خطأ

التبرير :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1;-5;5)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-3;-1)$ و بالتالي $\frac{1}{-1}\neq\frac{-3}{-5}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا .

2) (ABD) مستو معادلة ديكارتية له : $25x-6y-z-33=0$. ⟵ صحيح

التبرير :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1;-5;5)$ و $\overrightarrow{AD}(-1;-4;-1)$ و بالتالي $\frac{-1}{-1}\neq\frac{-4}{-5}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ ليسا مرتبطين خطيا ، و

لأن : $25\times 2-6\times 3+1-33=0$ ، $A\in(ABD)$.

$25\times1-6\times(-2)-4-33=0$: لأن $B\in(ABD)$

$25\times1-6\times(-1)+2-33=0$: لأن $D\in(ABD)$

3) المستقيم (CD) عمودي على المستوي (π). ⟵ خطأ

التبرير :

لدينا : $\vec{n}(2;-1;2)$ شعاع ناظمي لـ (π) و $\overrightarrow{CD}(-2;-1;0)$ و $\frac{-1}{-1}\neq\frac{2}{-2}$ وبالتالي $\vec{n}$ و $\overrightarrow{CD}$ ليسا مرتبطين خطيا .

إذن المستقيم (CD) لا يعامد المستوي (π) .

4) المسقط العمودي للنقطة B على (π) هو النقطة $H(1;1;-1)$. ⟵ خطأ

التبرير :

لدينا : $\vec{n}(2;-1;2)$ شعاع ناظمي لـ (π) و $\overrightarrow{BH}(0;3;-5)$ و $\frac{3}{-1}\neq\frac{0}{2}$ وبالتالي $\vec{n}$ و $\overrightarrow{BH}$ ليسا مرتبطين خطيا .

إذن H ليست المسقط العمودي للنقطة B على (π) .

حل مقترح التمرين الثاني

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$.

لدينا : $\Delta=(-2)^2-4\times1\times4=-12=12i^2=\left(\sqrt{12}i\right)^2=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_1=\frac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}$ و $z_2=\frac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$.

2) أ- كتابة العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي :

لدينا : $z_1=1-i\sqrt{3}$ ومنه : $|z_1|=2$.

وبفرض θ_1 عمدة للعدد المركب z_1 ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_1=\frac{1}{2}\\ \sin\theta_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ، ومنه $\arg(z_1)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_1=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

لدينا : $z_2=\overline{z_1}$ ومنه : $z_2=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب- A ، B و C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب : $z_A=1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\frac{1}{2}\left(5+i\sqrt{3}\right)$

حساب الأطوال :

$AB=|z_B-z_A|=|2i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$ ، $AC=|z_C-z_A|=\left|\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right|=3$ و $BC=|z_C-z_B|=\left|\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{3}$

طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $AB^2=AC^2+BC^2$ ومنه المثلث ABC قائم في C حسب النظرية العكسية لفيتاغورس .

جـ- إيجاد الطويلة و عمدة للعدد المركب z حيث : $z=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$.

لدينا : $|z|=\left|\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right|=\frac{|z_C-z_B|}{|z_A-z_B|}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$

و $z=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-2i\sqrt{3}}=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ ومنه $\arg(z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

د- حساب z^3، z^6 ثم استنتاج أن z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.

لدينا: $z=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $z^3=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3=\frac{1}{2^3}e^{i\frac{3\pi}{3}}=\frac{1}{8}e^{i\pi}=-\frac{1}{8}$

و $z^6=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6=\frac{1}{2^6}e^{i\frac{6\pi}{3}}=\frac{1}{8}e^{i2\pi}=\frac{1}{64}$

ولدينا: $z^{3k}=\left(z^3\right)^k=\left(-\frac{1}{8}\right)^k$ ومنه z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.

حل مقترح التمرين الثالث

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 وأساسها q حيث: $\begin{cases}u_1+2u_2+u_3=32\\u_1\times u_2\times u_3=216\end{cases}$

1) أ- حساب u_2 والأساس q لهذه المتتالية:

لدينا: $u_1\times u_2\times u_3=216$ وحسب خاصية الوسط الهندسي $(u_2)^2=u_1\times u_3$ ومنه نجد: $(u_2)^3=216$ أي $u_2=6$.

- حساب الأساس q:

لدينا: $u_1+2u_2+u_3=32$ وكون المتتالية (u_n) هندسية فإن $u_3=q\times u_2$ و $u_1=\frac{u_2}{q}$.

إذن: $u_1+2u_2+u_3=32$ تكافئ $\frac{6}{q}+12+6q=32$ أي: $3q^2-10q+3=0$.

لنحل المعادلة $3q^2-10q+3=0$:

لدينا: $\Delta=64$ ومنه للمعادلة حلان هما: $q_1=3$ و $q_2=\frac{1}{3}$.

وبما أنها المتتالية متزايدة تماما فإن أساسها q أكبر تماما من الواحد ومنه $q=3$.

- حساب الحد الأول u_1:

لدينا $u_1=\frac{u_2}{q}$ ومنه $u_1=\frac{6}{3}=2$.

ب- كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=u_1\times q^{n-1}$ ومنه: $u_n=2\times 3^{n-1}$.

جـ- حساب S_n بدلالة n:

$$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)=2\left(\frac{1-3^n}{1-3}\right)=-\left(1-3^n\right)=3^n-1$$

- تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n=728$:

لدينا: $S_n=728$ يكافئ $3^n-1=728$ أي $3^n=729$ أي $3^n=3^6$ ومنه $n=6$. (يمكن إستخدام اللوغاريتم)

2) (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي: $v_1=2$ و $v_{n+1}=\frac{3}{2}v_n+u_n$

أ- حساب v_2 و v_3:

$$v_2=\frac{3}{2}v_1+u_1=\frac{3}{2}\times 2+2=5 \quad ، \quad v_3=\frac{3}{2}v_2+u_2=\frac{3}{2}\times 5+6=\frac{27}{2}$$

ب- من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

• تبيان أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم :

$$w_{n+1}=\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}-\frac{2}{3}=\frac{\frac{3}{2}v_n+u_n}{3u_n}-\frac{2}{3}=\frac{3}{2\times 3}\frac{v_n}{u_n}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{v_n}{2u_n}-\frac{1}{3}=\frac{v_n}{2u_n}-\frac{1\times 2}{3\times 2}=\frac{1}{2}\left(\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}w_n$$

ومنه المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ- كتابة w_n بدلالة n :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n=w_1\times q^{n-1}$ ومنه : $w_n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

• إستنتاج v_n بدلالة n :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}$ ومنه $\frac{v_n}{u_n}=w_n+\frac{2}{3}$ أي $v_n=\left(w_n+\frac{2}{3}\right)u_n$.

إذن : $v_n=\left[\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\right]\times 2\times 3^{n-1}$ أي : $v_n=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}+\frac{4}{3}\times 3^{n-1}$.

حل مقترح التمرين الرابع

I) h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$.

1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}h(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+2x+\ln(x+1)\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1}h(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\left(x^2+2x+\ln(x+1)\right)=-\infty$$

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $h'(x)=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$:

$$h'(x)=2x+2+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)(x+1)+1}{x+1}=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$$

إتجاه تغيّر الدالة h :

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $x+1>0$ و $1+2(x+1)^2>0$ ومنه $h'(x)>0$

و بالتالي الدالة h متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة h :

x	-1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	
$h(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

حساب $h(0)$ و إستنتاج إشارة $h(x)$ حسب قيم x :

$$h(0)=0^2+2\times 0+\ln(0+1)=0$$

• إشارة $h(x)$:

x	-1		0		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

II) f الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

1) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$:

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=+\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}\ln(x+1)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}\left(-\dfrac{1}{x+1}\right)=-\infty\end{cases}$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

بـ- باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ ، نبرهن أن $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

نضع $t=\ln u$ فيكون $u=e^t$ ومنه : $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{e^t}{t}\right)}=0$.

جـ- إستنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=0$ حسب السؤال (بـ)

د- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=-\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=0$

التفسير البياني : المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

هـ- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل :

لندرس إشارة الفرق $f(x)-(x-1)$.

$f(x)-(x-1)=-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ و بالتالي إشارة $f(x)-(x-1)$ من إشارة $-\ln(x+1)$ لأن $x+1>0$.

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	(Δ) فوق (C_f)		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;-1)$		(C_f) تحت (Δ)

2) أ- تبيان أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=1-\left[\frac{\frac{1}{x+1}\times(x+1)-1\times\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]=1-\left(\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right)$$

$$=\frac{(x+1)^2-1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

ومنه : من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

جدول تغيّرات الدالة f :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ‖	↘	-1	↗	$+\infty$

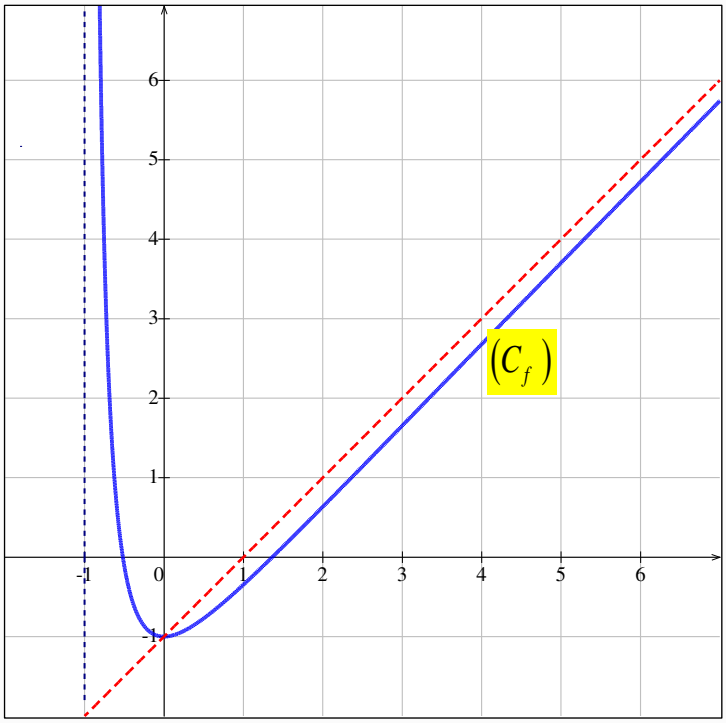
3) تبيان أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين $3,3$ و $3,4$.

معناه لنثبت أن المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا محصورا بين $3,3$ و $3,4$.

الدالة f مستمرة على المجال $]-1;+\infty[$ و بالتالي فهي مستمرة على $[3,3;3,4]$ كون $[3,3;3,4]\subset]-1;+\infty[$.

ولدينا $\begin{matrix} f(3,3) & 1,96 \\ (3,4) & 2,06 \end{matrix}$ و بالتالي $f(3,3)<2<f(3,4)$ ،إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا في المجال $[3,3;3,4]$.

4) الرسم :



5) حساب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=x-1$ ، $x=0$ و $x=1$.

$$S=\int_0^1\left[(x-1)-f(x)\right]dx=\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx=\left[\frac{1}{2}\left(\ln(x+1)\right)^2\right]_0^1=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الموضوع الأول

التمرين الأول(5ن)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B لاحقتيهما على الترتيب :

$$z_A = 1+i \quad \text{و} \quad z_B = 3i$$

1) أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي .

2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' بحيث : $z' = 2iz + 6 + 3i$

أ- عيّن العناصر المميزة للتشابه المباشر S .

ب- عيّن z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S .

جـ- استنتج طبيعة المثلث ABC .

3) لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-2);(C,2)\}$.

أ- عيّن z_D لاحقة النقطة D .

ب- عيّن مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B و عن D لاحقتها z و لتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\dfrac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ- تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6+3i$ تنتمي إلى (Δ).

ب- أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\dfrac{z_B - z}{z_D - z}$. عيّن حينئذ المجموعة (Δ).

التمرين الثاني(5ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(1;1;0)$ ، $B(2;1;1)$ و $C(-1;2;-1)$.

1) أ- بيّن أن النقط A ، B و C ليست في استقامية.

ب- بيّن أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $x+y-z-2=0$

2) نعتبر المستويين (P) و (Q) اللذين معادلتيهما على الترتيب : $(P): x+2y-3z+1=0$ ، $(Q): 2x+y-z-1=0$

و المستقيم (D) الذي يشمل النقطة $F(0;4;3)$ و $\vec{u}(-1;5;3)$ شعاع توجيه له.

أ- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).

ب- تحقق أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D).

3) عيّن تقاطع المستويات الثلاث (ABC) ، (P) و (Q).

التمرين الثالث(10ن)

I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ بـ : $f(x) = 1+\ln(2x-1)$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^{>}} f(x)$.

2) بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) عيّن فاصلة النقطة من (C_f) التي تكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y=x$.

4) أ ـ أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=\ln(x+a)+b$ حيث a ، b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

بـ ـ استنتج أنه يمكن رسم (C_f) إنطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية "ln" ثم أرسم (C) و (C_f) .

II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بـ : $g(x)=f(x)-x$

1) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} g(x)$ ثم بيّن أن $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)=-\infty$

2) أدرس إتجاه تغير الدالة g على I ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) أ ـ أحسب $g(1)$ ثم بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α . تحقق أن $2<\alpha<3$.

بـ ـ أرسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $\left]\frac{1}{2};5\right[$ في المعلم السابق .

4) إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) .

5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]1;\alpha[$ فإن : $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1;\alpha[$.

III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي : $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)$.

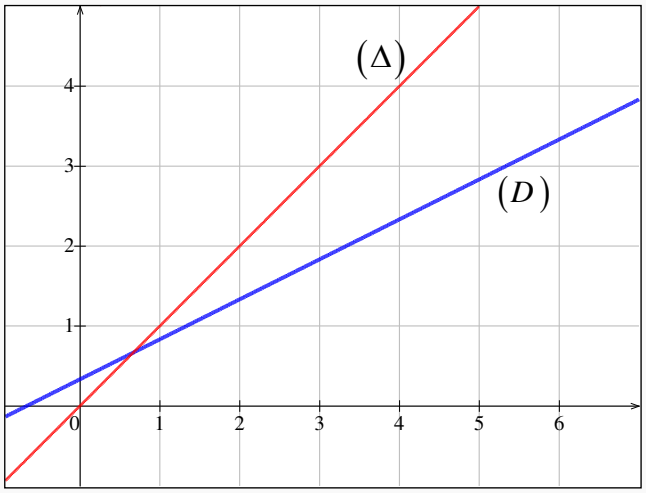
1) عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$.

2) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (5ن)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس مثلنا المستقيمين (Δ) و (D) معادلتيهما على الترتيب : $y=x$ و $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$



1) لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

بـ : $u_0=6$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}$

أ ـ أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية :

u_0,u_1,u_2,u_3 و u_4 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

بـ ـ عيّن إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D) .

جـ ـ أعط تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

2) أ ـ باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \frac{2}{3}$.

بـ ـ إستنتج إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $v_n=u_n-\frac{2}{3}$.

أ ـ بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول .

بـ ـ أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، و استنتج عبارة u_n بدلالة n .

جـ ـ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ ، إستنتج المجموع S'_n حيث : $S'_n=u_0+u_1+...+u_n$.

التمرين الثاني(4ن)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-6z+18=0$ ، ثم أكتب الحلين على الشكل الأسّي.

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب:

$z_A=3+3i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-z_A$ و $z_D=-z_B$.

أ- بيّن أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O.

ب- عيّن زاوية للدوران R الذي مركزه O و يحول النقطة A إلى B.

جـ- بيّن أن النقط A ، O و C في استقامية و كذلك النقط B ، O و D.

د - إستنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين الثالث(4ن)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر المستوي (P) الذي معادلته: $x-2y+z+3=0$.

1) نذكر أن حامل محور الفواصل $(O;\vec{i})$ يعرف بالجملة $\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases}$.

عيّن إحداثيات A نقطة تقاطع حامل $(O;\vec{i})$ مع المستوي (P).

2) B و C النقطتان من الفضاء حيث: $B(0;0;-3)$ و $C(-1;-4;2)$.

أ- تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (P).

ب- أحسب الطول AB.

جـ- أحسب المسافة بين النقطة C و المستوي (P).

3) أ- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار بالنقطة C و العمودي على المستوي (P).

ب- تحقق أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ).

جـ- أحسب مساحة المثلث ABC.

التمرين الرابع(7ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x-1}$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)$ و فسر هندسيا النتيجة.

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أ- بيّن أن المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب: $y=x$ و $y=x+1$.

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ').

4) أثبت أن النقطة $\omega\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

5) أ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2<\alpha<1$ و $-1.4<\beta<-1.3$.

ب- هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ)؟

جـ- أرسم (Δ) ، (Δ') ثم المنحنى (C_f).

د - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة: $(m-1)e^{-x}=m$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

حل مقترح التمرين الأول

1) كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي :

لدينا : $z_A = 1+i$ ومنه : $|z_A| = \sqrt{2}$.

وبفرض θ_A عمدة للعدد المركب z_A ، يكون : $\begin{cases} \cos\theta_A = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_A = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ، ومنه $\arg(z_A) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

إذن : $z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

لدينا : $z_B = 3i$ و منه : $|z_B| = 3$.

وبفرض θ_B عمدة للعدد المركب z_B ، يكون : $\begin{cases} \cos\theta_B = \dfrac{0}{3} = 0 \\ \sin\theta_B = \dfrac{3}{3} = 1 \end{cases}$ ، ومنه $\arg(z_B) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

إذن : $z_B = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$.

2) S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' بحيث : $z' = 2iz + 6 + 3i$

الكتابة المركبة للتشابه المباشر S من الشكل : $z' = \alpha z + \beta$ بحيث : $\alpha = 2i$ و $\beta = 6+3i$.

أ- تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر S :

نسبة التشابه المباشر S هي : $k = |\alpha| = 2$.

زاوية للتشابه المباشر S هي : $\theta = \arg(\alpha) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

مركز التشابه المباشر S هو النقطة ذات اللاحقة $\dfrac{\beta}{1-\alpha}$.

لدينا : $\dfrac{\beta}{1-\alpha} = \dfrac{6+3i}{1-2i} = \dfrac{(6+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{15i}{5} = 3i = z_B$ ومنه النقطة B هي مركز التشابه المباشر S .

ب- تعيين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S .

لدينا $z_C = 2iz_A + 6 + 3i$ ومنه $z_C = 2i(1+i) + 6 + 3i$ ، إذن : $z_C = 4 + 5i$.

جـ- طبيعة المثلث ABC :

لدينا : النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S الذي مركزه B ونسبته 2 وهذا يعني : $\begin{cases} BC = 2BA \\ \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

ومنه المثلث ABC مثلث قائم في النقطة B .

3) النقطة D مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-2);(C,2)\}$.

أ- تعيين z_D لاحقة النقطة D :

لدينا : $z_D = \dfrac{2z_A - 2z_B + 2z_C}{2-2+2}$ ومنه $z_D = \dfrac{2(1+i) - 2(3i) + 2(4+5i)}{2}$ إذن : $z_D = 5 + 3i$.

ب- تعيين طبيعة الرباعي $ABCD$ مع التبرير :

لدينا : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3i - (1+i) = -1 + 2i$ و $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 4 + 5i - (5+3i) = -1 + 2i$

ومنه الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع .

ولدينا مما سبق : ABC مثلث قائم و $BC = 2BA$ وبالتالي الرباعي $ABCD$ مستطيل.

4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ- التحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6 + 3i$ تنتمي إلى (Δ).

لدينا : $\frac{z_B - z_E}{z_D - z_E} = \frac{3i - (6+3i)}{5+3i-(6+3i)} = \frac{-6}{-1} = 6$ ومنه العدد $\frac{z_B - z_E}{z_D - z_E}$ حقيقي موجب تماما و بالتالي $E \in (\Delta)$.

بـ- $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_D - z}\right) = (\overrightarrow{MD}; \overrightarrow{MB})$.

العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ حقيقي موجب تماما يكافئ $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_D - z}\right) = 0 + 2k\pi$ أي $(\overrightarrow{MD}; \overrightarrow{MB}) = 0 + 2k\pi$.

وبالتالي المجموعة (Δ) هي : $(BD) - [BD]$ (المستقيم (BD) باستثناء القطعة $[BD]$)

حل مقترح التمرين الثاني

A ، B و C النقط من الفضاء بحيث : $A(1;1;0)$ ، $B(2;1;1)$ و $C(-1;2;-1)$.

1) أ- تبيان أن النقط A ، B و C ليست في استقامية :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(1;0;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;1;-1)$

ولدينا : $\frac{1}{-2} \neq \frac{0}{1}$ وبالتالي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا أي أن النقط A ، B و C ليست في استقامية.

بـ- تبيان أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $x + y - z - 2 = 0$

لدينا $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين ، و بالتالي يكفي إثبات أن إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة المعطاة.

$A \in (ABC)$ لأن $x_A + y_A - z_A - 2 = 1 + 1 - 0 - 2 = 0$

$B \in (ABC)$ لأن $x_B + y_B - z_B - 2 = 2 + 1 - 1 - 2 = 0$

$C \in (ABC)$ لأن $x_C + y_C - z_C - 2 = -1 + 2 - (-1) - 2 = 0$

2) نعتبر المستويين (P) و (Q) اللذين معادلتيهما على الترتيب : $(P) : x + 2y - 3z + 1 = 0$ ، $(Q) : 2x + y - z - 1 = 0$

و المستقيم (D) الذي يشمل النقطة $F(0;4;3)$ و $\vec{u}(-1;5;3)$ شعاع توجيه له.

أ- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (D) :

(D) يشمل F و $\vec{u}(-1;5;3)$ شعاع توجيه له ، و منه تمثيل وسيطي لـ (D) من الشكل : $(t \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = -t \\ y = 5t + 4 \\ z = 3t + 3 \end{cases}$.

بـ- التحقق أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D) :

لدينا : $(D) \subset (P)$ لأن : $-t + 2(5t+4) - 3(3t+3) + 1 = 0$.

و $(D) \subset (Q)$ لأن : $2(-t) + (5t+4) - (3t+3) - 1 = 0$.

و بالتالي تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D).

(كطريقة ثانية يمكن حل الجملة $\begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ للحصول على التمثيل الوسيطي لمستقيم التقاطع و هو (D))

3) تعيين تقاطع المستويات الثلاث (ABC) ، (P) و (Q) :

لدينا : المستويان (P) و (Q) متقاطعان وفق المستقيم (D) و بالتالي لدراسة تقاطع المستويات الثلاث (ABC) ، (P) و (Q) يكفي دراسة تقاطع المستقيم (D) مع المستوي (ABC) .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

نحل الجملة : $\begin{cases} x = -t \\ y = 5t + 4 \\ z = 3t + 3 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$ فنجد : $t = 1$ و بتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي نجد $(-1;9;6)$.

و منه المستويات الثلاث (ABC) ، (P) و (Q) تتقاطع في النقطة $\Omega(-1;9;6)$.

حل مقترح التمرين الثالث

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ : $f(x) = 1 + \ln(2x-1)$.

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\ln(2x-1)\right) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}}\left(1+\ln(2x-1)\right) = -\infty$.

2) تبيان أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I :

الدالة f قابلة للإشتقاق على I ، و من أجل كل x من I ، $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$

لدينا :من أجل كل عدد حقيقي x من I ، $2x-1>0$ أي $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال I .

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$\|$ $-\infty$	↗	$+\infty$

3) تعيين فاصلة النقطة من (C_f) التي تكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = x$.

فاصلة هذه النقطة هي حل للمعادلة $f'(x) = 1$ في I .

$f'(x) = 1$ تكافئ $\frac{2}{2x-1} = 1$ تكافئ $2 = 2x - 1$ أي $x = \frac{3}{2}$.

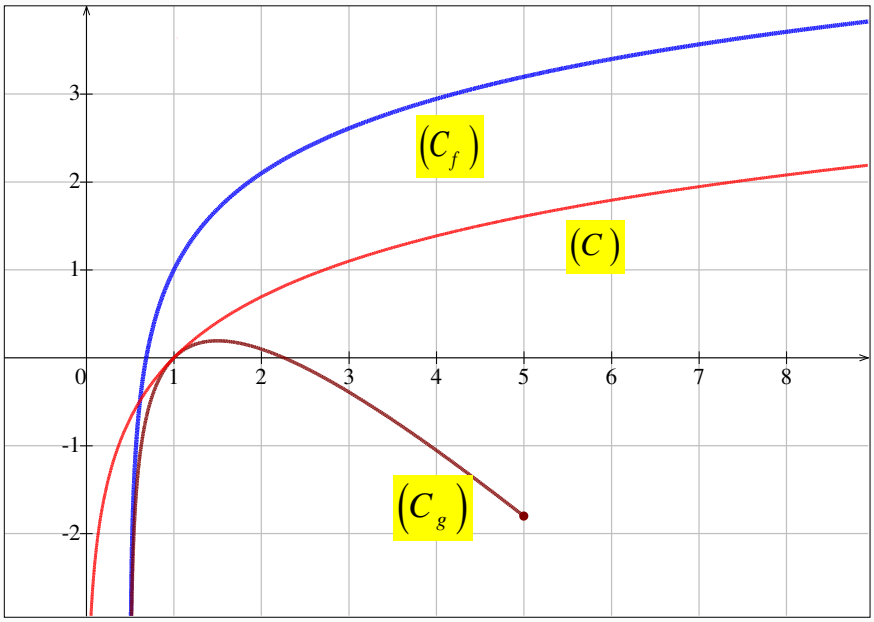
4) أ ـ من أجل كل x من I : $f(x) = 1+\ln(2x-1) = 1+\ln\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) = 1+\ln 2+\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)$ ، و منه : $a = -\frac{1}{2}$

و $b = 1+\ln 2$.

بـ ـ لدينا : $f(x) = h(x+a)+b$ حيث : $h(x) = \ln x$ و منه (C_f) هو صورة $(\mathcal{C})$ منحى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-a\\ b\end{pmatrix}$ أي $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1+\ln 2\end{pmatrix}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الرسم :



II) g الدالة العددية المعرفة على المجال I بـ : $g(x)=f(x)-x$

1) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} g(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}}\left(1-x+\ln(2x-1)\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\left[\dfrac{1-x}{2x-1}+\dfrac{\ln(2x-1)}{2x-1}\right]=-\infty$ (تذكّر أن : $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$)

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g على I :

الدالة g قابلة للإشتقاق على I ، و $g'(x)=-1+\dfrac{2}{2x-1}=\dfrac{-2x+3}{2x-1}$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من I ، $2x-1>0$ و بالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x+3$.

إشارة $g'(x)$:

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الدالة g متزايدة على المجال $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ و متناقصة على المجال $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}+\ln 2$	↘	$-\infty$

3) أ ـ لدينا : $g(1)=0$.

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ و $\begin{cases} g\left(\frac{3}{2}\right)=\ln 2-\frac{1}{2}\approx 0{,}19 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$ ، و منه حسب مبرهنة القيم

المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التحقق أن $2<\alpha<3$:

لدينا : $\begin{cases} g(2)\approx 0,09 \\ g(3)\approx -0,39 \end{cases}$ أي : $g(2)\times g(3)<0$ ومنه $2<\alpha<3$.

بـ- رسم المنحنى (C_g) : أنظر الشكل السابق .

4) إشارة $g(x)$:

x	$\frac{1}{2}$		1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) :

لدينا : $f(x)-y=f(x)-x=g(x)$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $g(x)$.

إذن : من أجل $x\in\left]\frac{1}{2};1\right[\cup]\alpha;+\infty[$ ، يكون (C_f) واقعا أسفل (d) .

من أجل $x\in]1;\alpha[$ ، يكون (C_f) واقعا أعلى من (d) .

(C_f) يقطع (d) في النقطتين $A(1;1)$ و $B(\alpha;\alpha)$.

5) الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;\alpha[$ ومنه : من أجل كل $x\in]1;\alpha[$ فإن : $f(x)\in]f(1);f(\alpha)[$.

ولدينا : $f(1)=1$ و $f(\alpha)=g(\alpha)+\alpha=\alpha$.

إذن : من أجل كل $x\in]1;\alpha[$ فإن : $f(x)\in]1;\alpha[$.

III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي : $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)$.

1) تعيين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$.

لدينا : $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)=1+\ln\left[2\left(1+\frac{1}{2n}\right)-1\right]=1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

ومنه : $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$ يعني $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln 3^2-\ln 2^3=\ln 9-\ln 8=\ln\frac{9}{8}$ أي : $n=8$.

2) حساب ، بدلالة n ، المجموع S_n بحيث : $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$.

لدينا : من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_n=1+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

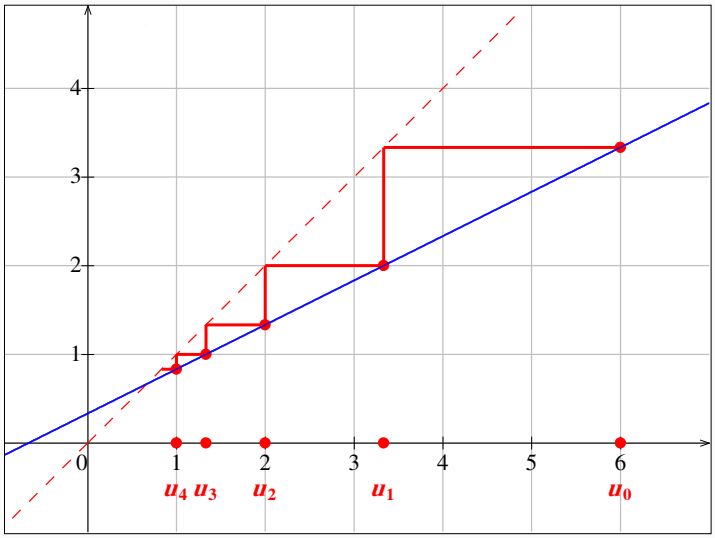
ومنه : $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=1+\ln\left(\frac{2}{1}\right)+1+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ldots+1+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

أي : $S_n=(1+1+\ldots+1)+\ln\left(\frac{2}{1}\right)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=n+\ln\left(\frac{2\times 3\times\ldots\times n\times(n+1)}{1\times 2\times\ldots\times n}\right)=n+\ln(n+1)$

حل مقترح التمرين الأول

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$.

1) أ ـ الرسم :



ب ـ تعيين إحداثيي نقطة تقاطع (Δ) و (D) :

نحل المعادلة : $f(x) = x$.

$f(x) = x$ تكافئ $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} = x$ تكافئ $\frac{1}{2}x - x = -\frac{1}{3}$ تكافئ $-\frac{1}{2}x = -\frac{1}{3}$ تكافئ $x = \frac{2}{3}$

و بالتالي المستقيمان (Δ) و (D) يتقطعان في النقطة $A\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

جـ ـ التخمين :

نلاحظ من الرسم أن : $u_4 < u_3 < u_2 < u_1 < u_0$

المتتالية (u_n) متناقصة .

2) أ ـ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq \frac{2}{3}$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq \frac{2}{3}$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 6$ ومنه $u_0 \geq \frac{2}{3}$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_n \geq \frac{2}{3}$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} \geq \frac{2}{3}$.

لدينا حسب الفرض $u_n \geq \frac{2}{3}$ ومنه $\frac{1}{2}u_n \geq \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ ومنه $\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ أي $u_{n+1} \geq \frac{2}{3}$. و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq \frac{2}{3}$.

ب ـ إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}\right)$

و لدينا ممّا سبق أن : $u_n \geq \frac{2}{3}$ ومنه $u_n - \frac{2}{3} \geq 0$. إذن $-\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) \leq 0$.

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ، و عليه المتتالية (u_n) متناقصة .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$

أ- إثبات أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}v_n$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$. و حدها الأول : $v_0 = u_0 - \frac{2}{3} = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$.

بـ- كتابة عبارة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = v_0 \times q^n = \frac{16}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

كتابة u_n بدلالة n : $u_n = v_n + \frac{2}{3} = \frac{16}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$

جـ- المجاميع :

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = \frac{32}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$S'_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = v_0 + \frac{2}{3} + v_1 + \frac{2}{3} + \ldots + v_n + \frac{2}{3} = S_n + \frac{2}{3}(n+1)$$.

حل مقترح التمرين الثاني

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 18 = 0$.

لدينا : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 18 = -36 = 36i^2 = (6i)^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_1 = \frac{6+6i}{2} = 3+3i$ و $z_2 = \frac{6-6i}{2} = 3-3i$.

كتابة العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي :

لدينا : $z_1 = 3+3i$ ومنه : $|z_1| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

و بفرض θ_1 عمدة للعدد المركب z_1 ، يكون : $\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ، و منه $\arg(z_1) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ، مع $k \in \mathbb{Z}$.

إذن : $z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

لدينا : $z_2 = \overline{z_1}$ و منه : $z_2 = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب :

$z_A = 3+3i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -z_A$ و $z_D = -z_B$.

أ- تبيان أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O :

لدينا : $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 3\sqrt{2}$ أي : $OA = OB = OC = OD$ ومنه النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $3\sqrt{2}$.

بـ- تعيين زاوية للدوران R الذي مركزه O و يحول النقطة A إلى B :

$\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)=\arg\left(\frac{\overline{z_A}}{z_A}\right)=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

جـ- إثبات أن النقط A ، O و C في استقامية و كذلك النقط B ، O و D .

يكفي إثبات أن كلا من $\frac{z_A-z_O}{z_C-z_O}$ و $\frac{z_B-z_O}{z_D-z_O}$ حقيقي .

لدينا : $\frac{z_A-z_O}{z_C-z_O}=\frac{z_A}{z_C}=-1$ و $\frac{z_B-z_O}{z_D-z_O}=\frac{z_B}{z_D}=-1$.

(يمكن استخدام كون $z_A+z_C=0$ و $z_B+z_D=0$ و بالتالي O منتصف كل من $[AC]$ و $[BD]$)

د - طبيعة الرباعي $ABCD$:

الرباعي $ABCD$ قطراه متناصفان و متقايسان بالتالي فهو متوازي أضلاع ، و لدينا $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)=\frac{\pi}{2}$ و منه $ABCD$ مربع .

حل مقترح التمرين الثالث

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر المستوي (P) الذي معادلته : $x-2y+z+3=0$

1) نذكر أن حامل محور الفواصل $\left(O;\vec{i}\right)$ يعرف بالجملة $\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases}$.

إحداثيات A نقطة تقاطع حامل $\left(O;\vec{i}\right)$ مع المستوي (P) هي حل الجملة : $\begin{cases}y=0\\z=0\\x-2y+z+3=0\end{cases}$ ، أي : $A(-3;0;0)$.

2) B و C النقطتان من الفضاء حيث: $B(0;0;-3)$ و $C(-1;-4;2)$.

أ- التحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (P) :

لدينا : $x_B-2y_B+z_B+3=0+0-3+3=0$ و منه $B\in(P)$.

بـ- حساب الطول AB :

$AB=\sqrt{(0+3)^2+(0-0)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

جـ- حساب المسافة بين النقطة C و المستوي (P) :

$d\left(C;(P)\right)=\frac{|-1+8+2+3|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{12}{\sqrt{6}}=2\sqrt{6}$

3) أ- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) المار بالنقطة C و العمودي على المستوي (P) :

لدينا (Δ) يعامد (P) و $\vec{n}(1;-2;1)$ شعاع ناظمي لـ (P) و منه شعاع $\vec{n}$ توجيه لـ (Δ) و بالتالي تمثيل وسيطي لـ (Δ) من الشكل : $\begin{cases}x=-1+t\\y=-4-2t\\z=2+t\end{cases}$.

بـ- التحقق أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ) :

بتعويض إحداثيات النقطة A في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد : $t=-2$ ، و منه $A\in(\Delta)$.

جـ- حساب مساحة المثلث ABC :

المثلث ABC قائم في A لأن : $C\in(\Delta)$ ، $A\in(\Delta)$ ، $(\Delta)\perp(P)$ و $B\in(P)$.

$S_{ABC}=\frac{AB.AC}{2}=\frac{3\sqrt{2}\times2\sqrt{6}}{2}=3\sqrt{12}=6\sqrt{3}\ ua$

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x-1}$

1) أ- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=+\infty$.

ب- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left[x-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=+\infty$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $f'(x)=1-\dfrac{-e^x}{(e^x-1)^2}=1+\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$

و منه : من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$ | $-\infty$ ↗	$+\infty$

3) أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{1}{e^x-1}\right]=0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

و لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\dfrac{1}{e^x-1}-1\right]=0$ ومنه المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-y=-\dfrac{1}{e^x-1}=\dfrac{1}{1-e^x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $1-e^x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$		$-$
الوضع النسبي	(Δ) فوق (C_f)		(Δ) تحت (C_f)

- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ') :

لدينا : $f(x)-y=-\dfrac{1}{e^x-1}-1=\dfrac{e^x}{1-e^x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $1-e^x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$		$-$
الوضع النسبي	(Δ') فوق (C_f)		(Δ') تحت (C_f)

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4) إثبات أن النقطة $\omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

لدينا : من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ ، $-x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x)+f(x)=-\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{e^{-x}-1}=-\frac{1}{e^x-1}+\frac{e^x}{e^x-1}=1=2\times\frac{1}{2}$$ و

ومنه النقطة $\omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5) أ- تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2<\alpha<1$ و $-1.4<\beta<-1.3$.

- الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و $]\ln 2;1[\subset]0;+\infty[$ و $\begin{cases} f(1)\approx 0,41 \\ (\ln 2)\approx -0,31 \end{cases}$

أي $f(1)\times f(\ln 2)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α ، حيث $\ln 2<\alpha<1$.

- الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$ و $]-1,4;-1,3[\subset]-\infty;0[$ و $\begin{cases} f(-1.3)\approx 0,07 \\ (-1.4)\approx -0,07 \end{cases}$

أي $f(-1,4)\times f(-1,3)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;0[$ حلا وحيدا β ، حيث $-1.4<\beta<-1.3$.

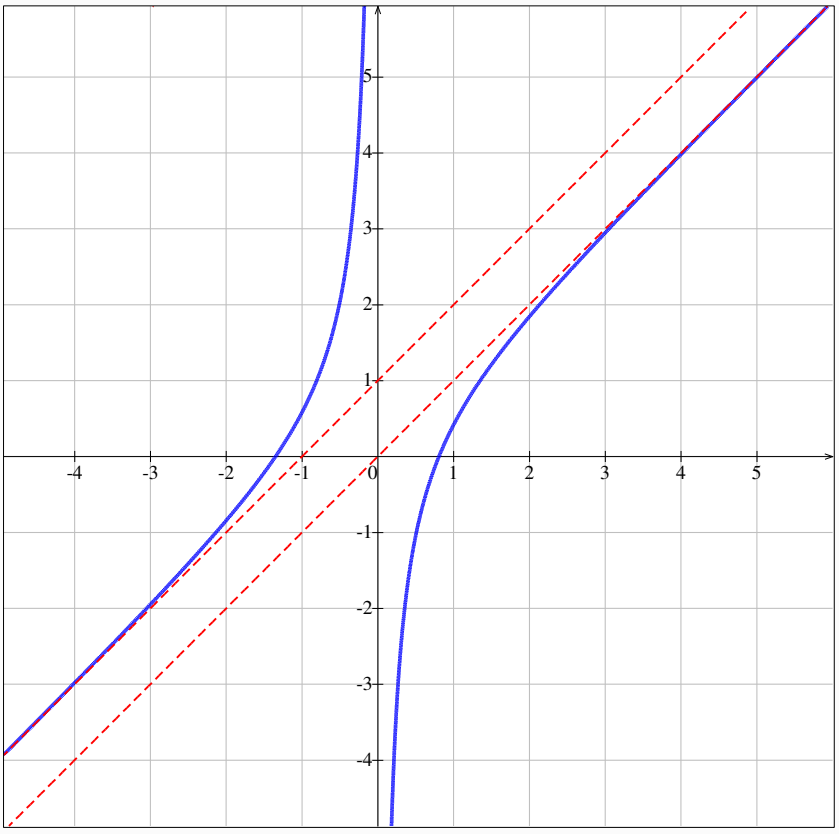
ب- دراسة وجود مماسات للمنحنى (C_f) توازي المستقيم (Δ) .

لنحل في $\mathbb{R}^*$ المعادلة : $f'(x)=1$.

لدينا : $f'(x)=1$ تكافئ $1+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=1$ تكافئ $\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=0$ أي $e^x=0$ وهذا مستحيل و بالتالي المعادلة

ليس لها حلول أي أنه لا توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ).

جـ- الرسم :



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

د ـ المناقشة البيانية :

لدينا : $(m-1)e^{-x}=m$ تكافئ $m-1=me^{x}$ تكافئ $m=-\frac{1}{e^{x}-1}$ تكافئ $m+x=x-\frac{1}{e^{x}-1}$

تكافئ $f(x)=x+m$ ، و منه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$

إذا كان $m\in]-\infty;0[$ فإن للمعادلة حل واحد موجب .

إذا كان $m\in[0;1]$ فإن المعادلة ليس لها حلول .

إذا كان $m\in]1;+\infty[$ فإن للمعادلة حل واحد سالب .

الموضوع الأول

التمرين الأول(3ن)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3u_n+1$.

و (v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n+\frac{1}{2}$.

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حدّدها مع التعليل.

1) المتتالية (v_n) : أ- حسابية. ب- هندسية. جـ- لا حسابية ولا هندسية.

2) نهاية المتتالية (u_n) هي : أ- $+\infty$. ب- $-\frac{1}{2}$. جـ- $-\infty$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=-\frac{1}{2}\left[1+e^{\ln 3}+e^{2\ln 3}+e^{3\ln 3}+...+e^{n\ln 3}\right]$.

أ- $S_n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$ ب- $S_n=\frac{1-3^n}{4}$ جـ- $S_n=\frac{1-3^{n+1}}{4}$.

التمرين الثاني(5ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، المستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(1;-2;1)$.

و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له، و ليكن (Q) المستوي ذو المعادلة $x+2y-7=0$.

1) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

2) أ- تحقق أن النقطة $B(-1;4;-1)$ مشتركة بين المستويين (P) و (Q) .

ب- بيّن أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له .

3) لتكن النقطة $C(5;-2;-1)$.

أ- أحسب المسافة بين النقطة C و المستوي (P) ثم المسافة بين النقطة C و المستوي (Q) .

ب- أثبت أن المستويين (P) و (Q) متعامدان.

جـ- استنتج المسافة بين النقطة C و المستقيم (Δ).

التمرين الثالث(5ن)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب :

$z_A=-i$ ، $z_B=2+3i$ و $z_C=-4+i$

1) أ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

ب- عيّن طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ و عمدة له، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

2) نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z، النقطة M' ذات الاحقة z' بحيث :

$z'=iz-1-i$

أ- عيّن طبيعة التحويل T محدّدا عناصره المميزة.

ب- ما هي صورة النقطة B بالتحويل T .

3) لتكن D ذات اللاحقة $z_D = -6+2i$

أ- بيّن أن النقط A ، C و D في استقامية.

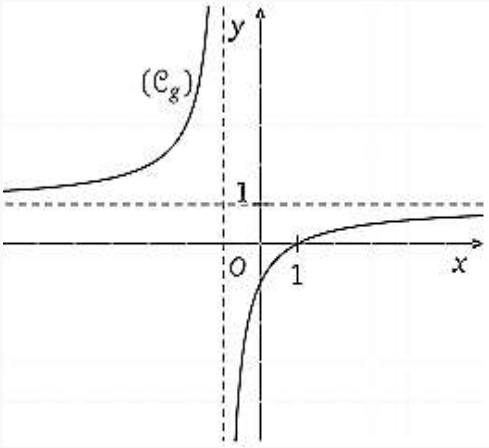
ب- عيّن نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى D .

جـ- عيّن العناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي مركزه A و يحول B إلى D .

التمرين الرابع(7ن)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الشكل المقابل)



بقراءة بيانية :

أ- شكّل جدول تغيرات الدالة g .

ب- حل بيانيا المتراجحة $g(x)>0$.

جـ- عيّن بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسّر النتيجتين هندسيا.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

ب- أحسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) أ- باستعمال الجزء **I)** السؤال جـ ، عيّن إشارة العبارة $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

ب- α عدد حقيقي. بيّن أن الدالة $x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

جـ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x)=1-\dfrac{2}{x+1}$ ثم عيّن دالة أصلية للدالة f على $]1;+\infty[$

الموضوع الثاني

التمرين الأول(4ن)

α عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن 1.

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\alpha u_n+1$.

(v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n+\dfrac{1}{\alpha-1}$.

1) أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α .

ب- أكتب بدلالة n و α ، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α ، عبارة u_n.

جـ- عيّن قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة.

2) نضع: $\alpha=\dfrac{3}{2}$.

- أحسب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث: $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$.

التمرين الثاني(4ن)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب :

$$z_A = 3-2i \quad ، \quad z_B = 3+2i \quad و \quad z_C = 4i$$

1) أ- علم النقط A ، B و C .

ب- ما هي طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علل إجابتك .

جـ- عيّن لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

2) عيّن ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 12$

3) أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 13 = 0$.

نسمي z_0 ، z_1 حلي هذه المعادلة .

ب- لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب z.

- عيّن مجموعة النقطة M من المستوي التي تحقق : $|z - z_0| = |z - z_1|$

التمرين الثالث(5ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(0;1;5)$ ، $B(2;1;7)$ و $C(3;-3;6)$.

1) أ- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة B و $\vec{u}(1;-4;-1)$ شعاع توجيه له .

ب- تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ).

جـ- بيّن أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان .

د - استنتج المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ).

2) نعتبر النقطة $M(2+t;1-4t;7-t)$ حيث t عدد حقيقي ، و لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(t) = AM$.

أ- أكتب عبارة $h(t)$ بدلالة t .

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي t ، $h'(t) = \dfrac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$

جـ- استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي من أجلها تكون المسافة AM أصغر ما يمكن .

- قارن بين القيمة الصغرى للدالة h ، و المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ).

التمرين الرابع(7ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^x - ex - 1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- أحسب $f'(x)$ ، ثم أدرس إشارتها.

جـ- شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

2) أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = -ex - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(-\infty)$.

ب- أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

جـ- بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α .

د- أرسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty;2]$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3) أ- أحسب بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ ؛ $x=\alpha$.

بـ- أثبت أن: $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$ (ua هي وحدة المساحات)

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3u_n+1$.

و (v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n+\frac{1}{2}$.

إختيار الإجابة مع التبرير:

1) المتتالية (v_n): ⟵ بـ- هندسية.

التبرير:

لدينا: من من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{2}=3u_n+1+\frac{1}{2}=3u_n+\frac{3}{2}=3\left(u_n+\frac{1}{2}\right)=3v_n$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $v_0=u_0+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$.

2) نهاية المتتالية (u_n) هي: ⟵ جـ- $-\infty$.

التبرير:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=v_n-\frac{1}{2}$ ومنه $u_n=-\frac{1}{2}\times 3^n-\frac{1}{2}$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$ لأن:

$\lim\limits_{n\to+\infty}3^n=+\infty$

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=-\frac{1}{2}\left[1+e^{\ln 3}+e^{2\ln 3}+e^{3\ln 3}+\ldots+e^{n\ln 3}\right]=\frac{1-3^{n+1}}{4}$.

التبرير:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$S_n=-\frac{1}{2}\left[1+e^{\ln 3}+e^{2\ln 3}+e^{3\ln 3}+\ldots+e^{n\ln 3}\right]=-\frac{1}{2}\left[3^0+3^1+3^2+\ldots+3^n\right]=-\frac{1}{2}\left(\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right)=\frac{1-3^{n+1}}{4}$$

حل مقترح التمرين الثاني

1) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P):

لدينا: $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) ومنه معادلة لـ (P) من الشكل $-2x+y+5z+d=0$.

و $A\in(P)$ يعني $-2-2+5+d=0$ أي: $d=-1$ وعليه معادلة للمستوي (P) من الشكل $-2x+y+5z-1=0$.

2) أ- التحقق أن النقطة $B(-1;4;-1)$ مشتركة بين المستويين (P) و (Q):

لدينا: $-2x_B+y_B+5z_B-1=-2\times(-1)+4+5\times(-1)-1=0$ ومنه $B\in(P)$

ولدينا: $x_B+2y_B-7=-1+2\times 4-7=0$ ومنه $B\in(Q)$

إذن: $B\in(P)\cap(Q)$.

بـ- تبيان أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) مع تعيين تمثيل وسيطي له .

لدينا : $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\vec{n'}(1;2;0)$ شعاع ناظمي لـ (Q) .

$\vec{n}$ و $\vec{n'}$ ليسا مرتبطين خطيا و بالتالي المستويان (P) و (Q) يتقاطعان وفق مسقيم (Δ).

(Δ) المستقيم المعرّف بـ : $\begin{cases} -2x+y+5z-1=0 \\ x+2y-7=0 \end{cases}$ ومنه بوضع $z=t$ نجد $(t\in\mathbb{R})$ وهذه $\begin{cases} x=-2t+7 \\ y=t \\ z=-t+3 \end{cases}$

الجملة هي تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) .

3) لتكن النقطة $C(5;-2;-1)$.

أ- المسافة بين C و (P) :

$$d_1=d\left(C,(P)\right)=\frac{\left|-2x_C+y_C+5z_C-1\right|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+5^2}}=\frac{\left|-2\times5-2+5\times(-1)-1\right|}{\sqrt{30}}=\frac{18}{\sqrt{30}}=\frac{3\sqrt{30}}{5}$$

المسافة بين C و (Q) : $d_2=d\left(C,(Q)\right)=\frac{\left|x_C+2y_C-7\right|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{\left|5+2\times(-2)-7\right|}{\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

بـ- إثبات أن المستويين (P) و (Q) متعامدان :

لدينا : $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\vec{n'}(1;2;0)$ شعاع ناظمي لـ (Q) .

و $\vec{n}.\vec{n'}=-2\times1+1\times2+5\times0=0$ ومنه $\vec{n}$ يعامد $\vec{n'}$ وبالتالي المستويان (P) و (Q) متعامدان .

جـ- استنتاج المسافة بين النقطة C و المستقيم (Δ) :

$$d\left(C,(\Delta)\right)=\sqrt{{d_1}^2+{d_2}^2}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2+\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

حل مقترح التمرين الثالث

$z_A=-i$ ، $z_B=2+3i$ و $z_C=-4+i$

1) أ- كتابة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري:

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-4+i-(-i)}{2+3i-(-i)}=\frac{-4+2i}{2+4i}=\frac{(-4+2i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}=\frac{20i}{20}=i$$

بـ- طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ وعمدة له :

لدينا : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=i$ ومنه $\begin{cases} \left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=|i|=1 \\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

طبيعة المثلث ABC :

لدينا: $\begin{cases} \left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1 \\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2} \end{cases}$ معناه $\begin{cases} \frac{AC}{AB}=1 \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2} \end{cases}$ ، أي : $\begin{cases} AB=AC \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2} \end{cases}$.

ومنه المثلث ABC متساوي الساقين و قائم في A .

2) T التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z، النقطة M' ذات الاحقة z' بحيث : $z' = iz - 1 - i$

أ- تعيين طبيعة التحويل T مع تحديد عناصره المميزة :

الكتابة المركبة للتحويل النقطي T من الشكل : $z' = \alpha z + \beta$ بحيث : $\alpha = i$ و $\beta = -1 - i$.

لدينا : $\alpha \in \mathbb{C}$ و $|\alpha| = |i| = 1$ ومنه التحويل T هو دوران .

زاوية للدوران T هي : $\theta = \arg(\alpha) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

مركز الدوران T هو النقطة ذات اللاحقة $\frac{\beta}{1-\alpha}$.

لدينا : $\frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{-1-i}{1-i} = \frac{(-1-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -i = z_A$ ومنه النقطة A هي مركز الدوران T .

بـ- صورة النقطة B بالتحويل T :

نسمي النقطة B' صورة النقطة B بالتحويل T ومنه $z_{B'} = iz_B - 1 - i = i(2+3i) - 1 - i = i - 4$ أي : $z_{B'} = z_C$

إذن صورة النقطة B بالتحويل T هي النقطة C .

3) لتكن D ذات اللاحقة $z_D = -6 + 2i$

أ- تبيان أن النقط A ، C و D في استقامية :

يكفي إثبات أن $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$ حقيقي .

لدينا : $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{-4 + i - (-i)}{-6 + 2i - (-i)} = \frac{-4 + 2i}{-6 + 3i} = \frac{2(-2+i)}{3(-2+i)} = \frac{2}{3}$ ومنه النقط A ، C و D في استقامية .

بـ- تعيين نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى D :

العبارة المركبة للتحاكي h من الشكل : $z_D - z_A = k(z_C - z_A)$ بحيث : k هي نسبة التحاكي h .

لدينا : $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{3}{2}$ ومنه نسبة التحاكي h هي : $k = \frac{3}{2}$.

جـ- تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي مركزه A و يحول B إلى D .

العبارة المركبة للتشابه المباشر S من الشكل : $z_D - z_A = a(z_B - z_A)$

لدينا : $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-6 + 2i - (-i)}{2 + 3i - (-i)} = \frac{-6 + 3i}{2 + 4i} = \frac{3i(2i+1)}{2(1+2i)} = \frac{3}{2}i$ ومنه : $a = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$

نسبة التشابه المباشر S هي : $k = |a| = \frac{3}{2}$.

زاوية للتشابه المباشر S هي : $\theta = \arg(a) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

(يمكن إثبات أن : $S = h \circ T$)

حل مقترح التمرين الرابع

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

أ- جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$\|\|$	$+$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	1
		$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	

بـ- حل المتراجحة $g(x) > 0$ بيانيا : $g(x) > 0$ تكافئ $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

جـ- تعيين قيم x التي يكون من أجلها $0 < g(x) < 1$:

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$1 < g(x) < 0$ تكافئ $x \in]1;+\infty[$.

II) الدالة f معرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} + \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left[\dfrac{x-1}{x+1} + \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right] = -\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{0^+}{1} = 0$ و $\lim\limits_{\substack{X \to 0^+ \\ >}} \ln X = -\infty$.

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{x-1}{x+1} + \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right] = 1$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = 0 \end{cases}$.

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f).

2) أ ـ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ يكون : $g'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1 \times (x+1) - 1 \times (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

بـ ـ حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{\dfrac{2}{(x+1)^2}}{\dfrac{x-1}{x+1}} = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{(x+1)^2}\left(\frac{2x}{x-1}\right) = \frac{4x}{(x-1)(x+1)^2}$$

ولدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$ ، $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1

3) أ ـ باستعمال الجزء **I)** السؤال جـ ، تعيين إشارة العبارة $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

لدينا حسب الجزء **I)** السؤال جـ : من أجل كل $x \in]1;+\infty[$ ، فإن $0 < \dfrac{x-1}{x+1} < 1$ ومنه $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) < 0$.

بـ ـ α عدد حقيقي .

تبيان أن الدالة h بحيث $h(x) = (x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x-\alpha)$ على $]\alpha;+\infty[$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على المجال $]\alpha;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]\alpha;+\infty[$:

$$h'(x) = 1 \times \ln(x-\alpha) + \frac{1}{x-\alpha} \times (x-\alpha) - 1 = \ln(x-\alpha)$$

جـ ـ التحقق :

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{x+1-2}{x+1}=\dfrac{x+1}{x+1}-\dfrac{2}{x+1}=1-\dfrac{2}{x+1}$.

تعيين دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=1-\dfrac{2}{x+1}+\ln(x-1)-\ln(x+1)$

و بالتالي دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$ من الشكل :

$$F(x)=x-2\ln(x+1)+\left[(x-1)\ln(x-1)-x\right]-\left[(x+1)\ln(x+1)-x\right]$$
$$=x-(x+3)\ln(x+1)+(x-1)\ln(x-1)$$

تصحيح مقترح للموضوع الثاني

حل مقترح التمرين الأول

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1 .

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=6$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\alpha u_n+1$.

(v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n+\dfrac{1}{\alpha-1}$.

1) أ ـ تبيان أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{\alpha-1}=\alpha u_n+1+\frac{1}{\alpha-1}=\alpha u_n+\frac{\alpha}{\alpha-1}=\alpha\left(u_n+\frac{1}{\alpha-1}\right)=\alpha v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\alpha$ و حدّها الأول $v_0=u_0+\dfrac{1}{\alpha-1}=6+\dfrac{1}{\alpha-1}=\dfrac{6\alpha-5}{\alpha-1}$.

بـ ـ كتابة v_n بدلالة n و α :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=v_0\times q^n$ و منه $v_n=\left(\dfrac{6\alpha-5}{\alpha-1}\right)\times\alpha^n$.

- كتابة u_n بدلالة n و α :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=v_n-\dfrac{1}{\alpha-1}$ و منه $u_n=\left(\dfrac{6\alpha-5}{\alpha-1}\right)\times\alpha^n-\dfrac{1}{\alpha-1}$.

جـ ـ تعيين قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة .

تكون المتتالية (u_n) متقاربة إذا و فقط إذا كان $\alpha\in]0;1[$ ، لأن في هذه الحالة يكون $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha^n=0$

و يكون $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\dfrac{1}{\alpha-1}$

2) من أجل : $\alpha=\dfrac{3}{2}$ يكون أساس المتتالية (v_n) هو $q=\dfrac{3}{2}$ و حدّها الأول $v_0=8$.

ـ حساب المجموعين S_n و T_n :

من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n=v_0\times\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)=8\times\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}}\right)=16\times\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right)$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

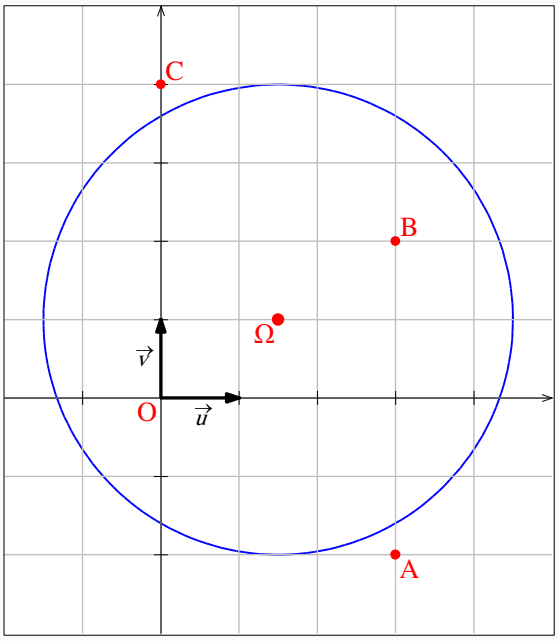
لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = v_n - \dfrac{1}{\alpha - 1} = v_n - \dfrac{1}{\frac{3}{2} - 1} = v_n - 2$ ومنه

$$T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = (v_0 - 2) + (v_1 - 2) + ... + (v_n - 2) = S_n - 2(n+1) = 16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 2n - 18$$

حل مقترح التمرين الثاني

$z_A = 3 - 2i$ ، $z_B = 3 + 2i$ و $z_C = 4i$

1) أ- تعليم النقط A ، B و C :



ب- طبيعة الرباعي $OABC$:

لدينا : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3 + 2i - (3 - 2i) = 4i$ و $z_{\overrightarrow{OC}} = z_C - z_O = 4i$ أي : $z_{\overrightarrow{OC}} = z_{\overrightarrow{AB}}$ ومنه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$

و بالتالي $OABC$ متوازي أضلاع.

جـ- تعيين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$:

النقطة Ω هي مرجح الجملة $\{(O,1);(A,1);(B,1);(C,1)\}$ ومنه : $z_\Omega = \dfrac{z_O + z_A + z_B + z_C}{4}$ أي : $z_\Omega = \dfrac{3}{2} + i$.

2) تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 12$

$\left\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 12$ تكافئ $\left\|4\overrightarrow{M\Omega}\right\| = 12$ أي $M\Omega = 3$ و بالتالي (E) هي الدائرة التي مركزها النقطة Ω و نصف قطرها 3 .

الرسم : أنظر الشكل .

3) أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 13 = 0$.

لدينا : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 13 = -16 = 16i^2 = (4i)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_0 = \dfrac{6 - 4i}{2} = 3 - 2i = z_A$ و $z_1 = \dfrac{6 + 4i}{2} = 3 + 2i = z_B$.

ب- تعيين مجموعة النقطة M من المستوي التي تحقق : $|z - z_0| = |z - z_1|$

معناه $AM = BM$ و بالتالي المجموعة المطلوبة هي محور القطعة $[AB]$. (محور الفواصل)

حل مقترح التمرين الثالث

A ، B و C النقط من الفضاء بحيث : $A(0;1;5)$ ، $B(2;1;7)$ و $C(3;-3;6)$.

1) أ ـ كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) :

لدينا : (Δ) يشمل B و $\vec{u}(1;-4;-1)$ شعاع توجيه له ومنه تمثيل وسيطي لـ (Δ)

من الشكل : $(t \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-4t \\ z = 7-t \end{cases}$

بـ ـ التحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) :

بتعويض إحداثيات النقطة C في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد $t = 1$ ومنه $C \in (\Delta)$.

جـ ـ تبيان أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(2;0;2)$ و $\overrightarrow{AB}(1;-4;-1)$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 2\times1+0\times(-4)+2\times(-1) = 0$ ومنه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان .

د ـ استنتاج المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) :

لدينا : B هي المسقط العمودي لـ A على المستقيم (Δ) ومنه $d(A,(\Delta)) = AB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

2) نعتبر النقطة $M(2+t;1-4t;7-t)$ حيث t عدد حقيقي ، ولتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(t) = AM$.

أ ـ كتابة عبارة $h(t)$ بدلالة t : $h(t) = AM = \sqrt{(2+t)^2+(-4t)^2+(2-t)^2} = \sqrt{18t^2+8}$

بـ ـ الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي t ، $h'(t) = \dfrac{36t}{2\sqrt{18t^2+8}} = \dfrac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$

جـ ـ استنتاج قيمة العدد الحقيقي t التي من أجلها تكون المسافة AM أصغر ما يمكن .

جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	$\sqrt{8}$	↗	

تكون المسافة AM أصغر ما يمكن من أجل $t = 0$ و $AM = \sqrt{h(0)} = \sqrt{8}$.

ـ المقارنة بين القيمة الصغرى للدالة h ، و المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ).

$d(A,(\Delta)) = h(0) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

حل مقترح التمرين الرابع

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^x - ex - 1$.

1) أ ـ حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x - ex - 1) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{e^x}{x} - e - \dfrac{1}{x}\right)\right] = +\infty$.

بـ ـ حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^x - e$

$f'(x) = 0$ تكافئ $e^x - e = 0$ تكافئ $e^x = e$ تكافئ $x = 1$.

من أجل $x \in]-\infty;1]$ ، يكون $e^x \le e$ أي $f'(x) \le 0$ و بالتالي الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;1]$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

من أجل $x \in]1;+\infty[$ ، يكون $e^x \geq e$ أي $f'(x) \geq 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة على المجال $]1;+\infty[$.

جـ ـ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

2) أ ـ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-ex-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^x-ex-1-(-ex-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بـ ـ كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

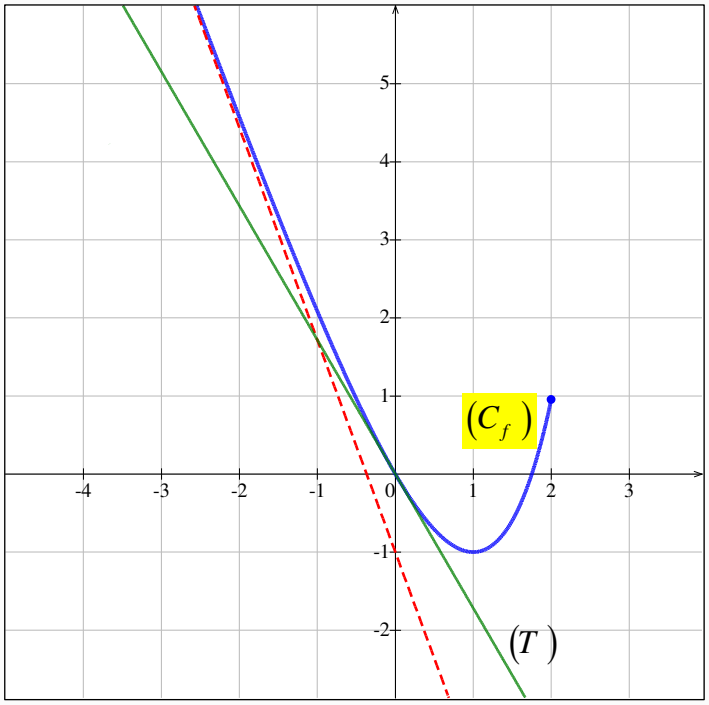
لدينا : $(T):y=f'(0)(x-0)+f(0)$ و منه $(T):y=(1-e)x$.

جـ ـ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α .

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و $]1,75;1,76[\subset]1;+\infty[$ و $\begin{cases} f(1.75)\approx -0,002 \\ (1.76)\approx 0,02 \end{cases}$

أي $f(1,75)\times f(1,76)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.75<\alpha<1.76$.

د ـ الرسم :



3) أ ـ حساب ، بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$.

$$A(\alpha)=-\int_0^{\alpha}f(x)dx=-\int_0^{\alpha}\left(e^x-ex-1\right)dx=-\left[e^x-\frac{1}{2}ex^2-x\right]_0^{\alpha}=1-\left(e^{\alpha}-\frac{1}{2}e\alpha^2-\alpha\right)$$

بـ ـ إثبات أن : $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$

لدينا : $f(\alpha)=0$ ومنه $e^{\alpha}-e\alpha-1=0$ أي $e^{\alpha}=e\alpha+1$ وبالتالي :

$$A(\alpha)=-e^{\alpha}+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha+1=-(e\alpha+1)+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha+1=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$$

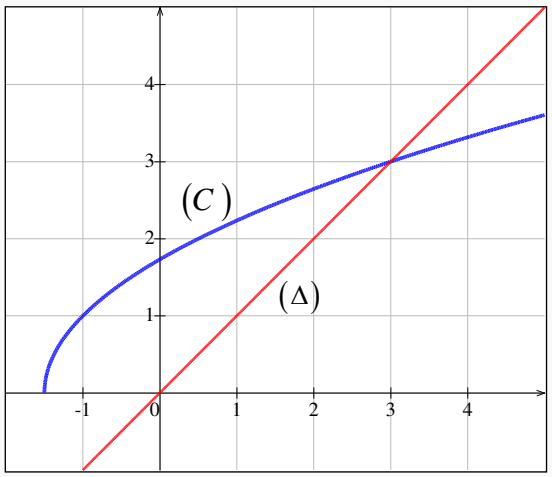
(ua هي وحدة المساحات)

الموضوع الأول

التمرين الأول(5ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

1) لتكن h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $h(x) = \sqrt{2x+3}$ و (C) تمثيلها البياني



و (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (أنظر الشكل المقابل).

أ ـ أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية u_0, u_1, u_2 و u_3 (دون حسابها وموضحا خطوط الإنشاء)

بـ ـ ضع تخمينا حول إتجاه تغير (u_n) و تقاربها .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$

3) أ ـ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

بـ ـ إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثاني(4ن)

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ (حيث $z \neq 2-3i$)

ـ حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة .

2) ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : z_A و z_B حيث :

$$z_A = 1+i\sqrt{5} \quad \text{و} \quad z_B = 1-i\sqrt{5}$$

ـ تحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

3) نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z ، $(z \neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

النقط C ، D ، E لواحقها على الترتيب : $z_C = -2i$ ، $z_D = 2-3i$ و $z_E = 3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

أ ـ عبّر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM .

بـ ـ إستنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

تحقق أن E تنتمي إلى (γ) .

التمرين الثالث(4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر المستوي (P) ذا المعادلة : $14x+16y+13z-47=0$ ،

و النقط $A(1;-2;5)$ ، $B(2;2;-1)$ و $C(-1;3;1)$.

1) أ ـ تحقق أن النقط A ، B و C ليست في استقامية.

بـ ـ بيّن أن المستوي (ABC) هو (P).

2) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).

3) أ- أكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$.

ب- تحقق أن النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى (Q).

جـ- أحسب المسافة بين النقطة D و المستقيم (AB).

التمرين الرابع(7ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي: $f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$، $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$.

إستنتج اتجاه تغيّر الدالة f، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ- بيّن المستقيم (Δ) الذي معادلة له: $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب- أدرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

4) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و $-1.1<\beta<-1$.

5) أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ).

6) أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بيّن أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB).

ب- بيّن أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتها.

7) لتكن g الدالة المعرّفة على $]-\infty;0[$ كما يلي: $g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$.

بيّن أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول(4,5ن)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=\frac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=3+\sqrt{u_n-3}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $3<u_n<4$

2) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$. استنتج أن (u_n) متزايدة تماما.

3) برّر لماذا (u_n) متقاربة.

4) المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\ln(u_n-3)$.

أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، ثم أحسب حدها الأول.

ب- أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

جـ- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n=(u_0-3)(u_1-3)(u_2-3)\times\ldots\times(u_n-3)$.

أكتب P_n بدلالة n ، ثم بيّن أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n=\dfrac{1}{16}$.

التمرين الثاني (4ن)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(-1;0;1)$ ، $B(2;1;0)$ و $C(1;-1;0)$.

1) بيّن أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا .

2) بيّن أن : $2x-y+5z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3) D و H نقطتان من الفضاء حيث : $D(2;-1;3)$ و $H\left(\dfrac{13}{15};-\dfrac{13}{30};\dfrac{1}{6}\right)$.

أ- تحقق أن النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) .

بـ- بيّن أن H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

جـ- استنتج أن المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان ، ثم جد تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطعهما .

التمرين الثالث (4,5ن)

1) $P(z)$ كثير حدود للمتغيّر المركب z حيث: $P(z)=z^3-12z^2+48z-72$

أ- تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

بـ- حدّد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)$.

جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B و C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب $z_A=6$ ، $z_B=3+i\sqrt{3}$ و $z_C=3-i\sqrt{3}$

أ- أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.

بـ- أكتب العدد المركب $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي.

جـ- إستنتج طبيعة المثلث ABC .

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

أ- جد الكتابة المركبة للتشابه S.

بـ- عيّن $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

جـ- بيّن أن النقط A ، B و A' في إستقامية.

التمرين الرابع (7ن)

I) لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-xe^x$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها .

3) أ- بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ ، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$

بـ- تحقق أن $0.5<\alpha<0.6$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

II نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي : $f(x)=(x-1)e^{x}-x-1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) لتكن f' مشتقة الدالة f. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن : $f'(x)=-g(x)$ ،

استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3) بيّن أن $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدوّر النتائج إلى 10^{-2})

4) أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

5) أ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1.6<x_1<-1.5$ و $1.5<x_2<1.6$.

ب- أنشئ (Δ) و (C_f).

6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=(ax+b)e^{x}$

أ- عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{x}$ على $\mathbb{R}$.

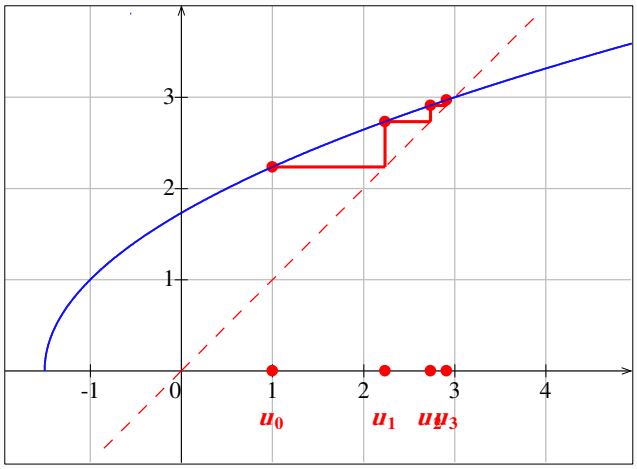
ب - إستنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$

1) الرسم :



ب- التخمين :

المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة نحو 3.

2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<3$.

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<3$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=1$ ومنه $0<u_0<3$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $0<u_n<3$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0<u_{n+1}<3$.

لدينا حسب الفرض $0<u_n<3$ ومنه $0<2u_n<6$ ومنه $3<2u_n+3<9$ ومنه $\sqrt{3}<\sqrt{2u_n+3}<\sqrt{9}$

أي $0<\sqrt{3}<u_{n+1}<3$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<3$.

3) أ- دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n) :

من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n+3}-u_n=\frac{\left(\sqrt{2u_n+3}-u_n\right)\left(\sqrt{2u_n+3}+u_n\right)}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}=\frac{2u_n+3-u_n^{\,2}}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$$

ومنه $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(3-u_n)(1+u_n)}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$

بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $3-u_n>0$ و $1+u_n>0$ فإن $u_{n+1}-u_n>0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة .

ب- إستنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة :

المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 3 ، إذن فهي متقاربة .

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

نضع : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=l$ إذن $h(l)=l$.

$$h(l)=l \text{ تكافئ } \sqrt{2l+3}=l \text{ تكافئ } \begin{cases}2l+3=l^2\\ l>0\end{cases} \text{ تكافئ } l^2-2l-3=0$$

المعادلة لها حلين هما $l_1=3$ و $l_2=-1$ و l_2 مرفوض

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$.

حل مقترح التمرين الثاني

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z=\dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ (حيث $z\neq 2-3i$)

لنحل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة .

$z=\dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ تكافئ $z(z-2+3i)=3i(z+2i)$ تكافئ $z^2-2z+6=0$.

لدينا : $\Delta=(-2)^2-4\times1\times6=-20=20i^2=\left(\sqrt{20}i\right)^2=\left(2\sqrt{5}i\right)^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_1=\frac{2+2\sqrt{5}i}{2}=1+i\sqrt{5} \quad \text{و} \quad z_2=\frac{2-2\sqrt{5}i}{2}=1-i\sqrt{5} .$$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : z_A و z_B حيث :

$$z_A=1+i\sqrt{5} \quad \text{و} \quad z_B=1-i\sqrt{5}$$

التحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها :

لدينا : $|z_A|=\left|1+i\sqrt{5}\right|=\sqrt{6}$ و $|z_A|=|z_B|$ ومنه $|z_B|=\left|1-i\sqrt{5}\right|=\sqrt{6}$ أي : $OA=OB$.

و بالتالي A و B تنتميان إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $\sqrt{6}$.

3) نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z ($z\neq 2-3i$) النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z'=\dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

النقط C ، D ، E لواحقها على الترتيب : $z_C=-2i$ ، $z_D=2-3i$ و $z_E=3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

أ- التعبير عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM :

لدينا : $z'=\dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ أي $z'=\dfrac{z_E(z-z_C)}{z-z_D}$ ومنه $|z'|=\left|\dfrac{z_E(z-z_C)}{z-z_D}\right|=\dfrac{|z_E|.|z-z_C|}{|z-z_D|}$: أي $OM'=\dfrac{3CM}{DM}$

بـ- $M \in (\Delta)$ معناه : $CM = DM$ ومنه $OM' = 3$ أي أن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) مركزها O ونصف قطرها 3 .

التحقق أن $E \in (\gamma)$:

لدينا : $|z_E| = |3i| = 3$ أي : $OE = 3$ ومنه $E \in (\gamma)$.

حل مقترح التمرين الثالث

A ، B و C النقط من الفضاء بحيث : $A(1;-2;5)$ ، $B(2;2;-1)$ و $C(-1;3;1)$.

(P) المستوي ذو المعادلة : $14x + 16y + 13z - 47 = 0$.

1)أ- التحقق أن النقط A ، B و C ليست في استقامية :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(1;4;-6)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;5;-4)$ ومنه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا زبالتالي النقط A ، B و C ليست في استقامية .

بـ- تبيان أن المستوي (ABC) هو (P) :

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط A ، B و C تحقق معادلة (P) .

$A \in (P)$ لأن $14x_A + 16y_A + 13z_A - 47 = 14 + 16 \times (-2) + 13 \times 5 - 47 = 0$

$B \in (P)$ لأن $14x_B + 16y_B + 13z_B - 47 = 14 \times 2 + 16 \times 2 + 13 \times (-1) - 47 = 0$

$C \in (P)$ لأن $14x_C + 16y_C + 13z_C - 47 = 14 \times (-1) + 16 \times 3 + 13 \times 1 - 47 = 0$

2)إيجاد تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) :

لدينا $\overrightarrow{AB}(1;4;-6)$ ومنه تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) من الشكل : $(t \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 4t - 2 \\ z = -6t + 5 \end{cases}.$$

3)أ- كتابة معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$:

لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ ومنه $I\left(\frac{3}{2};0;2\right)$ وبالتالي (Q) هو المستوي الذي $\overrightarrow{AB}(1;4;-6)$ شعاع ناظمي له

ويشمل I ومنه لـ (Q) معادلة من الشكل : $x + 4y - 6z + d = 0$

ولدينا $I \in (Q)$ يعني $\frac{3}{2} + 4 \times 0 - 6 \times 2 + d = 0$ أي $d = \frac{21}{2}$.

إذن $x + 4y - 6z + \frac{21}{2} = 0$ هي معادلة للمستوي (Q) .

(طريقة أخرى : المستوي (Q) هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بحيث : $MA = MB$ .....)

بـ- التحقق أن النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى (Q) :

لدينا $x_D + 4y_D - 6z_D + \frac{21}{2} = -1 + 4 \times (-2) - 6 \times \frac{1}{4} + \frac{21}{2} = 0$ ومنه $D \in (Q)$.

جـ- حساب المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB) :

لدينا : $D \in (Q)$ ومنه I هي المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AB) .

ومنه : $d(D,(AB)) = ID = \sqrt{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2 + (0+2)^2 + \left(2-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{213}}{4}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ : $f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

1) أ- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\left[x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}(x+5)=5$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}6\ln\frac{x}{x-1}$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f).

بـ- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+5)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}6\ln\frac{x}{x-1}=0$

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$:

$$f'(x)=1+6\left(\frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}\right)=1-\frac{6}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x}=1-\frac{6}{x(x-1)}=\frac{x(x-1)-6}{x(x-1)}=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $\frac{x}{x-1}>0$ ومنه $x(x-1)>0$.

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$ ومنه :

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;-2]$ و متناقصة على المجال $[-2;0[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$3+6\ln\frac{2}{3}$	↘	$-\infty$

3) أ- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+5)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=0$ ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلة له : $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بـ- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-y=f(x)-(x+5)=6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ ومنه إشارة الفرق من إشارة : $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $x>x-1$ ومنه $\frac{x}{x-1}<1$ و بالتالي $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)<0$.

إذن نستنتج أن (C_f) يقع تحت (Δ) .

4) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و $-1.1<\beta<-1$.

• الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2]$ و $]-3,5;-3,4[\subset]-\infty;-2]$

$\begin{cases} f(-3.4)\approx 0,05 \\ (-3.5)\approx -0,01 \end{cases}$

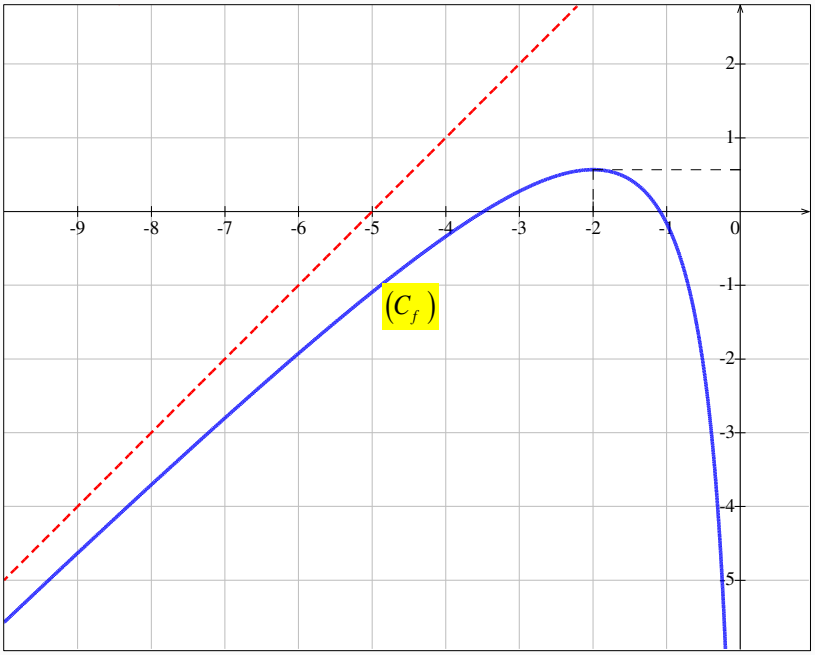
أي $f(-3,5)\times f(-3,4)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و يحقق $f(\alpha)=0$.

• الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-2;0]$ و $]-1,1;-1[\subset]-2;0]$

$\begin{cases} f(-1.1)\approx 0,02 \\ (-1)\approx -0,16 \end{cases}$

أي $f(-1,1)\times f(-1)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي β حيث $-1.1<\beta<-1$ و يحقق $f(\beta)=0$.

5) الرسم :



6) أ- لدينا : $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

تبيان أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

يمكن التحقق أن إحداثيات كلا من النقطتين A و B تحقق المعادلة المعطاة .

$y_A=\frac{1}{2}x_A+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}=3+6\ln\frac{3}{4}$ ، $y_B=\frac{1}{2}x_B+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}=\frac{5}{2}+6\ln\frac{3}{4}$

(أو يمكن كتابة معادلة للمستقيم (AB) و الحصول على المعادلة المعطاة)

ب- تبيان أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتها .

لدينا : معامل توجيه المستقيم (AB) هو $\frac{1}{2}$ و بالتالي نحل في المجال $]-\infty;0[$ المعادلة $f'(x)=\frac{1}{2}$.

$f'(x)=\frac{1}{2}$ تكافئ $\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}=\frac{1}{2}$ تكافئ $x^2-x-12=0$.

المعادلة $f'(x)=\frac{1}{2}$ تقبل في المجال $]-\infty;0[$ حل وهو $x_0=-3$.

إذن : المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في النقطة $M_0(x_0;y_0)$ ، مع $y_0=f(-3)=2+6\ln\frac{3}{4}$.

7) لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ كما يلي : $g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$.

تبيان أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و من أجل كل $x\in]-\infty;0[$:

$$g'(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{6x}{x(x-1)}-\frac{6}{1-x}=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{6}{x-1}+\frac{6}{x-1}=f(x)$$

و منه الدالة g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

تصحيح مقترح للموضوع الثاني

حل مقترح التمرين الأول

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=\frac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3+\sqrt{u_n-3}$

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3<u_n<4$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $3<u_n<4$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=\frac{13}{4}$ ومنه $3<u_0<4$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $3<u_n<4$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $3<u_{n+1}<4$.

لدينا حسب الفرض $3<u_n<4$ ومنه $0<u_n-3<1$ ومنه $0<\sqrt{u_n-3}<1$ ومنه $3<3+\sqrt{u_n-3}<4$

أي $3<u_{n+1}<4$ بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $3<u_n<4$.

2) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$.

من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}-u_n=3+\sqrt{u_n-3}-u_n=\frac{\left(3+\sqrt{u_n-3}-u_n\right)\left(\sqrt{u_n-3}+u_n-3\right)}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}=\frac{u_n-3-(3-u_n)^2}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}=\frac{-u_n^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$$

- استنتاج أن (u_n) متزايدة تماما:

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}=\frac{(4-u_n)(u_n-3)}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$$

و بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $3<u_n<4$ فإن $4-u_n>0$ و $u_n-3>0$ ومنه $u_{n+1}-u_n>0$.

و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

3) تبرير تقارب المتتالية (u_n) :

المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 4 ، إذن فهي متقاربة .

4) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\ln(u_n-3)$.

أ- تبيان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$:

من أجل كل عدد طبيعي n ،

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$v_{n+1}=\ln\left(u_{n+1}-3\right)=\ln\left(3+\sqrt{u_n-3}-3\right)=\ln\left(\sqrt{u_n-3}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(u_n-3\right)=\frac{1}{2}v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=\ln\left(u_0-3\right)=\ln\left(\frac{13}{4}-3\right)=\ln\left(\frac{1}{4}\right)=-\ln 4$.

بـ- كتابة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=v_0\times q^n$ ومنه $v_n=\ln\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- كتابة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\ln\left(u_n-3\right)$ ومنه $u_n=3+e^{v_n}$ أي : $u_n=3+e^{\ln\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+e^{\ln\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right)=3+1=4$، لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$.

جـ- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n=\left(u_0-3\right)\left(u_1-3\right)\left(u_2-3\right)\times\ldots\times\left(u_n-3\right)$

كتابة P_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\ln\left(u_n-3\right)$ ومنه $u_n-3=e^{v_n}$ ومنه :

$$P_n=\left(u_0-3\right)\left(u_1-3\right)\left(u_2-3\right)\times\ldots\times\left(u_n-3\right)=e^{v_0}\times e^{v_1}\times e^{v_2}\times\ldots.\times e^{v_n}=e^{v_0+v_1+\ldots.+v_n}=e^{2\left(\ln\frac{1}{4}\right)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$$

- تبيان أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n=\frac{1}{16}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}P_n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{2\left(\ln\frac{1}{4}\right)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}=e^{2\left(\ln\frac{1}{4}\right)}=e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$، لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$.

حل مقترح التمرين الثاني

A ، B و C النقط من الفضاء بحيث : $A\left(-1;0;1\right)$ ، $B\left(2;1;0\right)$ و $C\left(1;-1;0\right)$.

1) تبيان أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا :

لدينا : $\overrightarrow{AB}\left(3;1;-1\right)$ و $\overrightarrow{AC}\left(2;-1;-1\right)$

لاحظ أن $z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{AC}}$ لكن $x_{\overrightarrow{AB}}\neq x_{\overrightarrow{AC}}$ ومنه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا إذن النقط A ، B و C ليست في استقامية و بالتالي فهي تعيّن مستويا .

2) تبيان أن : $2x-y+5z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة.

$A\in(ABC)$ لأن $2x_A-y_A+5z_A-3=2\times(-1)-0+5\times1-3=0$

$B\in(ABC)$ لأن $2x_B-y_B+5z_B-3=2\times2-1+5\times0-3=0$

$C\in(ABC)$ لأن $2x_C-y_C+5z_C-3=2\times1-(-1)+5\times0-3=0$

3) D و H النقطتان من الفضاء حيث : $D\left(2;-1;3\right)$ و $H\left(\frac{13}{15};-\frac{13}{30};\frac{1}{6}\right)$.

أ- التحقق أن النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) :

لدينا : $2x_D-y_D+5z_D-3=2\times2-(-1)+5\times3-3=17$ ومنه $D\notin(ABC)$.

بـ- تبيان أن H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) :

يكفي إثبات أن : $H \in (ABC)$ و $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AC}=0$.

(أو $H \in (ABC)$ و $\overrightarrow{DH}$ ناظمي لـ (ABC))

لدينا : $2x_H - y_H + 5z_H - 3 = 2\times\frac{13}{15} - \left(-\frac{13}{30}\right) + 5\times\frac{1}{6} - 3 = \frac{52}{30} + \frac{13}{30} + \frac{25}{30} - 3 = 3 - 3 = 0$ ومنه $H \in (ABC)$.

ولدينا : $\overrightarrow{DH}\left(-\frac{17}{15};\frac{17}{30};-\frac{17}{6}\right)$ ومنه

$$\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AB} = 3\times\left(-\frac{17}{15}\right) + 1\times\frac{17}{30} + (-1)\times\left(-\frac{17}{6}\right) = -\frac{102}{30} + \frac{17}{30} + \frac{85}{30} = 0$$

و $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AC} = 2\times\left(-\frac{17}{15}\right) + (-1)\times\frac{17}{30} + (-1)\times\left(-\frac{17}{6}\right) = -\frac{68}{30} - \frac{17}{30} + \frac{85}{30} = 0$.

جـ- استنتاج أن المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان :

لدينا $A \in [(ADH)\cap(ABC)]$ و $H \in [(ADH)\cap(ABC)]$ وبالتالي (ADH) و (ABC) متقاطعان وفق المستقيم (AH) ولكون $(DH) \perp (ABC)$ فالمستويان (ADH) و (ABC) متعامدان .

- إيجاد تمثيل وسيطي للمستقيم (AH) :

لدينا $\overrightarrow{AH}\left(\frac{28}{15};-\frac{13}{30};-\frac{5}{6}\right)$ ومنه تمثيل وسيطي للمستقيم (AH) من الشكل : $(t \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} x = \frac{28}{15}t - 1 \\ y = -\frac{13}{30}t \\ z = -\frac{5}{6}t + 1 \end{cases}$$

حل مقترح التمرين الثالث

1) $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث : $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$

أ- التحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$:

$$P(6) = 6^3 - 12\times 6^2 + 48\times 6 - 72 = 216 - 432 + 288 - 72 = 0$$

بـ- تعيين العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta)$

$$\begin{aligned} P(z) &= (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta) \\ &= z^3 + \alpha z^2 + \beta z - 6z^2 - 6\alpha z - 6\beta \\ &= z^3 + (\alpha - 6)z^2 + (\beta - 6\alpha)z - 6\beta \\ &= z^3 - 12z^2 + 48z - 72 \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد $\alpha = -6$ ، $\beta = 12$ ومنه $P(z) = (z-6)(z^2 - 6z + 12)$.

جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$:

$P(z) = 0$ تكافئ $(z-6)(z^2 - 6z + 12) = 0$ معناه : $z - 6 = 0$ أو $z^2 - 6z + 12 = 0$.

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 6z + 12 = 0$.

لدينا : $\Delta = (-6)^2 - 4\times 1\times 12 = -12 = 12i^2 = \left(\sqrt{12}i\right)^2 = \left(2\sqrt{3}i\right)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_1 = \frac{6 - 2\sqrt{3}i}{2} = 3 - i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{6 + 2\sqrt{3}i}{2} = 3 + i\sqrt{3} .$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي : $S = \{6; 3 - i\sqrt{3}; 3 + i\sqrt{3}\}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2) أ- كتابة كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي:

لدينا : $z_A = 6$ ومنه $|z_A| = 6$ إذن $z_A = 6e^{i0}$.

لدينا : $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ ومنه : $|z_B| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

وبفرض θ_B عمدة للعدد المركب z_B ، يكون : $\begin{cases} \cos\theta_B = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_B = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ ، ومنه $\arg(z_B) = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

إذن : $z_B = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

لدينا : $z_C = \overline{z_B}$ و منه : $z_C = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

بـ- كتابة العدد المركب $\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي :

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{6-(3+i\sqrt{3})}{6-(3-i\sqrt{3})} = \frac{3-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}} = \frac{(3-i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})}{(3+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})} = \frac{6-6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

لدينا : $\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه $\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ إذن $\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

جـ- إستنتاج طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ يكافئ $\begin{cases} \left|\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right) = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ معناه $\begin{cases} BA = CA \\ (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}) = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

و بالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

أ- الكتابة المركبة للتشابه S :

لدينا : $z' = az + b$ بحيث $a = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{3}$ و $b = (1-a)z_C$ ، أي : $b = (1-i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3}) = -4i\sqrt{3}$

ومنه $z' = i\sqrt{3}z - 4i\sqrt{3}$ هي العبارة المركبة للتشابه S .

بـ- تعيين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S :

$$z_{A'} = i\sqrt{3}z_A - 4i\sqrt{3} = 6i\sqrt{3} - 4i\sqrt{3} = 2i\sqrt{3}$$

جـ- تبيان أن النقط A ، B و A' في إستقامية.

يكفي إثبات أن $\dfrac{z_A - z_{A'}}{z_A - z_B}$ حقيقي.

لدينا : $\dfrac{z_A - z_{A'}}{z_A - z_B} = \dfrac{6-2i\sqrt{3}}{6-(3+i\sqrt{3})} = \dfrac{2(3-i\sqrt{3})}{3-i\sqrt{3}} = 2$ و بالتالي النقط A ، B و A' في إستقامية.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-xe^{x}$.

1) حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-xe^{x}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-xe^{x}\right)=-\infty$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=-1\times e^{x}+(-x)e^{x}=-(x+1)e^{x}$

بما أن $e^{x}>0$ فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة $-(x+1)$ ، و منه :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

و بالتالي الدالة g متناقصة على المجال $]-1;+\infty[$ و متزايدة على المجال $]-\infty;-1[$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	↗	$1+e^{-1}$	↘	$-\infty$

3) أ ـ تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ ، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$:

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ و $\begin{cases} g(-1)=1+e^{-1} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$.

ب ـ التحقق أن $0.5<\alpha<0.6$:

لدينا : $]0,5;0,6[\subset]-1;+\infty[$ و $\begin{cases} g(0.5)\approx 0,18 \\ (0.6)\approx -0,09 \end{cases}$ ومنه $0.5<\alpha<0.6$.

إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي : $f(x)=(x-1)e^{x}-x-1$.

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^{x}-x-1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[xe^{x}-e^{x}-x-1\right]=+\infty$.

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن : $f'(x)=-g(x)$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;2]$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;2]$:

$f'(x)=1\times e^{x}+(x-1)e^{x}-1=e^{x}+xe^{x}-e^{x}-1=xe^{x}-1=-\left(1-xe^{x}\right)=-g(x)$

إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$:

x	$-\infty$		α		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		α		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	e^2-3

3) تبيان أن: $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$.

لدينا: $f(\alpha)=(\alpha-1)e^{\alpha}-\alpha-1$، ولدينا من جهة $g(\alpha)=0$ يكافئ $1-\alpha e^{\alpha}=0$ يكافئ $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$.

ومنه $f(\alpha)=\dfrac{(\alpha-1)}{\alpha}-\alpha-1=\dfrac{(\alpha-1)-\alpha^2-\alpha}{\alpha}=\dfrac{-\alpha^2-1}{\alpha}$ أي: $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$.

إيجاد حصر للعدد $f(\alpha)$:

$0,5<\alpha<0,6$ يكافئ $\begin{cases}\dfrac{1}{0,6}<\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{0,5}\\ 1,25<\alpha^2+1<1,36\end{cases}$ يكافئ $\dfrac{1,25}{0,6}<\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}<\dfrac{1,36}{0,5}$

يكافئ $-\dfrac{1,36}{0,5}<-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)<-\dfrac{1,25}{0,6}$ أي: $-2,72<f(\alpha)<-2,08$.

4) أ-لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x-e^x\right)=0$

ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب-دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

لدينا: $f(x)-y=(x-1)e^x$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $x-1$ على المجال $]-\infty;2]$.

x	$-\infty$		1		2
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;-2)$		(C_f) فوق (Δ)

5) أ-تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1.6<x_1<-1.5$ و $1.5<x_2<1.6$.

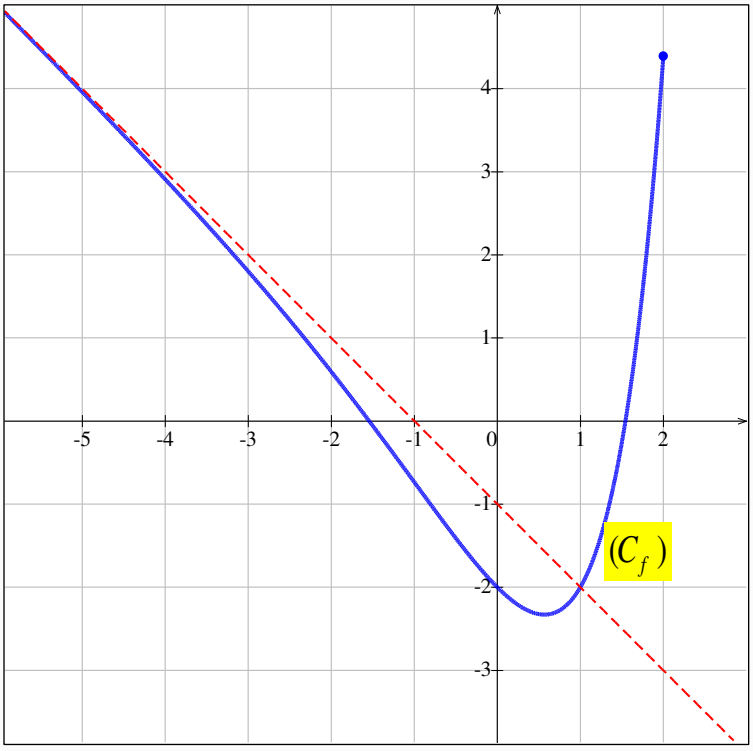
- الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ و $]-1,6;-1,5[\subset]-\infty;\alpha]$ و $\begin{cases}f(-1.5)\approx-0,05\\ (-1.6)\approx0,07\end{cases}$

أي $f(-1,5)\times f(-1,6)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي x_1 حيث $-1.6<x_1<-1.5$ و يحقق $f(x_1)=0$.

- الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;2]$ و $]1,5;1,6[\subset[\alpha;2]$ و $\begin{cases}f(1.5)\approx-0,26\\ (1.6)\approx0,37\end{cases}$

أي $f(1,5)\times f(1,6)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي x_2 حيث $1.5<x_2<1.6$ و يحقق $f(x_2)=0$.

بـ ـ الرسم :



6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=(ax+b)e^x$.

أ ـ تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x)=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$

الدالة h أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ يعني : $h'(x)=xe^x$ ، و منه بالمطابقة نجد : $a=1$ و $b=-1$.

أي $h(x)=(x-1)e^x$.

بـ ـ إستنتاج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$:

لدينا : $g(x)=1-xe^x$ و منه دالة أصلية للدالة g من الشكل : $G(x)=x-(x-1)e^x$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الموضوع الأول

التمرين الأول(4,5ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط :

$A(-1;1;3)$ ، $B(1;0;-1)$ ، $C(2;-1;1)$ و $D(2;0;-1)$.

و المستوي (P) ذا المعادلة : $2y+z+1=0$.

ليكن (Δ) المستقيم الذي تمثيل وسيطي له : $\begin{cases} x=-1 \\ y=2+\beta \\ z=1-2\beta \end{cases}$ حيث β وسيط حقيقي.

1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) ، ثم تحقق أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P).

2) بيّن أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.

3) أ- أحسب المسافة بين النقطة A و المستوي (P).

ب- بيّن أن D نقطة من (P) ، و أن المثلث BCD قائم.

4) بيّن أن $ABCD$ رباعي وجوه ، ثم أحسب حجمه .

التمرين الثاني(4ن)

I) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\dfrac{5^{n+1}}{6^n}$.

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

2) أحسب $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

II) المتتالية (u_n) معرفة بـ : $u_0=1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{5u_n+6}$

1) برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n\le 6$

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) أ- برهن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n : $6-u_{n+1}\le\dfrac{5}{6}(6-u_n)$.

ب- بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le 6-u_n\le v_n$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث(5ن)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية :

(I) ..... $z^2-(4\cos\alpha)z+4=0$ حيث α وسيط حقيقي.

2) من أجل $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ ، نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2 . بيّن أن $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$.

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=4+i\sqrt{3}$.

أ- أنشئ النقط A ، B و C .

بـ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ، ثم استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و يطلب تعيين نسبته و زاويته .

جـ- عيّن لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$ ، ثم أنشئ G.

د - أحسب z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع .

التمرين الرابع(6,5ن)

I) f الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ : $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$ ، ثمّ استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C).

2) أحسب $f'(x)$. بيّن أنّ الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α . باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرا للعدد α .

4) أرسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثمّ أرسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

5) عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

x	$f(x)$
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

II) g الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x) = f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

1) أدرس تغيّرات الدالة g على $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ- تحقق أنّ $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ ، ثمّ بيّن أنّ : $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$.

بـ- إستنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

جـ- تحقق من أنّ : $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

الموضوع الثاني

التمرين الأول(4,5ن)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية : (E) ..... $z^2 + 4z + 13 = 0$

1) تحقق أن العدد المركب $-2-3i$ حل للمعادلة (E) ، ثم جد الحل الآخر.

2) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتاهما $z_A = -2-3i$ و $z_B = i$ على الترتيب.

S التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

أ- بيّن أن : $z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$.

بـ- أحسب z_C لاحقة النقطة C ، علما أن C هي صورة B بالتشابه S .

3) لتكن النقطة D حيث : $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \vec{O}$.

أ- بيّن أن D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما .

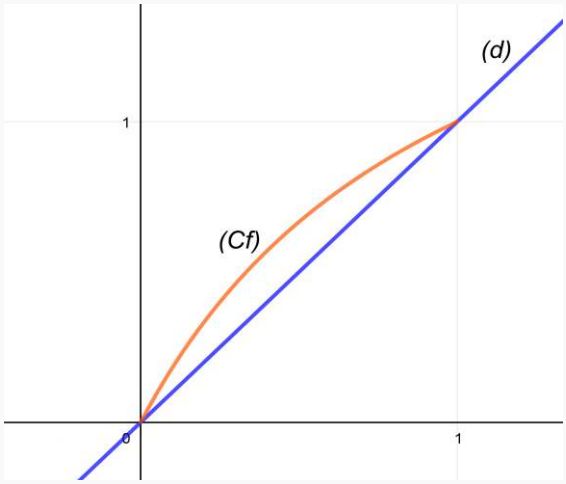
بـ- أحسب z_D لاحقة النقطة D .

جـ- بيّن أن $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

التمرين الثاني(4ن)

في الشكل المقابل، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بالعلاقة : $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ ،

و (d) المستقيم ذو المعادلة : $y = x$



1) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول ، $u_0 = \frac{1}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة ، ثم مثل الحدود u_2, u_1, u_0 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزا خطوط التمثيل.

بـ- ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

2) أ- أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

بـ- برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

جـ- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$.

أ- برهن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدّها الأول v_0.

بـ- أحسب نهاية (u_n) .

التمرين الثالث(4,5ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط : $A(2;1;-1)$ ، $B(1;-1;3)$ ، $C\left(-\frac{3}{2};-2;1\right)$

و $D\left(\frac{7}{2};-3;0\right)$. و لتكن I منتصف القطعة $[AB]$.

1) أ- أحسب إحداثيات النقطة I .

بـ- بيّن أن : $2x+4y-8z+5=0$ معادلة ديكارتية لـ (P) ، المستوي المحوري لـ $[AB]$.

2) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}(1;2;-4)$ شعاع توجيه له .

3) أ- جد إحداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) و المستقيم (Δ) .

بـ- بيّن أن (Δ) و (AB) من نفس المستوي ، ثم استنتج أن المثلث IEC قائم .

4) أ- بيّن أن المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) و المستقيم (IE) .

بـ- أحسب حجم رباعي الوجوه $DIEC$.

التمرين الرابع(7ن)

I) g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$.

1) أدرس تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) إستنتج أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x) > 0$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1) أ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)$. فسّر النتيجة بيانيا.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

ب- أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

جـ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ، ثم تحقق أن $0<\alpha<0,5$.

3) أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0.

أ- أحسب x_0.

ب- أرسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f).

جـ- عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين.

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

A ، B ، C و D النقط من الفضاء بحيث: $A(-1;1;3)$ ، $B(1;0;-1)$ ، $C(2;-1;1)$ و $D(2;0;-1)$.

و المستوي (P) ذا المعادلة: $2y+z+1=0$ ، و (Δ) المستقيم الذي تمثيل وسيطي له: $\begin{cases}x=-1\\ y=2+\beta\\ z=1-2\beta\end{cases}$ حيث β وسيط حقيقي.

1) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (BC):

لدينا $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ و منه تمثيل وسيطي للمستقيم (BC) من الشكل: $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=t+1\\ y=-t\\ z=2t-1\end{cases}$.

- التحقق أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P):

$(BC)\subset(P)$ لأن $2(-t)+(2t-1)+1=0$. (أو يمكن إثبات أن: $B\in(P)$ و $C\in(P)$)

2) تبيان أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي:

لنثبت أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا متوازيين و ليسا متقاطعين.

لندرس التوازي:

لدينا $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ شعاع توجيه للمستقيم (BC) و $\vec{u}(0;1;-2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و منه $\overrightarrow{BC}$ و $\vec{u}$ ليسا مرتبطين خطيا لأن $\dfrac{0}{1}\neq\dfrac{-1}{1}$ و بالتالي المستقيمان (Δ) و (BC) ليسا متوازيين.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لندرس التقاطع : $\begin{cases}-1=t+1\\2+\beta=-t\\1-2\beta=2t-1\end{cases}$ معناه $\begin{cases}t=-2\\\beta=0\\1\neq-5\end{cases}$ ، الجملة لا تقبل حل و بالتالي المستقيمان (Δ) و (BC) ليسا متقاطعين .

3) أ- حساب المسافة بين النقطة A و المستوي (P) :

$$d\left(A,(P)\right)=\frac{|2y_A+z_A+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|2+3+1|}{\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

ب- تبيان أن D نقطة من (P) :

لدينا $2y_D+z_D+1=2\times0-1+1=0$ ومنه $D\in(P)$.

تبيان أن المثلث BCD قائم :

لدينا : $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ ، $\overrightarrow{BD}(1;0;0)$ ، $\overrightarrow{DC}(0;-1;2)$ ومنه $BC=\sqrt{6}$ ، $BD=1$ ، $DC=\sqrt{5}$.

و لدينا : $DC^2+DB^2=1+5=6=BC^2$ و منه حسب عكس نظرية فيتاغورث المثلث BCD قائم في D .

(طريقة أخرى : $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{DC}=1\times0+(-1)\times0+2\times0=0$ و منه المثلث BCD قائم في D)

4) تبيان أن $ABCD$ رباعي وجوه :

لدينا : $\begin{cases}(BC)\subset(P)\\D\in(P)\end{cases}$ و $A\notin(P)$ لأن $d\left(A,(P)\right)\neq0$ و BCD مثلث و منه $ABCD$ رباعي وجوه .

حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$:

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{BCD}\times h$ مع $h=d\left(A,(P)\right)$ و منه : $V_{ABCD}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}DB\times DC\right)\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{5}\times\frac{6}{\sqrt{5}}=1$.

حل مقترح التمرين الثاني

I) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\frac{5^{n+1}}{6^n}$.

1) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=\frac{5^{n+2}}{6^{n+1}}=\frac{5\times5^{n+1}}{6\times6^n}=\frac{5}{6}\times\frac{5^{n+1}}{6^n}=\frac{5}{6}v_n$.

و منه المتتالية هندسية أساسها $q=\frac{5}{6}$ و حدها الأول $v_0=\frac{5^{0+1}}{6^0}=5$.

2) حساب $\lim\limits_{n\to\infty}v_n$:

$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[5\times\left(\frac{5}{6}\right)^n\right]=0$ لأن : $0<q<1$.

II) المتتالية (u_n) معرّفة بـ : $u_0=1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{5u_n+6}$

1) البرهان بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\leq u_n\leq6$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\leq u_n\leq6$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=1$ و منه $1\leq u_0\leq6$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $1\leq u_n\leq6$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $1\leq u_{n+1}\leq6$.

لدينا حسب الفرض $1\leq u_n\leq6$ و منه $5\leq5u_n\leq30$ و منه $11\leq5u_n+6\leq36$ و منه $\sqrt{11}\leq\sqrt{5u_n+6}\leq\sqrt{36}$

أي $1\leq\sqrt{11}\leq u_{n+1}\leq6$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\leq u_n\leq6$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2)دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\sqrt{5u_n+6}-u_n=\dfrac{\left(\sqrt{5u_n+6}-u_n\right)\left(\sqrt{5u_n+6}+u_n\right)}{\sqrt{5u_n+6}+u_n}=\dfrac{5u_n+6-{u_n}^2}{\sqrt{5u_n+6}+u_n}$

ومنه $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(6-u_n)(1+u_n)}{\sqrt{5u_n+6}+u_n}$

بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $6-u_n>0$ و $1+u_n>0$ فإن $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة .

3)أ- برهان أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n : $6-u_{n+1}\le\dfrac{5}{6}(6-u_n)$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n :

$6-u_{n+1}=6-\sqrt{5u_n+6}=\dfrac{\left(6-\sqrt{5u_n+6}\right)\left(6+\sqrt{5u_n+6}\right)}{6+\sqrt{5u_n+6}}=\dfrac{30-5u_n}{6+\sqrt{5u_n+6}}=\dfrac{5(6-u_n)}{6+\sqrt{5u_n+6}}$.

ومن جهة أخرى : $1\le u_n\le 6$ يكافئ $\dfrac{1}{6+\sqrt{5u_n+6}}\le\dfrac{1}{6}$ ومنه $6-u_{n+1}\le\dfrac{5}{6}(6-u_n)$.

ب- تبيان أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le 6-u_n\le v_n$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le 6-u_n\le v_n$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=1$ و $v_0=5$ منه $0\le 6-u_0\le v_0$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $0\le 6-u_n\le v_n$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0\le 6-u_{n+1}\le v_{n+1}$

لدينا حسب الفرض $0\le 6-u_n\le v_n$ ولدينا $6-u_{n+1}\le\dfrac{5}{6}(6-u_n)$ منه $0\le 6-u_{n+1}\le\dfrac{5}{6}v_n$

ومنه $0\le 6-u_{n+1}\le v_{n+1}$ وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le 6-u_n\le v_n$.

(يمكن إستخدام طريقة أخرى غير البرهان بالتراجع)

- استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le 6-u_n\le v_n$ ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}(6-u_n)=0$ أي : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=6$

حل مقترح التمرين الثالث

1) حل في $\mathbb{C}$ ، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية : (I) ..... ${z}^2-(4\cos\alpha)z+4=0$ حيث α وسيط حقيقي .

لدينا : $\Delta=(-4\cos\alpha)^2-4\times1\times4=16\cos^2\alpha-16=16\left(\cos^2\alpha-1\right)=-16\sin^2\alpha=(4i\sin\alpha)^2$

ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_1=\dfrac{4\cos\alpha+4i\sin\alpha}{2}=2(\cos\alpha+i\sin\alpha)=2e^{i\alpha}$ و

$z_2=\dfrac{4\cos\alpha-4i\sin\alpha}{2}=2(\cos\alpha-i\sin\alpha)=2e^{-i\alpha}$.

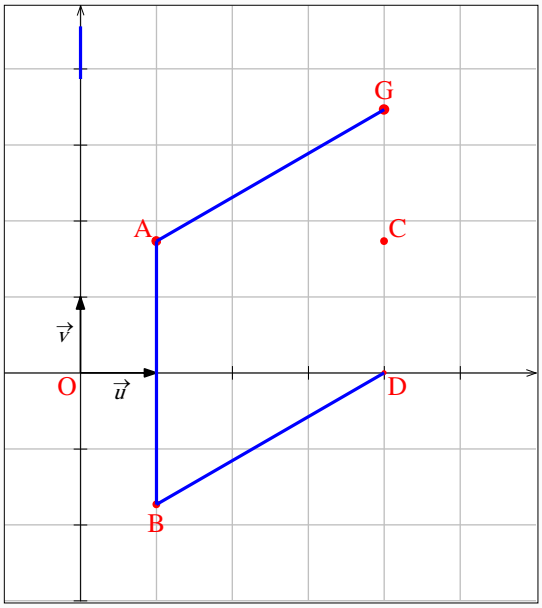
2) من أجل $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ ، نجد : $z_1=2e^{i\frac{\pi}{3}}=1+i\sqrt{3}$ و $z_2=2e^{-i\frac{\pi}{3}}=1-i\sqrt{3}$.

تبيان أن : $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$.

لدينا : $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

ومنه $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{2013}=e^{i\frac{4026\pi}{3}}=e^{i(1342\pi)}=e^{i(0+671\times 2\pi)}=e^{0}=1$.

3) أ- تعليم النقط A ، B و C .



ب- كتابة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{4+i\sqrt{3}-\left(1+i\sqrt{3}\right)}{1-i\sqrt{3}-\left(1+i\sqrt{3}\right)}=\frac{3}{-2i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

إستنتاج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A مع تعيين نسبته و زاوية له .

لدينا $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ومنه $z_C-z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}i\left(z_B-z_A\right)$ إذن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A

ونسبته $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$ وزاوية له $\arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{\pi}{2}$.

جـ- تعيين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$:

$$z_G=\frac{z_A-z_B+2z_C}{2}=\frac{1+i\sqrt{3}-\left(1-i\sqrt{3}\right)+2\left(4+i\sqrt{3}\right)}{2}=4+2i\sqrt{3}$$

د- تعيين z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع :

$ABDG$ متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GD}$ معناه $z_B-z_A=z_D-z_G$ وبالتالي $z_D=z_B-z_A+z_G=4$.

حل مقترح التمرين الرابع

I) f الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ : $f(x)=\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$.

1) حساب النهايات :

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right]=2$ ، لأن :

$$\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)=1\\ \lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)=1\end{cases}$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C).

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)=0\end{cases}$$ لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\left[\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right]=-\infty$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى (C).

2) حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;1[$:

$$f'(x)=\frac{1\times(x-1)-1\times x}{(x-1)^2}+\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)e^{\frac{1}{x-1}}=\frac{-1}{(x-1)^2}\times\left(1+e^{\frac{1}{x-1}}\right)$$

بما أن $f'(x)<0$ من أجل كل $x\in]-\infty;1[$ ، فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↘	2

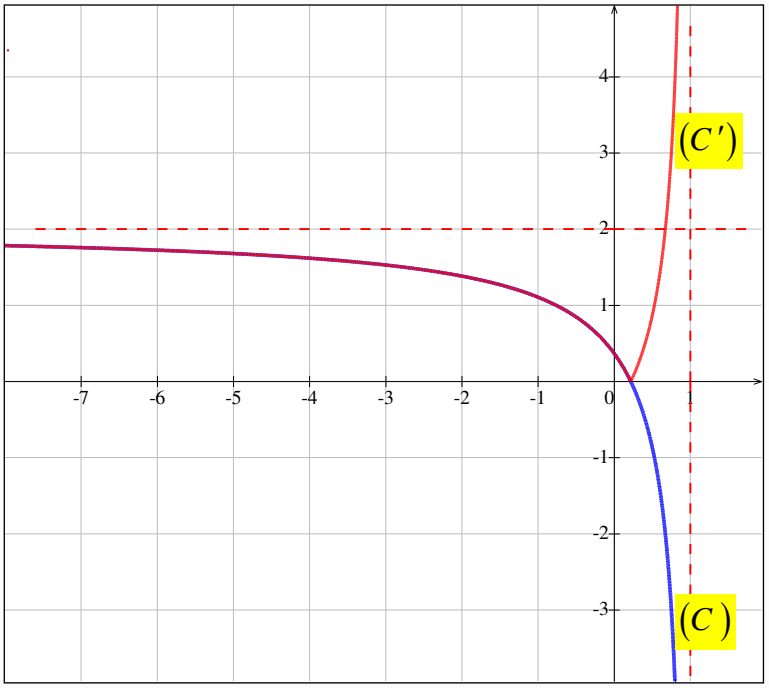
3) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α.

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ و $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2\\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=-\infty\end{cases}$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α.

حسب جدول القيم : $0,21<\alpha<0,22$.

4) الرسم :



5) تعيين مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

حلول المعادلة $|f(x)|=m$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C') مع المستقيم ذي المعادلة $y=m$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

من أجل $m \in \left]\frac{1}{e};2\right[$ المعادلة $|f(x)|=m$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

II) g الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x)=f(2x-1)$.

1) دراسة تغيّرات الدالة g :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} f(2x-1)=2 \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} g(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(2x-1)=-\infty$$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;1[$: $g'(x)=2f'(2x-1)$

بما أنه من أجل كل $x \in]-\infty;1[$ ، $(2x-1)\in]-\infty;1[$ فإن $f'(2x-1)<0$ ، وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$		1
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	2	↘	$-\infty$

2) أ- التحقق أن $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$:

لدينا : $g(x)=f(2x-1)$ ومنه $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=f\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right)=f(\alpha)=0$.

تبيان أن : $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

لدينا : $g'(x)=2f'(2x-1)$ ومنه $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right)=2f'(\alpha)$.

بـ- إستنتاج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

لدينا : $(T):y=g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(x-\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right)+g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$ ومنه $(T):y=2f'(\alpha)\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)$.

جـ- التحقق من أن : $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T) .

لدينا : $f'(\alpha)=\frac{-1}{(\alpha-1)^2}\times\left(1+e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)$ ، لكن $f(\alpha)=0$ وهذا يعني $e^{\frac{1}{\alpha-1}}=-\frac{\alpha}{\alpha-1}$ ومنه $f'(\alpha)=\frac{1}{(\alpha-1)^3}$

إذن : $(T):y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)$ أي $(T):y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

حل مقترح التمرين الأول

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية : $z^2+4z+13=0$ ..... (E)

1) التحقق أن العدد المركب $-2-3i$ حل للمعادلة (E) :

$$(-2-3i)^2+4(-2-3i)+13=4-9+12i-8-12i+13=0$$

بما أن $-2-3i$ حل للمعادلة (E) فإن $\overline{-2-3i}=-2+3i$ كذلك حل للمعادلة (E) .

((E) معادلة في $\mathbb{C}$ بمعاملات حقيقية)

2) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتاهما $z_A=-2-3i$ و $z_B=i$ على الترتيب .

S التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

أ- تبيان أن : $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$

العبارة المركبة للتشابه S : $z'-z_A=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_A)$ أي $z'=\frac{1}{2}iz+\frac{1}{2}iz_A+z_A$ و منه $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$.

بـ- حساب z_C لاحقة النقطة C هي صورة B بالتشابه S :

$$z_C=\frac{1}{2}iz_B-\frac{7}{2}-2i=\frac{1}{2}i(i)-\frac{7}{2}-2i=-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}-2i=-4-2i$$

3) لتكن النقطة D حيث : $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{O}$.

أ- تبيان أن D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما :

لدينا $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{O}$ ومنه $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{O}$ أي $-3\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{O}$ إذن D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين -3 و 1 على الترتيب .

بـ- حساب z_D لاحقة النقطة D .

$$z_D=\frac{-3z_A+z_B}{-2}=\frac{-3(-2-3i)+i}{-2}=\frac{6+9i+i}{-2}=-3-5i$$

جـ- تبيان أن : $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$

$$\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=\frac{-3-5i-(-2-3i)}{-4-2i-(-2-3i)}=\frac{-1-2i}{-2+i}=\frac{i(i-2)}{-2+i}=i$$

طبيعة المثلث ACD :

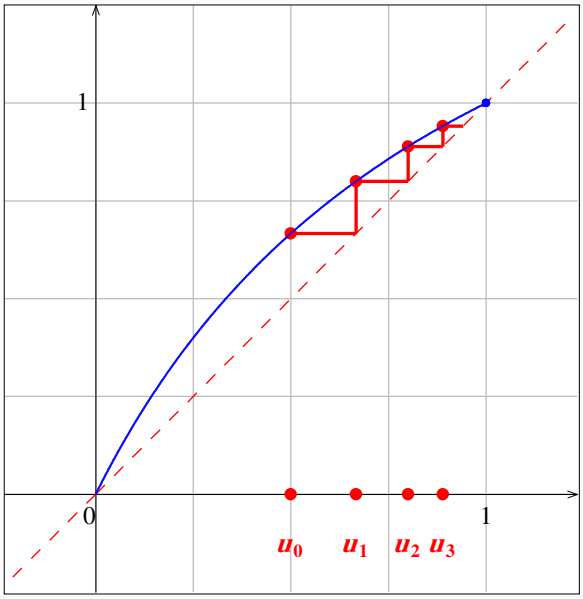
$\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$ يكافئ $\begin{cases}\left|\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}\right|=1\\ \arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ / \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$ معناه $\begin{cases}AD=AC\\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

و منه المثلث ACD قائم في A و متساوي الساقين .

f الدالة المعرفة على المجال $[0;1]$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$.

1) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول ، $u_0=\dfrac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ ـ الرسم :



بـ ـ التخمين:

المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة نحو العدد 1 .

2) أ ـ إثبات أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[0;1]$ و $f'(x)=\dfrac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}=\dfrac{2}{(x+1)^2}$

لدينا :من أجل كل $x\in[0;1]$ ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

بـ ـ البرهان بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=\dfrac{1}{2}$ و منه $0<u_0<1$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $0<u_n<1$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0<u_{n+1}<1$.

لدينا حسب الفرض $0<u_n<1$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما فإن $f(0)<f(u_n)<f(1)$ أي $0<u_{n+1}<1$

و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.

جـ ـ دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2u_n}{u_n+1}-u_n=\dfrac{2u_n-u_n(u_n+1)}{u_n+1}=\dfrac{-u_n{}^2+u_n}{u_n+1}=\dfrac{u_n(1-u_n)}{u_n+1}$

و بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $1-u_n>0$ و $u_n>0$ فإن : $u_{n+1}-u_n>0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة .

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n}$.

أ ـ إثبات (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}}=\frac{\dfrac{2u_n}{u_n+1}-1}{\dfrac{2u_n}{u_n+1}}=\frac{\dfrac{2u_n-(u_n+1)}{u_n+1}}{\dfrac{2u_n}{u_n+1}}=\frac{u_n-1}{2u_n}=\frac{1}{2}\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)=\frac{1}{2}v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{u_0}=-1$.

بـ- حساب نهاية (u_n) :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$ ومنه $v_n=1-\frac{1}{u_n}$ ومنه $u_n=\frac{1}{1-v_n}$ أي $u_n=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right]=1$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$.

حل مقترح التمرين الثالث

A، B، C و D النقط من الفضاء بحيث: $A(2;1;-1)$، $B(1;-1;3)$، $C\left(-\frac{3}{2};-2;1\right)$ و $D\left(\frac{7}{2};-3;0\right)$

1) أ- حساب إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[AB]$.

لدينا $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ ومنه $I\left(\frac{2+1}{2};\frac{1-1}{2};\frac{-1+3}{2}\right)$ أي $I\left(\frac{3}{2};0;1\right)$.

بـ- تبيان أن: $2x+4y-8z+5=0$ معادلة ديكارتية لـ (P)، المستوي المحوري لـ $[AB]$:

يكفي إثبات أن: $I\in(P)$ و $\overrightarrow{AB}$ ناظمي لـ (P).

لدينا: $2x_I+4y_I-8z_I+5=2\times\frac{3}{2}+4\times0-8\times1+5=0$ ومنه $I\in(P)$.

لدينا: $\vec{n}(2;4;-8)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) ولدينا $\overrightarrow{AB}(-1;-2;4)$ ومنه $\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\vec{n}$

إذن $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي لـ (P).

2) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}(1;2;-4)$ شعاع توجيه له:

تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) من الشكل: $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=t-\frac{3}{2}\\y=2t-2\\z=-4t+1\end{cases}$.

3) أ- إيجاد إحداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ):

نحل الجملة $\begin{cases}x=t-\frac{3}{2}\\y=2t-2\\z=-4t+1\\2x+4y-8z+5=0\end{cases}$ وهذا يكافئ $2\left(t-\frac{3}{2}\right)+4(2t-2)-8(-4t+1)+5=0$ أي $t=\frac{1}{3}$.

وبتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد $\left(-\frac{7}{6};-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$ وهي إحداثيات النقطة E.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

بـ- تبيان أن (Δ) و (AB) من نفس المستوي :

لدينا $\overrightarrow{AB}(-1;-2;4)$ و $\vec{u}(1;2;-4)$ منه $\overrightarrow{AB}=-\vec{u}$ أي (Δ) و (AB) متوازيان و بالتالي هما من نفس المستوي .

• استنتاج أن المثلث IEC قائم :

المثلث قائم في E لأن E هي المسقط العمودي لـ I على (Δ) . ($\begin{cases}(AB)\perp(P)\\(AB)\parallel(\Delta)\end{cases}$ و بالتالي $\begin{cases}(EC)\perp(P)\\E\in(P)\end{cases}$)

(يمكن إستخدام نظرية فيتاغورث)

4) أ- تبيان أن المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) و المستقيم (IE) .

لدينا : $\overrightarrow{ID}(2;-3;-1)$ ، $\overrightarrow{AB}(-1;-2;4)$ و $\overrightarrow{IE}\left(-\frac{8}{3};-\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right)$.

و $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{ID}=-1\times2+(-2)\times(-3)+4\times(-1)=0\\\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{ID}=\left(-\frac{8}{3}\right)\times2+\left(-\frac{4}{3}\right)\times(-3)+\left(-\frac{4}{3}\right)\times(-1)=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}(AB)\perp(ID)\\(IE)\perp(ID)\end{cases}$.

بـ- حساب حجم رباعي الوجوه $DIEC$:

$V_{DIEC}=\frac{1}{3}S\times h=\frac{1}{3}S_{IEC}\times ID=\frac{89}{4}uv$ ، لأن : $S_{IEC}=\frac{1}{2}IE\times EC$ ، $EC=\frac{\sqrt{21}}{3}$ ، $IE=\frac{4\sqrt{6}}{3}$ و $ID=\sqrt{14}$.

حل مقترح التمرين الرابع

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$.

1) دراسة تغيرات الدالة g :

$\lim\limits_{x\to-1}g(x)=\lim\limits_{x\to-1}\left[x^2+2x+4-2\ln(x+1)\right]=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-1}\ln(x+1)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left[\frac{x^2+2x+4}{x+1}-2\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=+\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=0\\\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+4}{x+1}\right)=+\infty\end{cases}$.

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ ، و $g'(x)=2x+2-\frac{2}{x+1}=\frac{2x(x+2)}{x+1}$.

إشارة $g'(x)$ من إشارة x ، لأنه من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ فإن : $x+1>0$ و $x+2>0$.

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

الدالة g متناقصة على المجال $]-1;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

2) من جدول التغيرات :من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g(x)\geq4$ و بالتالي نستنتج أنه من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$.

1) أ- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}}\left[x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}\right]=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\left[x(x+1)-1+2\ln(x+1)\right]=-\infty$.

التفسير البياني: المستقيم ذا المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

ب- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\dfrac{1}{x+1}+2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=+\infty$ ، لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$.

2) أ- تبيان أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ ، ومن أجل كل $x\in]-1;+\infty[$:

$$f(x)=1-\frac{\frac{-2}{x+1}(x+1)-1\times(1-2\ln(x+1))}{(x+1)^2}=1-\frac{-3+2\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2+3-2\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ب- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$:

لدينا: من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$ و بالتالي $f'(x)>0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f:

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

جـ- تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$:

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1[$ و $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=-\infty\end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-1;+\infty[$ حلا وحيدا α.

التحقق أن $0<\alpha<0,5$.

لدينا: $]0;0,5[\subset]-1;+\infty[$ و $\begin{matrix}f(0) & 1\\ (0.5) & 0,37\end{matrix}$ أي $f(0)\times f(0,5)<0$ ومنه $0<\alpha<0,5$.

3) أ- لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{1}{x+1}+2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=0$ ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

لدينا: $f(x)-x=\dfrac{-1+2\ln(x+1)}{x+1}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-1+2\ln(x+1)$.

x	-1		$-1+\sqrt{e}$		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	‖ (C_f) فوق (Δ)		(Δ) يقطع (C_f) في $A(-1+\sqrt{e};-1+\sqrt{e})$		(C_f) تحت (Δ)

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4) المستقيم (T) ذا المعادلة $y=x+\frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0.

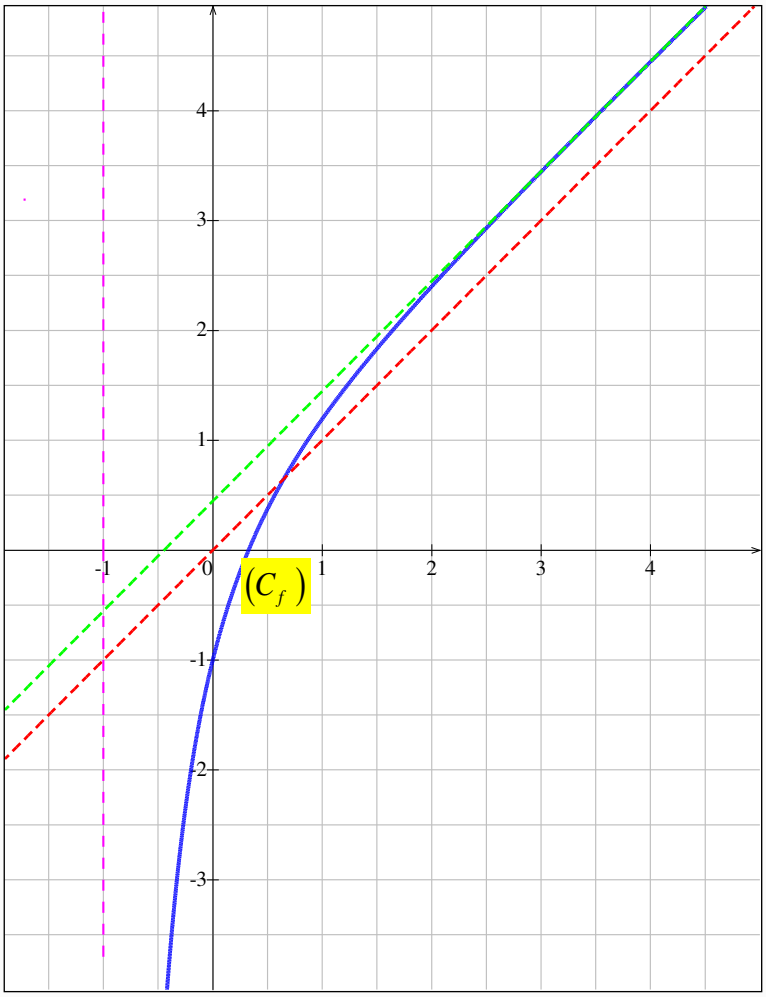
أ- حساب x_0:

لدينا :

$f'(x_0)=1$ تكافئ $\frac{g(x_0)}{(x_0+1)^2}=1$ تكافئ $g(x_0)=(x_0+1)^2$ تكافئ $2\ln(x_0+1)=3$ تكافئ

$x_0=-1+\sqrt{e^3}$.

ب- الرسم :



جـ- بيانيا ، حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$.

إذن : تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين إذا و فقط إذا كان $0<m<\frac{2}{\sqrt{e^3}}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الموضوع الأول

التمرين الأول(4ن)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3}$

و (v_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n+4$

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

2) أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n .

3) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n=5\left(\frac{1}{v_n+5}-1\right)$.

أ- بيّن أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب- أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-w_n)$.

التمرين الثاني(5ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط : $A(2;-1;1)$ ، $B(-1;2;1)$ ، $C(1;-1;2)$ و $D(1;1;1)$.

1) أ- تحقق أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

ب- بيّن أن $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

جـ- أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$.

أ- أحسب إحداثيات G .

ب- لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$.

بيّن أن (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

جـ- أثبت أن معادلة (Γ) هي : $6x-4y+2z+3=0$.

3) بيّن أن المستويين (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له .

التمرين الثالث(5ن)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2-6\sqrt{2}z+36=0$

2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

لتكن النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب :

$z_A=3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=6\sqrt{2}$ و $z_D=\frac{z_C}{2}$.

أ- أكتب z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسّي.

ب- أحسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

جـ- بيّن أن النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ، يطلب تعيين نصف قطرها .

دـ أحسب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ ثم جد قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$. ماهي طبيعة الرباعي $OACB$ ؟

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- أكتب العبارة المركبة للدوران R .

بـ- عيّن لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق أن النقط A ، C و C' في إستقامية .

جـ- عيّن لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدّد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .

التمرين الرابع (6ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = 1 + \frac{2\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}} f(x)$ ، فسّر النتيجتين هندسيا.

بـ- أدرس إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيّراتها.

2) أ- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = 1$.

بـ- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

جـ- بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$.

3) أنشئ (T) و (C_f) .

4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي: $h(x) = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|}$.

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $h(x) - h(-x) = 0$. ماذا تستنتج ؟

بـ- أنشئ المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f) .

جـ- ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2 = (m-1)|x|$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن)

I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام : $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$ (e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) بيّن أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول.

2) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

II) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n)$ ($\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري) .

1) عبّر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج نوع المتتالية (v_n) .

2) أ- أحسب بدلالة n العدد P_n حيث : $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n)$

بـ- عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث : $P_n + 4n > 0$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمرين الثاني(5ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط : $A(1;-1;-2)$ ، $B(1;-2;-3)$ و $C(2;0;0)$.

1) أ- برهن أن A ، B و C ليست في استقامية.

ب- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC) .

جـ- تحقق أن $x+y-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرّفين بمعادلتيهما كما يلي: $(P):x-y-2z+5=0$ و $(Q):3x+2y-z+10=0$.

برهن أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) ذي التمثيل الوسيطي: $(t\in\mathbb{R})$ ، $\begin{cases}x=t-3\\y=-t\\z=t+1\end{cases}$.

3) عيّن تقاطع المستويات (ABC) ، (P) و (Q) .

4) لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء . نسمي $d(M,(P))$ المسافة بين M و (P) و $d(M,(Q))$ المسافة بين M و (Q)

عيّن المجموعة (Γ) للنقط M بحيث : $\sqrt{6}\times d(M,(P))=\sqrt{14}\times d(M,(Q))$.

التمرين الثالث(5ن)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $(z-i)(z^2-2z+5)=0$

2) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ (وحدة الطول $1cm$)

تعطى النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب : $z_A=i$ ، $z_B=1+2i$ ، $z_C=1-2i$.

أ- أنشئ النقط A ، B و C .

ب- جد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) .

جـ- أحسب مساحة المثلث ABC .

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- عيّن الكتابة المركّبة للتشابه S .

ب- بيّن أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$.

4) M نقطة لاحقتها z ، عيّن مجموعة النقط M حيث : $|z|=|iz+1+2i|$.

التمرين الرابع(7ن)

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

ب- أدرس اتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيّراتها .

2) أ- بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7<\alpha<0,8$.

ب- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

بـ- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له .

جـ- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) .

3) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{x\cdot g(x)}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}$

بـ- استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.(نأخذ $f(\alpha)\approx -0,1$)

4) أحسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

5) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=\dfrac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$.

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ- تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x)-2$.

بـ- استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه ، ثم أنشئ (C_h)

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n-\dfrac{4}{3}$

و (v_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n+4$

1) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا : من من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1}=u_{n+1}+4=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3}+4=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3}+\frac{12}{3}=\frac{2}{3}u_n+\frac{8}{3}=\frac{2}{3}\left(u_n+4\right)=\frac{2}{3}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\dfrac{2}{3}$ و حدها الأول $v_0=u_0+4=5$.

2) كتابة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=v_0\times q^n$ و منه $v_n=5\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

- كتابة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=v_n-4$ و منه $u_n=5\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-4$.

3) دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}-u_n=\left[5\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-4\right]-\left[5\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-4\right]=5\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-5\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=5\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\left(\frac{2}{3}-1\right)=-\frac{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

و بما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n<0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

4) حساب المجموع S_n حيث :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (v_0 + v_1 + \ldots + v_n) - (4 + 4 + \ldots + 4)$$

$$= v_0 \left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right] - 4(n+1) = 15 \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] - 4(n+1)$$

5) (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$.

أ- تبيان أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$:

لدينا : المتتالية (v_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n < v_{n+1}$

ومنه $v_n + 5 < v_{n+1} + 5$ وبالتالي $\frac{1}{v_{n+1}+5} < \frac{1}{v_n + 5}$ أي $\frac{1}{v_{n+1}+5} - 1 < \frac{1}{v_n + 5} - 1$

ومنه $5\left(\frac{1}{v_{n+1}+5} - 1\right) < 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$

إذن : $w_n < w_{n+1}$ ، من أجل كل عدد طبيعي n ، وعليه المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

بـ- حساب : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - w_n)$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - w_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - 4 - w_n) = 0$ لأن : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 5 \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right) = -4$

حل مقترح التمرين الثاني

A ، B و C النقط من الفضاء بحيث : $A(2;-1;1)$ ، $B(-1;2;1)$ ، $C(1;-1;2)$ و $D(1;1;1)$.

1) أ- التحقق أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-3;3;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$ بالتالي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا أي A ، B و C ليست في استقامية و بالتالي فهي تعيّن مستويا .

بـ- تبيان أن $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

لدينا : $\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{AB} = -3 \times 1 + 3 \times 1 + 0 \times 1 = 0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{AC} = -1 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$ إذن الشعاع $\vec{n}(1;1;1)$ ناظمي للمستوي (ABC).

جـ- كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

لدينا: $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ومنه معادلة لـ (ABC) من الشكل $x + y + z + d = 0$.

و $A \in (ABC)$ يعني $2 - 1 + 1 + d = 0$ أي : $d = -2$ وعليه معادلة للمستوي (ABC) من الشكل: $x + y + z - 2 = 0$.

2) النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$.

أ- حساب إحداثيات G :

لدينا : $\begin{cases} x_G = \frac{x_A + 2x_B - x_C}{1+2-1} = \frac{2 + 2 \times (-1) - 1}{2} = -\frac{1}{2} \\ y_G = \frac{y_A + 2y_B - y_C}{1+2-1} = \frac{-1 + 2 \times 2 - (-1)}{2} = 2 \\ z_G = \frac{z_A + 2z_B - z_C}{1+2-1} = \frac{1 + 2 \times 1 - 2}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$ ومنه $G\left(-\frac{1}{2};2;\frac{1}{2}\right)$.

بـ- (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$

$\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$ تكافئ $\left\|2\overrightarrow{MG}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$ تكافئ $\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{MD}\right\|$ تكافئ $MG = MD$

ومنه المجموعة (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

جـ- إثبات أن معادلة (Γ) هي : $6x-4y+2z+3=0$.

يكفي إثبات أن : $I\in(\Gamma)$ و $\overrightarrow{n'}=k\overrightarrow{GD}$ ، بحيث $I\left(\frac{1}{4};\frac{3}{2};\frac{3}{4}\right)$ منتصف القطعة $[GD]$ و $\overrightarrow{n'}(6;-4;2)$ شعاع ناظم لـ (Γ)

لدينا : $6\times\frac{1}{4}-4\times\frac{3}{2}+2\times\frac{3}{4}+3=0$ ومنه $I\in(\Gamma)$ ، ولدينا $\overrightarrow{GD}\left(\frac{3}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$ ومنه $\overrightarrow{n'}=4\overrightarrow{GD}$.

(يمكن إستخدام طرق أخرى)

3) تبيان أن المستويين (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) مع تعيين تمثيل وسيطي له .

لدينا : $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي لـ (ABC) و $\overrightarrow{n'}(6;-4;2)$ شعاع ناظمي لـ (Γ) .

$\vec{n}$ و $\overrightarrow{n'}$ ليسا مرتبطين خطيا و بالتالي المستويان (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

(Δ) المستقيم المعرّف بـ : $\begin{cases}x+y+z-2=0\\6x-4y+2z+3=0\end{cases}$ ومنه بوضع $z=t$ نجد $(t\in\mathbb{R})$ وهذه $\begin{cases}x=\frac{1}{2}-\frac{3}{5}t\\y=\frac{3}{2}-\frac{2}{5}t\\z=t\end{cases}$

الجملة هي تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) .

حل مقترح التمرين الثالث

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2-6\sqrt{2}z+36=0$

لدينا : $\Delta=\left(-6\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times36=-2\times36=\left(6i\sqrt{2}\right)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_1=\frac{6\sqrt{2}-6i\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}-3i\sqrt{2}=3\sqrt{2}(1-i)$ و $z_2=\frac{6\sqrt{2}+6i\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}=3\sqrt{2}(1+i)$.

2) لدينا : $z_A=3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=6\sqrt{2}$ و $z_D=\frac{z_C}{2}=3\sqrt{2}$.

أ- كتابة z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسّي .

لدينا : $z_A=3\sqrt{2}(1+i)$ ومنه : $|z_A|=6$.

و بفرض θ_A عمدة للعدد المركب z_A ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_A=\frac{3\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\\sin\theta_A=\frac{3\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ ، ومنه $\arg(z_A)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$

إذن : $z_A=6e^{i\frac{\pi}{4}}$.

و لدينا : $z_B=\overline{z_A}=6e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $(1+i)z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times6e^{i\frac{\pi}{4}}=6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

بـ- حساب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

$$\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}=\left(\frac{6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2014}=e^{i1007\pi}=e^{i(\pi+503\times2\pi)}=e^{i\pi}=-1$$

جـ- تبيان أن النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D :

لنثبت أن : $DO=DA=DB=DC$

لدينا : $|z_O-z_D|=\left|-3\sqrt{2}\right|=3\sqrt{2}$ و $|z_A-z_D|=\left|3\sqrt{2}(1+i)-3\sqrt{2}\right|=\left|3\sqrt{2}i\right|=3\sqrt{2}$

و $|z_B-z_D|=\left|3\sqrt{2}(1-i)-3\sqrt{2}\right|=\left|-3\sqrt{2}i\right|=3\sqrt{2}$ و $|z_C-z_D|=\left|6\sqrt{2}-3\sqrt{2}\right|=3\sqrt{2}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ومنه $DO = DA = DB = DC = 3\sqrt{2}$ وبالتالي النقط O، A، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D و نصف قطرها $3\sqrt{2}$

د- حساب $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$:

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{3\sqrt{2}(1-i) - 6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}(1+i) - 6\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}}{-3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}} = \frac{i\left(3i\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\right)}{-3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}} = i$$

إيجاد قيس للزاوية $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$:

لدينا $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$ ومنه $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

طبيعة الرباعي $OACB$:

لدينا : $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i$ يعني : $\begin{cases} \left|\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} CA = CB \\ \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ وبالتالي المثلث ACB قائم في C و متساوي الساقين و لدينا النقطة D منتصف القطعة $[AB]$ لأن $z_D = \dfrac{z_A + z_B}{2}$ وكذلك منتصف القطعة $[OC]$

لأن $z_D = \dfrac{z_C}{2}$ ومنه الرباعي $OACB$ مربع .

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

أ- العبارة المركبة للدوران R : $z' - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_O)$ ومنه $z' = iz$.

ب- تعيين لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R : $z_{C'} = iz_C = 6i\sqrt{2}$

- التحقق أن النقط A، C و C' في إستقامية :

يكفي إثبات أن : $\dfrac{z_{C'} - z_C}{z_A - z_C} \in \mathbb{R}$.

لدينا : $\dfrac{z_{C'} - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{6i\sqrt{2} - 6\sqrt{2}}{3i\sqrt{2} - 3\sqrt{2}} = 2$ ومنه النقط A، C و C' في إستقامية .

جـ- تعيين لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R : $z_{A'} = iz_A = i\,3\sqrt{2}(1+i) = 3\sqrt{2}(-1+i)$

تعيين صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R :

أولا لنعيّن لاحقة النقطة B' صورة B بالدوران R : $z_{B'} = iz_B = i\,3\sqrt{2}(1-i) = 3\sqrt{2}(1+i) = z_A$

إذن :صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R هي الرباعي $OAC'A'$. لأن : $R(O) = O$ ، $R(A) = A'$ ، $R(C) = C'$ و $R(B) = A$

حل مقترح التمرين الرابع

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = 1 + \dfrac{2\ln x}{x}$

1) أ- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(1 + \dfrac{2\ln x}{x}\right) = -\infty$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2\ln x}{x}\right)=1$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ ـ دراسة إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ، ومن أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-1\times 2\ln x}{x^2}=\frac{2-2\ln x}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $1-\ln x$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $]0;e]$ ومتناقصة على المجال $[e;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$1+2e^{-1}$	↘	$+\infty$

2) أ ـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=1$.

لدينا : $f(x)-y=1+\dfrac{2\ln x}{x}-1=\dfrac{2\ln x}{x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ لأن $\dfrac{2}{x}>0$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	‖ (C_f) تحت (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$		(C_f) فوق (Δ)

بـ ـ كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

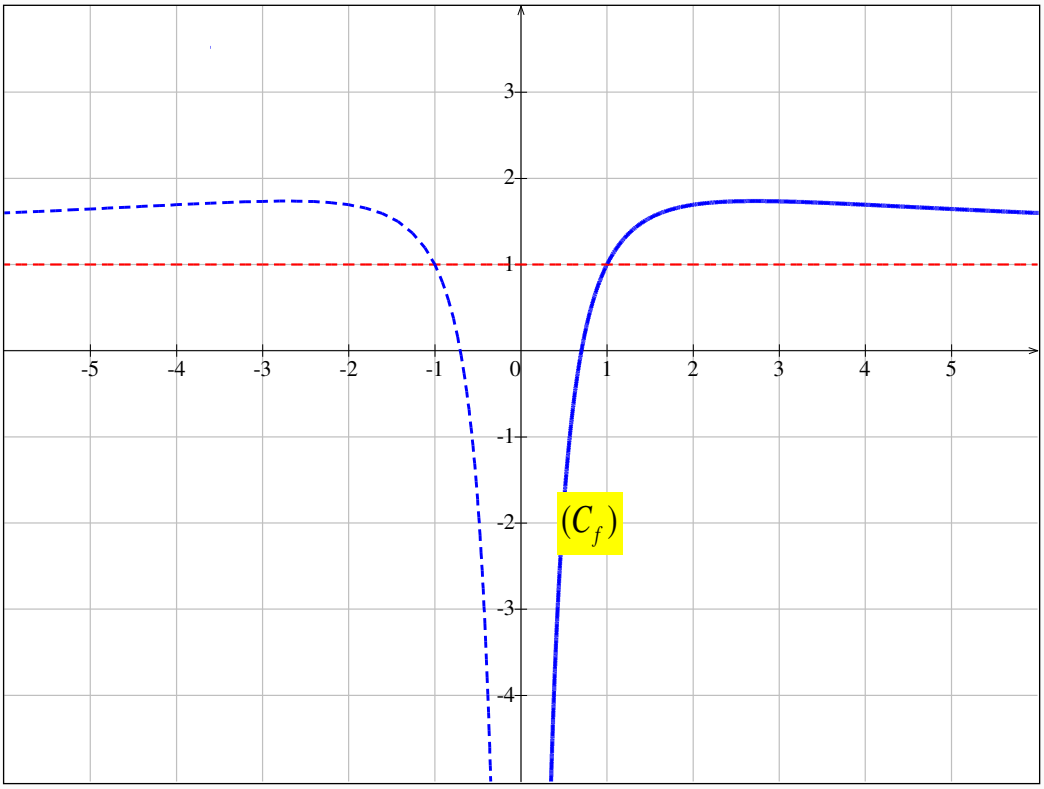
لدينا : $(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $(T):y=2x-1$.

جـ ـ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;1]$ و $]e^{-0,4};e^{-0,3}[\subset]0;1]$ و $\begin{matrix} f\left(e^{-0,4}\right) & 0,2 \\ f\left(e^{0,3}\right) & 0,2 \end{matrix}$

أي $f\left(e^{-0,4}\right)\times f\left(e^{-0,3}\right)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

3) الرسم :



4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}$.

أ ـ من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :

$$h(x)-h(-x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}-1-\frac{2\ln|-x|}{|-x|}=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}-1-\frac{2\ln|x|}{|x|}=0$$

نستنتج أن الدالة h زوجية و تمثيلها البياني (C_h) متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب .

بـ ـ كيفية إنشاء المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f) :

من أجل $x\in]0;+\infty[$ ، يكون $f(x)=h(x)$ و بالتالي (C_h) منطبق على (C_f) .

من أجل $x\in]-\infty;0[$ ، (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور التراتيب لكون الدالة h زوجية .

الرسم : أنظر الشكل .

جـ ـ المناقشة البيانية :

$h(x)=m$ أي $1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}=m$ تكافئ $2\ln|x|=(m-1)|x|$ تكافئ $\ln x^2=(m-1)|x|$

و منه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_h) و المستقيم ذي المعادلة $y=m$.

لما $m\in]-\infty;0]$ المعادلة تقبل حلين .

لما $m\in\left]0;1+\dfrac{2}{e}\right[$ المعادلة تقبل أربعة حلول .

لما $m=1+\dfrac{2}{e}$ المعادلة تقبل حلين (مضاعفين).

لما $m\in\left]1+\dfrac{2}{e};+\infty\right[$ المعادلة ليس لها حلول .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

حل مقترح التمرين الأول

I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$

1) تبيان أن (u_n) متتالية هندسية:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = e^{\frac{1}{2}-(n+1)} = e^{\frac{1}{2}-n-1} = e^{\frac{1}{2}-n} \times e^{-1} = \frac{1}{e}u_n$

ومنه المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{e}$ وحدها الأول $u_0 = e^{\frac{1}{2}-0} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

2) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{2}-n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{e}\times\left(\frac{1}{e}\right)^n\right] = 0$$

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

3) حساب المجموع S_n:

$$S_n = u_0+u_1+\ldots+u_n = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = \sqrt{e}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{e}}\right] = \frac{e\sqrt{e}}{e-1}\left(1-e^{-n-1}\right)$$

II) من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = \ln(u_n)$

1) كتابة v_n بدلالة n:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = \ln(u_n)$ ومنه $v_n = \ln(u_n) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}-n}\right) = \frac{1}{2}-n$.

استنتاج نوع المتتالية (v_n):

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}-v_n = \frac{1}{2}-(n+1)-\left(\frac{1}{2}-n\right) = -1$

ومنه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r=-1$ وحدها الأول $v_0 = \ln(u_0) = \ln\left(\sqrt{e}\right) = \frac{1}{2}$.

2) أ- حساب العدد P_n:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n،

$$P_n = \ln(u_0\times u_1\times u_2\times\ldots\times u_n) = \ln u_0+\ln u_1+\ldots+\ln u_n = v_0+v_1+\ldots+v_n$$

ومنه $P_n = \frac{n+1}{2}(v_0+v_n) = \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-n\right) = \frac{(n+1)(1-n)}{2} = \frac{1-n^2}{2}$

ب- تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n+4n>0$.

$P_n+4n>0$ يكافئ $\frac{1-n^2}{2}+4n>0$ يكافئ $\frac{1+8n-n^2}{2}>0$ يكافئ $-\frac{1}{2}n^2+4n+\frac{1}{2}>0$

ولدينا: $-\frac{1}{2}n^2+4n+\frac{1}{2}>0$ يكافئ $n\in\left]4-\sqrt{17};4+\sqrt{17}\right[$ أي $n\in[0;8]$

ومنه مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث $P_n+4n>0$ هي: $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

A ، B و C النقط من الفضاء بحيث : $A(1;-1;-2)$ ، $B(1;-2;-3)$ و $C(2;0;0)$.

1) أ- إثبات أن A ، B و C ليست في استقامية.

لدينا : $\overrightarrow{AB}(0;-1;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(1;1;2)$ بالتالي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا أي أن A ، B و C ليست في استقامية ، إذن فهي تعيّن مستويا .

ب- كتابة تمثيل وسيطي للمستوي (ABC) :

بما أن النقط A ، B و C ليست في استقامية فإن $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ أساس للمستوي (ABC) .

ومنه تمثيل وسيطي للمستوي (ABC) من الشكل : $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ ، $\begin{cases}x=1+\beta\\y=-1-\alpha+\beta\\z=-2-\alpha+2\beta\end{cases}$.

جـ- التحقق أن $x+y-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة.

$x_A+y_A-z_A-2=1-1-(-2)-2=0$ لأن $A\in(ABC)$

$x_B+y_B-z_B-2=1-2-(-3)-2=0$ لأن $B\in(ABC)$

$x_C+y_C-z_C-2=2+0-0-2=0$ لأن $C\in(ABC)$

2) (P) و (Q) المستويان (P) و (Q) المعرّفان بالمعادلتين : $(P):x-y-2z+5=0$ و $(Q):3x+2y-z+10=0$.

إثبات أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) ذي التمثيل الوسيطي: $(t\in\mathbb{R})$ ، $\begin{cases}x=t-3\\y=-t\\z=t+1\end{cases}$.

لدينا : $\vec{n}(1;-1;-2)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\vec{n'}(3;2;-1)$ شعاع ناظمي لـ (Q) .

$\vec{n}$ و $\vec{n'}$ ليسا مرتبطين خطيا و بالتالي المستويان (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم .

ولدينا : $\begin{cases}(t-3)-(-t)-2(t+1)+5=0\\3(t-3)+2(-t)-(t+1)+10=0\end{cases}$ ومنه $(\Delta)\subset(P)$ و $(\Delta)\subset(Q)$ أي $(Q)\cap(P)=(\Delta)$.

3) تعيين تقاطع المستويات (ABC) ، (P) و (Q).

لدينا : $(ABC)\cap(Q)\cap(P)=(\Delta)\cap(ABC)$

لدينا $\begin{cases}x=t-3\\y=-t\\z=t+1\\x+y-z-2=0\end{cases}$ يكافئ $(t-3)+(-t)-(t+1)-2=0$ أي $t=-6$.

وبتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد $(-9;6;-5)$ وهي إحداثيات النقطة E نقطة تقاطع (ABC) ، (P) و (Q).

4) $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء. نسمي $d(M,(P))$ المسافة بين M و (P) و $d(M,(Q))$ المسافة بين M و (Q) .

تعيين المجموعة (Γ) للنقط M بحيث : $\sqrt{6}\times d(M,(P))=\sqrt{14}\times d(M,(Q))$.

$\sqrt{6}\times d(M,(P))=\sqrt{14}\times d(M,(Q))$ معناه $|x-y-2z+5|=|3x+2y-z+10|$

أي : $\begin{cases}x-y-2z+5=3x+2y-z+10\\x-y-2z+5=-(3x+2y-z+10)\end{cases}$ أو أي : $\begin{cases}2x+3y+z+5=0\\4x+y-3z+15=0\end{cases}$ أو

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي إتحاد مستويين معادلتاهما : $2x+3y+z+5=0$ و $4x+y-3z+15=0$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $(z-i)(z^2-2z+5)=0$

$(z-i)(z^2-2z+5)=0$ تكافئ : $z=i$ أو $z^2-2z+5=0$

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+5=0$

لدينا : $\Delta=(-2)^2-4\times1\times5=-16=16i^2=(4i)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

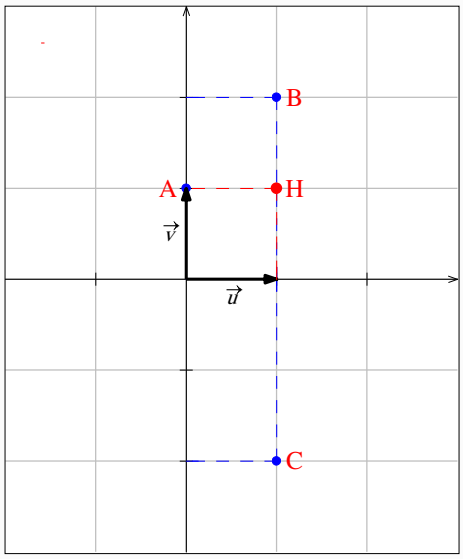
$z_1=\dfrac{2-4i}{2}=1-2i$ و $z_2=\dfrac{2+4i}{2}=1+2i$.

إذن مجموعة حلول المعادلة $(z-i)(z^2-2z+5)=0$ هي : $S=\{i\;;1-2i\;;1+2i\}$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ (وحدة الطول $1cm$)

تعطى النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب : $z_A=i$ ، $z_B=1+2i$ ، $z_C=1-2i$.

أ- إنشاء النقط A ، B و C :



بـ- تعيين z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) : $z_H=1+i$

جـ- حساب مساحة المثلث ABC :

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}.AH.BC=\dfrac{1}{2}\times1\times4=2cm^2$ لأن $AH=|z_H-z_A|=|1+i-i|=1$ و $BC=|z_C-z_B|=|-4i|=4$

3) S التشابه المباشر الذي مركزه A ونسبته $\dfrac{1}{2}$ وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$

أ- تعيين الكتابة المركبة للتشابه S :

لدينا : $z'-z_A=\dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_A)$ ومنه $z'=\dfrac{1}{2}i(z-i)+i$ أي : $z'=\dfrac{1}{2}iz+\dfrac{1}{2}+i$.

بـ- تبيان أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\dfrac{1}{2}cm^2$:

بما أن نسبة التشابه S هي $\dfrac{1}{2}$ فإن : $S'=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times S_{ABC}=\dfrac{1}{4}\times2=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}cm^2$.

4) تعيين مجموعة النقط M حيث : $|z|=|iz+1+2i|$.

$|z|=|iz+1+2i|$ تكافئ $|z|=|i(z-i+2)|$ تكافئ $|z|=|z-i+2|$ تكافئ $|z|=|z-(i-2)|$.

ومنه مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[OD]$ بحيث D هي النقطة التي لاحقتها $z_D=i-2$.

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$

1) أ- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

ب- الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $g'(x)=6x^2-8x+7$.

من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x)>0$ وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

(لأن: $6x^2-8x+7=6\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{13}{3}$ أو لأن: مميز العبارة $6x^2-8x+7$ سالب ومعامل x^2 موجب تماما)

جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2) أ- تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7<\alpha<0,8$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\begin{cases} g(0.7)\approx -0,37 \\ g(0.8)\approx 0,06 \end{cases}$ أي $g(0.7)\times g(0.8)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $0,7<\alpha<0,8$.

ب- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2}\right)=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2}\right)=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.

2) أ- من أجل كل عدد حقيقي x،

$$\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2\left(2x^2-2x+1\right)}=\frac{(x+1)\left(2x^2-2x+1\right)+1-3x}{2\left(2x^2-2x+1\right)}=\frac{2x^3-4x+2}{2\left(2x^2-2x+1\right)}=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}=f(x)$$

ب- لدينا: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}(x+1)\right]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[\frac{1-3x}{2\left(2x^2-2x+1\right)}\right]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[\frac{-3x}{4x^2}\right]=0$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}(x+1)$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

جـ- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ):

لدينا: $f(x)-y=f(x)-\frac{1}{2}(x+1)=\frac{1-3x}{2\left(2x^2-2x+1\right)}$ ومنه إشارة الفرق $f(x)-y$ من إشارة $1-3x$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	(Δ) فوق (C_f)		(Δ) يقطع (C_f) في النقطة $A\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$		(Δ) تحت (C_f)

3) أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x،

$$f'(x)=\frac{\left(3x^2-2\right)\left(2x^2-2x+1\right)-\left(4x-2\right)\left(x^3-2x+1\right)}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}=\frac{2x^4-4x^3+7x^2-4x}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}=\frac{x\cdot g(x)}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}$$

بـ- إشارة $f'(x)$ من إشارة $x.g(x)$:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

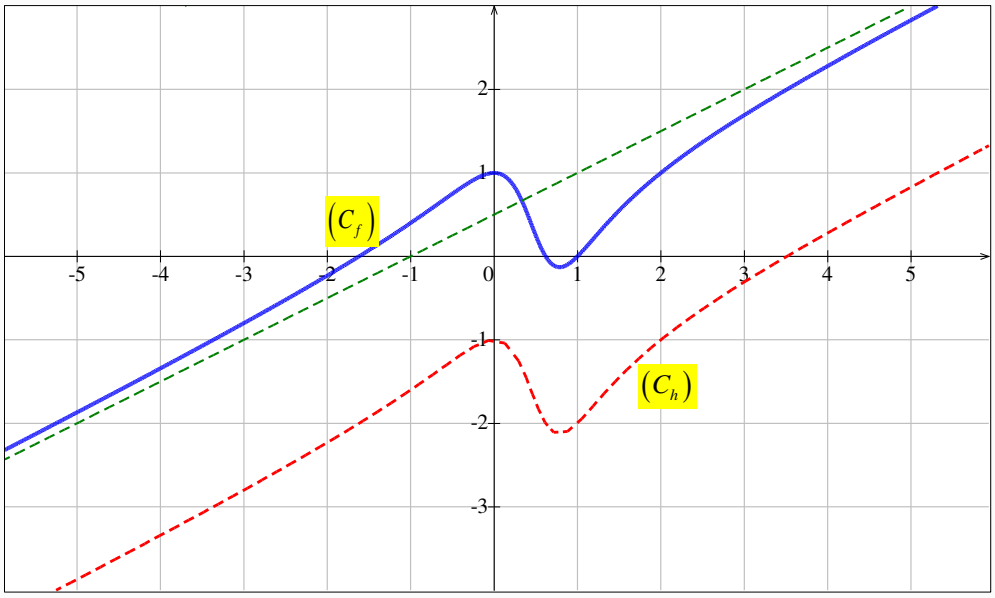
4) $f(1)=0$.

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$:

$f(x)=0$ تكافئ $x^3-2x+1=0$ تكافئ $\left(x-1\right)\left(x^2+x-1\right)=0$

إذن حلول المعادلة $f(x)=0$ هي : $\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};1;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

5) الرسم :



6) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=\frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$.

أ- التحقق : من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x)-2=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}-2=\frac{x^3-2x+1-2\left(2x^2-2x+1\right)}{2x^2-2x+1}=\frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}=h(x)$$

بـ- المنحنى (C_h) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0;-2)$.

الرسم : أنظر الشكل السابق .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الموضوع الأول

التمرين الأول (4,5ن)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط : $A(2;1;0)$ ، $B(1;2;2)$ ، $C(3;3;1)$ و $D(1;1;4)$.

1) تحقق أن النقط A ، B و C تعين مستويا و أن $x-y+z-1=0$ معادلة ديكارتية له .

2) بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع ، ثم تحقق أن مساحته هي $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ وحدة مساحة .

3) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) و الذي يشمل النقطة D .

4) النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)

أ- عين إحداثيات النقطة E ثم أحسب المسافة بين النقطة D و المستوي (ABC) .

ب- عين مركزي سطحي الكرتين اللذين يمسان (ABC) في النقطة E و نصف قطر كل منهما $\sqrt{3}$

5) أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

التمرين الثاني (4,5ن)

I) عين العددين المركبين α و β حيث : $\begin{cases}2\alpha-\beta=-3\\2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3}\end{cases}$ مع $\overline{\alpha}$ مرافق α و $\overline{\beta}$ مرافق β .

II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_A=z_C e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1) أ- أكتب z_A و z_C على الشكل الأسي ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا .

ب- تحقق أن العدد المركب $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}+\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}-\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي .

2) D النقطة ذات اللاحقة $z_D=1+i$

أ- حدد النسبة و زاوية للتشابه S الذي مركزه O و يحول D إلى A .

ب- أكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $z=k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$.

التمرين الثالث (4,5ن)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=e^2-1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=(1+u_n)e^{-2}-1$.

1) أحسب : u_1 ، u_2 و u_3 .

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1+u_n>0$.

3) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة . هل هي متقاربة ؟ علل .

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=3(1+u_n)$

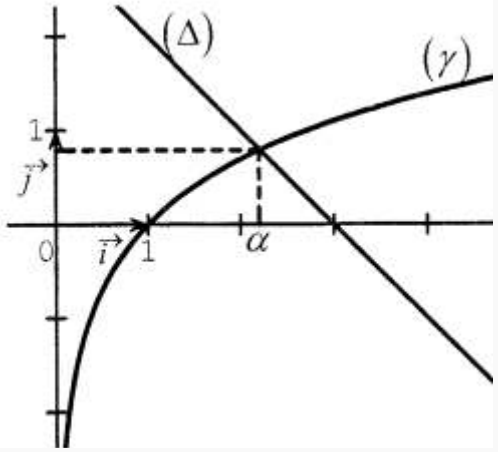
أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

بـ- أكتب v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

جـ- بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0+\ln v_1+\ln v_2+\ldots+\ln v_n=(n+1)(-n+2+\ln 3)$

التمرين الرابع(6,5ن)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.



I (γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$

α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ).

1) بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $]0;+\infty[$.

2) g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x-3+\ln x$.

إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

3) تحقق أن : $2,2<\alpha<2,3$.

II f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$ و (C_f) تمثيلها البياني .

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أثبت أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3) بيّن أن: $f(\alpha)=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ، ثم إستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل؛ ثم أنشئ (C_f) على المجال $]0;e^2]$.

III F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و التي تحقق: $F(1)=-3$.

1) بيّن أنّ منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

2) بيّن أن $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$ ، ثم إستنتج عبارة الدالة F .

الموضوع الثاني

التمرين الأول(4ن)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(2;4;1)$ ، $B(0;4;-3)$ ، $C(3;1;-3)$ ، $D(1;0;-2)$

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة من الحالات الاتية :

1) النقط A ، B و C ليست في استقامية .

2) $2x+2y-z-11=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

3) النقطة $E(3;2;-1)$ هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

4) المستقيمان (AB) و (CD) من نفس المستوي.

5) $\begin{cases}x=2t-1\\ y=t-1\\ z=-t-1\end{cases}$ ، $t\in\mathbb{R}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (CD) .

6) يوجد عددان حقيقيان α و β حيث النقطة $I(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5})$ مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$.

التمرين الثاني(5ن)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب :

z_A ، z_B و z_C حيث : $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = -\overline{z_A}$ ، $z_C = -(z_A + z_B)$.

1) أ- أكتب كلا من العددين المركبين z_B و z_C على الشكل الأسي.

ب- استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

جـ- أنشىء الدائرة (γ) و النقط A ، B و C.

2) أ- تحقق أن : $\dfrac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ب- استنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع و أن النقطة O مركز ثقل هذا المثلث .

جـ- عيّن و أنشىء (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$.

3) أ- عيّن زاوية للدوران r الذي مركزه O و يحول C إلى A .

ب- أثبت أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

التمرين الثالث(5ن)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني .

1) عيّن اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

2) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) ذي المعادلة : $y = x$.

3) مثل (C_f) و (D) على المجال $[0;6]$.

II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

1) أ- أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 ، v_0, v_1, v_2 و v_3 دون حسابها.

ب- خمّن اتجاه تغير و تقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

2) أ- أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 \le u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \le 5$ حيث : $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

ب- استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

3) أ- أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - u_{n+1} \le \dfrac{1}{3}(v_n - u_n)$

ب- بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 < v_n - u_n \le \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

جـ- استنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ ، ثم حدّد نهاية كل من (u_n) و (v_n) .

التمرين الرابع(6ن)

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$.

1) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن: $0,36 < \alpha < 0,37$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.

ب- إستنتج أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-\alpha]$ و متزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$.

2) أحسب نهاية f عند $+\infty$ و عند $-\infty$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x-1]$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$.

5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ ، نأخذ $f(-\alpha)\approx 0{,}1$.

6) أ- تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

ب- إستنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

A ، B ، C و D النقط من الفضاء بحيث : $A(2;1;0)$ ، $B(1;2;2)$ ، $C(3;3;1)$ و $D(1;1;4)$.

1) التحقق أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1;1;2)$ و $\overrightarrow{AC}(1;2;1)$ و $\frac{1}{2}\neq\frac{-1}{1}$ و بالتالي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا أي أن النقط A ، B و C ليست في استقامية إذن فهي تعيّن مستويا .

- التحقق أن : $x-y+z-1=0$ معادلة للمستوي (ABC) :

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة المعطاة .

$A\in(ABC)$ لأن $x_A-y_A+z_A-1=2-1+0-1=0$

$B\in(ABC)$ لأن $x_B-y_B+z_B-1=1-2+2-1=0$

$C\in(ABC)$ لأن $x_C-y_C+z_C-1=3-3+1-1=0$

2) تبيان أن المثلث ABC متقايس الأضلاع :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1;1;2)$ ، $\overrightarrow{AC}(1;2;1)$ و $\overrightarrow{BC}(2;1;-1)$ ومنه $AB=AC=BC=\sqrt{6}$ و بالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع.

- التحقق أن مساحة ABC هي : $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ وحدة مساحة

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{6}\right)^2=\frac{6\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

3) تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) و الذي يشمل النقطة D :

$(\Delta)\perp(ABC)$ معناه $\vec{n}(1;-1;1)$ الناظمي لـ (ABC) هو شعاع توجيه لـ (Δ) .

و منه تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) من الشكل : $(t\in\mathbb{R})$

$$\begin{cases}x=t+1\\y=-t+1\\z=t+4\end{cases}.$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4) النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)

أ- تعيين إحداثيات النقطة E :

النقطة E هي نقطة تقاطع المستوي (ABC) و المستقيم (Δ) .

لدينا $\begin{cases} x = t+1 \\ y = -t+1 \\ z = t+4 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ يكافئ $(t+1)-(-t+1)+(t+4)-1=0$ أي $t=-1$.

و بتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد $(0;2;3)$ و هي إحداثيات النقطة E .

• حساب المسافة بين النقطة D و المستوي (ABC) :

$$d\left(D,(ABC)\right)=\frac{|x_D-y_D+z_D-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

ب- تعيين مركزي سطحي الكرتين اللذين يمسان (ABC) في النقطة E و نصف قطر كل منهما $\sqrt{3}$:

لدينا : $d\left(D,(ABC)\right)=\sqrt{3}$ و منه إحدى الكرتين مركزها D و الأخرى مركزها D' نظيرة D بالنسبة لـ E .

لدينا E منتصف $[DD']$ و منه $\overrightarrow{ED'}=-\overrightarrow{ED}$ أي $\overrightarrow{ED'}=\overrightarrow{DE}$ ،

و $\overrightarrow{DE}(-1;1;-1)$ و $\overrightarrow{ED'}(x_{D'};y_{D'}-2;z_{D'}-3)$ ومنه بالمطابقة نجد : $D'(-1;3;2)$.

5) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times h \text{ بحيث : } h=d\left(D,(ABC)\right)=\sqrt{3}$$

و منه : $V_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=\frac{3}{2}$

حل مقترح التمرين الثاني

I) تعيين العددين المركبين α و β حيث : $\begin{cases} 2\alpha-\beta=-3 \\ 2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3} \end{cases}$

$\begin{cases} 2\alpha-\beta=-3 \\ 2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3} \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 2\alpha-\beta=-3 \\ 2\alpha+\beta=-3+2i\sqrt{3} \end{cases}$ و بالجمع طرف لطرف نجد : $4\alpha=-6+2i\sqrt{3}$

أي : $\alpha=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و بتعويض قيمة α نجد : $\beta=i\sqrt{3}$.

II) A ، B و C النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_A=z_C e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1) أ- كتابة z_A و z_C على الشكل الأسّي :

لدينا : $z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و منه : $|z_A|=\sqrt{3}$.

و بفرض θ_A عمدة للعدد المركب z_A ، يكون : $\begin{cases} \cos\theta_A=\frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_A=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2} \end{cases}$ ، و منه $\arg(z_A)=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ، حيث

$k\in\mathbb{Z}$

إذن : $z_A=\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ولدينا : $z_A = z_C e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $z_C = z_A e^{-i\frac{\pi}{3}}$ أي $z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}} \times e^{-i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$.

• تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا :

لدينا : $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}}$

$\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقي سالب معناه $\arg\left[\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n\right] = \pi + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$.

$\arg\left[\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n\right] = \pi + 2k\pi$ يكافئ $\arg\left(e^{i\frac{n\pi}{3}}\right) = \pi + 2k\pi$ يكافئ $\frac{n\pi}{3} = (2k+1)\pi$

يكافئ $n = 6k+3 \ / \ k \in \mathbb{N}$

بـ- التحقق أن العدد المركب $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}$ حقيقي :

$$2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435} = 2\left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^{2015} + \left(e^{i\frac{-5\pi}{6}}\right)^{1962} - \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{1435} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} + e^{i\pi} - e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\sqrt{3} - 1$$

2) D النقطة ذات اللاحقة $z_D = 1+i$

أ- تحديد النسبة و زاوية للتشابه S الذي مركزه O و يحول D إلى A :

لدينا : $\begin{cases} S(O) = O \\ S(D) = A \end{cases}$ ومنه $z_A - z_O = ke^{i\theta}(z_D - z_O)$ ومنه نسبة التشابه S هي : $k = \left|\frac{z_A}{z_D}\right|$

و زاوية للتشابه S هي $\theta = \arg\left(\frac{z_A}{z_D}\right)$.

ولدينا : $\frac{z_A}{z_D} = \frac{\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ ومنه $k = \left|\frac{z_A}{z_D}\right| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ و $\theta = \arg\left(\frac{z_A}{z_D}\right) = \frac{7\pi}{12}$

بـ- كتابة $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_A}{z_D} = \frac{-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+i} = \frac{\left(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}-3}{4}+i\frac{\sqrt{3}+3}{4}$$

• إستنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$:

لدينا : $\frac{z_A}{z_D} = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \frac{\sqrt{6}}{2}i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و بالمطابقة مع الشكل الجبري نجد :

ومنه $\begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-3}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+3}{4} \end{cases}$ أي : $\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2(\sqrt{3}-3)}{4\sqrt{6}} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2(\sqrt{3}+3)}{4\sqrt{6}} \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$

3) تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$.

$z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ تكافئ $z = k z_D e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ تكافئ $z = k z_A$ تكافئ $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA}$ و $k \in \mathbb{R}^+$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

و بالتالي مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[OA)$.

حل مقترح التمرين الثالث

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـــ: $u_0=e^2-1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=(1+u_n)e^{-2}-1$.

1) حساب u_1 ، u_2 و u_3 :

$$u_1=(1+u_0)e^{-2}-1=e^2\times e^{-2}-1=0 \quad ، \quad u_2=(1+u_1)e^{-2}-1=e^{-2}-1$$

$$u_3=(1+u_2)e^{-2}-1=e^{-4}-1 .$$

2) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1+u_n>0$:

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $1+u_n>0$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=e^2-1$ ومنه $1+u_0>0$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $1+u_n>0$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $1+u_{n+1}>0$.

لدينا حسب الفرض $1+u_n>0$ ولدينا $1+u_{n+1}=(1+u_n)e^{-2}$ ومنه $1+u_{n+1}>0$ وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $1+u_n>0$.

3) تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة :

لدينا :من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=(1+u_n)e^{-2}-1-u_n=(1+u_n)e^{-2}-(1+u_n)=(1+u_n)(e^{-2}-1)$

وبما أنه $1+u_n>0$ ، من أجل كل عدد طبيعي n ، و $e^{-2}-1<0$ فإن $u_{n+1}-u_n<0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

ـ المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل بالعدد -1 ، إذن فهي متقاربة .

4) من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=3(1+u_n)$

أ- إثبات أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=3(1+u_{n+1})=3(1+u_n)e^{-2}=e^{-2}v_n$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=e^{-2}$ وحدها الأول : $v_0=3(1+u_0)=3e^2$.

بـ- كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=v_0\times q^n$ ومنه $v_n=3\times e^2(e^{-2})^n=3e^{-2n+2}$.

- كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=3(1+u_n)$ ومنه $u_n=\frac{1}{3}v_n-1$ أي $u_n=\frac{1}{3}(3e^{-2n+2})-1=e^{-2n+2}-1$.

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}(e^{-2n+2}-1)=-1 \quad \text{لأن} : \lim_{n\to+\infty}e^{-2n+2}=0$$

جـ- تبيان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0+\ln v_1+\ln v_2+\ldots+\ln v_n=(n+1)(-n+2+\ln 3)$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n=(3\times e^2)^{n+1}(e^{-2})^{0+1+2+\ldots+n}=(3\times e^2)^{n+1}(e^{-2})^{\frac{n(n+1)}{2}}=(3\times e^2)^{n+1}e^{-n(n+1)}=(3e^{2-n})^{n+1}$$

ومنه $\ln(v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n)=(n+1)\ln(3e^{2-n})$ أي $\ln v_0+\ln v_1+\ln v_2+\ldots+\ln v_n=(n+1)(\ln 3+2-n)$.

(يمكن إستخدام طرق أخرى)

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

I) (γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$ ، α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ).

1) بقراءة بيانية :

تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على المجال $]0;+\infty[$:

من أجل $x \in]0;\alpha[$ ، (γ) يقع تحت (Δ) .

من أجل $x \in]\alpha;+\infty[$ ، (γ) يقع فوق (Δ) .

2) إشارة $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

3) التحقق أن : $2,2<\alpha<2,3$.

لدينا : $g(2,2) \quad 0,011$ و منه $g(2,2)\times g(2,3)<0$ أي $2,2<\alpha<2,3$.
$(2,3) \quad 0,13$

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$.

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)\right]=+\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x \to 0}\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\infty \\ \lim\limits_{x \to 0}(\ln x-2)=-\infty\end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to +\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)\right]=+\infty$ و لأن : $\lim\limits_{x} 1 \quad \frac{1}{} \quad 1$ ، $\lim(\ln \quad 2)$

2) تبيان أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{\ln x-2+x-1}{x^2}=\frac{-3+x+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) تبيان أن : $f(\alpha)=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$

لدينا : $g(\alpha)=0$ أي $\ln\alpha=-\alpha+3$ و بالتالي : $f(\alpha)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(\ln\alpha-2)=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(-\alpha+1)=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$:

لدينا : $2,2<\alpha<2,3$ يكافئ : $\begin{cases}\frac{1}{2,3}<\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{2,3}\\1,2<\alpha-1<1,3\\(1,2)^2<(\alpha-1)^2<(1,3)^2\end{cases}$ ومنه $\frac{(1,2)^2}{2,3}<\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<\frac{(1,3)^2}{2,2}$

ومنه : $-\frac{(1,3)^2}{2,2}<f(\alpha)<-\frac{(1,2)^2}{2,3}$ أي : $-0,76<f(\alpha)<-0,62$.

4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.

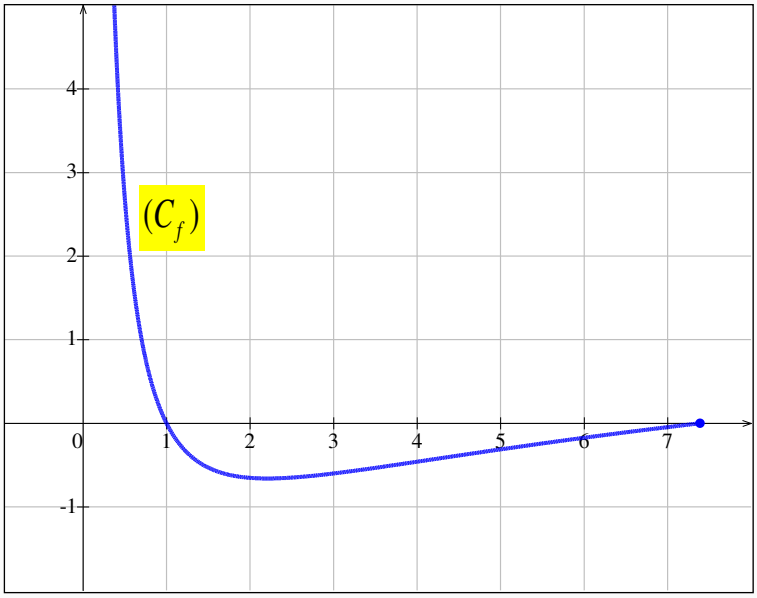
لندرس إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)=\frac{1}{x}(x-1)(-2+\ln x)$ ومنه إشارة $f(x)$ من إشارة $(x-1)(-2+\ln x)$.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه (C_f) فوق حامل محور الفواصل على كل من المجالين $]e^2;+\infty[$ و $]0;1[$ وتحته على المجال $]1;e^2[$ ، ويتقاطعان في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و e^2 .

الرسم :



III) F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تحقق: $F(1)=-3$.

1) تبيان أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ يعني : من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $F'(x)=f(x)$.

$F'(x)=0$ تكافئ $f(x)=0$ تكافئ : $x=1$ أو $x=e^2$ ، ومنه منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و e^2 .

2) تبيان أن $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln x$ على $]0;+\infty[$:

نضع : $u(x)=x\ln x-x$

الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ومن أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $u'(x)=\ln x+\frac{1}{x}\times x-1=\ln x$.

ومنه الدالة u هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln x$ على $]0;+\infty[$.

إستنتاج عبارة الدالة F :

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt=\int_1^x\left(\ln t-2-\frac{\ln t}{t}+\frac{2}{t}\right)dt=\left[t\ln t-t-2t-\frac{1}{2}(\ln t)^2-2\ln t\right]_1^x=(2+x)\ln x-\frac{1}{2}(\ln x)^2-3x$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

حل مقترح التمرين الأول

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(2;4;1)$ ، $B(0;4;-3)$ ، $C(3;1;-3)$ ، $D(1;0;-2)$.

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة:

1) النقط A ، B و C ليست في استقامية . ⟵ صحيح

التبرير:

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-2;0;-4)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-3;-4)$ و $\frac{0}{-3}\neq\frac{-2}{1}$ و بالتالي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا أي أن النقط A ، B و C ليست في استقامية .

2) $2x+2y-z-11=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) . ⟵ صحيح

التبرير:

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة .

$A\in(ABC)$ لأن $2x_A+2y_A-z_A-11=2\times2+2\times4-1-11=0$

$B\in(ABC)$ لأن $2x_B+2y_B-z_B-11=2\times0+2\times4-(-3)-11=0$

$C\in(ABC)$ لأن $2x_C+2y_C-z_C-11=2\times3+2\times1-(-3)-11=0$

3) النقطة $E(3;2;-1)$ هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) . ⟵ خطأ

التبرير:

لدينا : $\overrightarrow{DE}(2;2;1)$ و $\vec{n}(2;2;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC) .

لاحظ أن $\overrightarrow{DE}$ و $\vec{n}$ ليسا مرتبطين خطيا و بالتالي $\overrightarrow{DE}$ ليس ناظميا للمستوي (ABC) .

4) المستقيمان (AB) و (CD) من نفس المستوي. ⟵ خطأ

التبرير:

$D\notin(ABC)$ لأن $2x_D+2y_D-z_D-11\neq0$

5) $t\in\mathbb{R}$ ، $\begin{cases}x=2t-1\\y=t-1\\z=-t-1\end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (CD) . ⟵ صحيح

التبرير:

إحداثيات كلا من النقطتين C و D تحقق التمثيل الوسيطي .

لأن : بتعويض إحداثيات C في التمثيل الوسيطي نجد $t=2$ و بتعويض إحداثيات D في التمثيل الوسيطي نجد $t=1$.

6) يوجد عددان حقيقيان α و β حيث النقطة $I(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5})$ مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$. ⟵ صحيح

التبرير:

لدينا : $\overrightarrow{IA}(\frac{7}{5};0;\frac{14}{5})$ و $\overrightarrow{IB}(-\frac{3}{5};0;-\frac{6}{5})$ ومنه $\overrightarrow{IA}=-\frac{7}{3}\overrightarrow{IB}$ أي $3\overrightarrow{IA}+7\overrightarrow{IB}=\vec{O}$ إذن : $(\alpha;\beta)=(3;7)$.

حل مقترح التمرين الثاني

$z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B=-\overline{z_A}$ ، $z_C=-(z_A+z_B)$.

1) أ- كتابة كلا من العددين المركبين z_B و z_C على الشكل الأسّي:

$$z_B=-\overline{z_A}=e^{i\pi}\times2e^{-i\frac{\pi}{6}}=2e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

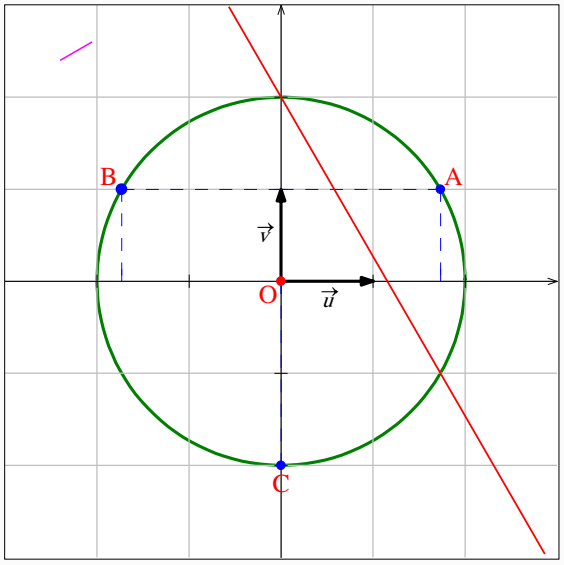
$$z_C=-(z_A+z_B)=-\left(z_A-\overline{z_A}\right)=-2i=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

بـ- استنتاج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

لدينا : $|z_B|=|z_C|=|z_A|=2$ وهذا يعني : $OA=OB=OC=2$ وبالتالي النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة (γ) التي مركزها O و نصف قطرها 2 .

جـ- الرسم :



2) أ- التحقق أن : $\dfrac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$\frac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=\frac{-\sqrt{3}+i-(-2i)}{-\sqrt{3}+i-(\sqrt{3}+i)}=\frac{\sqrt{3}+3i}{-2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

بـ- استنتاج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع :

$$\frac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ يكافئ } \begin{cases}\left|\dfrac{z_B-z_C}{z_B-z_A}\right|=1\\ \arg\left(\dfrac{z_B-z_C}{z_B-z_A}\right)=-\dfrac{\pi}{3}\end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases}AB=BC\\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}\right)=-\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$ ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع

.

- إثبات أن النقطة O مركز ثقل المثلث ABC :

لدينا : $z_A+z_B+z_C=z_A+z_B-(z_A+z_B)=0$ ومنه $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{O}$ وبالتالي O مركز ثقل المثلث ABC .

جـ- تعيين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z|=|z-\sqrt{3}-i|$.

$|z|=|z-\sqrt{3}-i|$ تكافئ $|z|=|z-(\sqrt{3}+i)|$ تكافئ $|z|=|z-z_A|$ تكافئ $OM=AM$

وبالتالي مجموعة النقط (E) هي محور القطعة $[OA]$.

إنشاء المجموعة (E) : أنظر الشكل .

3) أ- تعيين زاوية للدوران r الذي مركزه O ويحول C إلى A .

لدينا : $\begin{cases}r(O)=O\\ r(C)=A\end{cases}$ ومنه $z_A-z_O=e^{i\theta}(z_C-z_O)$ ومنه زاوية للدوران r هي $\theta=\arg\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)$.

ولدينا : $\dfrac{z_A}{z_C}=\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ومنه $\theta=\arg\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$

بـ- إثبات أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$:

لدينا : $r(O)=O$ و $r(A)=B$ لأن : $z_B=e^{i\frac{2\pi}{3}}z_A=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times 2e^{i\frac{\pi}{6}}=2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ومنه صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$ ، كون الدوران يحافظ على المنتصفات و على التعامد.

I) f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) تعيين إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0;+\infty[$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ و $f'(x)=\dfrac{4(x+1)-(4x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{3}{(x+1)^2}$.

لدينا :من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) ذي المعادلة : $y=x$.

لدينا : $f(x)-x=\dfrac{4x+1}{x+1}-x=\dfrac{-x^2+3x+1}{x+1}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-x^2+3x+1$ على المجال $[0;+\infty[$.

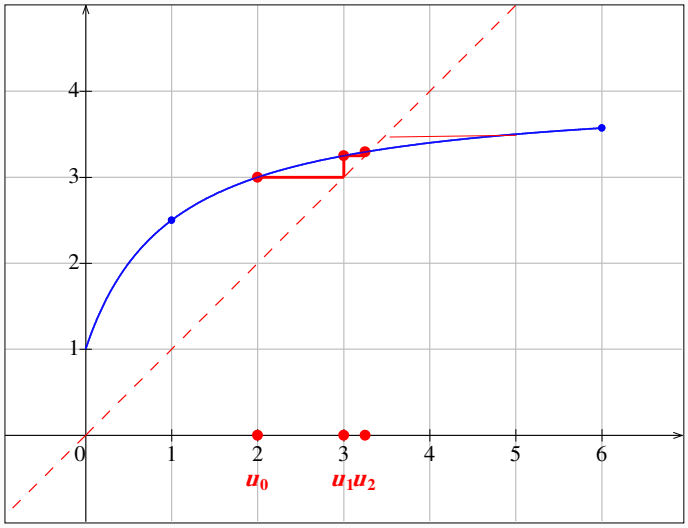
المعادلة $-x^2+3x+1=0$ تقبل في المجال $[0;+\infty[$ حلا α بحيث : $\alpha=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

x	0		α		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	

على المجال $[0;\alpha[$: (C_f) يقع فوق (D) .

على المجال $]\alpha;+\infty[$: (C_f) يقع تحت (D) .

3) الرسم :



II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=5\\v_{n+1}=f(v_n)\end{cases}$

1) أ ـ الرسم : أنظر الشكل .

بـ ـ التخمين : المتتالية (u_n) متزايدة و المتتالية (v_n) متناقصة و كلا منهما تتقارب نحو العدد $\alpha=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

2) أ ـ إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2\le u_n<\alpha$ و $\alpha<v_n\le 5$ حيث : $\alpha=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2\le u_n<\alpha$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $2\le u_n<\alpha$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=2$ و منه $2\le u_0<\alpha$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $2\le u_n<\alpha$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $2\le u_{n+1}<\alpha$.

لدينا حسب الفرض $2 \leq u_n < \alpha$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن $f(2) \leq f(u_n) < f(\alpha)$

أي $2 \leq 3 \leq u_{n+1} < \alpha$ وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $2 \leq u_n < \alpha$.

لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\alpha < v_n \leq 5$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $\alpha < v_n \leq 5$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $v_0 = 5$ ومنه $\alpha < v_0 \leq 5$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $\alpha < v_n \leq 5$ ، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $\alpha < v_{n+1} \leq 5$.

لدينا حسب الفرض $\alpha < v_n \leq 5$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن $f(\alpha) < f(v_n) \leq f(5)$

أي $\alpha < v_{n+1} \leq \frac{7}{2} \leq 5$ وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $\alpha < v_n \leq 5$.

بـ- استنتاج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \in [2;\alpha[$. ومن أجل $x \in [0;\alpha[$: $f(x)-x > 0$ ومنه: $u_{n+1}-u_n > 0$.

وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ولدينا: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n \in]\alpha;5]$. ومن أجل $x \in]\alpha;+\infty[$: $f(x)-x < 0$ ومنه: $v_{n+1}-v_n < 0$.

وبالتالي المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

3) أ- إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}-u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n-u_n)$.

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n،

$$v_{n+1}-u_{n+1} = f(v_n)-f(u_n) = \frac{1+4v_n}{1+v_n} - \frac{1+4u_n}{1+u_n} = \frac{3(v_n-u_n)}{(1+v_n)(1+u_n)}$$

ومن جهة أخرى: $\begin{cases} u_n \geq 2 \\ v_n \geq 2 \end{cases}$ يكافئ $\frac{3}{(1+v_n)(1+u_n)} \leq \frac{1}{3}$ ومنه $v_{n+1}-u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n-u_n)$.

بـ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < v_n-u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}-u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n-u_n)$ وهذا يعني:

$$\begin{cases} v_1-u_1 \leq \frac{1}{3}(v_0-u_0) \\ v_2-u_2 \leq \frac{1}{3}(v_1-u_1) \\ .... \\ .... \\ v_n-u_n \leq \frac{1}{3}(v_{n-1}-u_{n-1}) \end{cases}$$

بالضرب طرف لطرف نجد $(v_1-u_1)(v_2-u_2)...(v_n-u_n) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n (v_0-u_0)(v_1-u_1)...(v_{n-1}-u_{n-1})$

ومنه: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n-u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. (يمكن إستخدام البرهان بالتراجع)

ومن جهة أخرى لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n$ ومنه $v_n-u_n > 0$.

و بالتالي : من أجل كل عدد طبيعي n : $0<v_n-u_n\le\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

جـ- لدينا ، $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ و منه نستنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(v_n-u_n\right)=0$.

النهاية المشتركة للمتتاليتين $\left(u_n\right)$ و $\left(v_n\right)$ هي العدد الحقيقي l الذي يحقق : $f(l)=l$.

إذن : $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\alpha$.

حل مقترح التمرين الرابع

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$.

1) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)=-2-2e^{2x-2}=-2\left(1+2e^{2x-2}\right)$.

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)<0$ و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}g\left(x\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-2)\left(\frac{1-2x}{2x-2}-\frac{e^{2x-2}}{2x-2}\right)=-\infty\end{cases}$$ الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ و

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

التحقق أن : $0,36<\alpha<0,37$.

لدينا : $\begin{cases}g\left(0.36\right)\approx0,002\\ \left(0.37\right)\approx-0,02\end{cases}$ أي : $g\left(0.36\right)\times g\left(0.37\right)<0$ و منه $0,36<\alpha<0,37$.

3) إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g\left(x\right)$	$+$	0	$-$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

1) أ- تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x)=e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1=e^{2x+2}\left(1+2x-e^{-2x-2}\right)=e^{2x+2}\left(1-2(-x)-e^{2(-x)-2}\right)=e^{2x+2}g\left(-x\right)$$

بـ- إشارة $f'\left(x\right)$ من إشارة $g\left(-x\right)$:

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

نستنتج أن الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;-\alpha]$ و متزايدة على $[-\alpha;+\infty[$.

2) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{2x+2}-x+1\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{2x+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^2\times2xe^{2x}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{2x+2}-x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{2x+2}-1+\frac{1}{x}\right)=+\infty$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f\left(x\right)$	$+\infty$ ↘	$f\left(-\alpha\right)$	↗ $+\infty$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{2x+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^{2}\times 2xe^{2x}\right)=0$

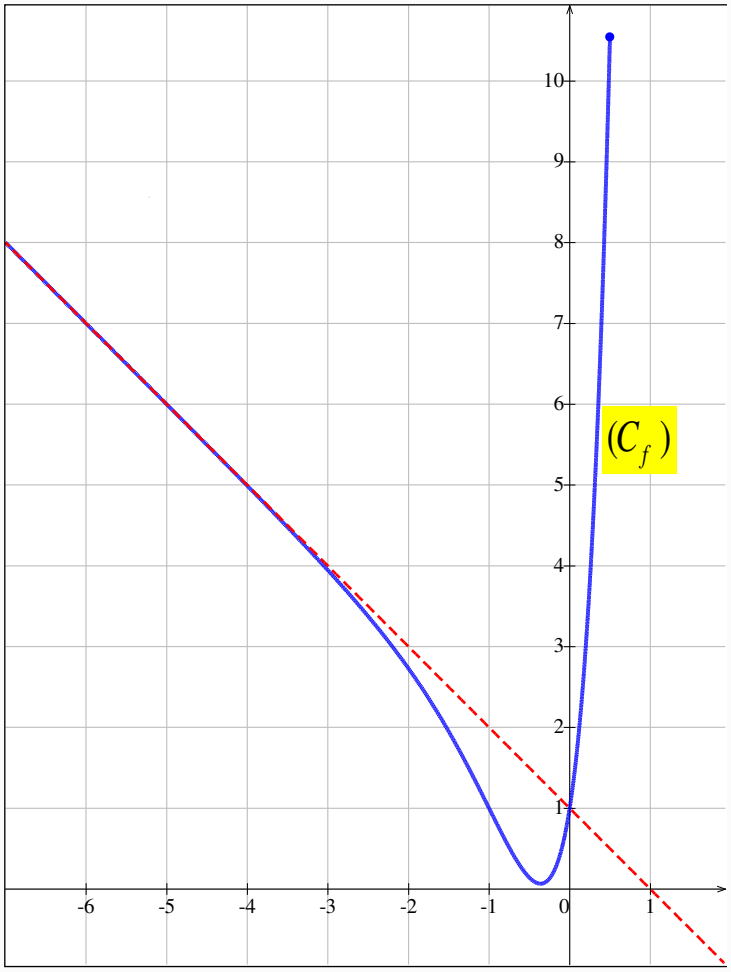
التفسير الهندسي : المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-(-x+1)=xe^{2x+2}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$		$-$ 0 $+$	
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$	(C_f) فوق (Δ)

5) الرسم :



6) أ- التحقق : من أجل كل عدد حقيقي x :

$2f(x)+f'(x)-f''(x)=2xe^{2x+2}-2x+2+e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1-(4x+4)e^{2x+2}=1-2x-3e^{2x+2}$

بـ- إستنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

لدينا : من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

ومنه $f(x)=-\frac{1}{2}f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}-x-\frac{3}{2}e^{2x+2}$.

وبالتالي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ من الشكل : $F(x)=\frac{1}{2}\left[-f(x)+f'(x)+x-x^2-\frac{3}{2}e^{2x+2}\right]+c$

أي : $F(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x+2}-\frac{1}{2}x^2+x-1+c$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الموضوع الأول

التمرين الأول(4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر المستويين (P) و (P') معادلتيهما على الترتيب :

$2x+y-z+1=0$ و $x-2y+z-2=0$.

1) بيّن أن المستويين (P) و (P') متقاطعان .

2) عيّن (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $d(M,(P))=d(M,(P'))$.

حيث $d(M,(P))$ المسافة بين النقطة M و المستوي (P) و $d(M,(P'))$ المسافة بين النقطة M و المستوي (P') .

3) تحقق أن النقطة $A(1;2;0)$ تنتمي إلى المجموعة (Γ) .

4) H و H' المسقطان العموديان للنقطة A على المستويين (P) و (P') على الترتيب .

أ ـ جد تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (AH) و (AH') .

بـ ـ استنتج إحداثيات كل من النقطتين H و H' .

5) عيّن إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[HH']$ ثم أحسب مساحة المثلث AHH' .

التمرين الثاني(5ن)

I f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{2x+8}$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

بـ ـ أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها .

2) عيّن إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) الذي : $y=x$ معادلة له .

3) أرسم (C) و (Δ) .

II المتتالية (u_n) معرّفة بـ : $u_0=0$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) مثل في الشكل السابق على محور الفواصل ، الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء .

2) ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

3) أ ـ برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n<4$

بـ ـ أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

جـ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$.

ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_n\le\frac{1}{2^n}(4-u_0)$.

د ـ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث(4,5ن)

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. من أجل كل نقطة M من المستوي لاحقتها العدد المركب z حيث $(z \neq 1)$ نرفق النقطة M' لاحقتها العدد المركب z' حيث : $z' = \dfrac{z-2}{z-1}$.

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z' = z$.

2) النقطتان A و B لاحقتاهما z_1 و z_2 على الترتيب حيث : $z_1 = 1-i$ ، $z_2 = \overline{z_1}$.

أ ـ أكتب $\dfrac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسّي .

بـ ـ بيّن أن النقطة B صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O ، يطلب تعيين زاوية له .

3) نضع : $z' \neq z$. نعتبر النقطتين C و D لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب .

عيّن (Γ) مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور التراتيب ثم أنشئ (Γ) .

4) h التحاكي الذي مركزه المبدأ O و نسبته 2 .

أ ـ عيّن طبيعة التحويل النقطي $S = h \circ R$ و عناصره المميزة .

بـ ـ أكتب العبارة المركبة للتحويل S .

جـ ـ عيّن ثم أنشئ المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S .

التمرين الرابع(6,5ن)

I g الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

1) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g .

2) أحسب $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثمّ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g(x) > 0$.

II f الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + x - 1$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

بـ ـ شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

3) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1 .

4) بيّن أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث : $y = x - 1$ معادلة له .

بـ ـ أدرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) .

5) أرسم المستقيمين (T) و (Δ) ثم المنحنى (C) .

6) m عدد حقيقي . (Δ_m) المستقيم حيث : $y = mx - m$ معادلة له .

أ ـ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي ، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) .

بـ ـ ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx - m$.

7) أ ـ جد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

بـ ـ أحسب I_n مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = n$ حيث n عدد طبيعي $(n > 1)$.

جـ ـ عيّن أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن : $I_n > 2$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4,5ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقطتين $A(5;-1;-2)$ و $B(3;12;-7)$.

(Δ) المستقيم المعرّف بالتمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases} x=1+3k \\ y=1+2k \\ z=4k \end{cases}$ ، $(k\in\mathbb{R})$

1) أ- عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ') الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(-2;1;1)$ شعاع توجيه له .

ب- بيّن أن المستقيمين (Δ) و (Δ') متعامدان و أن النقطة $C(1;1;0)$ نقطة تقاطعهما .

2) (P) المستوي المعيّن بالمستقيمين (Δ) و (Δ') .

أ- بيّن أن الشعاع $\vec{n}(2;11;-7)$ ناظمي للمستوي (P) ، ثم جد معادلة ديكارتية له .

ب- بيّن أن النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P) .

3) α و β عددان حقيقيان و (P') مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء المعرّفة بـ : $\begin{cases} x=3-\beta \\ y=12+12\alpha+9\beta \\ z=-7-6\alpha-11\beta \end{cases}$.

أ- أثبت أن المجموعة (P') هي مستو ثم تحقق أن $13x-y-2z-41=0$ هي معادلة ديكارتية له .

ب- عيّن إحداثيات D و E نقطتي تقاطع المستوي (P') مع المستقيمين (Δ) و (Δ') على الترتيب .

جـ- أحسب حجم رباعي الوجوه $BCDE$.

التمرين الثاني (4ن)

I) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{5x}{x+2}$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f(x)\geq 0$.

II) المتتالية (u_n) معرّفة بـ : $u_0=1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{5u_n}{u_n+2}$

1) أ- برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\leq u_n\leq 3$

ب- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

2) (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=1-\dfrac{3}{u_n}$.

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{2}{5}$ يطلب تعيين حدّها الأول .

ب- أكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n .

جـ- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=\dfrac{1}{u_0}+\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+....+\dfrac{1}{u_n}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمرين الثالث(4,5ن)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z_C=\overline{z_B}$.

أ- أكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي .

ب- بيّن أنه يوجد تشابه مباشر S مركزه B و يحول النقطة C إلى النقطة A يطلب تعيين عناصره المميزة .

3) أ- عيّن لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ، ثم حدّد بدقة طبيعته .

ب- عيّن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $|z-z_A|=|\overline{z}-z_B|$.

جـ- عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $z=z_B+\sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغيّر على $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن $A\in(\Gamma)$

التمرين الرابع(7ن)

I) لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1+\left(x^2+x-1\right)e^{-x}$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$.

ب- أدرس اتجاه تغيّر الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) أ- بيّن أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $-1.52<\alpha<-1.51$.

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-x+\left(x^2+3x+2\right)e^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=-g(x)$.

جـ- شكّل جدول تغيّرات الدالة f على $\mathbb{R}$. (نأخذ $f(\alpha)\approx 0.38$)

د- عيّن دون حساب : $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا .

2) أ- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

جـ- بيّن أن المنحنى يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثييهما .

د- أرسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2;+\infty[$.

هـ- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة : $(m-x)e^x+\left(x^2+3x+2\right)=0$ على المجال $[-2;+\infty[$

III) h و H الدالتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=x+f(x)$ و $H(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$.

1) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

2) أ- أحسب التكامل التالي : $A(\lambda)=\int_0^{\lambda}h(x)dx$ ، حيث λ عدد حقيقي موجب تماما و فسّر النتيجة هندسيا .

ب- أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$.

حل مقترح التمرين الأول

المستويان (P) و (P') معادلتاهما على الترتيب : $2x+y-z+1=0$ و $x-2y+z-2=0$.

1) تبيان أن المستويين (P) و (P') متقاطعان :

لدينا : $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\vec{n'}(1;-2;1)$ شعاع ناظمي لـ (P') .

لدينا : $\frac{2}{1}\neq\frac{1}{-2}$ ومنه الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ ليسا مرتبطين خطيا و بالتالي المستويان (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم .

2) تعيين (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $d(M,(P))=d(M,(P'))$.

$d(M,(P))=d(M,(P'))$ معناه $\frac{|2x+y-z+1|}{\sqrt{6}}=\frac{|x-2y+z-2|}{\sqrt{6}}$ أي

$|2x+y-z+1|=|x-2y+z-2|$

أي : $\begin{cases}2x+y-z+1=x-2y+z-2\\2x+y-z+1=-(x-2y+z-2)\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x+3y-2z+3=0\\3x-y-1=0\end{cases}$ أو

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي إتحاد مستويين معادلتيهما : $x+3y-2z+3=0$ و $3x-y-1=0$.

3) التحقق أن النقطة $A(1;2;0)$ تنتمي إلى المجموعة (Γ) :

لدينا : $d(A,(P))=\frac{|2x_A+y_A-z_A+1|}{\sqrt{6}}=\frac{5}{\sqrt{6}}$ و $d(A,(P))=\frac{|x_A-2y_A+z_A-2|}{\sqrt{6}}=\frac{5}{\sqrt{6}}$ ومنه $A\in(\Gamma)$.

4) H و H' المسقطان العموديان للنقطة A على المستويين (P) و (P') على الترتيب .

أ- إيجاد تمثيل وسيطي لكل من المستقيمين (AH) و (AH') .

لدينا $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع توجيه لـ (AH) و $A\in(AH)$ ومنه تمثيل وسيطي لـ (AH) من الشكل : $\begin{cases}x=2t+1\\y=t+2\\z=-t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$

و $\vec{n'}(1;-2;1)$ شعاع توجيه لـ (AH') و $A\in(AH')$ ومنه تمثيل وسيطي لـ (AH') من الشكل :

$$\begin{cases}x=t'+1\\y=-2t'+2\\z=t'\end{cases}\ (t'\in\mathbb{R})$$.

بـ- استنتاج إحداثيات كل من النقطتين H و H' :

النقطة H هي نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (AH) .

لدينا $\begin{cases}x=2t+1\\y=t+2\\z=-t\\2x+y-z+1=0\end{cases}$ يكافئ $2(2t+1)+(t+2)-(-t)+1=0$ أي $t=-\frac{5}{6}$.

وبتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (AH) نجد $(-\frac{2}{3};\frac{7}{6};\frac{5}{6})$ وهي إحداثيات النقطة H .

النقطة H' هي نقطة تقاطع المستوي (P') والمستقيم (AH') .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لدينا $\begin{cases} x = t'+1 \\ y = -2t'+2 \\ z = t' \\ x-2y+z-2=0 \end{cases}$ يكافئ $t'+1-2(-2t'+2)+t'-2=0$ أي $t'=\frac{5}{6}$.

و بتعويض قيمة t' في التمثيل الوسيطي لـ (AH') نجد $(\frac{11}{6};\frac{1}{3};\frac{5}{6})$ و هي إحداثيات النقطة H' .

جـ- تعيين إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[HH']$:

لدينا : $I\left(\frac{x_H+x_{H'}}{2};\frac{y_H+y_{H'}}{2};\frac{z_H+z_{H'}}{2}\right)$ ومنه $I\left(\frac{7}{12};\frac{3}{4};\frac{5}{6}\right)$

حساب مساحة المثلث AHH' :

لدينا : $AH=AH'$ وبالتالي المثلث AHH' متساوي الساقين ومنه $S_{AHH'}=\frac{1}{2}HH'\times AI$.

ولدينا: $\overrightarrow{HH'}\left(\frac{15}{6};-\frac{5}{6};0\right)$ ، $HH'=\frac{5\sqrt{10}}{6}$ أي $\overrightarrow{AI}\left(-\frac{5}{12};-\frac{5}{4};\frac{5}{6}\right)$ و $AI=\frac{5\sqrt{14}}{12}$ أي

ومنه $S_{AHH'}=\frac{25}{72}\sqrt{35}\,(u.a)$.

حل مقترح التمرين الثاني

I) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{2x+8}$.

1) أ- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+8}=+\infty$.

بـ- دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ و $f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+8}}=\frac{1}{\sqrt{2x+8}}$

و لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\sqrt{8}$	$+\infty$

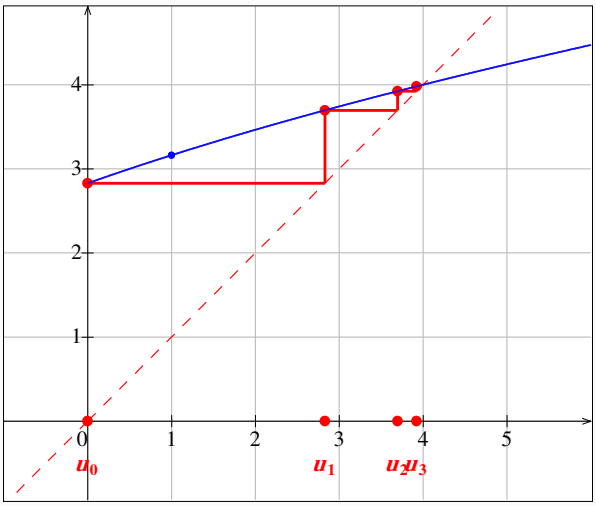
2) تعيين إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) الذي : $y=x$ معادلة له.

نحل في المجال $[0;+\infty[$ المعادلة : $f(x)=x$.

$f(x)=x$ تكافئ $\sqrt{2x+8}=x$ تكافئ $\begin{cases} x\geq 0 \\ 2x+8=x^2 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x\geq 0 \\ x^2-2x-8=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x\geq 0 \\ (x+2)(x-8)=0 \end{cases}$

ومنه $x=4$. إذن نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) هي : $A(4;4)$.

3) الرسم :



II) المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0=0$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) الرسم: أنظر الشكل.

2) التخمين: المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة نحو العدد 4 .

3) أ- البرهان بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n<4$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<4$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0=0$ ومنه $0\le u_0<4$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $0\le u_n<4$ ، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0\le u_{n+1}<4$.

لدينا حسب الفرض $0\le u_n<4$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما فإن $f(0)\le f(u_n)<f(4)$

أي $0\le 2\sqrt{2}\le u_{n+1}<4$ وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_n<4$.

ب- دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n+8}-u_n=\frac{\left(\sqrt{2u_n+8}-u_n\right)\left(\sqrt{2u_n+8}+u_n\right)}{\sqrt{2u_n+8}+u_n}=\frac{2u_n+8-u_n^{\,2}}{\sqrt{2u_n+8}+u_n}=\frac{(4-u_n)(2+u_n)}{\sqrt{2u_n+8}+u_n}$$

وبما أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $4-u_n>0$ و $2+u_n>0$ فإن $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة .

جـ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$.

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n :

$$4-u_{n+1}=4-\sqrt{2u_n+8}==\frac{\left(4-\sqrt{2u_n+8}\right)\left(4+\sqrt{2u_n+8}\right)}{4+\sqrt{2u_n+8}}=\frac{8-2u_n}{4+\sqrt{2u_n+8}}=\frac{2(4-u_n)}{4+\sqrt{2u_n+8}}$$.

ومن جهة أخرى: $0\le u_n<4$ يكافئ $\frac{1}{4+\sqrt{2u_n+8}}\le\frac{1}{4}$ ومنه $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$.

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $4-u_n\le\frac{1}{2^n}(4-u_0)$.

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ، $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$ وهذا يعني:

$$\begin{cases} 4-u_1 \le \frac{1}{2}(4-u_0) \\ 4-u_2 \le \frac{1}{2}(4-u_1) \\ 4-u_3 \le \frac{1}{2}(4-u_2) \\ .... \\ .... \\ 4-u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4-u_n) \end{cases}$$

بالضرب طرف لطرف نجد $(4-u_1)(4-u_2)...(4-u_n) \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (4-u_0)(4-u_1)...(4-u_{n-1})$

ومنه : من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_n \le \frac{1}{2^n}(4-u_0)$. (يمكن إستخدام البرهان بالتراجع)

د ـ استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $4-u_n \le \frac{1}{2^n}(4-u_0)$ ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}(4-u_n)=0$

أي : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

حل مقترح التمرين الثالث

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z' = z$:

$z' = z$ تكافئ $\frac{z-2}{z-1} = z$ تكافئ $(z-1)z = z-2$ تكافئ $z^2 - 2z + 2$ ، حيث $(z \neq 1)$

لنحل $\mathbb{C}$ في المعادلة $z^2 - 2z + 2$:

لدينا : $\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times2 = -4 = 4i^2 = (2i)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_1 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$ و $z_2 = \frac{2+2i}{2} = 1+i$.

2) لدينا : $z_1 = 1-i$ ، $z_2 = \overline{z_1}$.

أ ـ كتابة $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسي :

لدينا : $\frac{z_2}{z_1} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$ ومنه $\frac{z_2}{z_1} = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

ب ـ تبيان أن النقطة B صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O ، مع تعيين زاوية له .

لدينا : $\frac{z_2}{z_1} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ يكافئ $z_2 - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_1 - z_O)$ ومنه النقطة B صورة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O وزاوية له $\frac{\pi}{2}$.

3) نضع : $z' \neq z$. نعتبر النقطتين C و D لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب .

تعيين (Γ) مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور التراتيب :

لدينا : $(z' \neq 0)$ $\arg(z') = \arg\left(\frac{z-2}{z-1}\right) = \arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_D}\right)$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

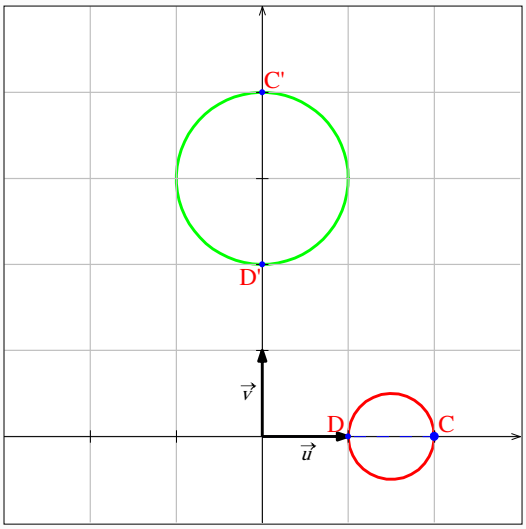
M' تنتمي إلى حامل محور التراتيب معناه : $\arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$ أي : $\arg\left(\frac{z - z_C}{z - z_D}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$

أي : $\left(\overrightarrow{DM}; \overrightarrow{CM}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$

(إذا كان $z' = 0$ فإن $z = 2$ و هذا يعني أن M منطبقة على C)

إذن المجموعة (Γ) هي الدائرة التي قطرها $[CD]$ باستثناء النقطة D .

إنشاء (Γ) :



4) أ- تعيين طبيعة التحويل النقطي $S = h \circ R$ و عناصره المميزة :

لدينا : h التحاكي الذي مركزه المبدأ O و نسبته 2 و R الدوران الذي مركزه المبدأ O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و منه S هو التشابه الذي مركزه O و نسبته 2 و زاوية له $\frac{\pi}{2}$.

بـ- كتابة العبارة المركبة للتحويل S :

$z' - z_O = 2e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_O)$ و منه $z' = 2iz$.

جـ- تعيين المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S :

المجموعة (Γ') هي الدائرة التي قطرها $[C'D']$ باستثناء النقطة D' ، بحيث : $S(D) = D'$ و $S(C) = C'$.

$z_{C'} = 2iz_C = 2 \times 2i = 4i$ ، $z_{D'} = 2iz_D = 2i$.

الإنشاء : أنظر الشكل .

حل مقترح التمرين الرابع

I) g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

1) دراسة إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ ، $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$.

إشارة $g'(x)$ من إشارة $2x^2 - 1$:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

الدالة g متناقصة على المجال $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ و متزايدة على المجال $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$.

2) $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$.

الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]0;+\infty[$ هي $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و بالتالي من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x-1$.

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{\ln x}{x}+x-1\right)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+x-1\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

2) أ ـ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+1=\frac{x^2+1-\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$.

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$ ، إذن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

بـ ـ جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1 :

لدينا : $(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(T): y=2x-2$.

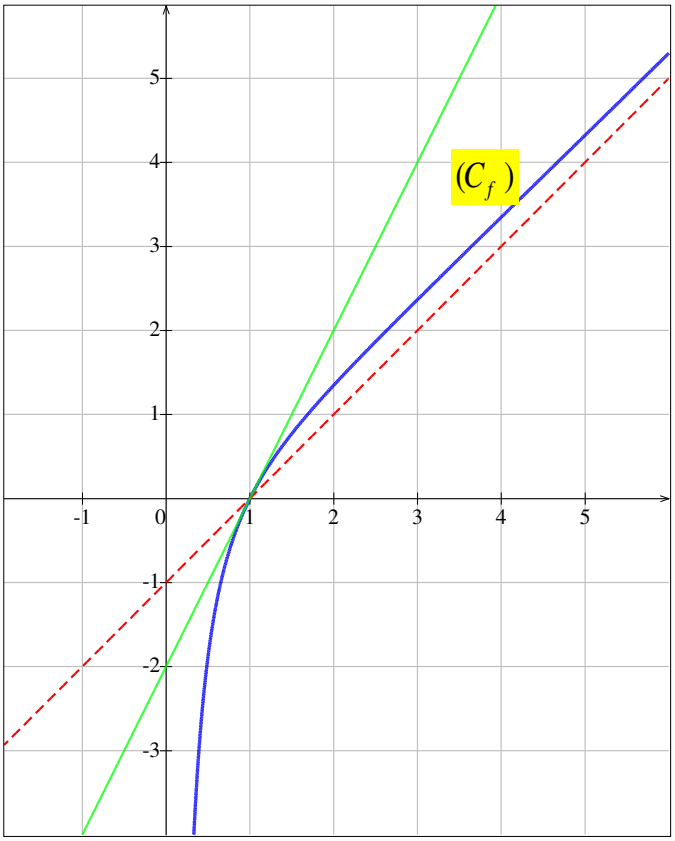
4) أ ـ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و منه المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائل (Δ) حيث : $y=x-1$ معادلة له .

بـ ـ دراسة الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) :

لدينا $f(x)-y=\frac{\ln x}{x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln x$:

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	‖ (C_f) تحت (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;0)$		(C_f) فوق (Δ)

5) الرسم :



6) m عدد حقيقي . (Δ_m) المستقيم حيث : $y = mx - m$ معادلة له .

أ ـ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي m ، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) .

لدينا $y_A = mx_A - m$ أي $0 = m - m$ و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي m ، $A \in (\Delta_m)$

بـ ـ المناقشة البيانية :

لدينا : (Δ_m) معامل توجيهه m و يشمل النقطة $A(1;0)$.

إذا كان $m \in]-\infty;1]$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا .

إذا كان $m \in]1;2[$ فإن المعادلة تقبل حلين .

إذا كان $m = 2$ فإن المعادلة تقبل حل (مضاعف) و هو 1.

إذا كان $m \in]2;+\infty[$ فإن المعادلة تقبل حلين .

7) أ ـ إيجاد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

دالة أصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ على $]0;+\infty[$ من الشكل : $x \mapsto \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$. (لاحظ أن $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ من الشكل $u' \times u$

بـ ـ حساب I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = n$ حيث n عدد طبيعي $(n > 1)$.

$$I_n = \int_1^n [f(x) - (x-1)]dx = \int_1^n \frac{\ln x}{x}dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^n = \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

جـ ـ تعيين أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن : $I_n > 2$.

$I_n > 2$ معناه $(\ln n)^2 > 4$ أي $\ln n > 2$ أو $\ln n < -2$ (مرفوض) و منه $n > e^2$ و عليه : أصغر قيمة لـ n_0 هي $n_0 = 8$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

حل مقترح التمرين الأول

A و B نقطتان من الفضاء بحيث: $A(5;-1;-2)$ و $B(3;12;-7)$.

(Δ) المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x = 1+3k \\ y = 1+2k \\ z = 4k \end{cases}$ ، $(k \in \mathbb{R})$

1) أ- تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ') الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(-2;1;1)$ شعاع توجيه له من الشكل:

$$\begin{cases} x = -2t+5 \\ y = t-1 \\ z = t-2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ب- تبيان أن المستقيمين (Δ) و (Δ') متعامدان:

لدينا: $\vec{v}(3;2;4)$ شعاع توجيه لـ (Δ) و $\vec{u}(-2;1;1)$ شعاع توجيه لـ (Δ') و $\vec{u}.\vec{v} = -2\times3+2+4=0$ ومنه $(\Delta)\perp(\Delta')$.

تبيان أن $C(1;1;0)$ هي نقطة تقاطع (Δ) و (Δ'):

يكفي إثبات أن $C \in (\Delta)$ و $C \in (\Delta')$.

$C \in (\Delta)$ لأن: $\begin{cases} 1 = 1+3k \\ 1 = 1+2k \\ 0 = 4k \end{cases}$ أي $k=0$ (قيمة ثابتة ووحيدة لـ k).

$C \in (\Delta')$ لأن: $\begin{cases} 1 = -2t+5 \\ 1 = t-1 \\ 0 = t-2 \end{cases}$ أي $t=2$ (قيمة ثابتة ووحيدة لـ t).

2) (P) المستوي المعيّن بالمستقيمين (Δ) و (Δ').

أ- تبيان أن الشعاع $\vec{n}(2;11;-7)$ ناظمي للمستوي (P):

يكفي إثبات أن $\vec{n}\perp\vec{u}$ و $\vec{n}\perp\vec{v}$.

لدينا: $\vec{n}.\vec{u} = 2\times(-2)+11-7=0$ ومنه $\vec{n}\perp\vec{u}$، و $\vec{n}.\vec{v} = 2\times3+11\times2-7\times4=0$ ومنه $\vec{n}\perp\vec{v}$.

- إيجاد معادلة ديكارتية للمستوي (P).

(P) يشمل النقطة C و $\vec{n}(2;11;-7)$ شعاع ناظمي له ومنه لـ (P) معادلة من الشكل: $2x+11y-7z+13=0$.

ب- تبيان أن النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P):

يكفي إثبات أن $\vec{n}$ و $\overrightarrow{CB}$ مرتبطان خطيا.

لدينا: $\overrightarrow{CB}(2;11;-7)$ ومنه $\overrightarrow{CB}=\vec{n}$.

(يمكن كذلك إثبات أن $CB = d(B;(P))$)

3) α و β عددان حقيقيان و (P') مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء المعرفة بـ: $\begin{cases} x = 3-\beta \\ y = 12+12\alpha+9\beta \\ z = -7-6\alpha-11\beta \end{cases}$.

أ- إثبات أن المجموعة (P') هي مستو:

المجموعة (P') معرفة بالثلاثية $(B,\vec{w};\vec{k})$ بحيث $B(3;12;-7)$، $\vec{w}(0;12;-6)$ و $\vec{k}(-1;9;-11)$ ولكون $\vec{w}$ و $\vec{k}$ غير

مرتبطين خطيا فإن (P') هي مستو.

التحقق أن $13x-y-2z-41=0$ هي معادلة ديكارتية لـ (P') :

يكفي إثبات أن $\vec{n'} \perp \vec{w}$ و $\vec{n'} \perp \vec{k}$ بحيث $\vec{n'}(13;-1;-2)$ شعاع ناظمي لـ (P').

لدينا : $\vec{n'}.\vec{w} = -1\times 12+(-6)\times(-2)=0$ ومنه $\vec{n'} \perp \vec{w}$ ، و $\vec{n'}.\vec{k} = 13\times(-1)-1\times 9-2\times(-11)=0$ ومنه $\vec{n'} \perp \vec{k}$.

بـ- تعيين إحداثيات D و E نقطتي تقاطع المستوي (P') مع المستقيمين (Δ) و (Δ') على الترتيب :

لدينا $\begin{cases} x=1+3k \\ y=1+2k \\ z=4k \\ 13x-y-2z-41=0 \end{cases}$ يكافئ $13(1+3k)-(1+2k)-2(4k)-41=0$ أي $k=1$.

و بتعويض قيمة k في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد $(4;3;4)$ و هي إحداثيات النقطة D .

لدينا $\begin{cases} x=-2t+5 \\ y=t-1 \\ z=t-2 \\ 13x-y-2z-41=0 \end{cases}$ يكافئ $13(-2t+5)-(t-1)-2(t-2)-41=0$ أي $t=1$.

و بتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (Δ') نجد $(3;0;-1)$ و هي إحداثيات النقطة E .

جـ- حساب حجم رباعي الوجوه $BCDE$:

المثلث CDE قائم في C ومنه $S_{CDE}=\frac{1}{2}\times CD\times CE$ إذن $V_{BCDE}=\frac{1}{3}S_{CDE}\times CB=\frac{1}{6}\times CB\times CD\times CE$.

لدينا : $\overrightarrow{CB}(2;11;-7)$ ومنه $CB=\sqrt{174}$ ، و $\overrightarrow{CD}(3;2;4)$ ومنه $CD=\sqrt{29}$ ، و $\overrightarrow{CE}(2;-1;-1)$ ومنه $CD=\sqrt{6}$.

إذن : $V_{BCDE}=\frac{1}{6}\times CB\times CD\times CE=29$

حل مقترح التمرين الثاني

I) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{5x}{x+2}$.

1) أ- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x}{x+2}\right)=5$.

بـ- دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ و $f'(x)=\frac{5(x+2)-5x}{(x+2)^2}=\frac{10}{(x+2)^2}$

و لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0	5

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f(x)\geq 0$.

من جدول التغيّرات : من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$: $0\leq f(x)\leq 5$ أي : $f(x)\geq 0$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

II) المتتالية (u_n) معرّفة بـ: $u_0=1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{5u_n}{u_n+2}$

1) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n\le 3$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le 3$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0=1$ ومنه $1\le u_0\le 3$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $1\le u_n\le 3$ ، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $1\le u_{n+1}\le 3$.

لدينا حسب الفرض $1\le u_n\le 3$ وبما أن الدالة متزايدة تماما فإن $f(1)\le f(u_n)\le f(3)$ أي $1\le\dfrac{5}{3}\le u_{n+1}\le 3$

وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le 3$.

بـ- دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5u_n}{u_n+2}-u_n=\frac{5u_n-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{-{u_n}^2+3u_n}{u_n+2}=\frac{u_n(3-u_n)}{u_n+2}$$

وبما أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $3-u_n\ge 0$ و $2+u_n>0$ فإن $u_{n+1}-u_n\ge 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة

المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 ، إذن فهي متقاربة.

2) (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=1-\dfrac{3}{u_n}$.

أ- تبيان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{2}{5}$:

لدينا: من من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1}=1-\frac{3}{u_{n+1}}=1-\frac{3}{\dfrac{5u_n}{u_n+2}}=1-\frac{3(u_n+2)}{5u_n}=\frac{5u_n-3u_n-6}{5u_n}=\frac{2u_n-6}{5u_n}=\frac{2(u_n-3)}{5u_n}=\frac{2}{5}\left(1-\frac{3}{u_n}\right)=\frac{2}{5}v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\dfrac{2}{5}$ وحدها الأول $v_0=1-\dfrac{3}{u_0}=-2$.

بـ- كتابة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=v_0\times q^n$ ومنه $v_n=-2\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

كتابة u_n بدلالة n :

لدينا: من من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=1-\dfrac{3}{u_n}$ ومنه $\dfrac{3}{u_n}=1-v_n$ أي $u_n=\dfrac{3}{1-v_n}$ إذن: $u_n=\dfrac{3}{1+2\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$.

جـ- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{1+2\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}\right)=3$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=0$.

3) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=\dfrac{1}{u_0}+\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+....+\dfrac{1}{u_n}$.

لدينا: من من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=1-\dfrac{3}{u_n}$ ومنه $\dfrac{3}{u_n}=1-v_n$ أي: $\dfrac{1}{u_n}=\dfrac{1-v_n}{3}=\dfrac{1}{3}(1-v_n)$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

إذن : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+....+\frac{1}{u_n}=\frac{1}{3}\left[(1+1+1....+1)-(v_0+v_1+....+v_n)\right]=\frac{1}{3}\left[(n+1)-\left(v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)\right]$

أي : $S_n=\frac{1}{3}\left[(n+1)+\frac{10}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)\right]$.

حل مقترح التمرين الثالث

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=0$ ..... (1)

$\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=0$ تكافئ : $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ أو $z^2+\sqrt{3}z+1=0$.

لنحل $\mathbb{C}$ في المعادلة $z^2+\sqrt{3}z+1=0$:

لدينا : $\Delta=\left(\sqrt{3}\right)^2-4\times1\times1=-1=i^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_1=\frac{-\sqrt{3}-i}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ و $z_2=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي : $S=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i;-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right\}$.

2) $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z_C=\overline{z_B}$.

أ- كتابة z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي :

لدينا : $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ومنه : $|z_A|=1$.

وبفرض θ_A عمدة للعدد المركب z_A ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_A=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_A=\frac{1}{2}\end{cases}$ ، ومنه $\arg(z_A)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_A=e^{i\frac{\pi}{6}}$.

لدينا : $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ومنه : $|z_B|=1$.

وبفرض θ_B عمدة للعدد المركب z_B ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_B=\frac{1}{2}\end{cases}$ ، ومنه $\arg(z_B)=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_B=e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

لدينا : $z_C=\overline{z_B}$ ومنه : $z_C=e^{-i\frac{5\pi}{6}}=e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

ب- تبيان أنه يوجد تشابه مباشر S مركزه B و يحول النقطة C إلى النقطة A مع تعيين عناصره المميزة :

لدينا : $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}=\frac{\sqrt{3}}{-i}=i\sqrt{3}$ أي $z_A-z_B=i\sqrt{3}(z_C-z_B)$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ومنه يوجد تشابه مباشر S مركزه B و يحول النقطة C إلى النقطة A نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته له $\theta = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$.

3) أ- تعيين لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع :

$ABCD$ متوازي أضلاع معناه : $z_D - z_C = z_A - z_B$ ومنه $z_D = z_A - z_B + z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

طبيعة الرباعي $ABCD$:

لدينا : $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i\sqrt{3}$ يعني : $\begin{cases} \left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = \sqrt{3} \\ \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} BA \neq BC \\ \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ وبالتالي $ABCD$ مستطيل .

بـ- تعيين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $|z - z_A| = |\overline{z} - z_B|$.

$|z - z_A| = |\overline{z} - z_B|$ تكافئ $|z - z_A| = |z - \overline{z_B}|$ تكافئ $|z - z_A| = |z - z_C|$ تكافئ $AM = CM$.

وبالتالي مجموعة النقط (E) هي محور القطعة $[AC]$.

جـ- تعيين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $z = z_B + \sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغير على $\mathbb{R}$:

$z = z_B + \sqrt{3}e^{i\theta}$ تكافئ $z - z_B = \sqrt{3}e^{i\theta}$ وهذا يعني : $|z - z_B| = \left|\sqrt{3}e^{i\theta}\right|$ أي $BM = \sqrt{3}$.

وبالتالي مجموعة النقط (Γ) هي الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

التحقق أن $A \in (\Gamma)$:

لدينا : $|z_A - z_B| = \sqrt{3}$ أي $AB = \sqrt{3}$ وبالتالي $A \in (\Gamma)$.

حل مقترح التمرين الرابع

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$.

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left[1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}\right] = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}\right] = 1$.

2) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x :

$g'(x) = (2x + 1)e^{-x} - (x^2 + x - 1)e^{-x} = (-x^2 + x + 2)e^{-x} = (2 - x)(x + 1)e^{-x}$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2 - x)(x + 1)$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الدالة g متزايدة على المجال $[-1;2]$ ومتناقصة على كل من المجالين $[2;+\infty[$ و $]-\infty;-1]$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$1 - e$	↗	$1 + 5e^{-2}$	↘	1

3) أ ـ تبيان أن للمعادلة $g(x)=0$ حلين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $-1.52<\alpha<-1.51$.

لدينا : $g(0)=1+(0^2+0-1)e^0=1-1=0$

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1]$ و $]-1,52;-1,51[\subset]-\infty;-1]$ و $\begin{cases} g(-1,52)\approx 0,041 \\ (-1,51)\approx -0,040 \end{cases}$

أي $g(-1,51)\times g(-1,52)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;-1]$ حلا وحيدا α حيث : $-1.52<\alpha<-1.51$.

بـ ـ إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$.

1) أ ـ حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x+(x^2+3x+2)e^{-x}\right]=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x+(x^2+3x+2)e^{-x}\right]=-\infty$

بـ ـ الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$f'(x)=-1+(2x+3)e^{-x}-(x^2+3x+2)e^{-x}=-1-(x^2+x-1)e^{-x}=-g(x)$.

جـ ـ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	2	↘	$-\infty$

د ـ $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=f'(\alpha)=-g(\alpha)=0$.

التفسير الهندسي : المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة α معامل توجيهه معدوم .

(يوازي حامل محور الفواصل)

2) أ ـ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3x+2)e^{-x}=0$ و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ ـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-(-x)=(x^2+3x+2)e^{-x}=(x+1)(x+2)e^{-x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $(x+1)(x+2)$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	(Δ) فوق (C_f)		(Δ) يقطع (C_f) في النقطة $B(-2;2)$	(Δ) تحت (C_f)		(Δ) يقطع (C_f) في النقطة $A(-1;1)$	(Δ) فوق (C_f)

جـ ـ تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف :

لدينا : الدالة f' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x)=-g'(x)=(x-2)(x+1)e^{-x}$.

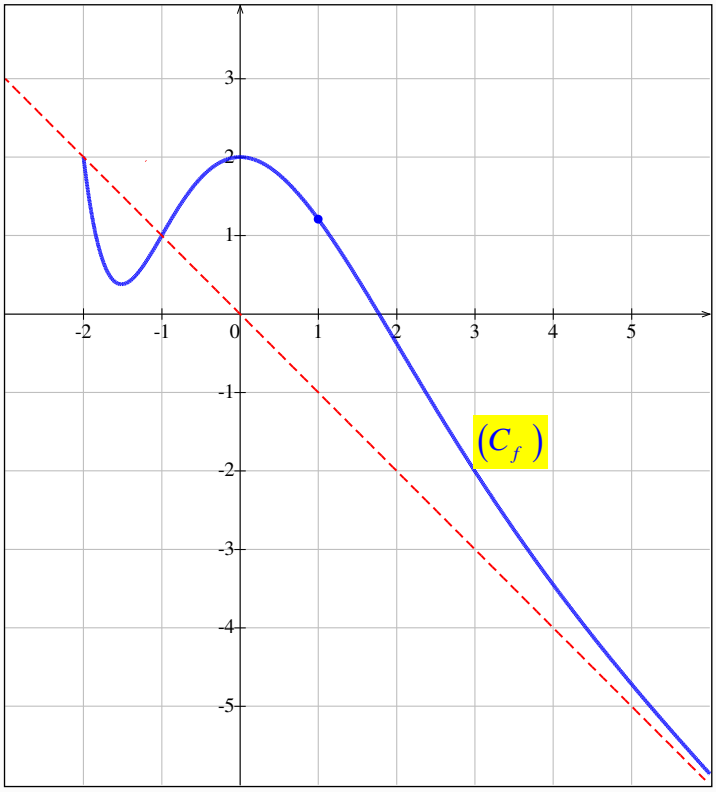
إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف هما : $A(-1;1)$ و $C\left(2;-2+12e^{-2}\right)$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

د ـ الرسم :



هـ ـ المناقشة البيانية :

المعادلة $(m-x)e^{x}+(x^{2}+3x+2)=0$ تكافئ $f(x)=-m$.

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=-m$.

لما $m\in\left]-f(\alpha);+\infty\right[$ يكون $-m\in\left]-\infty;f(\alpha)\right[$ و المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .

لما $m=-f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين أحدهما موجب و الآخر سالب .

لما $m\in\left]-2;-f(\alpha)\right[$ يكون $-m\in\left]f(\alpha);2\right[$ و المعادلة تقبل ثلاثة حلول ، إثنان سالبان و الآخر موجب .

لما $m=-2$ المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب و الآخر معدوم .

III) h و H الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=x+f(x)=(x^{2}+2x+3)e^{-x}$ و $H(x)=(ax^{2}+bx+c)e^{-x}$.

1) تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$:

H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ يعني : من أجل كل عدد حقيقي x ، $H'(x)=h(x)$.

الدالة H قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$H'(x)=(2ax+b)e^{-x}-(ax^{2}+bx+c)e^{-x}=(-ax^{2}+(2a-b)x+b-c)e^{-x}$$

و منه بالمطابقة نجد : $a=-1$ ، $b=-5$ و $c=-7$ أي $H(x)=(-x^{2}-5x-7)e^{-x}$.

2) أ ـ حساب التكامل : $A(\lambda)=\int_{0}^{\lambda}h(x)dx$ ، حيث $\lambda\in\mathbb{R}_{+}^{*}$.

$$A(\lambda)=\int_{0}^{\lambda}h(x)dx=\left[H(x)\right]_{0}^{\lambda}=(-\lambda^{2}-5\lambda-7)e^{-\lambda}+7$$

التفسير الهندسي :

$A(\lambda)$ يمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=\lambda$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}_{+}^{*}$.

بـ ـ $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[(-\lambda^{2}-5\lambda-7)e^{-\lambda}+7\right]=7$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن)

1) نضع من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=z^3-24\sqrt{3}$

أ- تحقق أن: $P\left(2\sqrt{3}\right)=0$.

ب- جد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=\left(z-2\sqrt{3}\right)\left(z^2+az+b\right)$.

جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z)=0$.

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A ، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب :

$$z_A=-\sqrt{3}+3i \quad ، \quad z_B=-\sqrt{3}-3i \quad \text{و} \quad z_C=2\sqrt{3}$$

أ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

ب- بيّن أنه يوجد دوران R مركزه A و يحول النقطة B إلى النقطة C، يطلب تعيين زاويته.

جـ- استنتج طبيعة المثلث ABC.

د- عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$، ثم حدّد بدقة طبيعة الرباعي $ABDC$.

3) عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z بحيث : $\arg\left(\dfrac{z}{\overline{z}}\right)=2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

التمرين الثاني (4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;0;2)$ و شعاع توجيه له $\vec{u}(2;1;-1)$ و ليكن (Δ') المستقيم المعرّف بالتمثيل الوسيطي التالي : $(\lambda\in\mathbb{R})$ ،

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=4+\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$$

1) أ- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ).

ب- بيّن أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي.

2) أ- بيّن أن النقطة $B(-1;3;1)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ').

ب- تحقق أن المستقيم (AB) عمودي على كل من المستقيمين (Δ) و (Δ').

جـ- استنتج المسافة بين المستقيمين (Δ) و (Δ').

3) لتكن N نقطة إحداثياتها $(-2+t;2+t;t)$ حيث $(t\in\mathbb{R})$ و لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(t)=AN^2$.

أ- بيّن أن النقطة N تنتمي إلى المستقيم (Δ')، ثم أكتب عبارة $h(t)$ بدلالة t.

ب- استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AN أصغر ما يمكن. ثم قارن بين القيمة الصغرى للدالة h و المسافة AB.

التمرين الثالث (5ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[0;4]$ بـ : $f(x)=\dfrac{13x}{9x+13}$.

1) أ- بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I.

بـ- بيّن أنه من أجل كل من المجال I ، $f(x)$ ينتمي الى المجال I .

2) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 4$

بـ- أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

3) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \neq 0$

4) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 2 + \dfrac{13}{u_n}$

أ- برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .

بـ- أكتب v_n بدلالة n .

جـ- إستنتج أن : $u_n = \dfrac{52}{36n+13}$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين الرابع(7ن)

I) g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$. (العدد e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) أدرس تغيّرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث $-0,34 < \alpha < -0,33$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x على المجال $]-1;+\infty[$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{e}{x+1} + \dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- بيّن أن $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$ و أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، فسّر النتيجتين هندسيا .

بـ- بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{(x+1)^3}$

جـ- أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

د- أرسم المنحنى (C_f) .(نقبل أن : $f(\alpha) = 3,16$)

2) أ- بيّن أن الدالة $x \mapsto \dfrac{-1}{x+1}\left[1 + \ln(x+1)\right]$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1;+\infty[$.

بـ- أحسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما :

$x = 0$ و $x = 1$.

3) نعتبر الدالة العددية k المعرفة على $]-1;1[$ بـ : $k(x) = f(-|x|)$ ، (C_k) تمثيلها لبياني في المعلم السابق.

أ- بيّن أن الدالة k زوجية .

بـ- بيّن كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم أرسمه . (دون دراسة تغيرات الدالة k)

جـ- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $k(x) = m$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الموضوع الثاني

التمرين الأول (5ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقط $A(2;1;-3)$ ، $B(0;-1;2)$ و $C(-3;-1;-1)$.

1) أ- بيّن أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا .

ب- بيّن أن المعادلة : $2x-7y-2z-3=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A و يعامد المستقيم (BC) .

3) أ- جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) تقاطع المستويين (ABC) و (P) .

ب- بيّن أن المستقيم (D) عمود في المثلث ABC .

4) ليكن (Δ) المتوسط المتعلق بالضلع $[AC]$ في المثلث ABC.

أ- بيّن أن الجملة $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k \\ y=k \\ z=-2-4k \end{cases}$ ، $(k\in\mathbb{R})$ تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

ب- بيّن أن المستقيمين (Δ) و (D) يتقاطعان في نقطة G يطلب تعيين إحداثياتها .

جـ- بيّن أن المثلث ABC متساوي الساقين .

د- ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للمثلث ABC ؟

5) عيّن طبيعة و عناصر المجموعة (E) للنقط M من الفضاء و التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=3$.

التمرين الثاني (4,5ن)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $(\boldsymbol{E})$ ..... $2\overline{z}^{3}+3\overline{z}^{2}-3\overline{z}+5=0$

يشير الرمز $\overline{z}$ إلى مرافق العدد المركب z .

1) أ- أثبت أن المعادلة $(\boldsymbol{E})$ تكافئ المعادلة : $\left(2\overline{z}+5\right)\left(\overline{z}^{2}-\overline{z}+1\right)=0$.

ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(\boldsymbol{E})$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب :

$$z_A=\frac{1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ، \quad z_B=\overline{z_A} \quad ، \quad z_C=-1 \quad ، \quad z_D=-\frac{5}{2}$$

أ- أكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي .

ب- أنشئ النقط A ، B ، C و D .

جـ- أثبت أن : $z_B-z_C=z_B\left(z_A-z_C\right)$.

د- إستنتج طبيعة المثلث ABC .

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C و نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و لتكن F صورة A بالتحويل S .

أنشئ النقطة F ثم حدّد طبيعة المثلث AFC .

4) عيّن طبيعة المجموعة (γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $z+1=\boldsymbol{k}z_B$. لما يتغيّر k في المجموعة $\mathbb{R}_+$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمرين الثالث(4,5ن)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 2}{u_n + 3}$

و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

2) أ- عبّر بدلالة n عن الحد العام v_n .

ب- استنتج عبارة الحد u_n العام بدلالة n .

جـ- أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3) أ- أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

ب- تحقق أن : $\dfrac{1}{u_n + 2} = \dfrac{1}{3}(1 - v_n)$ و ذلك من أجل كل عدد طبيعي n .

جـ- أحسب بدلالة n المجموع : $S'_n = \dfrac{1}{u_0 + 2} + \dfrac{1}{u_1 + 2} + ... + \dfrac{1}{u_n + 2}$.

التمرين الرابع(6ن)

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2e^x - x^2 - x$.

1) أ- أحسب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، ثم أدرس إتجاه تغير الدالة g' (حيث g' هي مشتقة الدالة g)

ب - بيّن أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) > 0$

جـ- أحسب نهايتي الدالة g عند كل من $+\infty$ و عند $-\infty$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,38 < \alpha < -1,37$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^2 e^x}{e^x - x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

ب- بيّن أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = \dfrac{xe^x g(x)}{(e^x - x)^2}$ (حيث f' هي مشتق الدالة f) .

جـ- أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) أ- بيّن أن : $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \dfrac{2}{\alpha - 1}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x^2]$ ، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا .

جـ- أنشئ المنحنى (C_f) . (تعطى $f(\alpha) \approx 0,29$)

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

حل مقترح التمرين الأول

1) نضع من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=z^3-24\sqrt{3}$

أ- التحقق : $P\left(2\sqrt{3}\right)=\left(2\sqrt{3}\right)^3-24\sqrt{3}=24\sqrt{3}-24\sqrt{3}=0$.

ب- إيجاد العددين a و b :

$P(z)=\left(z-2\sqrt{3}\right)\left(z^2+az+b\right)=z^3+\left(a-2\sqrt{3}\right)z^2+\left(b-2\sqrt{3}a\right)z-2\sqrt{3}b$.

وبالمطابقة نجد: $a=2\sqrt{3}$ ، $b=12$.

جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z)=0$.

$P(z)=0$ تكافئ $\left(z-2\sqrt{3}\right)\left(z^2+2\sqrt{3}z+12\right)=0$ تكافئ $z=2\sqrt{3}$ أو $z^2+2\sqrt{3}z+12=0$.

لنحل $\mathbb{C}$ في المعادلة : $z^2+2\sqrt{3}z+12=0$

لدينا : $\Delta=\left(2\sqrt{3}\right)^2-4\times1\times12=-36=36i^2=(6i)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_1=\dfrac{-2\sqrt{3}-6i}{2}=-\sqrt{3}-3i$ و $z_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+6i}{2}=-\sqrt{3}+3i$.

إذن مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي : $S=\left\{2\sqrt{3};-\sqrt{3}-3i;-\sqrt{3}+3i\right\}$.

2) $z_A=-\sqrt{3}+3i$ ، $z_B=-\sqrt{3}-3i$ و $z_C=2\sqrt{3}$

أ- كتابة العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{2\sqrt{3}-\left(-\sqrt{3}+3i\right)}{-\sqrt{3}-3i-\left(-\sqrt{3}+3i\right)}=\frac{3\sqrt{3}-3i}{-6i}=\frac{3\sqrt{3}i+3}{6}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ب- تبيان أنه يوجد دوران R مركزه A و يحول النقطة B إلى النقطة C :

لدينا : $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ أي $z_C-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_B-z_A\right)$ وبالتالي النقطة C هي صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه A وزاويته $\dfrac{\pi}{3}$.

جـ- استنتاج طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ يعني : $\begin{cases}\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1\\ \arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}AC=AB\\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$ وبالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع

د- تعيين z_D :

z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ معناه : $z_D=z_C+z_{\overrightarrow{AB}}$

أي : $z_D=z_C+z_B-z_A=2\sqrt{3}-6i$.

- طبيعة الرباعي $ABDC$:

لدينا $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ لأن النقطة D صورة النقطة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ وبما أن المثلث ABC متقايس الأضلاع فإن الرباعي $ABDC$ معيّن.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3) تعيين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z بحيث : $\arg\left(\frac{z}{z}\right)=2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

$\arg\left(\frac{z}{z}\right)=2k\pi$ تكافئ $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'})=2k\pi$ (M' نظيرة M بالنسبة لحامل محور الفواصل)

و منه المجموعة (Γ) هي حامل محور الفواصل باستثناء النقطة O .

حل مقترح التمرين الثاني

(Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;0;2)$ و شعاع توجيه $\vec{u}(2;1;-1)$

و (Δ') المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي : $(\lambda\in\mathbb{R})$ ، $\begin{cases}x=\lambda\\y=4+\lambda\\z=2+\lambda\end{cases}$

1) أ- كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) :

(Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;0;2)$ و $\vec{u}(2;1;-1)$ شعاع توجيه و منه تمثيل وسيطي لـ (Δ) من الشكل :

$$\begin{cases}x=2t+1\\y=t\\z=-t+2\end{cases}\qquad (t\in\mathbb{R})$$

ب- تبيان أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي :

لنثبت أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا متوازيين و ليسا متقاطعين .

لندرس التوازي :

لدينا $\vec{v}(1;1;1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ') و $\vec{u}(2;1;-1)$ شعاع توجيه لـ (Δ) و منه $\vec{v}$ و $\vec{u}$ ليسا مرتبطين خطيا

لأن $y_{\vec{u}}=y_{\vec{v}}$ و $x_{\vec{u}}\neq x_{\vec{v}}$ و بالتالي المستقيمان (Δ) و (Δ') ليسا متوازيين .

لندرس التقاطع :

$\begin{cases}2t+1=\lambda\\t=4+\lambda\\-t+2=2+\lambda\end{cases}$ معناه $\begin{cases}t=-5\\\lambda=-9\\7\neq-7\end{cases}$ ، الجملة لا تقبل حل و بالتالي المستقيمان (Δ) و (Δ') ليسا متقاطعين .

2) أ- تبيان أن النقطة $B(-1;3;1)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ') :

يكفي إثبات أن $B\in(\Delta')$ و $\overrightarrow{AB}\perp\vec{v}$.

من أجل $\lambda=-1$ نجد $\begin{cases}x=-1\\y=3\\z=1\end{cases}$ و منه $B\in(\Delta')$.

لدينا $\overrightarrow{AB}(-2;3;-1)$ و $\vec{v}(1;1;1)$ و منه $\overrightarrow{AB}.\vec{v}=-2\times1+3\times1-1\times1=0$ إذن $\overrightarrow{AB}\perp\vec{v}$.

ب- التحقق أن المستقيم (AB) عمودي على كل من المستقيمين (Δ) و (Δ') :

لدينا : $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{v}=-2\times1+3\times1-1\times1=0\\\overrightarrow{AB}.\vec{u}=-2\times2+3\times1-1\times(-1)=0\end{cases}$ و منه $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{v}\\\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}\end{cases}$ إذن : $(AB)\perp(\Delta')$ و $(AB)\perp(\Delta)$.

جـ- استنتاج المسافة بين المستقيمين (Δ) و (Δ') :

لدينا : $B\in(\Delta')$ و $A\in(\Delta)$ و (AB) عمودي على كل من (Δ) و (Δ') و منه : $d((\Delta),(\Delta'))=AB=\sqrt{14}$.

3) N نقطة إحداثياتها $(-2+t;2+t;t)$ حيث $(t\in\mathbb{R})$ و h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(t)=AN^2$.

أ- تبيان أن النقطة N تنتمي إلى المستقيم (Δ') :

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

بوضع $\lambda = -2+t$ نجد : $\begin{cases} x = \lambda = -2+t \\ y = 4+\lambda = 4-2+t = 2+t \\ z = 2+\lambda = 2-2+t = t \end{cases}$ ومنه $N \in (\Delta')$.

• كتابة عبارة $h(t)$ بدلالة t :

$$h(t) = AN^2 = (t-3)^2 + (t+2)^2 + (t-2)^2 = 3t^2 - 6t + 17$$

بـ- استنتاج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AN أصغر ما يمكن :

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي t ، $h'(t) = 6t - 6$

جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	14	↗	

تكون المسافة AN أصغر ما يمكن من أجل $t = 1$ و $AN = \sqrt{h(1)} = \sqrt{14}$.

المقارنة بين القيمة الصغرى للدالة h و المسافة AB :

القيمة الحدية الصغرى للدالة h تساوي AB^2 ، أو $AB = \sqrt{h(1)} = \sqrt{14}$.

حل مقترح التمرين الثالث

f الدالة المعرفة على المجال $I = [0;4]$ بـ : $f(x) = \dfrac{13x}{9x+13}$.

1) أ- تبيان أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I :

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[0;4]$ و $f'(x) = \dfrac{13(9x+13) - 9 \times 13x}{(9x+13)^2} = \dfrac{169}{(9x+13)^2}$

و لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;4]$ ، $f'(x) > 0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;4]$.

بـ- تبيان أنه من أجل كل من المجال I ، $f(x)$ ينتمي الى المجال I :

لدينا : الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;4]$ و منه من أجل كل $x \in [0;4]$ ، $f(x) \in [f(0);f(4)]$

أي : $f(x) \in \left[0;\dfrac{52}{49}\right]$ و لدينا $\left[0;\dfrac{52}{49}\right] \subset [0;4]$ إذن : من أجل كل $x \in [0;4]$ ، $f(x) \in [0;4]$

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le 4$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le 4$ "

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 4$ و منه $0 \le u_0 \le 4$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $0 \le u_n \le 4$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0 \le u_{n+1} \le 4$.

لدينا حسب الفرض $0 \le u_n \le 4$ و منه $0 \le f(u_n) \le 4$ (حسب نتيجة السؤال 1 بـ) أي $0 \le u_{n+1} \le 4$

و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n \le 4$.

بـ- دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$u_{n+1}-u_n=\frac{13u_n}{9u_n+13}-u_n=\frac{13u_n-u_n(9u_n+13)}{9u_n+13}=\frac{-9{u_n}^2}{9u_n+13}$$

وبما أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $-9{u_n}^2\le 0$ فإن $u_{n+1}-u_n\le 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

- المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 ، إذن فهي متقاربة.

3) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\neq 0$

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\neq 0$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=4$ ومنه $u_0\neq 0$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_n\neq 0$ ، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1}\neq 0$.

لدينا حسب الفرض $u_n\neq 0$ ومنه $f(u_n)\neq 0$ (f متزايدة تماما على I و $f(0)=0$) أي $u_{n+1}\neq 0$

وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\neq 0$.

4) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=2+\frac{13}{u_n}$

أ- تبيان أن المتتالية (v_n) حسابية :

لدينا : من من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1}=2+\frac{13}{u_{n+1}}=2+\frac{13}{\frac{13u_n}{9u_n+13}}=2+\frac{13(9u_n+13)}{13u_n}=2+\frac{9u_n+13}{u_n}=2+9+\frac{13}{u_n}=9+v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r=9$ وحدها الأول $v_0=2+\frac{13}{u_0}=\frac{21}{4}$.

بـ- كتابة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=v_0+nr$ ومنه $v_n=\frac{21}{4}+9n=\frac{21+36n}{4}$.

جـ- إستنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=\frac{52}{36n+13}$:

لدينا : من من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=2+\frac{13}{u_n}$ ومنه $v_n-2=\frac{13}{u_n}$ أي $u_n=\frac{13}{v_n-2}$

إذن $u_n=\frac{13}{v_n-2}=\frac{13}{\frac{21+36n}{4}-2}=\frac{13}{\frac{21+36n-8}{4}}=\frac{13\times 4}{13+36n}=\frac{52}{36n+13}$.

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{52}{36n+13}\right)=0$$

حل مقترح التمرين الرابع

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=-1+(x+1)e+2\ln(x+1)$.

1) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-1+(x+1)e+2\ln(x+1)\right]=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ >}}g(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\ >}}\left[-1+(x+1)e+2\ln(x+1)\right]=-\infty$$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $g'(x)=e+\dfrac{2}{x+1}$

من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g'(x)>0$ و بالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	-1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2) تبيان أنه للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α حيث $-0,34<\alpha<-0,33$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ و $\begin{cases} g(-0,34)\approx -0,03 \\ (-0,33)\approx 0,02 \end{cases}$ أي $g(-0,34)\times g(-0,33)<0$ و منه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0,34<\alpha<-0,33$.

3) إشارة $g(x)$:

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

1) أ- تبيان أن $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x \overset{>}{} 1} \dfrac{e}{x \quad 1} \quad 0$

$\lim\limits_{x \quad 1} \dfrac{\ln(x \quad 1)}{(x \quad 1)^2} \quad \lim\limits_{x \quad 1} \dfrac{1}{(x \quad 1)^2} \quad \ln(x \quad 1)$

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}\left[\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]=-\infty$ ، لأن :

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$: لأن ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\left[e+\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=0$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ (حامل محور الفواصل) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب- تبيان أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(x+1)^3}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=-\frac{e}{(x+1)^2}+\frac{\frac{1}{x+1}\times(x+1)^2-2(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-e(x+1)+1-2\ln(x+1)}{(x+1)^3}=\frac{-g(x)}{(x+1)^3}$$

جـ- دراسة إتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$:

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

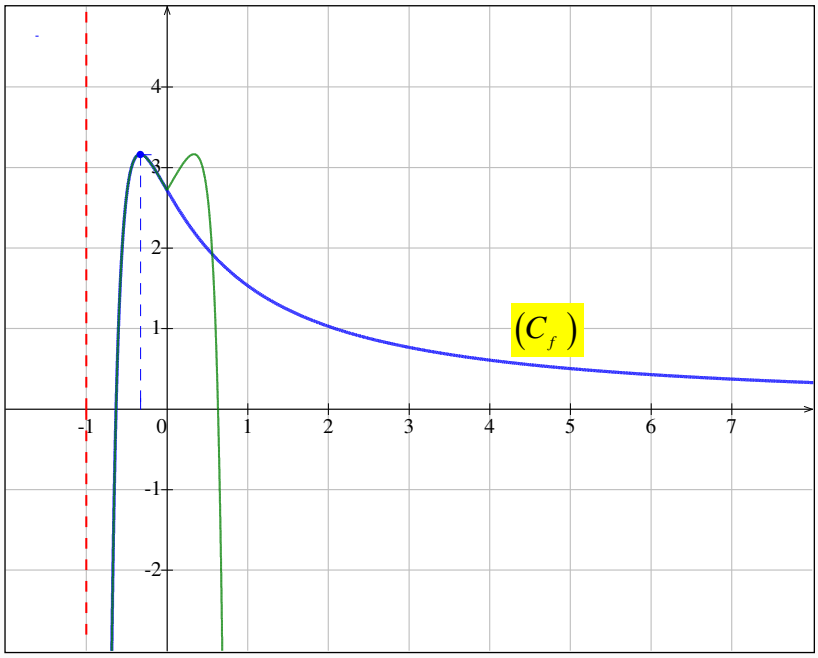
الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha;+\infty[$ و متزايدة على المجال $]-1;\alpha]$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

جدول تغيرات الدالة f :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

د ـ الرسم :



2) أ ـ تبيان أن الدالة $x \mapsto \frac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1;+\infty[$

نضع : $h(x)=\frac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ ، الدالة h قابلة للإشتقاق على $]-1;+\infty[$ و من أجل كل $x \in]-1;+\infty[$:

$$h'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}\left[1+\ln(x+1)\right]+\left(\frac{1}{x+1}\right)\times\left(\frac{-1}{x+1}\right)=\frac{1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

بـ ـ حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بمحور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$:

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left[\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]dx=\left[e\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]\right]_0^1=\frac{1+(2e-1)\ln 2}{2}$$

3) k الدالة العددية المعرفة على $]-1;1[$ بـ : $k(x)=f\left(-|x|\right)$

أ ـ تبيان أن الدالة k زوجية :

المجال $]-1;1[$ متناظر بالنسبة للصفر و من أجل كل $x \in]-1;1[$: $k(-x)=f\left(-|-x|\right)=f\left(-|x|\right)=k(x)$.

و بالتالي الدالة k زوجية .

بـ ـ شرح كيفية إنشاء المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) :

لدينا : $k(x)=f\left(-|x|\right)=\begin{cases}f(x);x \in]-1;0]\\ f(-x);x \in [0;1[\end{cases}$

إذن : من أجل $x \in]-1;0]$ ، (C_k) ينطبق على (C_f) و نتم الرسم باستخدام التناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب لكون k زوجية .

الرسم : أنظر الشكل .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

جـ ـ المناقشة البيانية :

حلول المعادلة $k(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_k) مع المستقيم ذو المعادلة $y=m$.

إذا كان $m>f(\alpha)$ فإن المعادلة لا تقبل حلولا .

إذا كان $m=f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل حلين (مضاعفين) مختلفين في الإشارة .

إذا كان $e<m<f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل 4 حلول ، حلان سالبان و حلان موجبان .

إذا كان $m=e$ فإن المعادلة تقبل 3 حلول ، حل سالب و آخر موجب و الثالث معدوم .

إذا كان $m<e$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

تصحيح مقترح للموضوع الثاني

حل مقترح التمرين الأول

A ، B و C النقط من الفضاء بحيث : $A(2;1;-3)$ ، $B(0;-1;2)$ و $C(-3;-1;-1)$.

1) أ ـ تبيان أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا .

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-2;-2;5)$ و $\overrightarrow{AC}(-5;-2;2)$.

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا لأن $y_{\overrightarrow{AB}}=y_{\overrightarrow{AC}}$ لكن $x_{\overrightarrow{AB}}\neq x_{\overrightarrow{AC}}$ و منه النقط A ، B و C ليست في استقامية و بالتالي فهي تعيّن مستويا .

بـ ـ تبيان أن المعادلة : $2x-7y-2z-3=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة .

$A\in(ABC)$ لأن $2x_A-7y_A-2z_A-3=2\times2-7\times1-2\times(-3)-3=0$

$B\in(ABC)$ لأن $2x_B-7y_B-2z_B-3=2\times0-7\times(-1)-2\times2-3=0$

$C\in(ABC)$ لأن $2x_C-7y_C-2z_C-3=2\times(-3)-7\times(-1)-2\times(-1)-3=0$

2) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A و يعامد المستقيم (BC) :

المستوي (P) يشمل النقطة A و $\overrightarrow{BC}(-3;0;-3)$ شعاع ناظمي له و منه معادلة لـ (P) من الشكل : $-3x-3z+d=0$

و بما أن $A\in(P)$ فإن : $-3x_A-3z_A+d=0$ و منه $d=-3$ و بالتالي $-3x-3z-3=0$ هي معادلة للمستوي (P) .

3) أ ـ كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (D) تقاطع المستويين (ABC) و (P) :

المستقيم (D) معرف بالجملة : $\begin{cases}2x-7y-2z-3=0\\-3x-3z-3=0\end{cases}$ و منه بوضع $z=t$ نجد : $\begin{cases}x=-t-1\\y=-\frac{4}{7}t-\frac{5}{7}\\z=t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

بـ ـ تبيان أن المستقيم (D) عمود في المثلث ABC :

لدينا $A\in(D)$ لأن $A\in(P)\cap(ABC)$ و لدينا $\vec{u}(-1;-\frac{4}{7};1)$ شعاع توجيه للمستقيم (D) .

و بما أن $\vec{u}.\overrightarrow{BC}=-1\times(-3)+0\times\left(-\frac{4}{7}\right)+1\times(-3)=0$ فإن $(D)\perp(BC)$ و بالتالي (D) عمود في المثلث ABC .

4) (Δ) المتوسط المتعلق بالضلع $[AC]$ في المثلث ABC.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

أ- تبيان أن الجملة $(k \in \mathbb{R})$ ، $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k \\ y = k \\ z = -2 - 4k \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

(Δ) هو المستقيم الذي يشمل النقطة B و النقطة $I\left(-\frac{1}{2};0;-2\right)$ منتصف الضلع $[AC]$، ومنه $\overrightarrow{BI}\left(-\frac{1}{2};1;-4\right)$ شعاع توجيه لـ (Δ) و بالتالي تمثيل وسيطي لـ (Δ) من الشكل: $(k \in \mathbb{R})$ ، $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k \\ y = k \\ z = -2 - 4k \end{cases}$.

بـ- تبيان أن المستقيمين (Δ) و (D) يتقاطعان في نقطة G مع تعيين إحداثياتها :

لدينا $\vec{u}(-1;-\frac{4}{7};1)$ شعاع توجيه للمستقيم (D) و $\overrightarrow{BI}\left(-\frac{1}{2};1;-4\right)$ شعاع توجيه لـ (Δ) و $\vec{u}$ و $\overrightarrow{BI}$ ليسا مرتبطين خطيا .

و بالتالي المستقيمان (Δ) و (D) إما ليسا من نفس المستوي أو متقاطعان .

نحل الجملة $\begin{cases} -t-1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k \\ -\frac{4}{7}t - \frac{5}{7} = k \\ t = -2 - 4k \end{cases}$ فنجد $k = -\frac{1}{3}$.

و بتعويض قيمة k في الجملة نجد $\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$ و هي إحداثيات النقطة G نقطة تقاطع المستقيمين

جـ- تبيان أن المثلث ABC متساوي الساقين :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-2;-2;5)$ و $\overrightarrow{AC}(-5;-2;2)$ ومنه $AC = AB = \sqrt{33}$ و بالتالي المثلث ABC متساوي الساقين.

د- ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للمثلث ABC ؟

النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC ، لأنها نقطة تقاطع المتوسطات.

($G \in (D) \cap (\Delta)$ و (Δ) المتوسط المتعلق بالضلع $[AC]$ و (D) العمود و المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$)

5) تعيين طبيعة و عناصر المجموعة (E) للنقط M من الفضاء و التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 3$

$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 3$ تكافئ $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = 3$ تكافئ $MG = 1$ و منه المجموعة (E) هي سطح كرة مركزها G و نصف قطرها 1.

حل مقترح التمرين الثاني

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : (E) ..... $2\overline{z}^3 + 3\overline{z}^2 - 3\overline{z} + 5 = 0$

1) أ- إثبات أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $\left(2\overline{z} + 5\right)\left(\overline{z}^2 - \overline{z} + 1\right) = 0$.

لدينا : $\left(2\overline{z} + 5\right)\left(\overline{z}^2 - \overline{z} + 1\right) = 2\overline{z}^3 - 2\overline{z}^2 + 2\overline{z} + 5\overline{z}^2 - 5\overline{z} + 5 = 2\overline{z}^3 + 3\overline{z}^2 - 3\overline{z} + 5$

و منه المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $\left(2\overline{z} + 5\right)\left(\overline{z}^2 - \overline{z} + 1\right) = 0$.

بـ- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$2\overline{z}^3+3\overline{z}^2-3\overline{z}+5=0$ تكافئ $\left(2\overline{z}+5\right)\left(\overline{z}^2-\overline{z}+1\right)=0$ تكافئ $\overline{z}=-\frac{5}{2}$ أو $\overline{z}^2-\overline{z}+1=0$.

لنحل $\mathbb{C}$ في المعادلة : $\overline{z}^2-\overline{z}+1=0$.

لدينا : $\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=-3=3i^2=\left(\sqrt{3}i\right)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$\overline{z_1}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\overline{z_2}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ومنه $z_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z_2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

إذن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\left\{-\frac{5}{2};\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

2) لدينا : $z_A=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-1$ ، $z_D=-\frac{5}{2}$

أ- كتابة كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي :

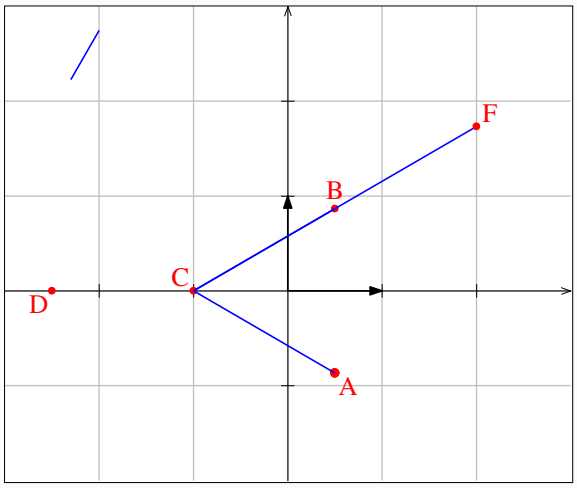
لدينا : $z_A=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه : $|z_A|=1$.

وبفرض θ_A عمدة للعدد المركب z_A ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_A=\frac{1}{2}\\ \sin\theta_A=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ، ومنه $\arg(z_A)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$

إذن : $z_A=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

لدينا : $z_B=\overline{z_A}$ ومنه $z_B=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب- الرسم :



جـ- إثبات أن : $z_B-z_C=z_B\left(z_A-z_C\right)$.

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+1}=\frac{\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=z_B$$

د- إستنتاج طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ يعني : $\begin{cases}\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=1\\ \arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\frac{\pi}{3}\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}CB=CA\\ \left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{3}\end{cases}$ وبالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

النقطة F صورة النقطة A بالتشابه المباشر S يعني : $CF=2CA$ و $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CF}\right)=\frac{\pi}{3}$.

طبيعة المثلث AFC :

المثلث AFC قائم في A.

4) تعيين طبيعة المجموعة (γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $z+1=kz_B$. لما يتغير k في المجموعة $\mathbb{R}_+$.

$z+1=kz_B$ يكافئ $z-z_C=kz_B$ يكافئ $z-z_C=ke^{i\frac{\pi}{3}}$ يكافئ $\arg(z-z_C)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

يكافئ $\left(\vec{u};\overrightarrow{CM}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ومنه المجموعة (γ) هي نصف مستقيم مبدؤه C وشعاع توجيهه $\vec{w}$ بحيث $\left(\vec{u};\vec{w}\right)=\frac{\pi}{3}$.

حل مقترح التمرين الثالث

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2u_n+2}{u_n+3}$

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$

1) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا : من من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}=\frac{\frac{2u_n+2}{u_n+3}-1}{\frac{2u_n+2}{u_n+3}+2}=\frac{\frac{2u_n+2-(u_n+3)}{u_n+3}}{\frac{2u_n+2+2(u_n+3)}{u_n+3}}=\frac{u_n-1}{4u_n+8}=\frac{u_n-1}{4(u_n+2)}=\frac{1}{4}v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+2}=-\frac{1}{2}$.

2) أ ـ كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=v_0\times q^n$ ومنه $v_n=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

بـ ـ استنتاج عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

لدينا : من من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$ ومنه $v_n(u_n+2)=u_n-1$ ومنه $v_nu_n+2v_n-u_n=-1$

أي $u_n(v_n-1)=-1-2v_n$ وبالتالي $u_n=\frac{-1-2v_n}{v_n-1}=\frac{1+2v_n}{1-v_n}$.

إذن : $u_n=\frac{1+2v_n}{1-v_n}=\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}$.

جـ ـ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}\right]=1$$ لأن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$.

3) أ- حساب المجموع S_n :

$$S_n = v_0+v_1+....+v_n = v_0\times\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]=-\frac{1}{2}\times\left[\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right]=-\frac{2}{3}\times\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right].$$

بـ- التحقق أن : $\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{3}(1-v_n)$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=\frac{1+2v_n}{1-v_n}$ ومنه $u_n+2=\frac{1+2v_n}{1-v_n}+2$ ومنه $u_n+2=\frac{3}{1-v_n}$

أي $\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{3}(1-v_n)$.

جـ- حساب المجموع S'_n :

$$S'_n=\frac{1}{u_0+2}+\frac{1}{u_1+2}+....+\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{3}(1-v_0)+\frac{1}{3}(1-v_1)+....+\frac{1}{3}(1-v_n).$$

$$S'_n=\frac{1}{3}\left[(1+1+....+1)-(v_0+v_1+...+v_0)\right]=\frac{1}{3}\left[n+1-S_n\right]$$ ومنه

$$S'_n=\frac{1}{3}\left[n+1+\frac{2}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\right]=\frac{1}{9}\left[3n+5-2\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$ أي :

حل مقترح التمرين الرابع

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2e^x-x^2-x$.

1) أ- الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)=2e^x-2x-1$

دراسة إتجاه تغيّر الدالة g' :

الدالة g' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g''(x)=2e^x-2=2\left(e^x-1\right)$

إشارة $g''(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$

الدالة g' متناقصة على المجال $]-\infty;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

بـ- تبيان أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$

الدالة g' تقبل قيمة حدّية صغرى على $\mathbb{R}$ هي $g'(0)=1$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$

جـ- $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2e^x-x^2-x\right)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{2e^x}{x^2}-1-\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$

جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,38<\alpha<-1,37$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\begin{cases} g(-1,38)\approx -0,02 \\ (-1,37)\approx 0,001 \end{cases}$ أي $g(-1,38)\times g(-1,37)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,38<\alpha<-1,37$.

3) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}$.

1) أ- حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}\right)=0$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2e^x\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-x\right)=+\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{1-xe^{-x}}\right)=+\infty$.

بـ- الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x)=\frac{\left(2xe^x+x^2e^x\right)\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)x^2e^x}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{xe^x\left[(2+x)\left(e^x-x\right)-x\left(e^x-1\right)\right]}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{xe^x g(x)}{\left(e^x-x\right)^2}$$

جـ- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x.g(x)$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha;0]$ و متزايدة على كل من المجالين $[0;+\infty[$ و $]-\infty;\alpha]$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↗	$+\infty$

2) أ- تبيان أن : $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$

لدينا : $g(\alpha)=0$ أي $e^\alpha=\dfrac{\alpha^2-\alpha}{2}$ ومنه $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^2e^\alpha}{e^\alpha-\alpha}=\dfrac{\alpha^2\left(\frac{\alpha^2+\alpha}{2}\right)}{\frac{\alpha^2+\alpha}{2}-\alpha}=\dfrac{\alpha^2\left(\alpha^2+\alpha\right)}{\alpha^2-\alpha}=\dfrac{\alpha^3+\alpha^2}{\alpha-1}$

أي : $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$.

إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$.

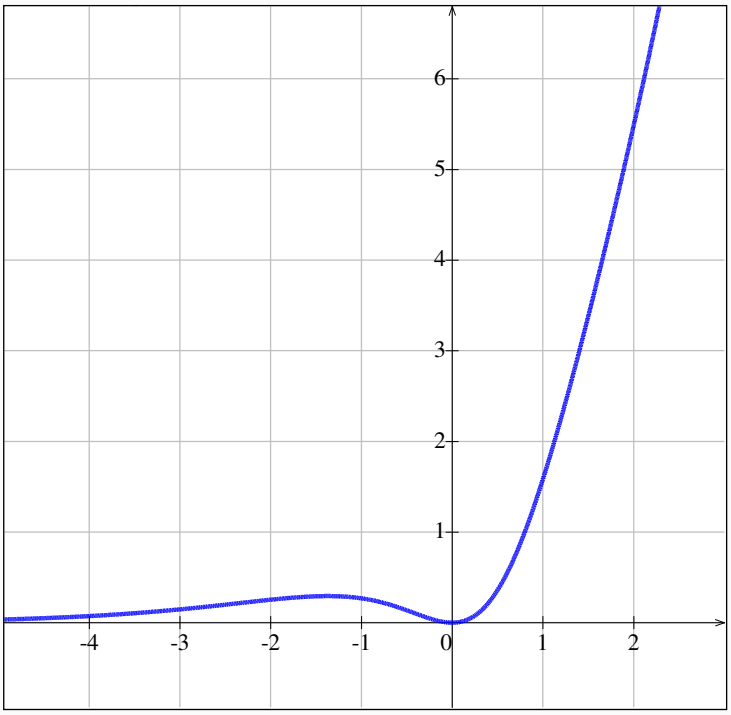
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لدينا : $-1,38<\alpha<-1,37$ يكافئ $\begin{cases}-0,76<2\alpha+2<-0,74\\(-1,37)^2<\alpha^2<(-1,38)^2\\-2,38<\alpha-1<-2,37\\-\dfrac{2}{2,37}<\dfrac{2}{\alpha-1}<-\dfrac{2}{2,38}\end{cases}$ ومنه $0,27<f(\alpha)<0,32$.

بـ- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}-x^2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{e^x-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\frac{e^x}{x^3}-\frac{1}{x^2}}\right)=0$

التفسير البياني : المنحنى (C_f) و المنحنى الممثل للدالة "مربع" $(x\mapsto x^2)$ متقاربان عند $+\infty$.

جـ- الرسم :



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الموضوع الأول

التمرين الأول(4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقطة $A(1;-1;2)$ و المستوي (P) ذا المعادلة $x-y+z+2=0$.

و المستقيم (D) المعرّف بـ: $\begin{cases}x+y-9=0\\y+z-4=0\end{cases}$.

1) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) .

2) جد معادلة ديكارتية للمستوي (P') الذي يشمل A و يوازي (P) .

3) أثبت أن (D) يقطع (P') في النقطة A' حيث $A'(6;3;1)$.

4) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل A و يوازي (P) و يقطع (D) .

التمرين الثاني(4ن)

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرّفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0=\dfrac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3-\dfrac{10}{u_n+4}$ و $v_n=\dfrac{u_n+2}{1-u_n}$.

1) أ ـ برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.

ب ـ بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .

2) أ ـ بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{5}{2}$ ثم عبّر عن حدها العام v_n بدلالة n .

ب ـ أثبت أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=1-\dfrac{3}{v_n+1}$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الثالث(5ن)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z+2)\left(z^2-4z+8\right)=0$.

II) المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A=2-2i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2$

1) أكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي .

2) عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD .

3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) بحيث : $\arg\left(\dfrac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

تحقق أن مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ) ثم عيّن طبيعة المجموعة (Γ) و أنشئها .

4) ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C و نسبته 2 ، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h .

عيّن طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة .

التمرين الرابع(7ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على D حيث $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أن الدالة f فردية ثم فسّر ذلك بيانيا .

2) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب .

3) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$.

ب- إستنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

4) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$

5) أ- بيّن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=\frac{2}{3}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

6) أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

7) m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$

الموضوع الثاني

التمرين الأول(4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(3;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ و $C(0;0;1)$.

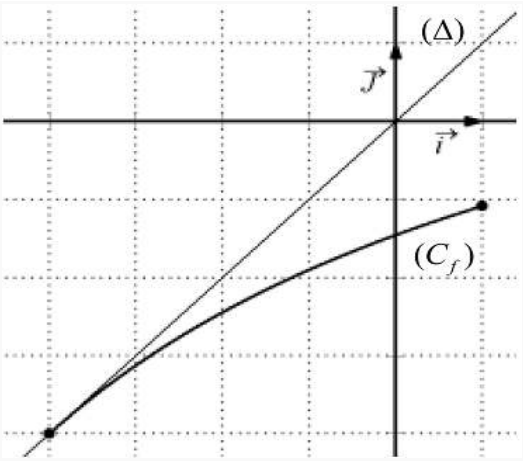
1) بيّن أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا ، ثم تحقق أن : $2x+3y+6z-6=0$ معادلة للمستوي (ABC) .

2) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) والذي يشمل المبدأ O .

3) جد إحداثيات H نقطة تقاطع (Δ) و (ABC) .

4) بيّن أن (BH) عمودي على (AC) ، ثم استنتج أن H هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث ABC.

التمرين الثاني(4ن)



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و

f الدالة المعرفة على المجال $[-4;1]$ كما يلي : $f(x)=\frac{3x-16}{x+11}$.

و (C_f) المنحنى الممثل لها ، (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y=x$.

I) تحقق أن الدالة متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$. ثم بيّن أن :

من أجل $x\in[-4;1]$ فإن $f(x)\in[-4;1]$.

II) (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) أ- أنقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0,u_1,u_2 و u_3 دون حسابها.

ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4 \le u_n \le 0$

ثم بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$

أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$ ، ثم أحسب المجموع S حيث : $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + ... + v_{2016} \times u_{2016}$.

التمرين الثالث(5ن)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي :

1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2 = 1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي : $S = \left\{-\frac{1}{2}+i\right\}$.

2) من أجل كل عدد مركب z ، $(z+2)(\overline{z}+2) = |z+2|^2$.

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = 1$.

4) S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 و نسبته 3 و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ و نصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ و نصف القطر 9

5) من أجل كل عدد حقيقي : إذا كان $z = (\sin\alpha + i\cos\alpha)\times(\cos\alpha - i\sin\alpha)$ فإن : $\arg(z) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi$

حيث k عدد صحيح .

التمرين الرابع(7ن)

I نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2 - x^2 e^{1-x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ و أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة ، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها .

3) أكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

II h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = 1 - xe^{1-x}$.

1) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x) \ge 0$ ، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T) .

2) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$.

3) أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1;+\infty[$.

4) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x) = 2x + (x^2+2x+2)e^{1-x}$.

- تحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم أحسب مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = 0$ و $x = 1$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

حل مقترح التمرين الأول

الفضاء مزود بمعلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقطة $A(1;-1;2)$ و المستوي (P) ذا المعادلة $x-y+z+2=0$

1) تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (D) :

(D) المستقيم المعرّف بـ : $\begin{cases}x+y-9=0\\y+z-4=0\end{cases}$ ومنه بوضع $y=t$ نجد $(t\in\mathbb{R})$ وهذه الجملة هي $\begin{cases}x=-t+9\\y=t\\z=-t+4\end{cases}$

تمثيل وسيطي للمستقيم (D) .

2) إيجاد معادلة ديكارتية للمستوي (P') الذي يشمل A ويوازي (P) :

(P) يوازي (P') معناه $\vec{n}(1;-1;1)$ شعاع ناظمي لـ (P') ، ومنه لـ (P') معادلة من الشكل : $x-y+z+d=0$.

ولدينا : $A\in(P')$ يعني $x_A-y_A+z_A+d=1-(-1)+2+d=0$ أي $d=-4$.

إذن معادلة ديكارتية للمستوي (P') من الشكل : $x-y+z-4=0$.

3) إثبات أن (D) يقطع (P') في النقطة A' حيث $A'(6;3;1)$:

لدينا $\begin{cases}x=-t+9\\y=t\\z=-t+4\\x-y+z-4=0\end{cases}$ يكافئ $(-t+9)-t+(-t+4)-4=0$ أي $t=3$.

وبتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (D) نجد $(6;3;1)$ وهي إحداثيات النقطة A' تقاطع (D) و (P') .

4) تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل A ويوازي (P) ويقطع (D) :

لدينا : $\begin{cases}(D)\cap(P')\cap(\Delta)=\{A'\}\\A\in(\Delta)\end{cases}$ ومنه (Δ) هو نفسه المستقيم (AA') .

ولدينا $\overrightarrow{AA'}(5;4;-1)$ ومنه تمثيل وسيطي للمستقيم (AA') من الشكل : $(t'\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=5t'+1\\y=4t'-1\\z=-t'+2\end{cases}$.

حل مقترح التمرين الثاني

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرّفتان على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=\frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3-\frac{10}{u_n+4}$ و $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$.

1) أ ـ البرهان بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=\frac{1}{4}$ ومنه $0<u_0<1$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $0<u_n<1$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0<u_{n+1}<1$.

لدينا حسب الفرض $0<u_n<1$ ومنه $4<u_n+4<5$ ومنه $\frac{1}{5}<\frac{1}{u_n+4}<\frac{1}{4}$ ومنه $\frac{-10}{4}<\frac{-10}{u_n+4}<\frac{-10}{5}$

ومنه $3-\frac{10}{4}<3-\frac{10}{u_n+4}<1$ أي : $0<u_{n+1}<1$. وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

بـ ـ تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}-u_n=3-\frac{10}{u_n+4}-u_n=\frac{3(u_n+4)-10-u_n(u_n+4)}{u_n+4}=\frac{-u_n{}^2-u_n+2}{u_n+4}$$

ومنه : $u_{n+1}-u_n=\frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.

ولدينا : $0<u_n<1$ ومنه $1-u_n>0$ أي $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

ـ المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 1 ، إذن فهي متقاربة .

2) أ ـ تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+2}{1-u_{n+1}}=\frac{3-\frac{10}{u_n+4}+2}{1-3+\frac{10}{u_n+4}}=\frac{5-\frac{10}{u_n+4}}{-2+\frac{10}{u_n+4}}=\frac{\frac{5(u_n+4)-10}{u_n+4}}{\frac{-2(u_n+4)+10}{u_n+4}}=\frac{5u_n+10}{-2u_n+2}=\frac{5(u_n+2)}{2(1-u_n)}=\frac{5}{2}v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{5}{2}$.

الحد الأول : $v_0=\frac{u_0+2}{1-u_0}=3$.

• كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=v_0\times q^n$ ومنه $v_n=3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n$.

بـ ـ إثبات أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=1-\frac{3}{v_n+1}$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$ ومنه $v_n=-1+\frac{3}{1-u_n}$ ومنه $v_n+1=\frac{3}{1-u_n}$

أي $1-u_n=\frac{3}{v_n+1}$ وبالتالي : $u_n=1-\frac{3}{v_n+1}$

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{v_n+1}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n+1}\right)=1$ ، لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n=+\infty$.

حل مقترح التمرين الثالث

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z+2)(z^2-4z+8)=0$ ..... (1) .

$(z+2)(z^2-4z+8)=0$ تكافئ $z=-2$ أو $z^2-4z+8=0$.

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-4z+8=0$:

لدينا : $\Delta=(-4)^2-4\times1\times8=-16=16i^2=(4i)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_1=\frac{4+4i}{2}=2+2i$ و $z_2=\frac{4-4i}{2}=2-2i$.

إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي : $S=\{-2;2+2i;2-2i\}$.

II) المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A = 2-2i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -2$

1) كتابة كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي :

لدينا : $z_A = 2-2i$ ومنه : $|z_A| = 2\sqrt{2}$.

وبفرض θ_A عمدة للعدد z_A ، يكون : $\begin{cases} \cos\theta_A = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_A = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} == -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ، ومنه $\arg(z_A) = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$

إذن : $z_A = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

لدينا : $z_B = \overline{z_A}$ ومنه $z_B = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2) تعيين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD .

B مركز ثقل المثلث ACD معناه B مرجح الجملة $\{(A,1);(C,1);(D,1)\}$.

ومنه : $z_B = \dfrac{z_D + z_C + z_A}{3}$ وبالتالي : $z_D = 3z_B - z_C - z_A$

أي : $z_D = 3(2+2i) - (-2) - (2-2i) = 6+8i$.

3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) بحيث : $\arg\left(\dfrac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

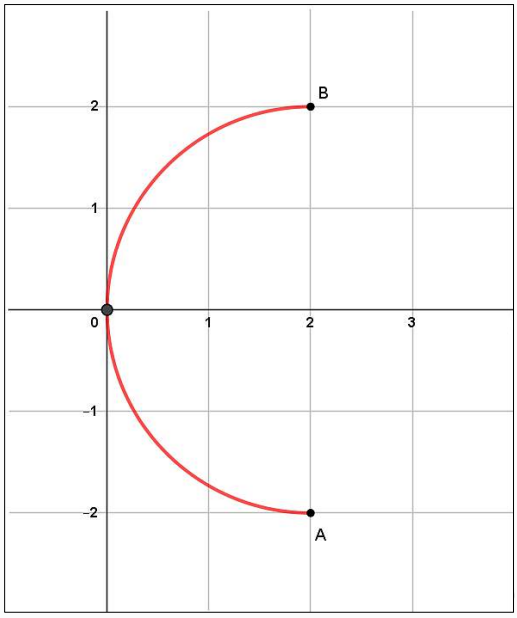
التحقق أن مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ) :

لدينا : $\arg\left(\dfrac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = \arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right) = \arg(z_B) - \arg(z_A) = \dfrac{\pi}{4} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ ومنه $O \in (\Gamma)$.

- تعيين طبيعة المجموعة (Γ) :

$\arg\left(\dfrac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ معناه $(MA;MB) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$ ومنه (Γ) هي نصف الدائرة المفتوحة التي حداها A و B وقطرها $[AB]$ وتشمل النقطة O .

إنشاء (Γ) :



4) العبارة المركبة للتحاكي h الذي مركزه النقطة C ونسبته 2 هي : $z' = 2z + 2$.

تعيين طبيعة المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h مع تحديد عناصرها

المجموعة (Γ') هي نصف الدائرة المفتوحة التي حداها A' و B' بحيث : $A' = h(A)$ و $B' = h(B)$ ، وتشمل النقطة التي ω لاحقتها 2 .

($z_{A'} = 2z_A + 2 = 6-4i$ و $z_{B'} = 2z_B + 2 = 6+4i$)

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

f الدالة المعرفة على D حيث $]1;+\infty[\cup]-\infty;-1[=D$ بـ : $f(x)=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

1) تبيان أن الدالة f فردية :

المجموعة D متناظرة بالنسبة إلى الصفر (من أجل كل $x\in D$ ، $-x\in D$)

و من أجل كل $x\in D$ ،

$$f(-x)=-\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)=-\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-\frac{2}{3}x-\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-f(x)$$

التفسير البياني : مبدأ المعلم O مركز تناظر بالنسبة للمنحنى (C_f) .

2) حساب النهايات :

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\ <}}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=+\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\ >}}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty$$

التفسير البياني : المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب معادلتيهما : $x=1$ و $x=-1$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و لأن : $\lim_{|x|\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1$.

3) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على D ، من أجل كل عدد حقيقي x من D :

$$f'(x)=\frac{2}{3}+\frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}=\frac{2}{3}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}=\frac{2}{3}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{2(x^2-1)+6}{3(x^2-1)}=\frac{2x^2+4}{3(x^2-1)}=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$$

إتجاه تغيّر الدالة f :

لدينا : من أجل كل x من D ، $x^2-1>0$ و منه $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على D .

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖		‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	‖		‖	↗	$+\infty$

4) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$:

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و $]1;+\infty[\supset[1,8;1,9]$ و $\begin{cases} f(1,9)\approx 0,10 \\ (1,8)\approx -0,05 \end{cases}$

أي $f(1,8)\times f(1,9)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1;+\infty[$ حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$.

5) لدينا : $\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\frac{2}{3}x\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ ، لأن : $\lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1$

و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=\frac{2}{3}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

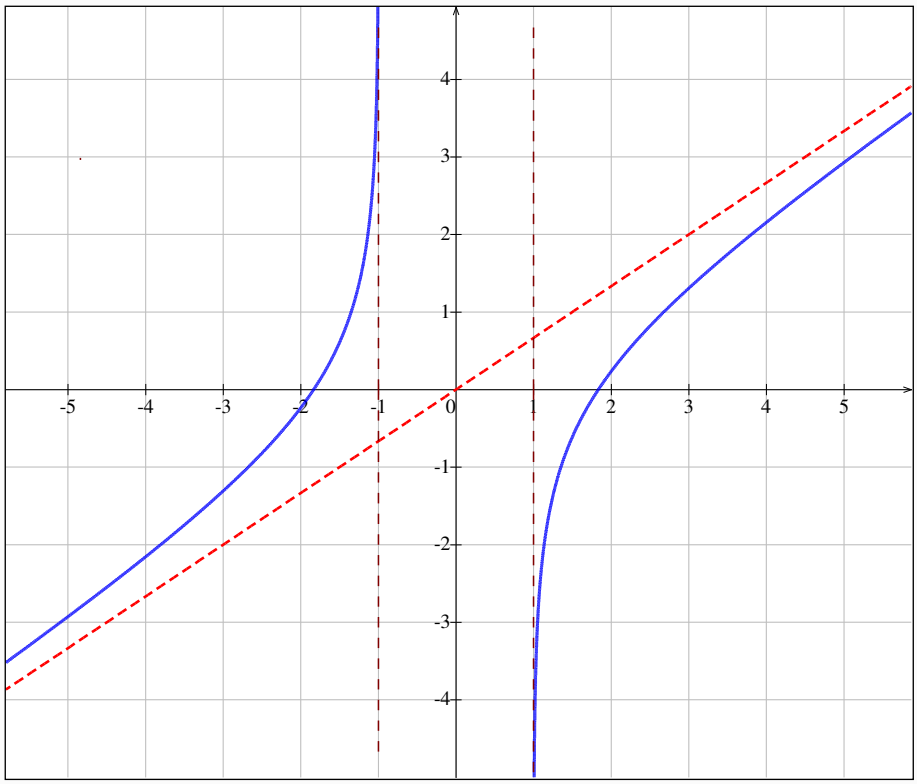
دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لدينا : $f(x)-y=f(x)-\frac{2}{3}x=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	‖	$-$	
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)	

6) الرسم :



7) المناقشة البيانية :

$\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=|m|x$ تكافئ $2x-3|m|x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ تكافئ $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$

أي $f(x)=|m|x$ ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=|m|x$.

(مناقشة دورانية)

إذا كان $m\in\left]-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right[$ أي $|m|\in\left[0;\frac{2}{3}\right[$ فإن المعادلة تقبل حلين متمايزين .

إذا كان $m\in\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right[\cup\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$ أي $|m|\in\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

حل مقترح التمرين الأول

A ، B و C النقط من بحيث : $A(3;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ و $C(0;0;1)$

1) تبيان أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-3;2;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-3;0;1)$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا لأن $x_{\overrightarrow{AB}} = x_{\overrightarrow{AC}}$ لكن $y_{\overrightarrow{AB}} \neq y_{\overrightarrow{AC}}$ ومنه النقط A ، B و C ليست في استقامية و بالتالي فهي تعيّن مستويا .

- التحقق أن : $2x+3y+6z-6=0$ معادلة للمستوي (ABC) :

يكفي إثبات أن إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة .

$A \in (ABC)$ لأن $2x_A+3y_A+6z_A-6=2\times3+3\times0+6\times0-6=0$

$B \in (ABC)$ لأن $2x_B+3y_B+6z_B-6=2\times0+3\times2+6\times0-6=0$

$C \in (ABC)$ لأن $2x_C+3y_C+6z_C-6=2\times0+3\times0+6\times1-6=0$

2) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) و الذي يشمل المبدأ O .

(Δ) يعامد المستوي (ABC) يعني أن $\vec{n}(2;3;6)$ شعاع توجيه لـ (Δ) .

و منه تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) من الشكل : $(t \in \mathbb{R})$.
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 6t \end{cases}$$

3) إيجاد إحداثيات H نقطة تقاطع (Δ) و (ABC) :

نحل الجملة
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 6t \\ 2x+3y+6z-6=0 \end{cases}$$
و هذا يكافئ $2(2t)+3(3t)+6(6t)-6=0$ أي $t=\frac{6}{49}$.

و بتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد $(\frac{12}{49};\frac{18}{49};\frac{36}{49})$ و هي إحداثيات النقطة H .

4) تبيان أن (BH) عمودي على (AC) :

لدينا : $\overrightarrow{BH}(\frac{12}{49};-\frac{86}{49};\frac{36}{49})$ و $\overrightarrow{AC}(-3;0;1)$

و منه $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH} = -3\times\frac{12}{49}+0\times\left(-\frac{86}{49}\right)+1\times\frac{36}{49}=0$ و بالتالي $(BH)\perp(AC)$.

- استنتاج أن H هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث ABC .

لدينا : $\overrightarrow{AH}(-\frac{147}{49};\frac{18}{49};\frac{36}{49})$ و $\overrightarrow{BC}(0;-2;1)$.

و منه $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH} = 0\times\left(-\frac{147}{49}\right)-2\times\left(\frac{18}{49}\right)+1\times\frac{36}{49}=0$ و بالتالي $(AH)\perp(BC)$.

إذن H هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث ABC .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

f الدالة المعرفة على المجال $[-4;1]$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{3x-16}{x+11}$.

I) التحقق أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[-4;1]$ و $f'(x)=\dfrac{3(x+11)-(3x-16)}{(x+11)^2}=\dfrac{49}{(x+11)^2}$

لدينا :من أجل كل $x\in[-4;1]$ ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$.

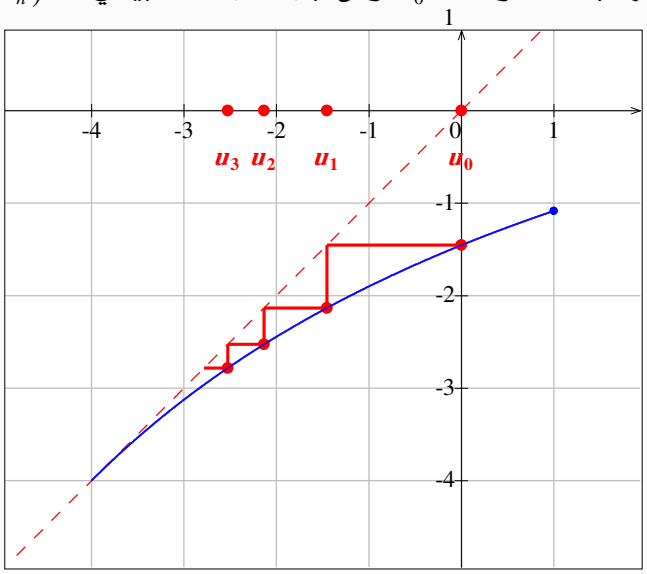
تبيان أنه من أجل $x\in[-4;1]$ فإن $f(x)\in[-4;1]$:

لدينا : الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$ و بالتالي من أجل $x\in[-4;1]$ فإن $f(x)\in[f(-4);f(1)]$

أي : $f(x)\in\left[-4;-\dfrac{13}{12}\right]$ و لدينا $\left[-4;-\dfrac{13}{12}\right]\subset[-4;1]$ و منه :من أجل كل $x\in[-4;1]$ فإن $f(x)\in[-4;1]$.

II) (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) أ- تمثيل الحدود :



التخمين : المتتالية (u_n) متناقصة و متقاربة نحو العدد -4 .

2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4\le u_n\le 0$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $-4\le u_n\le 0$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=0$ و منه $-4\le u_0\le 0$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $-4\le u_n\le 0$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $-4\le u_{n+1}\le 0$.

لدينا حسب الفرض $-4\le u_n\le 0$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما فإن $f(-4)\le f(u_n)\le f(0)$

أي $-4\le u_{n+1}\le -\dfrac{16}{11}\le 1$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $-4\le u_n\le 0$.

- تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n-16}{u_n+11}-u_n=\frac{3u_n-16-u_n(u_n+11)}{u_n+11}=\frac{-u_n{}^2-8u_n-16}{u_n+11}=\frac{-(u_n+4)^2}{u_n+11}$$

و منه : $u_{n+1}-u_n<0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$ أي $v_n = \dfrac{1}{u_n + 4}$.

إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\dfrac{1}{7}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}+4} = \frac{1}{\dfrac{3u_n - 16}{u_n + 11} + 4} = \frac{1}{\dfrac{3u_n - 16 + 4(u_n + 11)}{u_n + 11}} = \frac{u_n + 11}{7u_n + 28} = \frac{u_n + 4 + 7}{7(u_n + 4)} = \frac{1}{7} + \frac{1}{u_n + 4} = \frac{1}{7} + v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = \dfrac{1}{7}$ وحدها الأول $v_0 = \dfrac{1}{u_0 + 4} = \dfrac{1}{4}$.

- حساب المجموع S حيث : $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + ... + v_{2016} \times u_{2016}$

لدينا : $S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + ... + v_{2016} \times u_{2016} = (1 - 4v_0) + (1 - 4v_1) + ... + (1 - 4v_{2016})$

ومنه : $S = 2017 \times 1 - 4(v_0 + v_1 + ... + v_{2016}) = 2017 - 4\left[\dfrac{2017}{2}(v_0 + v_{2016})\right]$

أي : $S = 2017 - 4\left[\dfrac{2017}{2}\left(\dfrac{1}{4} + 288\right)\right] = -1161792$

حل مقترح التمرين الثالث

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة :

1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\dfrac{z+1-i}{z-i}\right)^2 = 1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي : $S = \left\{-\dfrac{1}{2} + i\right\}$ ← صحيح.

التبرير :

$\left(\dfrac{z+1-i}{z-i}\right)^2 = 1$ تكافئ $(z+1-i)^2 = (z-i)^2$ تكافئ أو $\begin{cases} z+1-i = z-i \\ z+1-i = -(z-i) \end{cases}$ أي $z = -\dfrac{1}{2} + i$.

2) من أجل كل عدد مركب z ، $(z+2)(\overline{z}+2) = |z+2|^2$ ← صحيح.

التبرير :

$$(z+2)(\overline{z}+2) = (z+2)\overline{(z+2)} = |z+2|^2$$

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = 1$ ← خطأ.

التبرير :

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3n} = \left[\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3\right]^n = \left(e^{i\pi}\right)^n = (-1)^n$$

4) S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 ونسبته 3 وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ ونصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ ونصف القطر 9

صحيح

التبرير :

العبارة المركبة للتشابه S هي : $z' = 3e^{i\frac{\pi}{2}}(z-1) + 1 = 3iz - 3i + 1$

لدينا : $z_\omega = i$ ومنه $z_{\omega'} = 3iz_\omega + 1 - 3i = -2 - 3i$.

ولدينا : $r' = |k| \times r = 3 \times 3 = 9$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

5) من أجل كل عدد حقيقي α : إذا كان $z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)\times(\cos\alpha-i\sin\alpha)$ فإن : $\arg(z)=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$

حيث k عدد صحيح. ⟵ صحيح.

التبرير :

من أجل كل عدد حقيقي α :

$$z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)\times(\cos\alpha-i\sin\alpha)=i(\cos\alpha-i\sin\alpha)^2=e^{i\frac{\pi}{2}}\times\left(e^{-i\alpha}\right)^2=e^{i\frac{\pi}{2}}\times e^{-2i\alpha}=e^{i\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}$$

ومنه $\arg(z)=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$.

حل مقترح التمرين الرابع

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2-x^2e^{1-x}$.

1) تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-x^2e^{1-x}\right)=2$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e\times x^2e^{-x}\right)=0$.

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-x^2e^{1-x}\right)=-\infty$.

2) أ- الدالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f'(x)=-2xe^{1-x}+x^2e^{1-x}=\left(x^2-2x\right)e^{1-x}=x(x-2)e^{1-x}$$

بـ- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x-2)$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة على المجال $[0;2]$ و متزايدة على كل من المجالين $[2;+\infty[$ و $]-\infty;0]$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$2-4e^{-1}$	↗	2

3) كتابة معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

لدينا : $(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $(T):y=-x+2$.

II) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=1-xe^{1-x}$.

1) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x)\geq 0$:

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x)=-e^{1-x}+xe^{1-x}=(x-1)e^{1-x}$

إشارة $h'(x)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة h متناقصة على المجال $]-\infty;1]$ و متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى على $\mathbb{R}$ هي $h(1)=0$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x)\geq 0$

- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T) :

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لدينا : $f(x)-y=2-x^2e^{1-x}+x-2=x(1-x)e^{1-x}=xh(x)$.

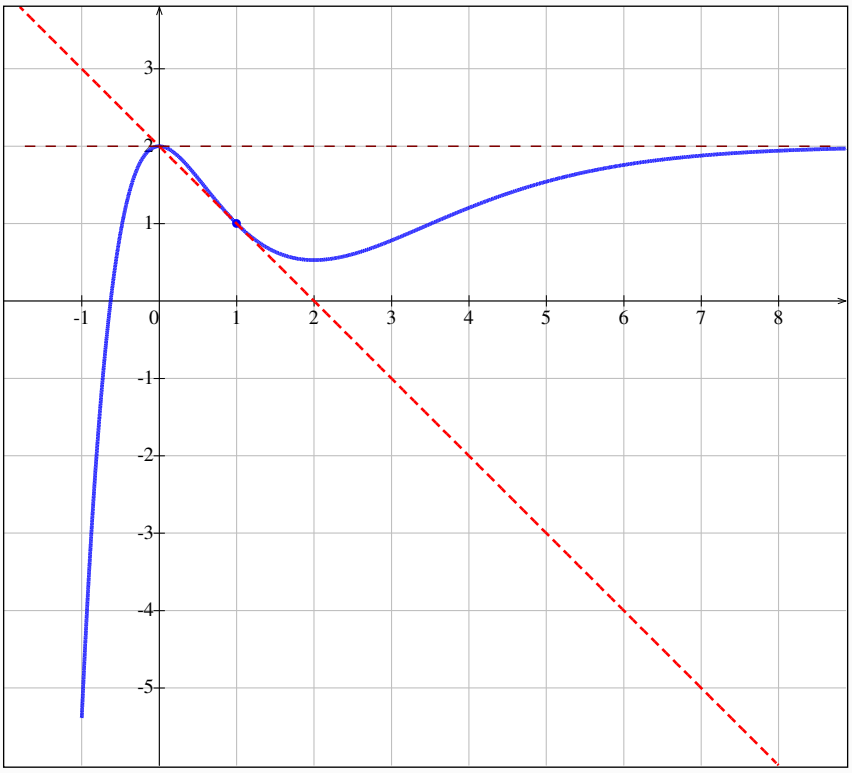
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	0	$+$	
الوضع النسبي	(T) تحت (C_f)		(T) يقطع (C_f)	(T) فوق (C_f)		(T) يقطع (C_f)	(T) فوق (C_f)

2) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و $]-0,7;-0,6[\subset]-\infty;0]$ و $f(-0,7)\quad 0,7$ $f(-0,6)\quad 0,2$

أي $f(-0,6)\times f(-0,7)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.

3) الرسم :



4) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x)=2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}$.

- التحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

الدالة F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$F'(x)=2+(2x+2)e^{1-x}-(x^2+2x+2)e^{1-x}=2-x^2e^{1-x}=f(x)$$

- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^1=F(1)-F(0)=(7-2e)u.a$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن)

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases}$$

1) أحسب الحدّين u_1 و v_1 .

2) أ ـ أكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$.

ب ـ باستعمال البرهان بالتراجع بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و المتتالية (v_n) متناقصة تماما .

3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = u_n - v_n$

برهن أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدّها الأول w_0 ثم عبّر عن w_n بدلالة n .

4) بيّن أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

التمرين الثاني (4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(1;1;-1)$ ، $B(2;-1;-1)$ و $C(4;-4;-2)$.

و المستوي (P) ذا المعادلة الديكارتية $x-2y+2z-3=0$.

1) بيّن أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا .

2) بيّن المستويين (P) و (ABC) غير متوازيين .

3) تحقق أن الجملة : $\begin{cases} x = -2 + \alpha - 3\beta \\ y = 6 - 2\alpha + 5\beta \\ z = \beta \end{cases}$ ، $(\beta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R})$ تمثيل وسيطي للمستوي (ABC) .

4) جد تمثيلا وسيطيا لـ (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (ABC).

التمرين الثالث (5ن)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-2)(z^2+2z+4)=0$.

II) المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث : $\|\vec{u}\| = 2cm$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A = 2$ ، $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = \overline{z_B}$

1) أ ـ أكتب z_B على الشكل الأسّي ، ثم استنتج الشكل الأسي للعدد المركّب z_C .

ب ـ عيّن مركز و نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، ثم أنشئ النقط A ، B و C .

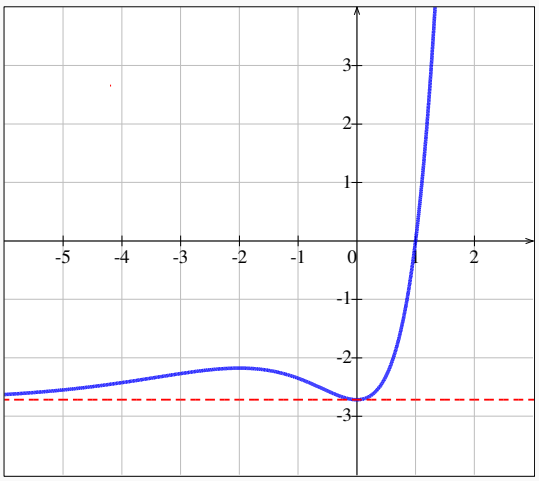
2) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة O و نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ و لتكن F صورة A بالتحويل S .

أ ـ أكتب العبارة المركّبة للتشابه S ثم عيّن لاحقة كل A' ، B' و C' من صور النقط A ، B و C على الترتيب بالتشابه S

ثم أنشئ في المعلم السابق النقط A' ، B' و C' .

ب ـ أحسب بالسنتمتر المربّع مساحة المثلث $A'B'C'$.

التمرين الرابع(7ن)



I) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^2e^x-e$.

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الشكل)

- أحسب $g(1)$.
- بقراءة بيانية عيّن إشارة $g(x)$، ثم استنتج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=e^{-x}-2-\dfrac{e}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب النهايات الآتية: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}f(x)$، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2) بيّن أن المنحنى (γ) الذي معادلته $y=e^{-x}-2$ و المنحنى (C_f) متقاربان بجوار $-\infty$، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (γ).

3) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $f'(x)=\dfrac{-g(-x)}{x^2}$.

4) استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-1;0[$ و $]0;+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

5) بيّن كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) إنطلاقا من منحنى الدالة $x\mapsto e^x$، ثم أرسم بعناية كلا من (γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق.

6) ليكن n عددا طبيعيا و $A(n)$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) و (γ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما:

$x=-e^n$ و $x=-e^{n+1}$.

أحسب العدد الحقيقي l حيث: $l=A(0)+A(1)+....+A(2016)$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول(4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(-8;0;-2)$، $B(1;2;1)$، $C(2;3;-1)$ و $E(1;1;4)$.

و المستوي (P) ذا المعادلة $2x+y-3=0$.

1) أ- بيّن أن النقط A، B و C تعيّن مستويا.

ب- عيّن قيمة العدد الحقيقي α حتى يكون $\vec{n}(1;\alpha;-1)$ شعاعا ناظما للمستوي (ABC) ثم عيّن معادلة ديكارتية له.

2) بيّن أن المستويين (P) و (ABC) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ)، ثم تحقق أن E تنتمي إلى (Δ) و $\vec{u}(1;-2;7)$ شعاع توجيه له.

3) لتكن G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-2),(C;3)\}$، نرمز بـ (Γ) إلى مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق:

$$\left(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$$

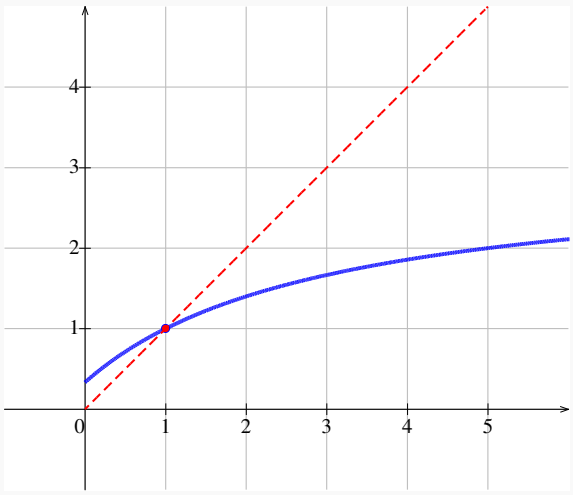
عيّن إحداثيات النقطة G ثم حدد طبيعة المجموعة (Γ) و أكتب معادلة ديكارتية لها.

4) عيّن إحداثيات نقط تقاطع (P)، (ABC) و (Γ).

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمرين الثاني (4ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y=x$



α عدد حقيقي موجب ، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=\alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

I) عيّن قيم α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

II) نضع في كل مايلي : $\alpha=5$

1) أ- أنقل الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0,u_1,u_2 و u_3 دون حسابها.

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ يطلب تعيين حدّها الأول.

ب- عبّر بدلالة n عن v_n و u_n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=v_n+v_{n+1}+....+v_{n+2016}$.

ثم استنتج بدلالة n المجموع : $S'_n=\dfrac{1}{u_n+1}+\dfrac{1}{u_{n+1}+1}+....+\dfrac{1}{u_{n+2016}+1}$.

التمرين الثالث (5ن)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=-3-2i$ ، $z_B=1+i$ و $z_C=4-3i$

1) عيّن النسبة و زاوية للتشابه S المباشر ذي المركز A و الذي يحول النقطة B إلى النقطة C .

2) أكتب على الشكل الأسّي العدد المركب $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

3) نرمز بـ G إلى مركز ثقل المثلث ABC و بـ I إلى منتصف القطعة $[AC]$.

عيّن كلا من z_G و z_I لاحقتي النقطتين G و I ، ثم بيّن أن النقط B ، G و I في إستقامية.

4) نعتبر النقطة D نظيرة النقطة B بالنسب إلى I . حدّد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.

5) نعتبر (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|=5\sqrt{2}$.

أ- تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ) .

ب- عيّن طبيعة المجموعة (Γ) ثم أنشئها .

التمرين الرابع(7ن)

I) نعتبر f الدالة العددية المعرّفة على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $f(x)=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب النهايتين : $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسّر النتيجتين بيانيا .

2) أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ ، $f'(x)=\frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$

بـ ـ أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) حل في المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة $f(x)=0$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

4) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها ، ثم أنشئ (C_f) .

II) لتكن الدالة g المعرّفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $g(x)=2\left[-x+\ln(2x+1)\right]$.

1) أ ـ أدرس إتجاه تغيّر الدالة g .

بـ ـ بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $1,2<\alpha<1,3$.

جـ ـ استنتج إشارة $g(x)$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من : $I_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$.

أثبت أن : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $0<f(x)<\frac{1}{2x+1}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرّفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+1\end{cases}\quad\text{و}\quad\begin{cases}v_0=6\\ v_{n+1}=\frac{3}{4}v_n+1\end{cases}$$

1) حساب الحدين u_1 و v_1 :

$$u_1=\frac{3}{4}u_0+1=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}\quad ،\quad v_1=\frac{3}{4}v_0+1=\frac{3}{4}\times6+1=\frac{22}{4}=\frac{11}{2}$$

2) أ ـ كتابة $u_{n+2}-u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1}-u_n$:

من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{3}{4}u_{n+1}+1-u_{n+1}=\frac{3}{4}u_{n+1}+1-\left(\frac{3}{4}u_n+1\right)=\frac{3}{4}(u_{n+1}-u_n)$

بـ ـ البرهان بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما :

لنثبت أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}\geq u_n$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \geq u_n$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0=1$ و $u_1=\frac{7}{4}$ و منه $u_1>u_0$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_{n+1} \geq u_n$، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.

لدينا حسب الفرض $u_{n+1} \geq u_n$ ومنه $u_{n+1}-u_n \geq 0$ ولدينا مما سبق $u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{3}{4}(u_{n+1}-u_n)$

ومنه $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} \geq u_n$ أي أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

- البرهان بالتراجع بيّن أن المتتالية (v_n) متناقصة تماما :

لنثبت أنه : من من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} \leq v_n$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} \leq v_n$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $v_0=6$ و $v_1=\frac{11}{2}=5.5$ و منه $v_1<v_0$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $v_{n+1} \leq v_n$، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $v_{n+2} \leq v_{n+1}$.

لدينا حسب الفرض $v_{n+1} \leq v_n$ ومنه $v_{n+1}-v_n \leq 0$ و لدينا $v_{n+2}-v_{n+1}=\frac{3}{4}(v_{n+1}-v_n)$ ومنه $v_{n+2} \leq v_{n+1}$

وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1} \leq v_n$ وبالتالي المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n=u_n-v_n$

تبيان أن المتتالية (w_n) هندسية :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+1-\left(\frac{3}{4}v_n+1\right)=\frac{3}{4}(u_n-v_n)=\frac{3}{4}w_n$

ومنه المتتالية (w_n) هندسية أساسها $q=\frac{3}{4}$ وحدها الأول $w_0=u_0-v_0=1-6=-5$.

- كتابة عبارة الحد العام w_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n=w_0\times q^n$ ومنه $w_n=-5\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

4) تبيان أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان:

لدينا : المتتالية (u_n) متزايدة تماما و المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-5\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)=0$ ومنه المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

حل مقترح التمرين الثاني

A، B و C النقط من الفضاء بحيث : $A(1;1;-1)$ ، $B(2;-1;-1)$ و $C(4;-4;-2)$.

و المستوي (P) ذا المعادلة الديكارتية $x-2y+2z-3=0$.

1) تبيان أن النقط A، B و C تعيّن مستويا :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(1;-2;0)$ و $\overrightarrow{AC}(3;-5;-1)$ و منه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا و بالتالي النقط A، B و C تعيّن مستويا.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2) تبيان أن المستويين (P) و (ABC) غير متوازيين :

يكفي إثبات أن الشعاع الناظمي لـ (P) لا يعامد $\overrightarrow{AB}$ و لا $\overrightarrow{AC}$.

لدينا : $\vec{n}(1;-2;2)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=1+4+0=5$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n}=3+10-2=11$

و منه المستويان (P) و (ABC) غير متوازيين .

3) التحقق أن الجملة : $\begin{cases} x=-2+\alpha-3\beta \\ y=6-2\alpha+5\beta \\ z=\beta \end{cases}$ ، $(\beta\in\mathbb{R},\alpha\in\mathbb{R})$ تمثيل وسيطي للمستوي (ABC) .

النقط A ، B و C تعيّن مستويا و بالتالي يكفي التحقق أن إحداثيات النقط A ، B و C تحقق الجملة .

$A\in(ABC)$ ومنه $\begin{cases} 1=-2+\alpha-3\beta \\ \alpha=0 \\ \beta=-1 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 1=-2+\alpha-3\beta \\ 1=6-2\alpha+5\beta \\ -1=\beta \end{cases}$

$B\in(ABC)$ ومنه $\begin{cases} 2=-2+\alpha-3\beta \\ \alpha=1 \\ \beta=-1 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 2=-2+\alpha-3\beta \\ -1=6-2\alpha+5\beta \\ -1=\beta \end{cases}$

$C\in(ABC)$ ومنه $\begin{cases} 4=-2+\alpha-3\beta \\ \alpha=0 \\ \beta=-2 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 4=-2+\alpha-3\beta \\ -4=6-2\alpha+5\beta \\ -2=\beta \end{cases}$

4) إيجاد تمثيل وسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (ABC) :

$\begin{cases} x=-2+\alpha-3\beta \\ y=6-2\alpha+5\beta \\ z=\beta \\ -2+\alpha-3\beta-2(6-2\alpha+5\beta)+2\beta-3=0 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x=-2+\alpha-3\beta \\ y=6-2\alpha+5\beta \\ z=\beta \\ x-2y+2z-3=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=\frac{7}{5}-\frac{4}{5}\beta \\ y=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\beta \\ z=\beta \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x=-2+\alpha-3\beta \\ y=6-2\alpha+5\beta \\ z=\beta \\ \alpha=\frac{11}{5}\beta+\frac{17}{5} \end{cases}$ تكافئ

و منه تمثيل وسيطي لـ (Δ) من الشكل : $(\beta\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=\frac{7}{5}-\frac{4}{5}\beta \\ y=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\beta \\ z=\beta \end{cases}$

حل مقترح التمرين الثالث

I) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-2)(z^2+2z+4)=0$.

$(z-2)(z^2+2z+4)=0$ تكافئ $z=2$ أو $z^2+2z+4=0$.

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+2z+4=0$:

لدينا : $\Delta=(2)^2-4\times1\times4=-12=12i^2=\left(2\sqrt{3}i\right)^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$z_1 = \dfrac{-2+2\sqrt{3}i}{2} = -1+i\sqrt{3}$ و $z_2 = \dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{2} = -1-i\sqrt{3}$.

إذن مجموعة حلول المعادلة هي : $S = \left\{2\,;\,-1+i\sqrt{3}\,;\,-1-i\sqrt{3}\right\}$.

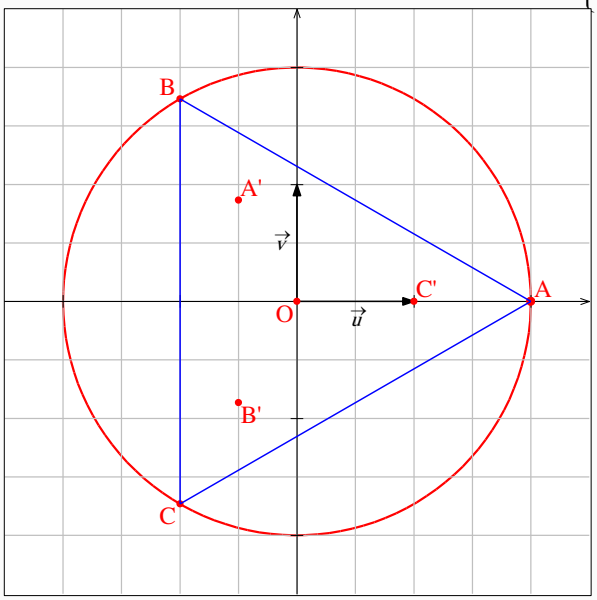
II) المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث : $\left\|\vec{u}\right\| = 2cm$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A = 2$ ، $z_B = -1+i\sqrt{3}$ و $z_C = \overline{z_B}$

1) أ- كتابة z_B على الشكل الأسّي :

لدينا : $z_B = -1+i\sqrt{3}$ ومنه : $|z_B| = 2$.

و بفرض θ_B عمدة للعدد المركب z_B ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_B = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_B = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ، ومنه $\arg(z_B) = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$



إذن : $z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

لدينا : $z_C = \overline{z_B}$ ومنه $z_C = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

ب- تعيين مركز و نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

لدينا : $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$ أي : $OA = OB = OC = 2$

و منه مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC هي النقطة O

مبدأ المعلم و نصف قطرها 2 .

إنشاء النقط A، B و C :

2) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة O ونسبته $\dfrac{1}{2}$ وزاويته $\dfrac{2\pi}{3}$ ولتكن F صورة A بالتحويل S .

أ- العبارة المركّبة للتشابه S : $z' - z_O = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_O)$ أي : $z' = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}z$.

تعيين لاحقات كل من A'، B' و C' من صور النقط A، B و C بالتشابه S :

$z_{A'} = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}z_A = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ أي : $z_{A'} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$z_{B'} = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}z_B = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = e^{i\frac{4\pi}{3}}$ أي : $z_{B'} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$z_{C'} = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}z_C = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(2e^{i\frac{-2\pi}{3}}\right) = 1$ أي : $z_{C'} = 1$.

إنشاء النقط A'، B' و C' : أنظر الشكل السابق .

ب- حساب مساحة المثلث $A'B'C'$:

لدينا : $S_{A'B'C'} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 S_{ABC} = \dfrac{1}{4}S_{ABC}$ لكون المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان و نسبة التشابه هي $\dfrac{1}{2}$.

و لدينا : $S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}BC^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 3\sqrt{3}$ ومنه $S_{A'B'C'} = \dfrac{1}{4}S_{ABC} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

I) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^2e^x-e$.

- $g(1)=e^1-e=0$.
- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

- إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(-x)$		$+$	0	$-$	

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=e^{-x}-2-\dfrac{e}{x}$.

1) حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=+\infty \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=-2$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\<}}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=+\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x\to0\\>}}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\>}}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right)=-\infty$$

2) لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{e}{x}\right)=0$ ومنه (C_f) و المنحنى (γ) ذي المعادلة $y=e^{-x}-2$ متقاربان عند $-\infty$

دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (γ):

لدينا: $f(x)-y=-\dfrac{e}{x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-x$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	‖	$-$	
الوضع النسبي		(γ) فوق (C_f)	‖	(γ) تحت (C_f)	

3) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $f'(x)=\dfrac{-g(-x)}{x^2}$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم:

$$f'(x)=-e^{-x}+\frac{e}{x^2}=\frac{-x^2e^{-x}+e}{x^2}=\frac{-\left(x^2e^{-x}-e\right)}{x^2}=\frac{-g(-x)}{x^2}$$

إتجاه تغيّر f الدالة: إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(-x)$:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	

و منه الدالة f متزايدة على كل من المجالين $]-1;0[$ و $]0;+\infty[$ متناقصة على المجال $]-\infty;-1[$.

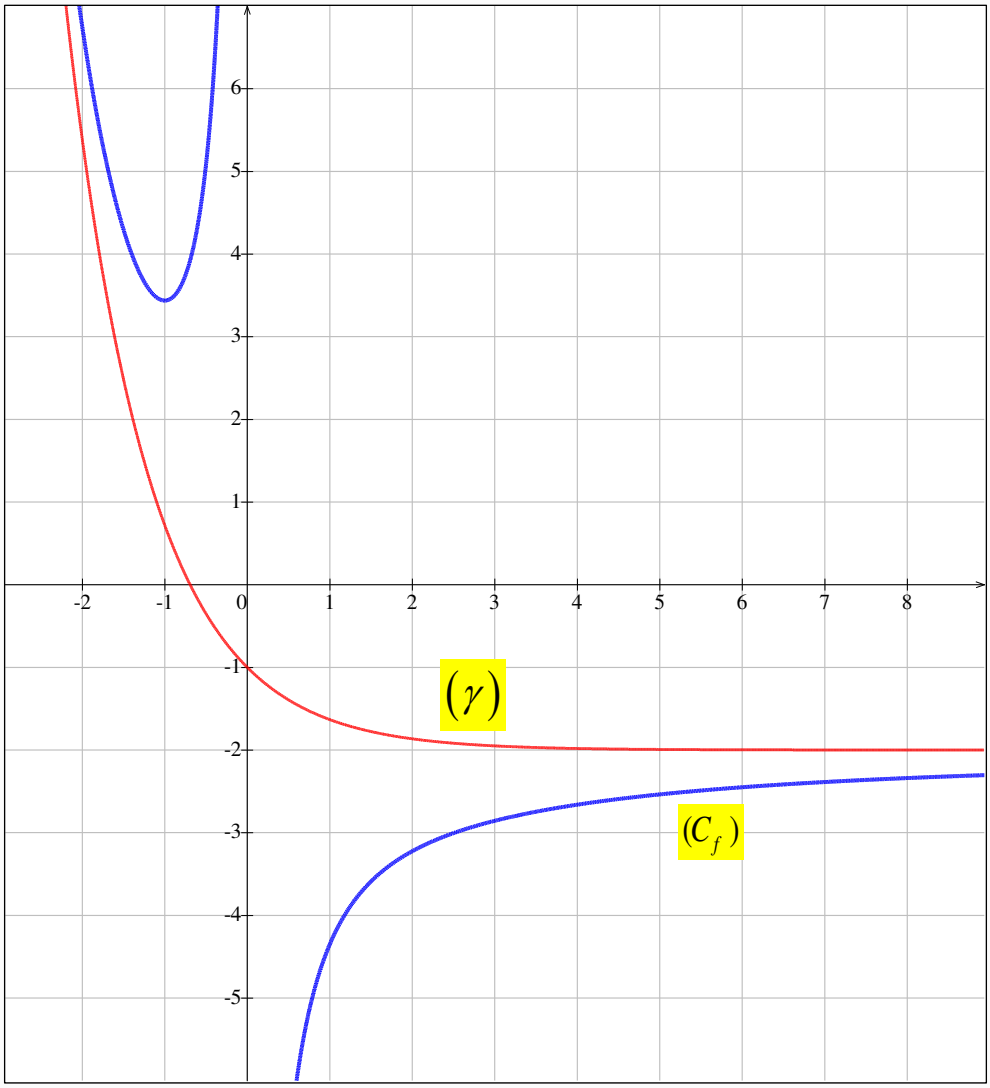
جدول تغيّرات الدالة f:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$2e-2$	↗	‖ $+\infty$	↗	-2

4) شرح كيفية إنشاء المنحنى (γ) إنطلاقا من منحنى الدالة $x \mapsto e^x$:

لدينا : (γ) المنحنى ذي المعادلة $y = e^{-x} - 2$ و منه (γ) هو صورة (Γ) منحنى الدالة $x \mapsto e^{-x}$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0;-2)$ ، علما أن (Γ) هو نظير منحنى الدالة $x \mapsto e^x$ بالنسبة لحامل محور التراتيب .

الرسم :



5) n عدد طبيعي و $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما :

$x = -e^n$ و $x = -e^{n+1}$.

$$A(n) = \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} \left[f(x) - e^{-x} + 2\right] dx = \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} \left(-\frac{e}{x}\right) dx = -e \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} \left(\frac{1}{x}\right) dx = -e\left[\ln|x|\right]_{-e^{n+1}}^{-e^n} = e$$

حساب العدد الحقيقي l : $l = A(0) + A(1) + ... + A(2016) = 2017e$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

حل مقترح التمرين الأول

A ، B ، C و E النقط من الفضاء بحيث : $A(-8;0;-2)$ ، $B(1;2;1)$ ، $C(2;3;-1)$ و $E(1;1;4)$.

و المستوي (P) ذا المعادلة $2x+y-3=0$.

1) أ- تبيان أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(9;2;3)$ و $\overrightarrow{AC}(10;3;1)$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا لأن $\frac{9}{10}\neq\frac{3}{2}$ ومنه النقط A ، B و C ليست في استقامية و بالتالي فهي تعيّن مستويا .

بـ- تعيين قيمة العدد الحقيقي α حتى يكون $\vec{n}(1;\alpha;-1)$ شعاعا ناظما للمستوي (ABC) :

الشعاع $\vec{n}(1;\alpha;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC) معناه : $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n}=0$.

$\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AC}.\vec{n}=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}9+2\alpha-3=0\\ 10+3\alpha-1=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}6+2\alpha=0\\ 9+3\alpha=0\end{cases}$ ومنه $\alpha=-3$.

تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

لدينا $\vec{n}(1;-3;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ومنه لـ (ABC) معادلة من الشكل : $x-3y-z+d=0$.

و لدينا $A\in(ABC)$ ومنه $-8-3\times0-(-2)+d=0$ أي $d=6$.

إذن : $x-3y-z+6=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) تبيان أن المستويين (P) و (ABC) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) :

لدينا : $\vec{n}(1;-3;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) و $\overrightarrow{n_P}(2;1;0)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) .

الشعاعان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{n_P}$ ليسا مرتبطين خطيا و بالتالي المستويان (P) و (ABC) يتقاطعان وفق مستقيم .

- التحقق أن E تنتمي إلى (Δ) :

لدينا : $E\in(P)$ لأن $2\times1+1-3=0$ ، و $E\in(ABC)$ لأن $1-3\times1-4+6=0$.

ومنه $E\in(P)\cap(ABC)$ أي : $E\in(\Delta)$.

- التحقق أن $\vec{u}(1;-2;7)$ شعاع توجيه لـ (Δ) :

يكفي إثبات أن : $\vec{n}.\vec{u}=0$ و $\overrightarrow{n_P}.\vec{u}=0$.

لدينا : $\vec{n}.\vec{u}=1\times1-3\times(-2)-1\times7=0$ و $\overrightarrow{n_P}.\vec{u}=2\times1+1\times(-2)+0\times7=0$ ومنه $\vec{u}(1;-2;7)$ شعاع توجيه لـ (Δ) .

3) لتكن G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-2),(C;3)\}$ ، نرمز بـ (Γ) إلى مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$$\left(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$$

- تعيين إحداثيات النقطة G :

$$G\left(-2;\frac{5}{2};-\frac{7}{2}\right)\text{ أي : }\begin{cases}x_G=-2\\ y_G=\frac{5}{2}\\ z_G=-\frac{7}{2}\end{cases}\text{ ومنه }\begin{cases}x_G=\frac{1\times(-8)-2\times1+2\times3}{1-2+3}\\ y_G=\frac{1\times0-2\times2+3\times3}{1-2+3}\\ z_G=\frac{1\times(-2)-2\times1+3\times(-1)}{1-2+3}\end{cases}$$

• تحديد طبيعة المجموعة (Γ) :

$\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CB}=0$ تكافئ $2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CB}=0$ تكافئ $\left(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$

ومنه المجموعة (Γ) هي المستوي الذي يشمل النقطة G و $\overrightarrow{CB}$ شعاع ناظمي له .

• كتابة معادلة ديكارتية للمجموعة (Γ) :

بما أن (Γ) يشمل النقطة G و $\overrightarrow{CB}(-1;-1;2)$ شعاع ناظمي له فإن للمستوي (Γ) معادلة من الشكل : $-x-y+2z+\frac{15}{2}=0$.

4) تعيين إحداثيات نقط تقاطع (P) ، (ABC) و (Γ) :

لدينا : $(ABC)\cap(P)\cap(\Gamma)=\left[(ABC)\cap(P)\right]\cap(\Gamma)=(\Delta)\cap(\Gamma)$

لندرس تقاطع (Δ) و (Γ) :

لدينا تمثيل وسيطي لـ (Δ) من الشكل : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=t+1\\y=-2t+1\\z=7t+4\end{cases}$ (تذكر أن (Δ) يشمل E و $\vec{u}$ شعاع توجيه له)

نحل الجملة $\begin{cases}x=t+1\\y=-2t+1\\z=7t+4\\-x-y+2z+\frac{15}{2}=0\end{cases}$ وهذا يكافئ $-(t+1)-(-2t+1)+2(7t+4)+\frac{15}{2}=0$ أي $t=-\frac{9}{10}$.

و بتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد $\left(\frac{1}{10};\frac{14}{5};-\frac{23}{10}\right)$ وهي إحداثيات نقطة تقاطع (P) ، (ABC) و (Γ).

حل مقترح التمرين الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال : $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{3x+1}{x+3}$

α عدد حقيقي موجب ، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على بحدها الأول $u_0=\alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1}=f(u_n)$

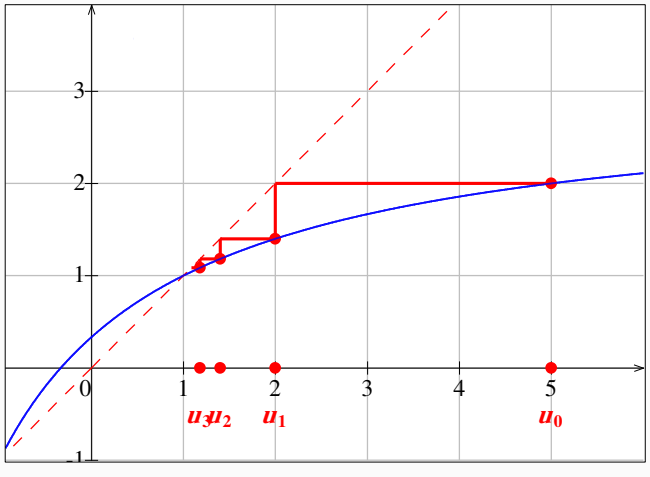
1) تعيين قيم α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

(u_n) متتالية ثابتة يعني : من أجل كل عدد طبيعي ، $u_{n+1}=u_n=u_0$

أي نحل المعادلة $f(\alpha)=\alpha$ وهذا يكافئ $\frac{3\alpha+1}{\alpha+3}=\alpha$ يكافئ $\alpha^2=1$

وبما أن α عدد حقيقي موجب فإنه من أجل $\alpha=1$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2) أ- تمثيل الحدود :



بـ- التخمين : المتتالية (u_n) متناقصة و متقاربة نحو العدد 1.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ- تبيان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\dfrac{3u_n+1}{u_n+3}-1}{\dfrac{3u_n+1}{u_n+3}+1} = \frac{\dfrac{3u_n+1-(u_n+3)}{u_n+3}}{\dfrac{3u_n+1+(u_n+3)}{u_n+3}} = \frac{2u_n-2}{4u_n+4} = \frac{2(u_n-1)}{4(u_n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n-1}{u_n+1}\right) = \frac{1}{2}v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+1} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

بـ- كتابة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = v_0 \times q^n$ أي : $v_n = \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

كتابة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ ومنه $v_n(u_n+1) = u_n - 1$ ومنه $v_n u_n - u_n = -v_n - 1$

أي $u_n = \dfrac{v_n+1}{1-v_n}$ إذن : $u_n = \dfrac{\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 1}{1 - \dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n} = \dfrac{3+2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{3-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3+2\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right) = 1$$ لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.

4) حساب المجموع : $S_n = v_n + v_{n+1} + ... + v_{n+2016}$.

$$S_n = v_n + v_{n+1} + ... + v_{n+2016} = v_n\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}}{1-\frac{1}{2}}\right] = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}\right)$$

استنتاج المجموع : $S'_n = \dfrac{1}{u_n+1} + \dfrac{1}{u_{n+1}+1} + ... + \dfrac{1}{u_{n+2016}+1}$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+1}$ ومنه $v_n = \dfrac{u_n+1-2}{u_n+1}$ ومنه $v_n = 1 - \dfrac{2}{u_n+1}$ أي $\dfrac{1}{u_n+1} = \dfrac{1-v_n}{2}$

$$S'_n = \frac{1}{u_n+1} + \frac{1}{u_{n+1}+1} + ... + \frac{1}{u_{n+2016}+1} = \frac{1-v_n}{2} + \frac{1-v_{n+1}}{2} + ... + \frac{1-v_{n+2016}}{2} = \frac{1}{2}(2017) - \frac{1}{2}S_n$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=-3-2i$ ، $z_B=1+i$ و $z_C=4-3i$.

1) تعيين النسبة و زاوية للتشابه S المباشر ذي المركز A و الذي يحول النقطة B إلى النقطة C :

لدينا : $\begin{cases}S(A)=A\\S(B)=C\end{cases}$ ومنه $z_C-z_A=ke^{i\theta}(z_B-z_A)$ ومنه نسبة التشابه S هي : $k=\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|$

و زاوية للتشابه S هي $\theta=\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)$.

ولدينا : $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{4-3i-(-3-2i)}{1+i-(-3-2i)}=\dfrac{7-i}{4+3i}=\dfrac{(7-i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=1-i$

ومنه $k=\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=|1-i|=\sqrt{2}$ و $\theta=\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg(1-i)=-\dfrac{\pi}{4}$

2) كتابة العدد المركب $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسّي :

لدينا : $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\dfrac{-3-2i-(1+i)}{4-3i-(1+i)}=\dfrac{-4-3i}{3-4i}=\dfrac{-i(-4i+3)}{3-4i}=-i$ ومنه $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$

طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ يكافئ $\begin{cases}\left|\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|=1\\\arg\left(\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=-\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}BA=BC\\(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

ومنه المثلث ABC قائم في B و متساوي الساقين .

3) نرمز بـ G إلى مركز ثقل المثلث ABC و بـ I إلى منتصف القطعة $[AC]$.

تعيين كلا من z_G و z_I لاحقتي النقطتين G و I :

$z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}=\dfrac{-3-2i+1+i+4-3i}{3}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{3}i$ و $z_I=\dfrac{z_A+z_C}{2}=\dfrac{-3-2i+4-3i}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i$

تبيان أن النقط B ، G و I في إستقامية :

لدينا : $\dfrac{z_G-z_I}{z_B-z_I}=\dfrac{\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{3}i\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i\right)}{(1+i)-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i\right)}=\dfrac{1}{3}$ وهذا يعني أن $\overrightarrow{GI}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BI}$ ومنه النقط B ، G و I في إستقامية .

4) النقطة D نظيرة النقطة B بالنسبة إلى I .

طبيعة الرباعي $ABCD$:

الرباعي مربع لأن المثلث ABC قائم متساوي الساقين .

5) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|=5\sqrt{2}$.

أ- التحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ) :

لدينا : $\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CC}\right\|=\left\|\overrightarrow{CA}\right\|=AC=|z_C-z_A|=5\sqrt{2}$ ومنه $C\in(\Gamma)$.

بـ- تعيين طبيعة المجموعة (Γ) ثم إنشائها :

لدينا : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|=5\sqrt{2}$ تكافئ $\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|=5\sqrt{2}$ تكافئ $MI=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ ومنه المجموعة هي الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

I) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $f(x)=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$.

1) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^{>}} f(x)=\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^{>}}\left[\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^{>}}\left[\left(\frac{1}{(2x+1)^2}\right)\left[1+2\ln(2x+1)\right]\right]=-\infty$$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $x=-\frac{1}{2}$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=0 \text{ : لأن } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{(2x+1)^2}+2\frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=0$$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

2) أ ـ الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

$$f'(x)=\frac{\frac{4}{2x+1}\times(2x+1)^2-4(2x+1)\left[1+2\ln(2x+1)\right]}{(2x+1)^4}=\frac{(2x+1)\left[-8\ln(2x+1)\right]}{(2x+1)^4}=\frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$$

بـ ـ دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-8\ln(2x+1)$ لأن : $(2x+1)^3>0$ من أجل x من $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right]$ و متناقصة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

3) حل في المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة $f(x)=0$:

$f(x)=0$ تكافئ $1+2\ln(2x+1)=0$ تكافئ $\ln(2x+1)=-\frac{1}{2}$ تكافئ $2x+1=e^{-\frac{1}{2}}$ أي : $x=\frac{1}{2\sqrt{e}}-\frac{1}{2}$

إشارة $f(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}-1\right)$		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

4) تبيان المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها :

الدالة f' قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

$$f''(x)=\frac{\frac{-8\times 2}{2x+1}\times(2x+1)^3-3\times 2(2x+1)^2\times\left[-8\ln(2x+1)\right]}{(2x+1)^6}=\frac{16\left(-1+3\ln(2x+1)\right)}{(2x+1)^4}$$

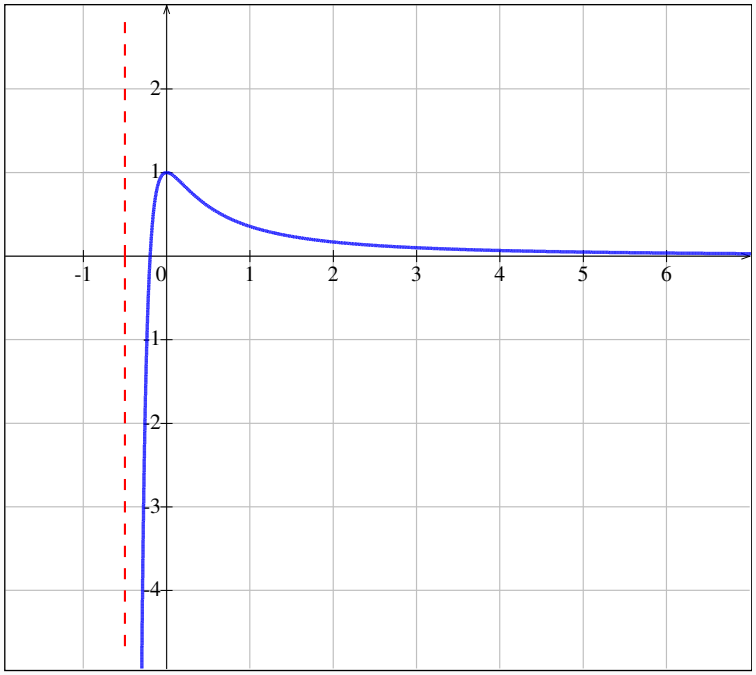
$f''(x)=0$ تكافئ $-1+3\ln(2x+1)=0$ تكافئ $\ln(2x+1)=\frac{1}{3}$ أي : $2x+1=e^{\frac{1}{3}}$ تكافئ $x=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{3}}-1\right)$

إشارة $f''(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{3}}-1\right)$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

إذن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω إحداثييها : $\left(\frac{e^{\frac{1}{3}}-1}{2};\frac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}}\right)$.

الرسم :



II) لتكن الدالة g المعرفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $g(x)=2\left[-x+\ln(2x+1)\right]$.

1) أ ـ دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

$$g'(x)=2\left[-1+\frac{2}{2x+1}\right]=2\left[\frac{-2x+1}{2x+1}\right]$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x+1$:

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الدالة g متزايدة على المجال $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ و متناقصة على المجال $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

بـ- تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $1,2<\alpha<1,3$.

لدينا : $g(0)=0$.

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ و $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\subset\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و $\begin{cases}g(1,2)\approx 0,05\\ (1,3)\approx -0,04\end{cases}$ $]1,2;1,3[$

أي $g(1,3)\times g(1,2)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α حيث $1,2<\alpha<1,3$.

جـ- إشارة $g(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$		0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 : $I_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$.

إثبات أن : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $0<f(x)<\frac{1}{2x+1}$.

لدينا : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $f(x)-\frac{1}{2x+1}=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}-\frac{2x+1}{(2x+1)^2}=\frac{g(x)}{(2x+1)^2}$.

و لدينا : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $g(x)<0$ و بالتالي $f(x)<\frac{1}{2x+1}$.

و من جهة أخرى لدينا : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $f(x)>0$.

إذن : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $0<f(x)<\frac{1}{2x+1}$.

استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$:

لدينا : $0<\int_n^{n+1} f(x)dx<\int_n^{n+1}\frac{1}{2x+1}dx$ و منه $0<I_n<\int_n^{n+1}\frac{1}{2x+1}dx$

و لدينا $\int_n^{n+1}\frac{1}{2x+1}dx=\left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_n^{n+1}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$ و منه $0<I_n<\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$.

و بالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \dfrac{9}{u_n + 5}$.

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$.

ب- بيّن أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتج أنها متقاربة .

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$

- أثبت أن (v_n) حسابية أساسها $\dfrac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول .

3) عبّر بدلالة n عن v_n و u_n ، واحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0 v_0 + u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n = \dfrac{1}{3}\left(1 - n^2\right)$.

التمرين الثاني (4ن)

يحوي صندوق 10 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس ، منها 4 كرات بيضاء مرقمة بـ : 1 ، 2 ، 2 ، 3 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ : 2 ، 2 ، 3 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : 2 ، 3 ، 3 .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق .

نعتبر الحادثتين A : " الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني " .

و B : " الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم " .

1) أ- أحسب : $P(A)$ و $P(B)$ إحتمالي الحادثتين A و B على الترتيب .

ب- بيّن أن : $P(A \cap B) = \dfrac{1}{20}$ ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$.

2) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا .

عرّف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثالث (5ن)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $z_A = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ و $z_C = \overline{z_B}$.

أكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

3) أ- تحقق أن : $\dfrac{z_B}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ وحدد طبيعة المثلث OBC .

ب- إستنتج أن : B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميزة .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4) نسمّي (γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z التي تحقق : $|z| = \left|\overline{z} - \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$.

عيّن طبيعة المجموعة (γ) ثم عيّن صورتها بالدوران r .

التمرين الرابع(7ن)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في حلا وحيدا α حيث $-0.38 < \alpha < -0.37$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - (2x+1)\right]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

جـ- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) حيث : $(\Delta): y = 2x + 1$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x) = g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغيّر الدالة f و شكّل جدول تغيّراتها .

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

4) أنشئ (Δ) ، (T) و المنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha) \approx 0{,}8$) .

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $x = (1-m)e^{x}$

6) أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من أجل $x = 1$.

ب- أحسب العدد A مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها:

$x = 1$ ، $x = 3$ و $y = 2x + 1$

الموضوع الثاني

التمرين الأول(4ن)

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$.

1) أحسب كلا من u_1 ، u_2 و u_3

2) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ ثم استنتج إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

3) (v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = 2n + 1$.

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $e^{u_n} = v_n$.

ب- استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) أحسب المجموعين S_n و T حيث : $S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$ و $T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \ldots + e^{u_{2018}}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمرين الثاني(4ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقطة $A(1;-2;1)$ و المستويين (P_1) و (P_2) اللذين معادلتيهما على الترتيب : $-x+y+2z+1=0$ و $-3x+y+z+4=0$.

1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(1;5;-2)$ شعاع توجيه له .

2) بيّن أن المستويين (P_1) و (P_2) متقاطعان ثم تحقق أن تقاطعهما هو المستقيم (Δ) .

3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل $B(-1;4;0)$ و يعامد كلا من (P_1) و (P_2) ثم استنتج تقاطع المستويات الثلاثة (P_1) ، (P_2) و (Q).

4) لتكن $E(2;3;-1)$ و $H(0;3;-2)$ نقطتان من الفضاء .

أ- تحقق أن H هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P_1) .

ب- حدّد طبيعة المثلث EBH ثم أحسب V حجم رباعي الوجوه $AEBH$.

التمرين الثالث(5ن)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\overline{z}-4+i)(z^2-4z+5)=0$ (يرمز $\overline{z}$ لمرافق العدد z)

II) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب :

$z_A=2+i$ ، $z_B=4+i$ و $z_C=\overline{z_A}$.

1) تحقق أن : $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=i$ ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا .

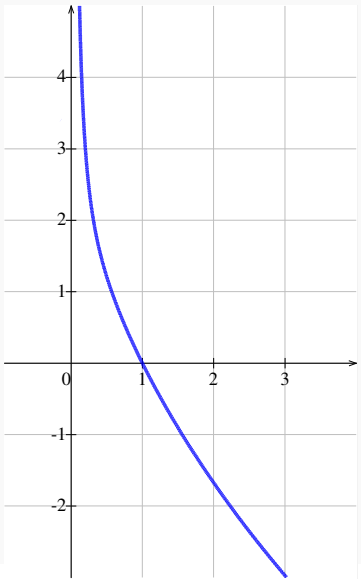
2) D نقطة من المستوي لاحقتها z_D بحيث :
$$\begin{cases}|z_D-z_A|=|z_B-z_A| \\ \arg\left(\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

بيّن أن المثلث ABD متقايس الأضلاع و أحسب z_D.

3) أحسب z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABD ، ثم عيّن نسبة و زاوية التشابه المباشر الذي مركزه A ويحوّل G إلى D .

4) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z (M تختلف عن C) بحيث : $\arg\left(\dfrac{z_G-z}{z_C-z}\right)=\pi+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$.

التمرين الرابع(7ن)



I) g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\dfrac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$

(C_g) المنحنى البياني الممثل لها كما هو مبيّن في الشكل المقابل :

ـ أحسب $g(1)$ ثم استنتج بيانيا إشارة $g(x)$.

II) f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1+x\ln x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و بيّن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، ثمّ فسّر النتيجتين بيانيا.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

بـ استنتج اتجاه تغيّر الدالة f و شكّل جدول تغيّراتها .

3) بيّن أن $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل ، ثم أرسم المماس (T) و المنحنى (C_f).

4) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ حلين متمايزين .

III) n عدد طبيعي حيث $n>1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$.

1) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$: $I_n=\ln(1+n\ln n)$.

2) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (I_n) .

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح التمرين الأول

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_{n+1}=1-\frac{9}{u_n+5}$.

1) أ ـ البرهان بالتراجع أن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>-2$.

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>-2$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=1$ و منه $u_0>-2$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_n>-2$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1}>-2$.

لدينا حسب الفرض $u_n>-2$ ومنه $u_n+5>-2+5$ ومنه $\frac{1}{u_n+5}<\frac{1}{3}$ ومنه $-\frac{9}{u_n+5}>-\frac{9}{3}$

أي $1-\frac{9}{u_n+5}>1-3$ أي : $u_{n+1}>-2$. و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>-2$.

بـ تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}-u_n=1-\frac{9}{u_n+5}-u_n=\frac{u_n+5-9-u_n^2-5u_n}{u_n+5}=\frac{-u_n^2-4u_n-4}{u_n+5}=-\frac{(u_n+2)^2}{u_n+5}$$

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n<0$.

و منه المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

ـ المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل بالعدد -2 ، إذن فهي متقاربة .

2) المتتالية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\frac{1}{u_n+2}$

ـ إثبات أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{3}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}+2}=\frac{1}{1-\frac{9}{u_n+5}+2}=\frac{1}{3-\frac{9}{u_n+5}}=\frac{1}{\frac{3u_n+6}{u_n+5}}=\frac{u_n+5}{3u_n+6}=\frac{u_n+2+3}{3(u_n+2)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{3}+v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r=\frac{1}{3}$ وحدّها الأول v_0 حيث: $v_0=\frac{1}{u_0+2}=\frac{1}{3}$.

3) كتابة عبارة v_n بدلالة n:

من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=v_0+nr$ ومنه $v_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}n=\frac{1}{3}(1+n)$.

كتابة u_n بدلالة n: $v_n=\frac{1}{u_n+2}$ ومنه $\frac{1}{v_n}=u_n+2$، أي: $u_n=\frac{1}{v_n}-2$

ومنه: $u_n=\frac{1}{\frac{1}{3}(1+n)}-2=\frac{3}{1+n}-2$.

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{1+n}-2\right)=-2$. لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{1+n}\right)=0$.

4) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_0v_0+u_1v_1+\ldots\ldots+u_nv_n=\frac{1}{3}(1-n^2)$.

لدينا: $v_n=\frac{1}{u_n+2}$ ومنه: $u_nv_n+2v_n=1$ أي: $u_nv_n=1-2v_n$.

لدينا:

$$\begin{aligned}u_0v_0+u_1v_1+\ldots.+u_nv_n&=(1-2v_0)+(1-2v_1)+\ldots.+(1-2v_n)\\&=1\times(n+1)-2(v_0+v_1+\ldots..+v_n)\\&=n+1-2\left[\frac{n+1}{2}(v_0+v_n)\right]\\&=n+1-\left[(n+1)\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}n\right)\right]\end{aligned}$$

ومنه: $u_0v_0+u_1v_1+\ldots.+u_nv_n=(n+1)\left[1-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}n\right)\right]=(n+1)\left(\frac{1-n}{3}\right)=\frac{1}{3}(1-n^2)$

حل مقترح التمرين الثاني

عدد السحبات الممكنة هو: $C_{10}^3=\frac{10!}{3!\times7!}=120$.

1) أ- حساب الإحتمالات:

A: "الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني". أي الحصول على ثلاثة ألوان الأبيض و الأحمر و الأخضر.

$$P(A)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_3^1}{120}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$$

B: "الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم".

$$P(B)=\frac{C_5^3+C_4^3}{120}=\frac{14}{120}=\frac{7}{60}$$

ب- تبيان أن: $P(A\cap B)=\frac{1}{20}$.

$A\cap B$: "الكريات الثلاث المسحوبة تحمل نفس الرقم و من ألوان مختلفة".

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$P(A\cap B)=\frac{C_2^1\times C_2^1\times C_1^1+C_1^1\times C_1^1\times C_2^1}{120}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$$

حساب الإحتمال الشرطي $P_A(B)$:

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{6}.$$

حساب $P(A\cup B)$:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{36}{120}+\frac{14}{120}-\frac{6}{120}=\frac{44}{120}=\frac{11}{30}.$$

2) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا .

لدينا : $X\in\{0;1;2;3\}$.

$$P(X=0)=\frac{C_5^3}{120}=\frac{10}{120}\quad ،\quad P(X=1)=\frac{C_5^1\times C_5^2}{126}=\frac{50}{120}$$

$$P(X=2)=\frac{C_5^2\times C_5^1}{126}=\frac{50}{120}\quad ،\quad P(X=3)=\frac{C_5^3}{126}=\frac{10}{120}$$

قانون الإحتمال:

X_i	0	1	2	3
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

بـ- حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{5}{12}+3\times\frac{1}{12}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}.$$

حل مقترح التمرين الثالث

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2-\sqrt{3}z+1=0$.

لدينا : $\Delta=\left(-\sqrt{3}\right)^2-4\times1\times1=-1=i^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_1=\frac{\sqrt{3}-i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\quad و\quad z_2=\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i.$$

2) كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي :

لدينا : $z_A=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و منه : $|z_A|=1$.

و بفرض θ_A عمدة للعدد المركب z_A ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_A=\frac{1}{2}\\ \sin\theta_A=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ، و منه $\arg(z_A)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

لدينا : $z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و منه : $|z_B|=1$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

و بفرض θ_B عمدة للعدد المركب z_B ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_B=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ، و منه $\arg(z_B)=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_B=e^{i\frac{\pi}{6}}$.

• تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$:

لدينا : $\dfrac{z_A}{z_B}=\dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\frac{\pi}{6}}$ و منه $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ يكافئ $e^{i\frac{n\pi}{6}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ يكافئ $\dfrac{n\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ يكافئ $n=12k+2$ ، مع $k\in\mathbb{N}$.

3) أ- التحقق : $\dfrac{z_B}{z_C}=\dfrac{z_B}{\overline{z_B}}=\dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

لدينا : $\dfrac{z_B}{z_C}=\dfrac{z_B-z_O}{z_C-z_O}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ معناه : $\begin{cases}OC=OB\\ \left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$ و منه المثلث OBC متقايس الأضلاع .

بـ- إستنتاج أن : B هي صورة C بدوران r مع تعيين عناصره المميّزة .

لدينا : $\dfrac{z_B-z_O}{z_C-z_O}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $z_B-z_O=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C-z_O)$ و منه : B هي صورة C بالدوران r الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$.

4) تعيين طبيعة المجموعة (γ) :

$|z|=\left|\overline{z}-\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$ تكافئ $|z|=|\overline{z}-z_B|$ تكافئ $|z|=|\overline{z-z_B}|$ تكافئ $|z|=|z-z_C|$

و معناها : $OM=CM$ و بالتالي (γ) هي محور القطعة $[OC]$.

• تعيين صورة (γ) بالدوران r :

بما أن : $r(O)=O$ و $r(C)=B$ فإن صورة (γ) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

حل مقترح التمرين الرابع

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2+(x-1)e^{-x}$

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+(x-1)e^{-x}\right)=-\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+(x-1)e^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+xe^{-x}-e^{-x}\right)=2$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=e^{-x}+\left(-e^{-x}\right)(x-1)=(2-x)e^{-x}$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{-x}>0$ و بالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $2-x$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة g متناقصة على المجال $]2;+\infty[$ و متزايدة على المجال $]-\infty;2[$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$2+e^{-2}$	↘	2

3) أ- تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في حلا وحيدا α حيث $-0.37<\alpha<-0.38$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;2]$ و $]-\infty;2]\subset]-\infty;-0,37]$ و $]-0,38;-0,37[$

$g(-0.38)\quad 0,017$

$(-0.37)\quad 0,016$

أي $g(-0,37)\times g(-0,38)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.37<\alpha<-0.38$.

بـ- إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$

1) أ- حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+1-xe^{-x}\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+1-xe^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(2+\frac{1}{x}-e^{-x}\right)\right]=-\infty$.

بـ- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}\right)=0$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) بحيث : $(\Delta): y=2x+1$.

لدينا : $f(x)-y=f(x)-(2x+1)=-xe^{-x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	(Δ) فوق (C_f)		(Δ) يقطع (C_f) في النقطة $A(0;1)$		(Δ) تحت (C_f)

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x)=g(x)$ ،

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$f'(x)=2+(-1)e^{-x}+\left(-e^{-x}\right)(-x)=2+(x-1)e^{-x}=g(x)$.

- إتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، و منه نستنتج أن : الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;\alpha]$ و متزايدة على المجال $[\alpha;+\infty[$

جدول تغيّرات الدالة f :

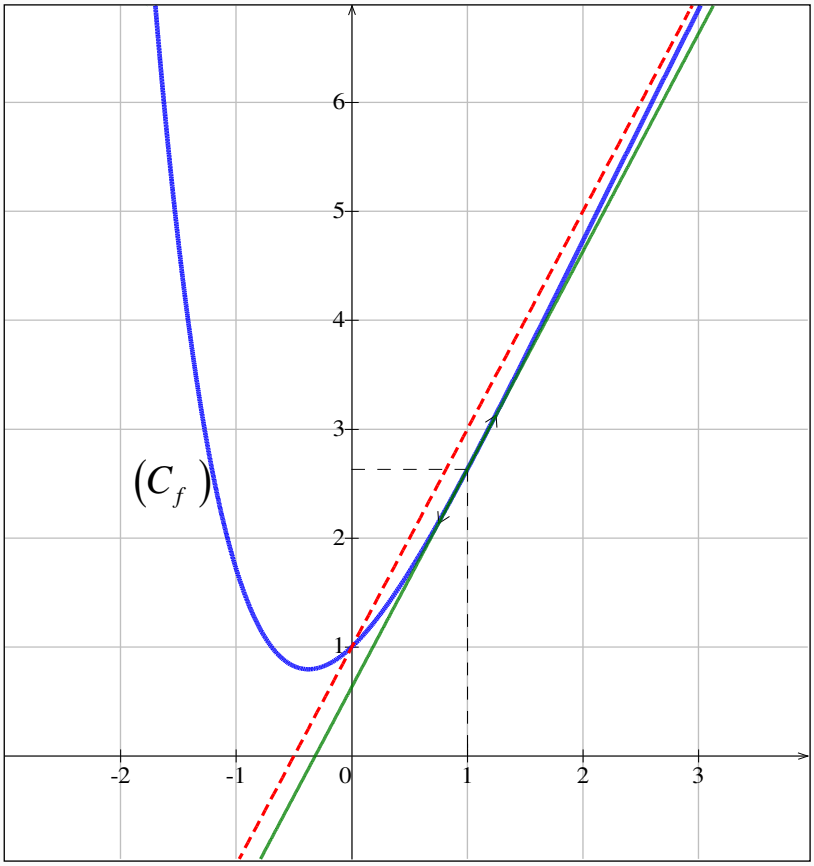
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

لدينا : $y = f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $y = 2x+1-\frac{1}{e}$ هي معادلة لـ (T).

4) الرسم :



5) المناقشة البيانية :

$x = (1-m)e^x$ تكافئ $xe^{-x} = (1-m)$ تكافئ $-xe^{-x} = m-1$ تكافئ $2x+1-xe^{-x} = 2x+1+m-1$

أي $2x+1-xe^{-x} = 2x+m$ أي : $f(x) = 2x+m$ ⟵ مناقشة مائلة .

إذا كان $m \in \left]-\infty;1-\frac{1}{e}\right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

إذا كان $m = 1-\frac{1}{e}$ المعادلة تقبل حل مضاعف .

إذا كان $m \in \left]1-\frac{1}{e};1\right[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين تماما.

إذا كان $m = 1$ فإن المعادلة تقبل حل واحد معدوم .

إذا كان $m \in]1;+\infty[$ فإن المعادلة تقبل حل واحد سالب تماما .

6) أ- تعيين دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من أجل $x = 1$.

الدالة $x \mapsto xe^{-x}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالتالي فدالتها الأصلية التي تنعدم عند 1 هي الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$

كما يلي : $F(x) = \int_1^x te^{-t}\,dt$.

نضع $u(t) = t$ ، $v'(t) = e^{-t}$ و منه $u'(t) = 1$ ، $v(t) = -e^{-t}$ ، و بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا:

$$F(x) = \left[-te^{-t}\right]_1^x - \int_1^x -e^{-t}\,dt = -xe^{-x}+e^{-1}-\int_1^x -e^{-t}\,dt = -xe^{-x}+e^{-1}-e^{-x}+e^{-1} = (-x-1)e^{-x}+2e^{-1}$$

و منه الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من أجل $x = 1$ هي : $F(x) = (-x-1)e^{-x}+2e^{-1}$.

ب- حساب العدد A مساحة الحيز : $A = \int_1^3 \left((2x+1)-f(x)\right)dx = \int_1^3 xe^{-x}dx = F(3)-F(1) = 2e^{-1}-4e^{-3}(u.a)$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

حل مقترح التمرين الأول

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$.

1) حساب الحدود u_1، u_2 و u_3:

$$u_1 = u_0 + \ln(3) = \ln 3 \quad ، \quad u_2 = u_1 + \ln\left(\frac{5}{3}\right) = \ln 3 + \ln 5 - \ln 3 = \ln 5$$

$$u_3 = u_2 + \ln\left(\frac{7}{5}\right) = \ln 5 + \ln 7 - \ln 5 = \ln 7$$

2) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n، $2n+3 > 2n+1$ ومنه $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$. (كذلك لاحظ أن: $\frac{2n+3}{2n+1} - 1 = \frac{2}{2n+1}$).

- إتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$.

ونعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ ومنه $\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) > \ln 1$ أي $\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) > 0$.

إذن: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = 2n+1$

أ- البرهان بالتراجع أن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $e^{u_n} = v_n$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n: $e^{u_n} = v_n$"

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$، لدينا $u_0 = 1$ ومنه $v_0 = e^{u_0} = 1$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $e^{u_n} = v_n$، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $e^{u_{n+1}} = v_{n+1}$.

لدينا $e^{u_{n+1}} = e^{u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)} = v_n \times \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) = (2n+1) \times \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) = 2n+3$ ومنه: $e^{u_{n+1}} = v_{n+1}$.

وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $e^{u_n} = v_n$.

بـ- كتابة عبارة u_n بدلالة n:

من أجل كل عدد طبيعي n: $e^{u_n} = v_n$ ومنه $u_n = \ln(v_n) = \ln(2n+1)$.

حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \ln(2n+1) = +\infty$.

4) حساب المجموعين:

لدينا: $S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right) = \ln v_1 - \ln v_0 + \ln v_2 + \ln v_1 + \ldots + \ln v_n - \ln v_{n-1}$

ومنه: $S_n = -\ln v_0 + \ln v_n = u_n$.

$$T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} \ldots + e^{u_{2018}} = v_{1439} + v_{1440} + \ldots + v_{2018} = \frac{2018 - 1439 + 1}{2}\left(2(1439 + 2018) + 2\right) = 2005640$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

1) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) :

(Δ) يشمل A و $\vec{u}(1;5;-2)$ شعاع توجيه له ومنه فتمثيل وسيطي لـ (Δ) من الشكل : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 5t-2 \\ z = -2t+1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

2) تبيان أن المستويين (P_1) و (P_2) متقاطعان :

لدينا : $(P_1): -x+y+2z+1=0$ و $(P_2): -3x+y+z+4=0$.

ومنه : $\overrightarrow{n_1}(-1;1;2)$ شعاع ناظمي لـ (P_1) و $\overrightarrow{n_2}(-3;1;1)$ شعاع ناظمي لـ (P_2).

$\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$ ليسا مرتبطين خطيا لأن $y_{\overrightarrow{n_1}} = y_{\overrightarrow{n_1}}$ لكن $x_{\overrightarrow{n_1}} \neq x_{\overrightarrow{n_1}}$ ، وبالتالي المستويان (P_1) و (P_2) متقاطعان وفق مستقيم .

- التحقق أن تقاطع (P_1) و (P_2) هو المستقيم (Δ) :

يكفي إثبات أن $(\Delta) \subset (P_1)$ و $(\Delta) \subset (P_2)$.

بتعويض التمثيل الوسيطي لـ (Δ) في معادلة (P_1) نجد : $-(t+1)+5t-2+2(-2t+1)+1=0$ (محققة)

ومنه $(\Delta) \subset (P_1)$.

بتعويض التمثيل الوسيطي لـ (Δ) في معادلة (P_2) نجد : $-3(t+1)+5t-2+(-2t+1)+4=0$ (محققة)

ومنه $(\Delta) \subset (P_2)$.

3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل $B(-1;4;0)$ و يعامد كلا من (P_1) و (P_2) :

$(Q) \perp (P_1)$ و $(Q) \perp (P_2)$ معناه : $(Q) \perp (\Delta)$ ومنه $\vec{u}(1;5;-2)$ شعاع ناظمي لـ (Q) .

وبالتالي معادلة لـ من الشكل : $x+5y-2z+d=0$.

$B \in (Q)$ يعني أن : $-1+5\times 4-2\times 0+d=0$ أي $d=-19$ ومنه ينتج : $(Q): x+5y-2z-19=0$.

- تقاطع المستويات الثلاثة (P_1) ، (P_2) و (Q).

لدينا : $(P_1) \cap (P_2) = (\Delta)$ ومنه يكفي دراسة تقاطع (Δ) و (Q).

نحل الجملة : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 5t-2 \\ z = -2t+1 \\ x+5y-2z-19=0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ ، نجد : $(t+1)+5(5t-2)-2(-2t+1)-19=0$ أي : $t=1$.

إذن $E(2;3;-1)$ هي نقطة تقاطع المستويات الثلاثة (P_1) ، (P_2) و (Q).

4) لتكن $E(2;3;-1)$ و $H(0;3;-2)$ نقطتان من الفضاء .

أ- التحقق أن H هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P_1) .

يكفي إثبات أن $H \in (P_1)$ و أن $\overrightarrow{BH}$ و $\overrightarrow{n_1}$ مرتبطين خطيا .

لدينا : $H \in (P_1)$ لأن : $0+3-4+1=0$. ولدينا : $\overrightarrow{BH}(1;-1;-2)$ ومنه $\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{n_1}$

إذن : $H \in (P_1)$ و $\overrightarrow{BH}$ و $\overrightarrow{n_1}$ مرتبطان خطيا و بالتالي H هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P_1) .

ب- طبيعة المثلث EBH :

لدينا : $H \in (P_1)$ و $E \in (P_1)$ و $B \notin (P_1)$ و H هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P_1) وبالتالي المثلث EBH قائم في H .

- حساب V حجم رباعي الوجوه $AEBH$.

حيث : $V = \frac{1}{3} \times S_{EBH} \times h$. $h = d(A;(Q))$. (يمكن التحقق أن (Q) هو نفسه (EBH)).

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$h = d\left(A;(Q)\right) = \frac{|1+5(-2)-2-19|}{\sqrt{1^2+5^2+(-2)^2}} = \frac{30}{\sqrt{30}} = \sqrt{30} \quad \text{و} \quad S_{EBH} = \frac{1}{2}EH \times HB = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

ومنه : $V = \frac{1}{3} \times S_{EBH} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{30}}{2} \times \sqrt{30} = 5.uv$.

حل مقترح التمرين الثالث

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(\overline{z}-4+i\right)\left(z^2-4z+5\right)=0$

$\left(\overline{z}-4+i\right)\left(z^2-4z+5\right)=0$ تكافئ $\overline{z}-4+i=0$ أو $z^2-4z+5=0$.

$\overline{z}-4+i=0$ معناه : $\overline{z}=4-i$ ، أي : $z=4+i$.

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-4z+5=0$:

لدينا : $\Delta=(-4)^2-4\times1\times5=-4=4i^2=(2i)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_1=\frac{4-2i}{2}=2-i$ و $z_2=\frac{4+2i}{2}=2+i$.

إذن مجموعة حلول المعادلة $\left(\overline{z}-4+i\right)\left(z^2-4z+5\right)=0$ هي : $S=\{4+i;2+i;2-i\}$.

II) 1) التحقق أن : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=i$.

لدينا : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{4+i-(2+i)}{2-i-(2+i)}=\frac{2}{-2i}=\frac{1}{-i}=i$ وهو المطلوب.

• تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا .

لدينا : $\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n=i^n=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n=e^{i\frac{n\pi}{2}}$ ،

$\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ تخيلي صرف معناه : $\arg\left(e^{i\frac{n\pi}{2}}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ، أي : $\frac{n\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ أي : $n=2k+1$ ،مع $k\in\mathbb{N}$

2) تبيان أن المثلث ABD متقايس الأضلاع :

$$\begin{cases}|z_D-z_A|=|z_B-z_A| \\ \arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z})\end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases}\left|\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right|=1 \\ \arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

تكافئ $\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه المثلث ABD متقايس الأضلاع .

• حساب z_D.

لدينا : $\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $z_D=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_A)+z_A$ أي : $z_D=3+\left(1+\sqrt{3}\right)i$.

3) حساب z_G:

G مركز ثقل المثلث ABD معناه G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(D,1)\}$ ومنه $z_G=\frac{z_A+z_B+z_D}{3}$

ومنه : $z_G=3+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)i$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

• S التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول G إلى D ، يعني : $z_D - z_A = a(z_G - z_A)$ أي : $a = \dfrac{z_D - z_A}{z_G - z_A}$

ومنه : $a = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ومنه نسبة التشابه هي : $|a| = \sqrt{3}$ ، وزاوية للتشابه هي : $\arg(a) = \dfrac{\pi}{6}$.

4) تعيين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z (M تختلف عن C) بحيث : $\arg\left(\dfrac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi\ ;\ (k \in \mathbb{Z})$.

لدينا : $\arg\left(\dfrac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi\ ;\ (k \in \mathbb{Z})$ يعني : $(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MG}) = \pi + 2k\pi\ ;\ (k \in \mathbb{Z})$.

ومنه المجموعة (Γ) هي قطعة المستقيم المفتوحة $]CG[$.

حل مقترح التمرين الرابع

I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = \dfrac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1$.

• حساب $g(1)$: $g(1) = 1 - (\ln 1)^2 - \ln 1 - 1 = 0$

• إشارة $g(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

II) f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{1+x\ln x}$

1) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\dfrac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right) = -\infty$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (1+\ln x) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (1+x\ln x) = 1 \end{cases}$ (تذكر أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x = 0$)

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

• تبيان أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x} + \ln x}\right) = 0$ ، (تذكر أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$)

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

2) أ ـ تبيان أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x\ln x) - (\ln x + 1)(1+x\ln x)}{(1+x\ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x} + \ln x - (1+\ln x)^2}{(1+x\ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1}{(1+x\ln x)^2}$$

ومنه : من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$.

بـ ـ إتجاه تغير الدالة f : إشارة من إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الدالة f متزايدة على المجال $]0;1]$ و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

3) تبيان أن $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل :

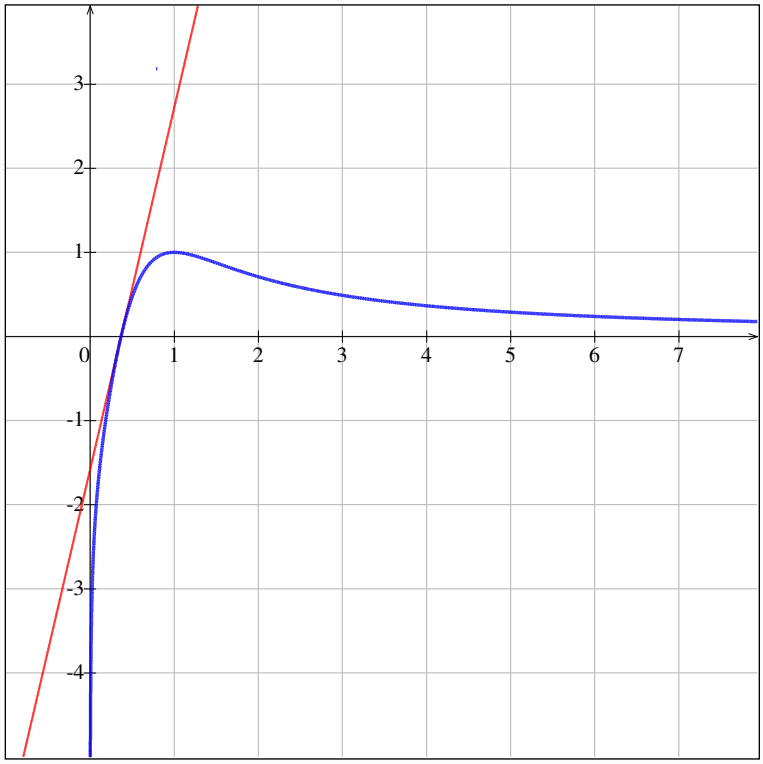
لتعيين نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل ، نحل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة : $f(x)=0$.

$f(x)=0$ تكافئ $\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}=0$ تكافئ $1+\ln x=0$ تكافئ $\ln x=-1$ أي : $x=\frac{1}{e}$.

معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{e}$:

لدينا : $(T):y=f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x-\frac{1}{e}\right)+f\left(\frac{1}{e}\right)$ و منه $(T):y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$.

الرسم :



4) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ حلين متمايزين .

$(e-1)f(x)=e^2x-me$ تكافئ $f(x)=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}m$

حلول المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (T_m) ذي المعادلة $y=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}m$.

من البيان : المعادلة تقبل حلين متمايزين لما $-\frac{e}{e-1}m<-\frac{e}{e-1}$ أي $m>1$.

III) n عدد طبيعي حيث $n>1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$.

1) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$: $I_n=\ln(1+n\ln n)$.

لدينا : $I_n=\int_1^n f(x)dx=\int_1^n\left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)dx=\left[\ln(1+x\ln x)\right]_1^n=\ln(1+n\ln n)$.

(لاحظ أن f من الشكل : $\frac{u'}{u}$)

2) دراسة إتجاه تغير المتتالية (I_n) :

ندرس إشارة الفرق : $I_{n+1}-I_n$

لدينا : $I_{n+1}-I_n=\int_1^{n+1}f(x)dx-\int_1^n f(x)dx=\int_1^n f(x)dx+\int_n^{n+1}f(x)dx-\int_1^n f(x)dx=\int_n^{n+1}f(x)dx$

و من أجل $n>1$: $\int_n^{n+1}f(x)dx>0$ و بالتالي المتتالية (I_n) متزايدة تماما .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 13$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

1) أ ـ برهن بالبرهان بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.

بـ ـ أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و استنتج أنها متقاربة .

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(u_n - 1)$.

ـ أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

3) أكتب v_n بدلالة n ، ثم بيّن أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ و أحسب عندئذ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4) بيّن أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $(u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \ldots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$.

التمرين الثاني (4ن)

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 و كرية واحدة تحمل الرقم 2 و سبع كريات خضراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 و ثلاث كريات تحمل الرقم 2 . (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس)

نسحب عشوائيا كرتين من الكيس في آن واحد و نعتبر الحادثتين A و B حيث :

A : "سحب كريتين من نفس اللون" ، B : "سحب كريتين تحملان نفس الرقم"

1) بيّن أن إحتمال الحادثة A هو $P(A) = \frac{31}{66}$ و احسب إحتمال الحادثة B .

2) علما أن الكريتين المسحوبتين من نفس اللون ، ما إحتمال أن تحملا نفس الرقم ؟

3) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس .

عرّف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي و أحسب أمله الرياضياتي .

التمرين الثالث (5ن)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z - i)(z^2 - 4z + 5) = 0$.

II) نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A ، B و C التي لاحقاتها : i ، $2 - i$ و $2 + i$ على الترتيب .

1) أكتب العدد المركّب $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2) من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $2 + i$ نضع : $f(z) = \frac{iz - 1 - 2i}{2z - 4 - 2i}$.

أ ـ عيّن المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق $|f(z)| = \frac{1}{2}$.

بـ ـ بيّن أن العدد $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب .

3) نعتبر الدوران r الذي مركزه النقطة C و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ ـ عيّن لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r و بيّن أن النقط D ، A و C في إستقامية .

بـ ـ استنتج أن النقطة D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيين عناصره المميزة .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

التمرين الرابع(7ن)

f الدالة العددية المعرفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)$ ثم فسّر النتائج بيانيا .

بـ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) نسمي (Γ) المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية النيبيرية " ln " في المعلم السابق .

أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا .

بـ- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ) .

4) أرسم بعناية المنحنى (Γ) ثم المنحنى (C_f) .

5) H الدالة المعرّفة على المجال $]3;+\infty[$ بـ : $H(x)=\int_3^x \ln(t)dt$ حيث t متغيّر حقيقي موجب تماما .

أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عيّن عبارة $H(x)$ بدلالة x .

بـ- أحسب A مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين :

$x=3$ و $x=4$.

6) g الدالة المعرّفة على $]-1;0[\cup]-\infty;-1[$ بـ : $g(x)=f(-2x)$.

دون حساب عبارة $g(x)$ حدّد إتجاه تغيّر الدالة g على مجموعة تعريفها .

الموضوع الثاني

التمرين الأول(4ن)

يحتوي صندوق على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها كريتان تحملان الرقم 0 و ثلاث تحمل الرقم 1 و الكريات الأخرى تحمل الرقم 2 . نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق .

ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة .

1) عرّف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

2) بيّن أن إحتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا هو $\dfrac{7}{24}$.

3) نسحب الآن من الصندوق كريتين على التوالي دون إرجاع .

ما إحتمال الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أن جداؤهما زوجي ؟

التمرين الثاني(4ن)

نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $[4;7]$ بـ : $f(x)=\sqrt{x+2}+4$

1) أ- بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7]$.

بـ- استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7]$ فإن $f(x)\in[4;7[$.

2) برهن أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فإن $f(x)-x=\dfrac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$.

ثم استنتج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فإن $f(x)-x>0$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

أ ـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 \leq u_n < 7$.

بـ ـ استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم بيّن أنها متقاربة .

4) أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $7 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(7 - u_n)$.

بـ ـ استنتج أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < 7 - u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الثالث(5ن)

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها z_A، z_B و z_C على الترتيب حيث : $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -2z_A$.

1) أ ـ أكتب العدد المركّب z_A على الشكل الأسي .

بـ ـ أحسب العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$.

2) أ ـ T الإنسحاب الذي يحول A إلى C ، عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالإنسحاب T.

بـ ـ استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$.

3) أكتب العدد المركب $z_C - z_A$ على الشكل الأسي .

4) جد قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا .

5) لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحقتها z حيث تختلف عن A و تختلف عن C .

عيّن (E) مجموعة النقط M التي يكون من أجلها $\frac{z_A - z}{z_C - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

التمرين الرابع(7ن)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$. تؤخذ وحدة الطول $2cm$.

(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرّفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$g(x) = e^x - ex \quad \text{و} \quad f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 .$$

1) أ ـ أدرس إتجاه تغيّر الدالة g .

بـ ـ إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f .

3) أحسب كلا من $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

4) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$.

5) أرسم على المجال $[0;2]$ المنحنيين (C_f) و (C_g) في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. (يعطى $e^2 - 2e \approx 2$)

6) أحسب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) .

7) h الدالة المعرّفة على المجال $[-2;2]$ كما يلي : $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$ وليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ ـ بيّن أن الدالة h زوجية .

بـ ـ من أجل $x \in [0;2]$ أحسب $h(x) + f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

حل مقترح التمرين الأول

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 13$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

1) أ ـ البرهان بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$، لدينا $u_0 = 13$ ومنه $u_0 > 1$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n > 1$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} > 1$.

لدينا حسب الفرض $u_n > 1$ ومنه $\frac{1}{5}u_n > \frac{1}{5}\times 1$ ومنه $\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} > \frac{1}{5} + \frac{4}{5}$ أي $u_{n+1} > 1$. وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > 1$.

بـ ـ دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - u_n = -\frac{4}{5}u_n + \frac{4}{5} = \frac{4}{5}(1-u_n)$.

ولدينا: $u_n > 1$ من أجل كل عدد طبيعي n ، ومنه $1 - u_n < 0$ أي $u_{n+1} - u_n < 0$

وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

ـ إستنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة:

المتتالية (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل إذن فهي متقاربة.

2) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 1)$.

ـ إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n،

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln\left(\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - 1\right) = \ln\left(\frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5}\right) = \ln\left(\frac{1}{5}(u_n - 1)\right) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \ln(u_n - 1) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) + v_n .$$

ومنه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$ وحدّها الأول: $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln 12$.

3) كتابة v_n بدلالة n:

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = v_0 + nr$ ومنه $v_n = \ln 12 + n\ln\left(\frac{1}{5}\right)$ أي: $v_n = \ln 12 + \ln\left[\left(\frac{1}{5}\right)^n\right] = \ln\left(\frac{12}{5^n}\right)$

- تبيان أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = \ln(u_n - 1)$ ومنه $e^{v_n} = u_n - 1$ ومنه $u_n = 1 + e^{v_n}$

أي $u_n = 1 + e^{\ln\left(\frac{12}{5^n}\right)} = 1 + \frac{12}{5^n}$.

- حساب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{12}{5^n}\right) = 1 \quad \text{لأن:} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{12}{5^n}\right) = 0 .$$

4) تبيان أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $(u_0-1)\times(u_1-1)\times\ldots\times(u_n-1)=\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n، $e^{v_n}=u_n-1$ ومنه

$$(u_0-1)\times(u_1-1)\times\ldots\times(u_n-1)=e^{v_0}\times e^{v_1}\times\ldots\times e^{v_n}=e^{v_0+v_1+\ldots+v_n}$$

و $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n=\left(\frac{n+1}{2}\right)(v_0+v_n)=\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\ln 12+\ln\frac{12}{5^n}\right)=\left(\frac{n+1}{2}\right)\ln\left(\frac{12^2}{5^n}\right)=(n+1)\ln\left(\frac{12^2}{5^n}\right)^{\frac{1}{2}}$

أي : $S_n=\ln\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$. إذن : $(u_0-1)\times(u_1-1)\times\ldots\times(u_n-1)=e^{S_n}=e^{\ln\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}}=\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$

حل مقترح التمرين الثاني

عدد السحبات الممكنة : $C_{12}^2=\frac{12!}{2!(12-2)!}=66$.

1) تبيان أن إحتمال الحادثة A هو $P(A)=\frac{31}{66}$:

A : "سحب كريتين من نفس اللون"

$$P(A)=\frac{C_5^2+C_7^2}{66}=\frac{10+21}{66}=\frac{31}{66}$$

- حساب إحتمال الحادثة B :

B : "سحب كريتين تحملان نفس الرقم"

$$P(B)=\frac{C_8^2+C_4^2}{66}=\frac{28+6}{66}=\frac{34}{66}=\frac{17}{33}$$

2) علما أن الكريتين المسحوبتين من نفس اللون ، ما إحتمال أن تحملا نفس الرقم ؟

لدينا : $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ و $P(A\cap B)=\frac{C_4^2+C_3^2+C_4^2}{66}=\frac{15}{66}$ ومنه $P_A(B)=\frac{\frac{15}{66}}{\frac{31}{66}}=\frac{15}{31}$.

3) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس .

لدينا : $X\in\{3;4;5\}$.

$P(X=3)=\frac{C_5^2}{66}=\frac{10}{66}$ ، $P(X=4)=\frac{C_5^1\times C_7^1}{66}=\frac{35}{66}$ ، $P(X=5)=\frac{C_7^2}{66}=\frac{21}{66}$

قانون الإحتمال:

X_i	3	4	5
$P(X=X_i)$	$\frac{10}{66}$	$\frac{35}{66}$	$\frac{21}{66}$

بـ- حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X)=3\times\frac{10}{66}+4\times\frac{35}{66}+5\times\frac{21}{66}=\frac{275}{66}$$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

I) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-i)(z^2-4z+5)=0$

$(z-i)(z^2-4z+5)=0$ تكافئ $z=i$ أو $z^2-4z+5=0$.

لنحل $\mathbb{C}$ في المعادلة $z^2-4z+5=0$:

لدينا: $\Delta=(-4)^2-4\times1\times5=-4=4i^2=(2i)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما:

$z_1=\dfrac{4+2i}{2}=2+i$ و $z_2=\dfrac{4-2i}{2}=2-i$.

إذن مجموعة حلول المعادلة $(z-i)(z^2-4z+5)=0$ هي: $S=\{2-i;2+i;i\}$.

II) لدينا: $z_A=i$ ، $z_B=2-i$ و $z_C=2+i$.

1) كتابة العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسي:

لدينا: $\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=\dfrac{2+i-i}{2+i-(2-i)}=\dfrac{2}{2i}=\dfrac{1}{i}=-i$ و منه $\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

- استنتاج طبيعة المثلث ABC:

$\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ يكافئ $\begin{cases}\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}\right|=1\\ \arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}\right)=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ /k\in\mathbb{Z}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}AC=BC\\ \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

و منه المثلث ABC قائم في C و متساوي الساقين.

2) من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $2+i$ نضع: $f(z)=\dfrac{iz-1-2i}{2z-4-2i}$.

أ- تعيين المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق: $|f(z)|=\dfrac{1}{2}$:

$\left|\dfrac{iz-1-2i}{2z-4-2i}\right|=\dfrac{1}{2}$ يكافئ $\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{i(z+i-2)}{z-2-i}\right|=\dfrac{1}{2}$ يكافئ $\left|\dfrac{z-(2-i)}{z-(2+i)}\right|=1$ يكافئ $|z-z_B|=|z-z_C|$

و منه المجموعة (E) هي محور القطعة $[BC]$.

بـ- تبيان أن العدد $\left[f(i)\right]^{1440}$ حقيقي موجب:

لدينا: $f(i)=\dfrac{i^2-1-2i}{2i-4-2i}=\dfrac{-2-2i}{-4}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i=\dfrac{1}{2}(1+i)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

ومنه $\left[f(i)\right]^{1440}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{1440}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1440}e^{i360\pi}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1440}e^{i(0+180\times2\pi)}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1440}$

3) r الدوران الذي مركزه النقطة C وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

أ- تعيين لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r:

الكتابة المختصرة للدوران r: $z'-z_C=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_C)$

ومنه $z_D-z_C=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B-z_C)$ ومنه $z_D=i(z_B-z_C)+z_C$ أي: $z_D=i(-2i)+2+i=4+i$.

- تبيان أن النقط D ، A و C في إستقامية:

لدينا: $\dfrac{z_D-z_C}{z_A-z_C}=\dfrac{(4+i)-(2+i)}{i-(2+i)}=\dfrac{2}{-2}=-1$ وهذا يعني أن $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{CA}$ ومنه النقط D ، A و C في إستقامية.

بـ ـ استنتاج أن النقطة D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيين عناصره المميزة :

لدينا : $\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = -1$ ومنه $z_D - z_C = -(z_A - z_C)$ وبالتالي النقطة D هي صورة A بتحاك مركزه C ونسبته -1 .

(أو بدوران مركزه C وزاويته π أو بتناظر مركزي بالنسبة لـ C أو بتشابه مباشر مركزه C ونسبته 1 وزاويته π)

حل مقترح التمرين الرابع

f الدالة العددية المعرفة على $]2;+\infty[\cup]0;2[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$.

1) أ ـ حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[\frac{1}{x-2} + \ln x\right] = -\infty$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (حامل محور التراتيب) مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \left[\frac{1}{x-2} + \ln x\right] = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \left[\frac{1}{x-2} + \ln x\right] = +\infty$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

بـ ـ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{x-2} + \ln x\right] = +\infty$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]2;+\infty[\cup]0;2[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]2;+\infty[\cup]0;2[$:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x} = \frac{-x + (x-2)^2}{x(x-2)^2} = \frac{-x + x^2 - 4x + 4}{x(x-2)^2} = \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x-2)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x^2 - 5x + 4$ لكون $x(x-2)^2 > 0$ من أجل كل x من $]2;+\infty[\cup]0;2[$.

- إشارة $f'(x)$:

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	‖	−	0	+	

ومنه : الدالة f متزايدة على المجالين $]4;+\infty[$ و $]0;1[$ ومتناقصة على المجالين $[2;4]$ و $[1;2[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	-1	↘	‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2} + \ln 4$	↗	$+\infty$

3) أ ـ $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \ln x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x-2}\right) = 0$.

التفسير : المنحنى (Γ) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

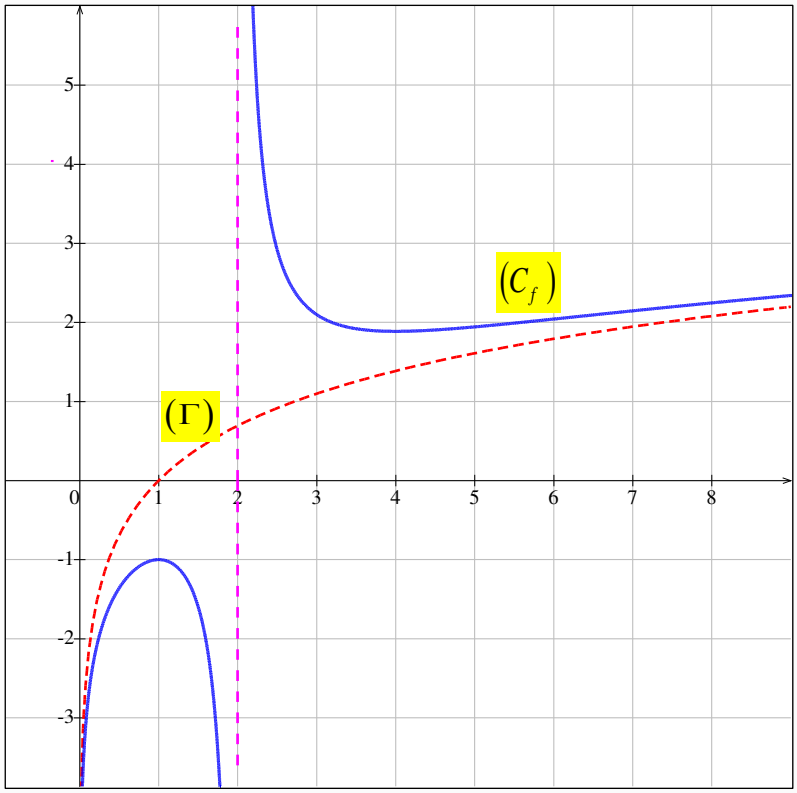
بـ ـ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ) :

لدينا : $f(x) - \ln x = \frac{1}{x-2}$ ومنه إشارة الفرق $f(x) - \ln x$ من إشارة $x - 2$.

على المجال $]0;2[$: (C_f) يقع تحت (Γ) وعلى المجال $]2;+\infty[$: (C_f) يقع فوق (Γ) .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4) الرسم :



5) H الدالة المعرفة على المجال $]3;+\infty[$ بـ : $H(x)=\int_3^x \ln(t)dt$ حيث t متغير حقيقي موجب تماما .

أ- تعيين عبارة $H(x)$ بدلالة x .

نضع $u(t)=\ln(t)$ ، $v'(t)=1$ و منه $u'(t)=\frac{1}{t}$ ، $v(t)=t$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا :

$$H(x)=[t\ln t]_3^x-\int_3^x \frac{1}{t}\times t\,dt=x\ln x-3\ln 3-\int_3^x dt=x\ln x-3\ln 3-[t]_3^x$$

ومنه $H(x)=x\ln x-3\ln 3-(x-3)$ أي : $H(x)=-x+3+x\ln x-3\ln 3$.

بـ- حساب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين : $x=3$ و $x=4$.

$$A=\int_3^4 f(x)dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}+\ln x\right)dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}\right)dx+\int_3^4 \ln x dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}\right)dx+H(4)=\left[\ln|x-2|\right]_3^4+H(4)$$

ومنه $A=\ln 2+4\ln 4-4-3\ln 3+3$ أي : $A=(-1+9\ln 2-3\ln 3)(u.a)$.

6) g الدالة المعرفة على $]-1;0[\cup]-\infty;-1[$ بـ : $g(x)=f(-2x)$.

الدالة g قابلة للإشتقاق على $]-1;0[\cup]-\infty;-1[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق ، و $g'(x)=-2f'(-2x)$.

إتجاه تغير الدالة g :

$g'(x)>0$ تكافئ $f'(-2x)<0$ تكافئ : $\begin{cases}1<-2x<2\\ \text{أو}\\ 2<-2x<4\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}-1<x<-\frac{1}{2}\\ \text{أو}\\ -2<x<-1\end{cases}$.

ومنه الدالة g متزايدة على $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ و متناقصة على $]-2;-1[\cup\left]-\frac{1}{2};0\right[\cup]-\infty;-2[$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

حل مقترح التمرين الأول

عدد السحبات الممكنة : $C_{10}^{3}=\dfrac{10!}{3!(10-3)!}=120$.

1) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة .

لدينا : $X\in\{0;1;2;4;8\}$.

$P(X=0)=\dfrac{C_2^1\times C_8^2+C_2^2\times C_8^1}{120}=\dfrac{64}{120}$ ، $P(X=1)=\dfrac{C_3^3}{120}=\dfrac{1}{120}$ ،

$P(X=2)=\dfrac{C_3^2\times C_5^1}{120}=\dfrac{15}{120}$

$P(X=4)=\dfrac{C_5^2\times C_3^1}{120}=\dfrac{30}{120}$ ، $P(X=8)=\dfrac{C_5^3}{120}=\dfrac{10}{120}$.

قانون الإحتمال:

X_i	0	1	2	4	8
$P(X=X_i)$	$\dfrac{64}{120}$	$\dfrac{1}{120}$	$\dfrac{15}{120}$	$\dfrac{30}{120}$	$\dfrac{10}{120}$

ـ حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$E(X)=0\times\dfrac{64}{120}+1\times\dfrac{1}{120}+2\times\dfrac{15}{120}+4\times\dfrac{30}{120}+8\times\dfrac{10}{120}=\dfrac{231}{120}$.

2) تبيان أن إحتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا هو $\dfrac{7}{24}$.

A : "سحب ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا"

$P(A)=\dfrac{C_7^3}{120}=\dfrac{35}{120}=\dfrac{7}{24}$

3) عدد السحبات الممكنة $A_{10}^{2}=90$.

B : "سحب كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي"

C : "سحب كريتين تحملان رقمين جداؤهما زوجي"

$P(B)=\dfrac{2A_2^1\times A_3^1+2A_3^1\times A_5^1}{90}=\dfrac{42}{90}$ ، $P(C)=\dfrac{2A_3^1\times A_7^1+A_7^2}{90}=\dfrac{84}{90}$ ، $P(B\cap C)=\dfrac{A_7^2}{90}=\dfrac{42}{90}$

إحتمال الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أن جداؤهما زوجي :

$$P_C(B)=\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{42}{90}}{\frac{84}{90}}=\frac{42}{84}=\frac{1}{2}$$

حل مقترح التمرين الثاني

f الدالة المعرّفة على المجال $]4;7[$ بـ : $f(x)=\sqrt{x+2}+4$

1) أ ـ تبيان أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]4;7[$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]4;7[$ و $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$

و لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]4;7[$ ، $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]4;7[$.

بـ- استنتاج أنه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فإن $f(x) \in [4;7[$.

لدينا : الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7[$ ومنه من أجل كل $x \in [4;7[$ ، $f(x) \in [f(4);f(7)[$

أي : $f(x) \in [4+\sqrt{6};7[$ ولدينا $[4+\sqrt{6};7[\subset [4;7[$ ومنه : من أجل كل $x \in [4;7[$ ، $f(x) \in [4;7[$

2) لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$:

$$f(x)-x = \sqrt{x+2}+4-x = \frac{\left[\sqrt{x+2}+(4-x)\right]\left[\sqrt{x+2}-(4-x)\right]}{\sqrt{x+2}-(4-x)} = \frac{x+2-(4-x)^2}{x-4+\sqrt{x+2}} = \frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$$

الاستنتاج :

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$: $f(x)-x = \frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}} = \frac{(7-x)(x-2)}{x-4+\sqrt{x+2}}$

ومن أجل كل $x \in [4;7[$ ، $x-4+\sqrt{x+2}>0$ و $(7-x)(x-2)>0$ ومنه $f(x)-x>0$.

3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 \le u_n < 7$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $4 \le u_n < 7$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0 = 4$ ومنه $4 \le u_0 < 7$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $4 \le u_n < 7$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $4 \le u_{n+1} < 7$.

لدينا حسب الفرض $4 \le u_n < 7$ ومنه $4 \le f(u_n) < 7$ (حسب نتيجة السؤال 1 بـ) أي $4 \le u_{n+1} < 7$.

وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 \le u_n < 7$.

بـ- إستنتاج إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 \le u_n < 7$ و $u_{n+1}-u_n = f(u_n)-u_n$ ومنه $u_{n+1}-u_n > 0$

وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

▪ تبرير تقارب المتتالية (u_n) :

المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 7 ، إذن فهي متقاربة .

4) أ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $7-u_{n+1} \le \frac{1}{4}(7-u_n)$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n :

$$7-u_{n+1} = 7-\sqrt{u_n+2}-4 = 3-\sqrt{u_n+2} = \frac{\left(3-\sqrt{u_n+2}\right)\left(3+\sqrt{u_n+2}\right)}{3+\sqrt{u_n+2}} = \frac{7-u_n}{3+\sqrt{u_n+2}} .$$

ومن جهة أخرى : $4 \le u_n < 7$ يكافئ $\frac{1}{3+\sqrt{u_n+2}} < \frac{1}{4}$ ومنه $7-u_{n+1} < \frac{1}{4}(7-u_n)$.

بـ- استنتاج أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < 7-u_n \le 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 7-u_n \le 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0 = 4$ و $7-u_0 = 3$ منه $0 < 7-u_0 \le 3\left(\frac{1}{4}\right)^0$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $0<7-u_n\le 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، ونبرهن صحة $P(n+1)$

أي $0<7-u_{n+1}\le 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

لدينا حسب الفرض $0<7-u_n\le 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ولدينا $7-u_{n+1}<\frac{1}{4}(7-u_n)$ منه $0<7-u_{n+1}\le 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<7-u_n\le 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

(يمكن إستخدام طريقة أخرى غير البرهان بالتراجع)

ـ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<7-u_n\le 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}(7-u_n)=0$

أي : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=7$.

حل مقترح التمرين الثالث

$z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2z_A$.

1) أ ـ كتابة العدد المركب z_A على الشكل الأسي :

لدينا : $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ومنه : $|z_A|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

وبفرض θ_A عمدة للعدد المركب z_A ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_A=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\\ \sin\theta_A=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ، ومنه $\arg(z_A)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$

إذن : $z_A=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

بـ ـ حساب العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$:

لدينا : $z_B=\overline{z_A}=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ومنه

$$\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019}+\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019}=e^{i673\pi}+e^{-i673\pi}=e^{i\pi}+e^{-i\pi}=-2$$

2) أ ـ T الإنسحاب الذي يحول A إلى C

تعيين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالإنسحاب T .

الكتابة المختصرة للإنسحاب T : $z'=z+z_C-z_A$ أي : $z'=z-3z_A$

ومنه $z_D=z_B-3z_A$ ومنه $z_D=\overline{z_A}-3z_A$ أي : $z_D=-2\sqrt{2}-4i\sqrt{6}$.

بـ ـ استنتاج طبيعة الرباعي $ABDC$:

لدينا : النقطة D صورة النقطة B بالإنسحاب T الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ أي : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$ ومنه الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع .

3) كتابة العدد المركب z_C-z_A على الشكل الأسي :

لدينا $z_C-z_A=-3z_A$ ومنه $z_C-z_A=6\sqrt{2}e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}$ أي : $z_C-z_A=6\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4) إيجاد قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا :

لدينا : $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n = \left(\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^n = e^{-i\frac{n\pi}{3}}$.

$\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n \in \mathbb{R}$ يكافئ $\frac{-n\pi}{3} = k\pi$ يكافئ $n = -3k$ ، مع $k \in \mathbb{Z}_-$.

5) لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحقتها z حيث تختلف عن A و تختلف عن C .

تعيين (E) مجموعة النقط M التي يكون من أجلها $\frac{z_A - z}{z_C - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

$\left(\frac{z_A - z}{z_C - z}\right) \in \mathbb{R}^+$ يكافئ $k \in \mathbb{Z}$ / $\arg\left(\frac{z_A - z}{z_C - z}\right) = 0 + 2k\pi$ أي $\left(\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MA}\right) = 0 + 2k\pi$.

و بالتالي المجموعة (E) هي : $(AC) - [AC]$ (المستقيم (AC) باستثناء القطعة $[AC]$)

حل مقترح التمرين الرابع

$g(x) = e^x - ex$ و $f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2$

1) أ ـ دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = e^x - e$

من أجل $x \in]-\infty;1]$ ، يكون $e^x \leq e$ أي $g'(x) \leq 0$ و بالتالي الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty;1]$.

من أجل $x \in [1;+\infty[$ ، يكون $e^x \geq e$ أي $g'(x) \geq 0$ و بالتالي الدالة g متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

بـ ـ إستنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

بما أن $g(1) = 0$ و الدالة g متزايدة على المجال $[1;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty;1]$ فإن 0 قيمة حدّية صغرى للدالة g .

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq 0$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^x - ex = g(x)$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) \geq 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$.

3) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x - \frac{1}{2}ex^2\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2}e\right)\right] = +\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = +\infty\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x - \frac{1}{2}ex^2\right) = -\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}ex^2\right) = -\infty\end{cases}$

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↗	$+\infty$

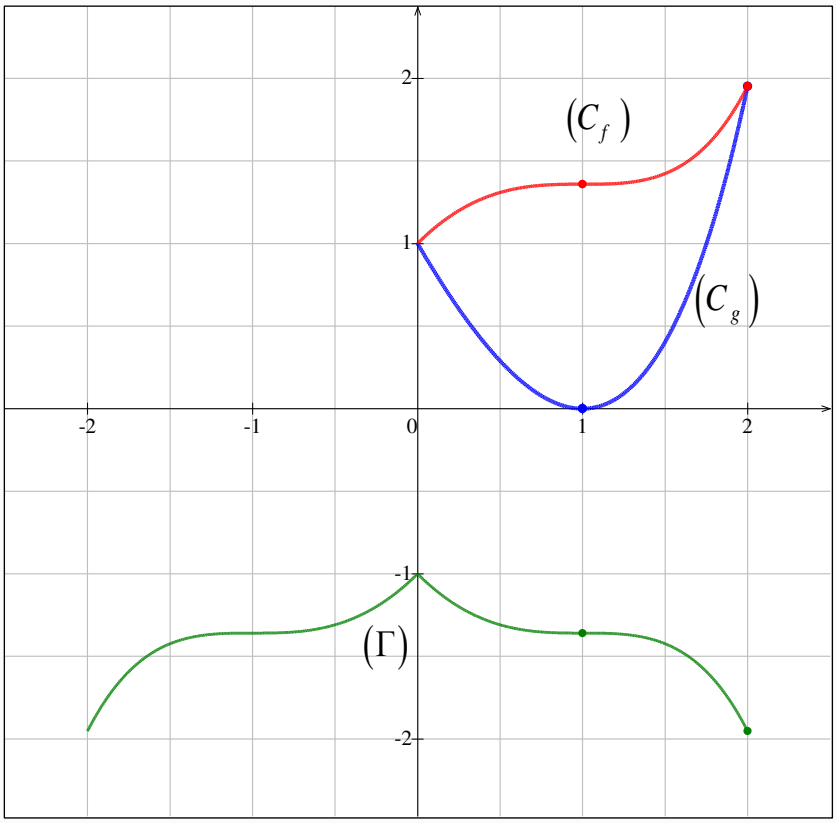
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4) دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$:

من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)-g(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2-(e^x-ex)=-\frac{1}{2}ex^2+ex=ex\left(-\frac{1}{2}x+1\right)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	(C_g) تحت (C_f)		(C_g) يقطع (C_f) في النقطة $A(0;1)$	(C_g) فوق (C_f)	(C_g) يقطع (C_f) في النقطة $B(2;e^2-2e)$	(C_g) تحت (C_f)	

5) الرسم :



6) حساب مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) :

$$A=\int_0^2[f(x)-g(x)]dx=\int_0^2\left(-\frac{1}{2}ex^2+ex\right)dx=\left[-\frac{1}{6}ex^3+\frac{1}{2}ex^2\right]_0^2=-\frac{8}{6}e+2e=\frac{2e}{3}(u.a)$$

ومنه $A=\frac{2e}{3}\times 4=\frac{8e}{3}cm^2$.

7) h الدالة المعرفة على المجال $[-2;2]$ كما يلي : $h(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}$.

أ- من أجل كل $x\in[-2;2]$ ، $-x\in[-2;2]$ و $h(-x)=\frac{1}{2}e(-x)^2-e^{|-x|}=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}=h(x)$.

ومنه الدالة h زوجية .

بـ- من أجل $x\in[0;2]$ ، $h(x)+f(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^x+e^x-\frac{1}{2}ex^2=0$.

استنتاج كيفية رسم (Γ) إنطلاقا من (C_f) :

من أجل $x\in[0;2]$ ، $h(x)=-f(x)$ وبالتالي (Γ) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل على المجال $[0;2]$.

ولرسم (Γ) على المجال $[-2;0]$ نستخدم كون الدالة h زوجية . الرسم : أنظر الشكل .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لا تترددوا بتقديم ملاحظاتكم و إقتراحاتكم

Bekhakhecha.khaled@gmail.com