التمارين

التمارين التطبيقية

1 - الموافقة في $\mathbb{Z}$

1 أ - $45-3=42=7\times 6$ إذن $45\equiv 3[7]$.

ب - $152-2=150=3\times 50$ إذن $152\equiv 2[3]$.

جـ - $29-(-1)=30=6\times 5$ إذن $29\equiv -1[6]$.

د - $137-(-3)=140=5\times 28$ ومنه $137\equiv -3[5]$.

و - $-13-2=-15=5(-3)$ ومنه $-13\equiv 2[5]$.

هـ - $-17-(-7)=-10=10(-1)$ ومنه $-17\equiv -7[10]$

2 $37\equiv x\,[4]$ معناه $37-x=4k$ مع $k\in\mathbb{Z}$ أي

$x=37-4k$ وبالتالي يمكن أخذ $x=37$ ، $x=37-4=33$ ، $x=37-4\times 2=29$ ،

$x=37-4(-1)=42$ ، $x=37-4(-2)=45$

من أجل $k=9$ يكون $x=1$ وهو العدد الطبيعي الوحيد الأصغر تماما من 4 .

3 $n\equiv 4[7]$ معناه $n=7k+4$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

$0\le n\le 30$ معناه $0\le 7k+4\le 30$ أي $-\frac{4}{7}\le k\le \frac{26}{7}$

$k\in\mathbb{Z}$ إذن $k\in\{0,1,2,3\}$ ومنه $n\in\{4,11,18,25\}$.

4 $n\equiv 140[12]$ و $140\equiv 8[12]$ إذن $n\equiv 8[12]$

بما أن $0\le 8<12$ فإن 8 هو باقي قسمة n على 12 .

5 $x\equiv 2[7]$ إذن:

$x+5\equiv 7[7]$ ومنه $x+5\equiv 0[7]$

$x-5\equiv -3[7]$ ومنه $x-5\equiv 4[7]$

$9x\equiv 18[7]$ ومنه $9x\equiv 4[7]$

$-15x\equiv -30[7]$ ومنه $-15x\equiv 5[7]$

$x\equiv 2[7]$ ومنه $x^3\equiv 8[7]$ أي $x^3\equiv 1[7]$.

6 أ - $46\equiv 0[n]$ معناه $46=kn$ مع $k\in\mathbb{N}^*$ إذن n يقسم 46 و $n\ge 2$ أي $n\in\{2,23,46\}$.

ب - $10\equiv 1[n]$ معناه $9=kn$ مع $k\in\mathbb{N}^*$ إذن n يقسم 9 و $n\ge 2$ أي $n\in\{3,9\}$.

جـ - $27\equiv 5[n]$ معناه $22=kn$ مع $k\in\mathbb{N}^*$ إذن n يقسم 22 و $n\ge 2$ أي $n\in\{2,11,22\}$.

7 $a\equiv b\,[n]$ معناه $a-b=kn$ مع $k\in\mathbb{N}$ ويكافئ $am-bm=knm$ ومعناه $am\equiv bm\,[nm]$.

8 لدينا $A-a\equiv 0[n]$ ، $B-b\equiv 0[n]$ و $C-c\equiv 0[n]$ وهذا معناه $A\equiv a[n]$ ، $B\equiv b[n]$ و $C\equiv c[n]$

إذن $ABC\equiv abc\,[n]$ أي $ABC-abc\equiv 0[n]$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

9 $[m]\ n \equiv 0$ معناه $n = km$ مع $k \in \mathbb{N}^*$.

$[n]\ a \equiv b$ معناه $a - b = k'n$ مع $k' \in \mathbb{N}$.

ومنه $a - b = k'km$ إذن $[m]\ a \equiv b$.

10 1) $[10]\ 30757 \equiv 7$ ومنه $[10]\ a \equiv 7$. $[10]\ 15163 \equiv 3$ ومنه $[10]\ b \equiv 3$. $[10]\ 12924 \equiv 4$ ومنه $[10]\ c \equiv 4$.

2) أ - $[10]\ a+b+c \equiv 7+3+4$ ومنه $[10]\ a+b+c \equiv 4$.

ب - $[10]\ a-b+c \equiv 7-3+4$ ومنه $[10]\ a-b+c \equiv 8$.

جـ - $[10]\ a+b-c \equiv 7+3-4$ ومنه $[10]\ a+b-c \equiv 6$.

د - $[10]\ abc \equiv 7\times3\times4$ ومنه $[10]\ abc \equiv 4$.

هـ - $[10]\ ab+ac+bc \equiv 7\times3+7\times4+4\times3$

$[10]\ ab+ac+bc \equiv 1$.

و - $[10]\ a^2+b^2+c^2 \equiv 49+9+16$ ومنه $[10]\ a^2+b^2+c^2 \equiv 4$.

11 الساعة المطلوبة هي n حيث $0 \le n < 24$

أ ــ $[24]\ n \equiv 3+112$ ومنه $[24]\ n \equiv 115$ أي $[24]\ n \equiv 19$ إذن الساعة كانت تشير إلى 19 أي السابعة مساء .

ب ــ $[24]\ n \equiv 3-163$ ومنه $[24]\ n \equiv -160$ أي $[24]\ n \equiv 8$ إذن الساعة كانت تشير إلى الثامنة صباحا .

12 أ ــ $[5]\ 15123 \equiv 3$ ومنه النقطة M تصل إلى النقطة D .

ب ــ $[5]\ -15132 \equiv 3$ ومنه النقطة M تصل كذلك إلى النقطة D .

13 $[5]\ 12 \equiv 2$ ومنه $[5]\ 12^4 \equiv 2^4$ أي $12^4 \equiv 16[5]$

$[5]\ 16 \equiv 1$ ومنه $12^4 \equiv 1[5]$. $1527 = 4\times381+3$

لدينا $12^3 \times \left(12^4\right)^{381} = 12^{4\times381+3}$ ومنه $[5]\ 12^{1527} \equiv 1^{381}\times2^3$ أي $12^{1527} \equiv 3[5]$.

14 $[5]\ 371 \equiv 1$ ومنه $371^{238} \equiv 1[5]$.

$[5]\ 579 \equiv -1$ ومنه $579^{2008} \equiv 1[5]$.

$[5]\ 1429 \equiv -1$ ومنه $1429^{2009} \equiv -1[5]$ بما أن $[5]\ -1 \equiv 4$ فإن $1429^{2009} \equiv 4[5]$.

$[5]\ 1954 \equiv -1$ ومنه $1954^{1962} \equiv 1[5]$.

15 # $[9]\ 1754 \equiv -1$ ومنه $1754^{12} \equiv 1[9]$.

$[9]\ 34572 \equiv 3$ ومنه $34572^{457} \equiv 3^{457}[9]$ ولدينا

$3^{457} = 3\times3^{456} = 3\times9^{228}$ إذن $[9]\ 3^{457} \equiv 0$ وبالتالي $34572^{457} \equiv 0[9]$.

$[9]\ 375 \equiv -3$ ومنه $375^{2009} \equiv (-3)^{2009}[9]$ ولدينا $(-3)^{2009} = -3\times(-3)^{2\times1004} = -3\times9^{1004}$ ومنه

إذن $[9]\ (-3)^{2009} \equiv 0$ $375^{2009} \equiv 0[9]$.

16 أ - $[5]\ 4 \equiv -1$ ومنه $4^{2003} \equiv -1^{2003}[5]$ إذن $4^{2003}+1^{2003} \equiv 0[5]$.

$[5]\ 3 \equiv -2$ ومنه $3^{2003} \equiv -2^{2003}[5]$

إذن $3^{2003}+2^{2003} \equiv 0[5]$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

وبالتالي $1^{2003}+2^{2003}+3^{2003}+4^{2003}\equiv 0[5]$

ب- $6\equiv -1[7]$ ومنه $6^{2007}\equiv -1^{2007}[7]$ إذن $6^{2007}+1^{2007}\equiv 0[7]$.

$5\equiv -2[7]$ ومنه $5^{2007}\equiv -2^{2007}[7]$ إذن $5^{2007}+2^{2007}\equiv 0[7]$ ؛ $4\equiv -3[7]$ ومنه $4^{2007}\equiv -3^{2007}[7]$ إذن

$4^{2007}+3^{2007}\equiv 0[7]$ ؛ وبالتالي $1^{2007}+2^{2007}+3^{2007}+4^{2007}+5^{2007}+6^{2007}\equiv 0[7]$.

جـ- لدينا $1\equiv -8[9]$ ؛ $7\equiv -2[9]$ ؛ $3\equiv -6[9]$ ؛ $5\equiv -4[9]$.

ومنه $1^{2008}\equiv 8^{2008}[9]$ ؛ $7^{2008}\equiv 2^{2008}[9]$ ؛ $3^{2008}\equiv 6^{2008}[9]$ ؛ $5^{2008}\equiv 4^{2008}[9]$.

إذن $1^{2008}-8^{2008}\equiv [9]$ ؛ $7^{2008}-2^{2008}\equiv [9]$ ؛ $3^{2008}-6^{2008}\equiv [9]$ ؛ $5^{2008}-4^{2008}\equiv [9]$.

وبالتالي : $1^{2008}-2^{2008}+3^{2008}-4^{2008}$

$+5^{2008}-6^{2008}+7^{2008}-8^{2008}\equiv 0[9]$

17 من أجل كل عدد طبيعي n ، $4^{2n+1}\equiv 0[4]$ ؛ $2^{2n+1}=2\times 4^n$ ومنه $2^{2n+1}\equiv 0[4]$ ؛ $3\equiv -1[4]$ ومنه

$3^{2n+1}\equiv -1^{2n+1}[4]$ أي $1^{2n+1}+3^{2n+1}\equiv 0[4]$ ؛

وبالتالي $1^{2n+1}+2^{2n+1}+3^{2n+1}+4^{2n+1}\equiv 0[4]$.

18 مجموع أرقام العدد 7254 هو 18 وهو مضاعف لِـ 9 إذن $7254\equiv 0[9]$ ومنه $7254^n\equiv 0[9]$.

العدد 3532 زوجي إذن $3532\equiv 0[2]$ ومنه $3532^n\equiv 0[2]$.

$1785\equiv 0[5]$ ومنه $1785^n\equiv 0[5]$.

$51502\equiv 0[11]$ ومنه $51502^n\equiv 0[11]$.

19 1) $3286\equiv 6[10]$ ومنه $3286^{374}\equiv 6^{374}[10]$ ولدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ $6^n\equiv 6[10]$

إذن $6^{374}\equiv 6[10]$ وبالتالي $3286^{374}\equiv 6[10]$.

2) $76\equiv 4[12]$ ولدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $4^n\equiv 4[12]$

إذن $4^{784}\equiv 4[12]$ وبالتالي $76^{784}\equiv 4[12]$.

20 1) ليكن n عددا طبيعيا , $3^{2n}=9^n$ و $9\equiv 2[7]$ إذن $9^n\equiv 2^n[7]$ ومنه $3^{2n}\equiv 2^n[7]$.

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي , $3^{2n}-2^n\equiv 0[7]$.

2) بواقي قسمة العدد n على 3 هي 0 , 1 و 2 وبفرض n ليس مضاعفا لِـ 3 فيكون $n=3p+1$ أو $n=3p+2$ مع $p\in\mathbb{N}$.

إذا كان $n=3p+1$, $2^{2n}+2^n+1=2^{6p+2}+2^{3p+1}+1$

لدينا $8\equiv 1[7]$ ومنه من أجل كل $p\in\mathbb{N}$, $8^p\equiv 1[7]$ و $8^{2p}\equiv 1[7]$. $2^{2n}+2^n+1=4\times 8^{2p}+2\times 8^p+1$

وبالتالي $2^{2n}+2^n+1\equiv 7[7]$ أي $2^{2n}+2^n+1\equiv 0[7]$

إذا كان $n=3p+2$, $2^{2n}+2^n+1=2^{6p+4}+2^{3p+2}+1$

لدينا من أجل كل $p\in\mathbb{N}$, $8^p\equiv 1[7]$ و $8^{2p+1}\equiv 1[7]$. $2^{2n}+2^n+1=2\times 8^{2p+1}+4\times 8^p+1$

وبالتالي $2^{2n}+2^n+1\equiv 7[7]$ أي $2^{2n}+2^n+1\equiv 0[7]$

21 ليكن n عددا طبيعيا .

1) $3^3=27$ ومنه $3^3\equiv 2[5]$ إذن $3^{3n}\equiv 2^n[5]$ ومنه $3^{3n+2}\equiv 9\times 2^n[5]$ إذن $3^{3n+2}\equiv 4\times 2^n[5]$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$2^{n+4}=16\times 2^n$ ؛ $16\equiv 1[5]$ إذن $2^{n+4}\equiv 2^n[5]$.

$3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 4\times 2^n+2^n[5]$ أي $3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 5\times 2^n[5]$ ومنه $3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 0[5]$.

2) $3^{3n}\equiv 2^n[5]$ ومنه $3\times 3^{3n}\equiv 3\times 2^n[5]$

$2^{n+1}=2\times 2^n$ إذن $3^{3n+1}+2^{n+1}\equiv 3\times 2^n+2\times 2^n[5]$

أي $3^{3n+1}+2^{n+1}\equiv 5\times 2^n[5]$ ومنه $3^{3n+1}+2^{n+1}\equiv 0[5]$

22 $10\equiv 1[9]$ و $9\equiv 0[9]$ ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، $10^n\equiv 1[9]$ و $9n\equiv 0[9]$

إذن $(9n-1)10^n+1\equiv -1\times 1+1[9]$ أي $\alpha\equiv 0[9]$.

23 ليكن n عددا طبيعيا .

1) $2^6=64$ و $64\equiv 13[17]$ إذن $2^6\equiv 13[17]$ ومنه $2^{6n}\equiv 13^n[17]$ وبالتالي $2^{6n+3}\equiv 8\times 13^n[17]$

$3^4=81$ و $81\equiv 13[17]$ إذن $3^4\equiv 13[17]$ ومنه $3^{4n}\equiv 13^n[17]$ وبالتالي $3^{4n+2}\equiv 9\times 13^n[17]$.

$2^{6n+3}+3^{4n+2}\equiv 8\times 13^n+9\times 13^n[17]$ ومنه $2^{6n+3}+3^{4n+2}\equiv 17\times 13^n[17]$ إذن $2^{6n+3}+3^{4n+2}\equiv 0[17]$.

2) $2^{5n}=\left(2^5\right)^n=32^n$ و $32\equiv 3[29]$ إذن $2^{5n}\equiv 3^n[29]$ ومنه $2^{5n+1}\equiv 2\times 3^n[29]$.

$3^{n+3}=27\times 3^n$ إذن $2^{5n+1}+3^{n+3}\equiv 2\times 3^n+27\times 3^n[29]$ ومنه $2^{5n+1}+3^{n+3}\equiv 29\times 3^n[29]$ إذن

$2^{5n+1}+3^{n+3}\equiv 0[29]$.

25 1) إذا كان n فرديا فإن البواقي الممكنة لقسمته على 16 هي الأعداد الطبيعية الفردية الأصغر تماما من 16 .

إذا كان $n\equiv 1[16]$ فإن $n^4\equiv 1[16]$.

إذا كان $n\equiv 3[16]$ فإن $n^4\equiv 3^4[16]$ ومنه $n^4\equiv 1[16]$.

إذا كان $n\equiv 5[16]$ فإن $n^2\equiv(-9)^2[16]$ ومنه $n^2\equiv 1[16]$ وبالتالي $n^4\equiv 1[16]$.

إذا كان $n\equiv 7[16]$ فإن $n^2\equiv 7^2[16]$ أي $n^2\equiv 1[16]$ وبالتالي $n^4\equiv 1[16]$.

إذا كان $n\equiv 9[16]$ فإن $n^2\equiv 1[16]$ ومنه $n^4\equiv 1[16]$.

إذا كان $n\equiv 11[16]$ فإن $n^2\equiv(-5)^2[16]$ ومنه $n^2\equiv 9[16]$ وبالتالي $n^4\equiv 9^2[16]$ إذن $n^2\equiv 1[16]$.

إذا كان $n\equiv 13[16]$ فإن $n\equiv -3[16]$ ومنه $n^4\equiv(-3)^4[16]$ ومنه $n^4\equiv 1[16]$

إذا كان $n\equiv 15[16]$ فإن $n\equiv -1[16]$ ومنه $n^4\equiv 1[16]$

2) بواقي قسمة n على 5 هي 0 , 1 , 2 , 3 و 4

ليكن r ينتمي إلى $\{1,2,3,4\}$ بوضع $n\equiv r[5]$ معناه أن n ليس مضاعفا للعدد 5 وبالتالي يكون $n^4\equiv r^4[5]$

ولدينا $1^4\equiv 1[5]$, $2^4\equiv 1[5]$, $3^4\equiv 1[5]$, $4^4\equiv 1[5]$

إذن من أجل كل $r\in\{1,2,3,4\}$ $r^4\equiv 1[5]$ وبالتالي $n^4\equiv 1[5]$.

26 أ)

$x\equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$2x\equiv$	0	2	4	1	3	[5]

ب- $2x\equiv 3[5]$ معناه $x\equiv 4[5]$.

27

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n^3\equiv$	0	1	1	6	1	6	6	[7]
$n^3+n-2\equiv$	5	5	1	0	3	2	5	

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$n^3+n-2\equiv 0[7]$ معناه $n\equiv 3[7]$.

28 1)

n	0	1	2	3	4	5	6
r_n	1	2	4	8	7	5	1

2) لدينا $2^6\equiv 1[9]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي p ، $2^{6p}\equiv 1[9]$.

ومنه $2^{6p+k}\equiv r_k[9]$ مع $k\in\{1,2,3,4,5\}$

ومنه إذا كان $n=6p$ فإن $r_n=r_0=1$.

إذا كان $n=6p+1$ فإن $r_n=r_1=2$.

إذا كان $n=6p+2$ فإن $r_n=r_2=4$.

إذا كان $n=6p+3$ فإن $r_n=r_3=8$.

إذا كان $n=6p+4$ فإن $r_n=r_4=7$.

إذا كان $n=6p+5$ فإن $r_n=r_5=5$.

3) $65\equiv 2[9]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $65^n\equiv 2^n[9]$ ولدينا $2^n\equiv r_n[9]$ إذن $65^n\equiv r_n[9]$.

$2011=6\times 335+1$ ومنه $r_{2011}=r_1=2$ إذن $65^{2011}\equiv 2[9]$

29 أ - $4^5\equiv 1[11]$.

ب - $37\equiv 4[11]$ ومنه $37^5\equiv 4^5[11]$ إذن $37^5\equiv 1[11]$ ومنه من أجل كل عدد $k\in\mathbb{N}$ ، $37^{5k}\equiv 1[11]$ ؛

$37^{5k+1}\equiv 4[11]$ ؛ $37^{5k+2}\equiv 5[11]$ ؛ $37^{5k+3}\equiv 9[11]$ و $37^{5k+4}\equiv 3[11]$.

30 $2x=3y$ ومنه $2x\equiv 0[3]$ أي $4x\equiv 0[3]$ وهذا معناه $x\equiv 0[3]$ أي $x=3k$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

وبالتعويض نجد $2(3k)=3y$ أي $y=2k$ ومنه $(x,y)=(3k,2k)$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

31 $2x-5y=1$ معناه $2x=5y+1$ إذن $2x\equiv 1[5]$ وهذا معناه $6x\equiv 3[5]$ أي $x\equiv 3[5]$ إذن $x=5k+3$

مع $k\in\mathbb{Z}$ وبالتعويض نجد $10k+6=5y+1$ أي $5y=10k+5$ أي $y=2k+1$

ومنه $(x,y)=(5k+3,2k+1)$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

32 أ - $\begin{cases}x\equiv 3[5]\\ x\equiv 1[6]\end{cases}$ معناه $\begin{cases}x=5\alpha+3\\ x=6\beta+1\end{cases}$ إذن $5\alpha-6\beta=-2$ ومنه $5\alpha=6\beta-2$ ومنه $5\alpha\equiv -2[6]$ وهذا يعني

$-\alpha\equiv -2[6]$ أي $\alpha\equiv 2[6]$ ويعني $\alpha=6k+2$ مع $k\in\mathbb{Z}$ وبالتعويض نجد $5(6k+2)=6\beta-2$

أي $6\beta=30k+12$ ومعناه $\beta=5k+2$. إذن $x=5\alpha+3=30k+13$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

ب - $\begin{cases}2x\equiv 2[4]\\ 4x\equiv 1[3]\end{cases}$ معناه $\begin{cases}x\equiv 1[2]\\ x\equiv 1[3]\end{cases}$ معناه $\begin{cases}3x\equiv 3[6]\\ 2x\equiv 2[6]\end{cases}$ ومنه $x\equiv 1[6]$.

2 - التعداد

33 $a=12734$

$a=10^4+2\times 10^3+7\times 10^2+3\times 10+4$

$b=5\times 10^3+7\times 10^2+2\times 10+3$ ؛ $b=5723$

$c=5\times 10^5+3+\times 10^3+10+9$ ؛ $c=503019$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

34 $a=\overline{234}=2\times6^2+3\times6+4$ ؛ $b=\overline{1523}=6^4+5\times6^3+2\times6+3$ ؛
$c=\overline{503012}=5\times6^5+3\times6^3+6+2$.

35 $a=7^3+2\times7^2+3\times7+5=\overline{1235}$. $b=5\times7^2+2\times7=\overline{520}$ ؛ $c=6\times7^3+2\times7+1=\overline{6021}$.

36 $N_a=4a^5+2a^3+a+3=\overline{40213}$.

37 أ ــ $x\geq7$ ومنه أصغر قيمة هي $x=7$.

ب ــ $\overline{2306}=2\times7^3+3\times7^2+0\times7+6$ و $\overline{1035}=7^3+0\times7^2+3\times7+5$

38 $\overline{10}=1\times2+0=2$ ؛ $\overline{100}=1\times2^2+0\times2+0=4$ ؛ $\overline{111}=1\times2^2+1\times2+1=7$ ؛
$\overline{10001}=1\times2^5+1=33$.

39 $n=2^6+2^5+2^3+2^2+1=109$ ؛ $n=2x^2+x+4$.

إذن $2x^2+x+4=109$ معناه $2x^2+x-105=0$ ومعناه $x=7$ ، $x=-\frac{15}{2}$. إذن الأساس 7 .

40 $\overline{2003}=\overline{21}\times\overline{43}$ معناه $x\geq5$ و $2x^3+3=(2x+1)(4x+3)$ أي $x\geq5$ و $2x^3-8x^2-10x=0$
ومعناه $2x^2-8x-10=0$ أي $x=10$.

41 أ - $\overline{411}=\overline{15}\times\overline{23}$ معناه $4x^2+x+1=(x+5)(2x+3)$
أي $2x^2-12x-14=0$ ومعناه $x^2-6x-7=0$ أي $x=-1$ أو $x=7$ إذن الأساس هو $x=7$.

ب - $\overline{21}\times\overline{14}=\overline{324}$ معناه $(2a+1)(a+4)=3a^2+2a+4$ ومعناه $a^2-7a=0$ إذن $a=7$.

جـ - $\overline{412}\times\overline{31}=2888$ معناه $2888=(4x^2+x+2)(3x+1)$ ومعناه $12x^3+7x^2+7x=2886$
لدينا $x\geq5$ إذا كان $x=5$ فإن $12x^3+7x^2+7x\equiv0[5]$ بينما $2886\equiv1[5]$ إذن $x\neq5$.

ولدينا : $12\times6^3+7\times6^2+7\times6=2886$ إذن الأساس $x=6$.

42 أ - $x^2+6x+2=7x+7+6x+3$ معناه $x>7$ مع $x^2-7x-8=0$ ومعناه $x=8$.

ب - $\overline{77}\times\overline{63}=(7\times8+7)(6\times8+3)=3213$

جـ - $3213=8\times401+5=8\left(8\left(8\times6+2\right)+1\right)+5$

$3213=6\times8^3+2\times8^2+8+5=\overline{6215}$.

43 أ - $\overline{12}\times\overline{23}=\overline{276}$. $(a+2)(2a+3)=2a^2+7a+6$ وهذا صحيح من أجل كل عدد طبيعي $a>7$.

ب - $\overline{541}=\overline{22}\times\overline{32}$ معناه $5x^2+4x+1=(2x+2)(3x+2)$ ومعناه $x^2+6x+3=0$ أي $x=-3+\sqrt{6}$
أو $x=-3-\sqrt{6}$ إذن لا يوجد أي أساس يكتب فيه $\overline{541}=\overline{22}\times\overline{32}$

44 $\overline{1010}=1\times2^3+0\times2^2+1\times2+0=10$ ؛ $100=64+32+4=2^6+2^5+2^2$ أي $100=\overline{1100101}$

46 $72881=12\left(12\left(12\times\left(12\times3+6\right)+2\right)+1\right)+5$ ومنه $72881=3\times12^4+6\times12^3+2\times12^2+1\times12+5$
إذن $72881=\overline{36215}$ في الأساس 12

ولدينا $7^5<72881<7^6$ أي $72881=4\times7^5+2\times7^4+2\times7^3+3\times7^2+2\times7+4$ $72881=\overline{422324}$

47 $\overline{3752}=3\times8^3+7\times8^2+5\times8+2=2026$.

48 $\overline{6175}=6\times9^3+1\times9^2+7\times9+5$ ، $\overline{6175}=4523$ لدينا : $12^3<4523<12^4$ ومنه
$4523=2\times12^3+7\times12^2+4\times12+11$ إذن $4523=\overline{274\alpha}$ حيث $\alpha=11$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

49 $\overline{234}=2\times5^2+3\times5+4$ أي $\overline{234}=2\times(7-2)^2+3\times(7-2)+4$ ؛ $\overline{234}=2\times7^2+3\times7-50$

$\overline{234}=1\times7^2+2\times7+6=\overline{126}$

$\overline{1040}=2\times7^2+6\times7+5=\overline{265}$ ؛ $\overline{1040}=7^3-6\times7^2+12\times7+12$ ؛ $\overline{1040}=5^3+4\times5=(7-2)^3+20$

50 $a=1\times a+0=\overline{10}$ ؛ $a^2=1\times a^2+0\times a+0=\overline{100}$ و $a^3=1\times a^3+0\times a^2+0\times a+0=\overline{1000}$.

51 نفرض أن A يكتب في النظام ذي الأساس العشري كما يلي $A=\overline{a_na_{n-1}...a_0}$ حيث $0\le a_i\le9$.

ومنه $A=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_0$ ولدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $10^n\equiv1[3]$ وبالتالي

$A\equiv a_n+a_{n-1}+...+a_0[3]$ أي $A\equiv S[3]$ إذن $A\equiv0[3]$ معناه $S\equiv0[3]$.

52 نضع $x=\overline{a_na_{n-1}...a_0}$ ؛ $y=\overline{a_0a_1...a_n}$ و $x\equiv a_n+a_{n-1}+...+a_0[9]$ و $y\equiv a_0+a_1+...+a_n[9]$

ومنه $x-y\equiv0[9]$.

53 1)

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

$\overline{10}=1\times4+0=4$ ؛ $\overline{12}=1\times4+2=3+3$.

2)
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,1} \\ 3223 \\ +\ \ 132 \\ \hline =10021 \end{array}$$
إذن $3223+132=10021$.

54 1)

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

$\overline{21}=2\times4+1=3\times3$ ، $\overline{12}=1\times4+2=3+3$.

2)
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,2\,2} \\ 3223 \\ \times\ \ 123 \\ \hline 23001 \\ 13112. \\ 3223.. \\ \hline 1203021 \end{array}$$
إذن $3223\times123=1203021$

55
$$\begin{array}{r} 213 \\ \times\ 14 \\ \hline 1412 \\ 213. \\ \hline 4042 \end{array} \quad ؛ \quad \begin{array}{r} 431 \\ -132 \\ \hline 244 \end{array} \quad ؛ \quad \begin{array}{r} 3421 \\ +\ 230 \\ \hline 4201 \end{array}$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

56 $39\beta 7 + 213 = 400\alpha$ ، $400\alpha - 39\beta 7 = 213$ ، $27 \times 41 = 27.104$.

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 41 \\ \hline 27 \\ 104. \\ \hline 1067 \end{array}$$

تمارين للتعمق

1 - الموافقات في $\mathbb{Z}$

57 أ - $2^0 \equiv 1[10]$ ، $2 \equiv 2[10]$ ، $2^2 \equiv 4[10]$ ، $2^3 \equiv 8[10]$ ، $2^4 \equiv 6[10]$ ، $2^5 \equiv 2[10]$.

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $6^n \equiv 6[10]$ (بالتراجع)

$2^4 \equiv 6[10]$ إذن من أجل كل $p \in \mathbb{N}$ ، $2^{4p} \equiv 6^p[10]$

إذن $2^{4p+4} \equiv 6^4[10]$ ومنه $2^{4p+4} \equiv 6[10]$ وعليه $2^{4p+1} \equiv 2[10]$ ؛ $2^{4p+2} \equiv 4[10]$ ؛ $2^{4p+3} \equiv 8[10]$

ب - كل عدد طبيعي يوافق رقم آحاده بترديد 10 .

إذا كان $n = 0$ فإن $2^0 = 1$ وهو رقم آحاده

إذا كان $n = 4k$ مع $k \in \mathbb{N}^*$ فإن رقم آحاد 2^n هو 6 .

إذا كان $n = 4k + 1$ مع $k \in \mathbb{N}$ فإن رقم آحاد 2^n هو 2 .

إذا كان $n = 4k + 2$ مع $k \in \mathbb{N}$ فإن رقم آحاد 2^n هو 4 .

إذا كان $n = 4k + 3$ مع $k \in \mathbb{N}$ فإن رقم آحاد 2^n هو 8 .

جـ - $3548^9 \times 2534^{31} \equiv 8^9 \times 4^{31}[10]$

أي $3548^9 \times 2534^{31} \equiv 2^{27} \times 2^{62}[10]$.

$3548^9 \times 2534^{31} \equiv 2^{89}[10]$ ولدينا $89 = 4 \times 22 + 1$ ؛

إذن $2^{89} \equiv 2[10]$ ومنه $3548^9 \times 2534^{31} \equiv 2[10]$

إذن رقم آحاد $3548^9 \times 2534^{31}$ هو 2 .

58 $51^2 = 2601$ ومنه $51^2 = 1[100]$ إذن $\left(51^2\right)^{1004} = 1[100]$ أي $51^{2008} \equiv 1[100]$

إذن الرقم الأخير هو 1 وما قبله 0 .

59 لكل عدد صحيح a لدينا إما $a \equiv -1[3]$ وإما $a \equiv 0[3]$ وإما $a \equiv 1[3]$.

إذا كان $x \equiv 0[3]$ أو $y \equiv 0[3]$ فإن $xy\left(x^2 - y^2\right) \equiv 0[3]$

إذا كان $\begin{cases} x \equiv 1[3] \\ y \equiv 1[3] \end{cases}$ أو $\begin{cases} x \equiv -1[3] \\ y \equiv -1[3] \end{cases}$ أو $\begin{cases} x \equiv 1[3] \\ y \equiv -1[3] \end{cases}$ أو $\begin{cases} x \equiv -1[3] \\ y \equiv 1[3] \end{cases}$ فإن $\begin{cases} x^2 \equiv 1[3] \\ y^2 \equiv 1[3] \end{cases}$ ومنه $x^2 - y^2 \equiv 0[3]$

إذن $xy\left(x^2 - y^2\right) \equiv 0[3]$.

60 $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 8 = (n+1)^3 - 8$

$n^3 + 3n^2 + 3n - 7 \equiv 0[8]$ معناه $(n+1)^3 \equiv 0[8]$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	[8]
$n+1 \equiv$	1	2	3	4	5	6	7	0	[8]
$(n+1)^3 \equiv$	1	0	3	0	5	0	7	0	[8]

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

إذن $n^3+3n^2+3n-7\equiv 0[8]$ معناه $n\equiv 1[8]$ أو $n\equiv 3[8]$ أو $n\equiv 5[8]$ أو $n\equiv 7[8]$.

61 أ ــ $2^6\equiv 1[9]$ ومنه من أجل كل $p\in\mathbb{N}$ ، $2^{6p}\equiv 1[9]$ أي $2^{6p}-1\equiv 0[9]$ معناه $n=6p$.

ب ــ إذا كان $n=6p$ فإن $A=2^n-1=\left(2^3\right)^{2p}-1$ أي $A=8^{2p}-1$ ولدينا

65 نضع $N=\left(n^2-1\right)\left(n^2-4\right)$

$n\equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$n^2\equiv$	0	1	4	4	1	[5]
$n^2-1\equiv$	4	0	3	3	0	[5]
$n^2-4\equiv$	1	2	0	0	2	[5]
$N\equiv$	4	0	0	0	0	[5]

ومنه إذا كان $n\not\equiv 0[5]$ فإن $N\equiv 0[5]$

66 $N=n\left(2n+1\right)\left(7n+1\right)$

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$2n+1\equiv$	1	3	5	1	3	5	[6]
$7n+1\equiv$	1	2	3	4	5	0	[6]
$N\equiv$	0	0	0	0	0	0	[6]

67 أ - $A=n^2-n+1$

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n^2\equiv$	0	1	4	2	2	3	1	[7]
A	1	1	3	0	6	6	3	[7]

ب - $A\equiv 0[7]$ معناه $n\equiv 3[7]$.

جـ - نضع $B=2753^2-2753+1$ ؛ نعتبر $n=2753$ ومنه $n\equiv 2[7]$ إذن $A\equiv 3[7]$ وبالتالي $B\equiv 3[7]$.

68 $A=2n^3-n^2+2$

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n^2\equiv$	**0**	**1**	**4**	**2**	**2**	**4**	**1**	[7]
$n^3\equiv$	0	1	1	6	1	6	6	[7]
$2n^3\equiv$	**0**	**2**	**2**	**5**	**2**	**5**	**5**	[7]
A	2	3	0	5	2	3	6	[7]

$2n^3-n^2+2\equiv 0[7]$ معناه $n\equiv 2[7]$

69 أ - $4^3\equiv 1[7]$ ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $4^{3n}\equiv 1[7]$ وعليه $4^{3n+1}\equiv 4[7]$ ؛ $4^{3n+2}\equiv 2[7]$.

ب - نضع $N=851^{3n}+851^{2n}+851^n+2$

$851\equiv 4[7]$ ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $851^{3n}\equiv 4^{3n}[7]$ أي $851^{3n}\equiv 1[7]$ ويصبح لدينا :

$N\equiv 4^{2n}+4^n+3[7]$ أي $N\equiv 4^n\left(4^n+1\right)+3[7]$

$n\equiv$	0	1	2	[3]
$4^n\equiv$	1	4	2	[7]
$4^n+1\equiv$	2	5	3	[7]
$N\equiv$	5	2	1	[7]

70 أ - $7^3\equiv 1[9]$ ومنه من أجل كل $k\in\mathbb{N}$ ، $7^{3k}\equiv 1[9]$ وعليه $7^{3k+1}\equiv 7[9]$ ؛ $7^{3k+2}\equiv 4[9]$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ب - نضع $A = 7^n + 3n - 1$

إذا كان $n = 3k$ فإن $A = 7^{3k} + 9k - 1$ ومنه $A \equiv 1 + 0 - 1[9]$ أي $A \equiv 0[9]$.

إذا كان $n = 3k + 1$ فإن $A = 7^{3k+1} + 9k + 2$ ومنه $A \equiv 7 + 0 + 2[9]$ أي $A \equiv 0[9]$.

إذا كان $n = 3k + 2$ فإن $A = 7^{3k+2} + 9k + 5$ ومنه $A \equiv 4 + 0 + 5[9]$ أي $A \equiv 0[9]$.

71

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	[8]
$3x \equiv$	0	3	6	1	4	7	2	5	[8]

$3x \equiv 7[8]$ معناه $x \equiv 5[8]$.

72 $8x^2 \equiv 16[3]$ معناه $2x^2 \equiv 1[3]$.

البواقي الممكنة لكل عدد صحيح x على 3 هي 0 ، 1 ، 2 ومنه $x^2 \equiv 0[3]$ أو $x^2 \equiv 1[3]$ وبالتالي $2x^2 \equiv 0[3]$ أو $2x^2 \equiv 2[3]$

إذن من أجل كل عدد صحيح x يكون إما $2x^2 \equiv 0[3]$ وإما $2x^2 \equiv 2[3]$ وبالتالي لا يوجد أي عدد صحيح x يحقق $2x^2 \equiv 1[3]$.

73 أ - $2^3 \equiv 1[7]$ ومنه من أجل كل $k \in \mathbb{N}$ ، $2^{3k} \equiv 1[7]$ وبالتالي $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ ، $2^{3k+2} \equiv 4[7]$

$3^6 \equiv 1[7]$ ومنه من أجل كل $k \in \mathbb{N}$ ، $3^{6k} \equiv 1[7]$ وبالتالي $3^{6k+1} \equiv 3[7]$ ، $3^{6k+2} \equiv 2[7]$ ، $3^{6k+3} \equiv 6[7]$ ، $3^{6k+4} \equiv 4[7]$ و $3^{6k+5} \equiv 5[7]$.

ب -

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$2^n \equiv$	1	2	4	1	2	4	[7]
$3^n \equiv$	1	3	2	6	4	5	[7]
$2^n + 3^n \equiv$	2	5	6	0	6	2	[7]

$2^x + 3^x \equiv 0[7]$ معناه $x \equiv 3[6]$.

74 $3^5 \equiv 1[11]$ ، $5^5 \equiv 1[11]$.

$5^x - 3^x + 6 \equiv 0[11]$ معناه $5^x - 3^x \equiv 5[11]$

$x \equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$5^x \equiv$	1	5	3	4	9	[11]
$3^x \equiv$	1	3	9	5	4	[11]
$5^x - 3^x \equiv$	0	2	5	10	5	[11]

$5^x - 3^x \equiv 5[11]$ معناه $x \equiv 2[5]$ أو $x \equiv 4[5]$.

75 أ -

$x \equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$x^2 \equiv$	0	1	4	4	1	[5]

ب - $x^2 - 5y^2 = 3$ معناه $x^2 \equiv 5y^2 + 3$ إذن لكي تكون الثنائية (x, y) حلا للمعادلة $x^2 = 5y^2 + 3$ يجب أن يكون $x^2 \equiv 3[5]$ وهذا غير ممكن .

76 أ -

$y \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$y^3 \equiv$	0	1	1	6	1	1	6	[7]
$2y^3 \equiv$	0	2	2	5	2	2	5	[7]

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ب - $7x^2+2y^3=3$ معناه $2y^3=-7x^2+3$، إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة $2y^3=-7x^2+3$ فإن $2y^3\equiv 3[7]$ وهذا غير ممكن إذن المعادلة $7x^2+2y^3=3$ لا تقبل حلا .

77 1) إذا كان x زوجيا فإن $3^x\equiv 1[8]$ وإذا كان x فرديا فإن $3^x\equiv 3[8]$.

2)

y	1	2	3	4	5	6	7	[8]
y^2	1	4	1	0	1	4	1	[8]

3) إذا كان x فرديا فإن $3^x\equiv 3[8]$ ومنه $y^2+8\equiv 3[8]$ إذن $y^2\equiv 3[8]$ وهذا غير ممكن .

4) $x=2n$ ؛ $3^{2n}-y^2=(3^n-y)(3^n+y)$ ، إذن $8=(3^n-y)(3^n+y)$ ومنه (3^n+y) قاسم للعدد 8 .

إذن $3^n+y\le 8$ بما أن y عدد طبيعي فإن $3^n\le 8$.

5) $3^n\le 8$ إذن $n=0$ أو $n=1$ ولدينا $y^2=3^{2n}-8$ إذن $y^2=1-8=-7$ أو $y^2=9-8=1$

وبالتالي $y=1$ ولدينا $x=2n=2$ وبالتالي الثنائية الوحيدة التي تحقق المعادلة هي $(2,1)$.

78 1) بواقي قسمة كل عدد طبيعي p على 3 هي 0 ، 1 و 2 وإذا كان p أوليا فإن $p\equiv 1[3]$ أو $p\equiv 2[3]$

إذن $p\equiv 1[3]$ أو $p\equiv -1[3]$.

2) p عدد طبيعي أولي إذن لا يقبل القسمة على 2 إذن هو فردي ومنه يوجد عدد طبيعي k حيث يكون $p=2k+1$

أي $p^2=4k^2+4k+1$ ويكافئ $p^2-1=4k(k+1)$

$$n=p^4-1=(p^2-1)(p^2+1)$$

$p^2+1=4k^2+4k+2=2(2k^2+2k+1)$ إذن $p^2+1=2\alpha$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$.

$k(k+1)$ هو عدد زوجي إذن $k(k+1)=2\beta$ مع $\beta\in\mathbb{N}$ ومنه $p^2-1=8\beta$.

وبالتالي $n=(p^2-1)(p^2+1)=16\alpha\beta$.

3)

p	1	2	3	4	[5]	
p^4	1	1	1	1	[5]	
p^4-1	0	0	0	0	[5]	

79 1) أ - $999\equiv 0[111]$ ومنه $1000\equiv 1[111]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $1000n\equiv n[111]$.

ب - $111\,111=111\,000+111$ بوضع $n=111$ نحصل على $n\equiv 0[111]$ و $1000n\equiv n[111]$ ومنه

$1000n+n\equiv 0[111]$ إذن $1000n\equiv 0[111]$.

$100\ 010\ 001=1000\ 10000+1$ ؛ $100\ 010\ 001=1000\ 00000+10000+1$

$100\ 010\ 001=1000(1000\times 100+10)+1$

$1000(1000\times 100+10)\equiv 110[111]$ ومنه $1000\times 100+10\equiv 100+10[111]$ إذن

$100\ 010\ 001\equiv 0[111]$ ؛ $1000(1000\times 100+10)+1\equiv 0[111]$ ؛ $1000(1000\times 100+10)+1\equiv 111[111]$.

$\alpha=100\ 010\ 000\ 001$.

$\alpha\equiv 0[111]$ أي $\alpha\equiv 100+10+1[111]$ إذن $\alpha=1000^2(100\ 0\times 100+10)+1$ ؛ $\alpha=100\ 010\ 000\ 000+1$.

2) $99999\equiv 0[11\,111]$ ومنه $100000\equiv 1[11\,111]$. نضع $n=100000$

$\beta=1\ 001\ 001\ 001\ 001$ ؛ $\beta=1\ 001\ 001\ 000\ 000+1000+1$ ؛ $\beta=(1\ 001\ 000\ 0+10)n+1000+1$ ؛

$\beta=(1\ 000\ 000\ 0+1\ 000\ 0+10)n+1000+1$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$\beta=(1\,00n+1\,000\,0+10)n+1000+1$

$\beta\equiv 0[11\,111]$ ، $\beta\equiv 11111[11\,111]$ ؛ $\beta\equiv 10110+1001[11\,111]$

80 1) $a=8k+2$ ؛ $a=104k'+r$ ومنه $r=8(k-13k')+2$ أي $104k'+r=8k+2$ إذن $r\equiv 2[8]$

ب- $r=8\alpha+2$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$ و $8\alpha+2<104$ أي $\alpha<\frac{102}{8}$ ؛ $\alpha<12$.

2) $a=13k+3$ ؛ $a=104k'+r$ ومنه $104k'+r=13k+3$ أي $r=13(k-8k')+3$ إذن $r\equiv 3[13]$.

ب ـ $r=13\beta+3$ مع $\beta\in\mathbb{N}$ و $13\beta+3<104$ أي $\beta<\frac{101}{13}$ ؛ $\beta<7$.

3) من 1) نلاحظ أن r عدد زوجي إذن من 2) يجب أن يكون β فرديا إذن $r\in\{16,42,68,94\}$

ولكن يجب أن يكون $\frac{r-2}{8}\in\mathbb{N}$ والقيمة الوحيدة التي تحقق هي $r=42$.

81 1) $5\equiv 5[11]$ ، $5^2\equiv 3[11]$ ، $5^3\equiv 4[11]$ ، $5^4\equiv 9[11]$ ، $5^5\equiv 1[11]$.

2) $5^5\equiv 1[11]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي p ، $5^{5p}\equiv 1[11]$.

وإذا كان $k\in\{1,2,3,4\}$ فإن $5^k\times 5^{5p}\equiv 5^k[11]$ أي $5^{5p+k}\equiv 5^k[11]$.

ومنه $5^{5p+1}\equiv 5[11]$ ، $5^{5p+2}\equiv 5^2[11]$ ، $5^{5p+3}\equiv 5^3[11]$ ، $5^{5p+4}\equiv 5^4[11]$.

إذن $5^{5p+1}\equiv 5[11]$ ، $5^{5p+2}\equiv 3[11]$ ، $5^{5p+3}\equiv 4[11]$ ، $5^{5p+4}\equiv 9[11]$.

3) $1428=5\times 245+3$ ، $2008=5\times 401+3$ ومنه $5^{2008}-5^{1428}\equiv(4-4)[11]$ أي $5^{2008}-5^{1428}\equiv 0[11]$.

82 1) $3\equiv 3[7]$ ، $3^2\equiv 2[7]$ ، $3^3\equiv 6[7]$ ، $3^4\equiv 4[7]$ ، $3^5\equiv 5[7]$ و $3^6\equiv 1[7]$.

2) $3^6\equiv 1[7]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي p ، $3^{6P}\equiv 1[7]$

وإذا كان $k\in\{1,2,3,4,5\}$ فإن $3^k\times 3^{6P}\equiv 3^k[7]$ أي $3^{6P+k}\equiv 3^k[7]$.

ومنه $3^{6P+1}\equiv 3[7]$ ، $3^{6P+2}\equiv 2[7]$ ، $3^{6P+3}\equiv 6[7]$ ، $3^{6P+4}\equiv 4[7]$ ، $3^{6P+5}\equiv 5[7]$.

3) $1988=6\times 331+2$ ومنه $3^{1988}\equiv 2[7]$.

$10\equiv 3[7]$ ومنه $10^{1408}\equiv 3^{1408}[7]$ ولدينا $1408=6\times 234+4$ إذن $3^{1408}\equiv 4[7]$ وبالتالي $10^{1408}\equiv 4[7]$.

$9\equiv 2[7]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $9^{3n+2}\equiv 2^{3n+2}[7]$.

ولدينا $2^{3n+2}=4\times 2^{3n}=4\times 8^n$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $4\times 8^n\equiv 4\times 1[7]$ إذن $9^{3n+2}\equiv 4[7]$

الاستنتاج $3^{1988}+10^{1408}+9^{3n+2}\equiv(2+4+4)[7]$ ومنه $3^{1988}+10^{1408}+9^{3n+2}\equiv 10[7]$ إذن

$3^{1988}+10^{1408}+9^{3n+2}\equiv 3[7]$.

إذن باقي القسمة الأقليدية للعدد $\left(3^{1988}+10^{1408}+9^{3n+2}\right)$ على 7 هو 3.

83 1) $2\equiv 2[5]$ ، $2^2\equiv 4[5]$ ، $2^3\equiv 3[5]$ ، $2^4\equiv 1[5]$.

الاستنتاجات : $2^4\equiv 1[5]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي p ، $2^{4p}\equiv 1[5]$

إذن $2^{4p+1}\equiv 2[5]$ ، $2^{4p+2}\equiv 4[5]$ ، $2^{4p+3}\equiv 3[5]$.

$3\equiv -2[5]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي p ، $3^{4p}\equiv 2^{4p}[5]$ أي $3^{4p}\equiv 1[5]$

وبالتالي $3^{4p+1}\equiv 3[5]$ ، $3^{4p+2}\equiv 9[5]$ ومنه $3^{4p+2}\equiv 4[5]$ ، $3^{4p+3}\equiv 27[5]$ ومنه $3^{4p+3}\equiv 2[5]$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$n=$	$4p$	$4p+1$	$4p+2$	$4p+3$	$p\in\mathbb{N}$
$2^n\equiv$	1	2	4	3	$[5]$
$3^n\equiv$	1	3	4	2	$[5]$

2) $14=4\times3+2$ إذن $2^{14}\equiv4[5]$.

$10=4\times2+2$ إذن $3^{10}\equiv4[5]$.

3) $2\times3^{4n+1}-2^{4n}\equiv2\times3-1[5]$ ومنه $2\times3^{4n+1}-2^{4n}\equiv5[5]$

بما أن $5\equiv0[5]$ فإن $2\times3^{4n+1}-2^{4n}\equiv0[5]$.

84 1) $5\equiv-2[7]$ ومنه $5^3\equiv-8[7]$ أي $5^3\equiv-1[7]$ إذن $5^6\equiv1[7]$

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي k , $5^{6k}\equiv1[7]$

ويكون لدينا : $5^{6k+1}\equiv5[7]$

$5^{6k+2}\equiv25[7]$ أي $5^{6k+2}\equiv4[7]$

$5^{6k+3}\equiv20[7]$ أي $5^{6k+3}\equiv6[7]$

$5^{6k+4}\equiv30[7]$ أي $5^{6k+4}\equiv2[7]$

$5^{6k+5}\equiv10[7]$ أي $5^{6k+5}\equiv3[7]$.

2) $6\equiv-1[7]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n , $6^{2n}\equiv(-1)^2[7]$ أي $6^{2n}\equiv1[7]$.

3) $5^n+6^{2n}+3\equiv(5^n+4)[7]$

$5^n+6^{2n}+3\equiv0[7]$ معناه $5^n+4\equiv0[7]$ ومعناه $5^n\equiv-4[7]$ ومعناه $5^n\equiv3[7]$ مع $n=5k+6$

$k\in\mathbb{N}$.

85 1) لدينا $2^4=16$ ومنه $2^4\equiv1[5]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي p , $2^{4p}\equiv1[5]$

$2^{4p+1}\equiv2[5]$, $2^{4p+2}\equiv4[5]$,

$2^{4p+3}\equiv3[5]$ أي $2^{4p+3}\equiv8[5]$.

2) لدينا $2^3=8$ ومنه $2^3\equiv1[7]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي k , $2^{3k}\equiv1[7]$

$2^{3k+1}\equiv2[7]$, $2^{3k+2}\equiv4[7]$.

3) لدينا $\begin{cases}2^{4p+2}\equiv4[5]\\2^{3k+2}\equiv4[7]\end{cases}$ معناه $\begin{cases}n=4p+2\\n=3k+2\end{cases}$ ومعناه $\begin{cases}n\equiv2[4]\\n\equiv2[3]\end{cases}$ومعناه $\begin{cases}3n\equiv6[12]\\4n\equiv8[12]\end{cases}$ ومنه $n\equiv2[12]$

وعكسيا لدينا إذا كان $n\equiv2[12]$ فإن $n=12m+2$ ومنه $n=3(4m)+2$ و $n=4(3m)+2$ ومنه

$\begin{cases}2^n\equiv4[5]\\2^n\equiv4[7]\end{cases}$.

86 $(n-1)$ مضاعف للعدد 3 معناه $n=3k+1$ مع $k\in\mathbb{N}$.

$\left[1+(n-1)2^n\right]$ يقبل القسمة على 7 معناه $1+(n-1)2^n\equiv0[7]$ ومنه $1+(3k)2^{3k+1}\equiv0[7]$

يكافئ $1+3k\left(2^3\right)^k\times2\equiv0[7]$ومعناه $1+6k\equiv0[7]$ أي $-k\equiv-1[7]$ يكافئ $k\equiv1[7]$

إذن $n=3k+1=3(7p+1)+1$ أي $n=21p+4$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

وعكسيا إذا كان $n=21p+4$ فإن $n-1=21p+3$ ومنه $(n-1)$ مضاعف للعدد 3 و $n-1\equiv 3[7]$
وكذلك $2^n=2^{21p+4}=2\left(2^3\right)^{7p+1}$ وبما أن $2^3\equiv 1[7]$ فإن $2^n\equiv 2[7]$. ومنه $1+(n-1)2^n\equiv(1+3\times 2)[7]$ أي
$1+(n-1)2^n\equiv 0[7]$.

88 1) $4\equiv 4[11]$ ، $4^2\equiv 5[11]$ ، $4^3\equiv 9[11]$ ، $4^4\equiv 3[11]$ ، $4^5\equiv 1[11]$.
ومنه من أجل كل عدد طبيعي p ، $4^{5p}\equiv 1[11]$ وعليه $4^{5p+1}\equiv 4[11]$ ، $4^{5p+2}\equiv 5[11]$ ، $4^{5p+3}\equiv 9[11]$ ،
$4^{5p+4}\equiv 3[11]$.

2) $1995\equiv 4[11]$ ومنه $1995^n\equiv 4^n[11]$.
$26\equiv 4[11]$ ومنه $26^{10n+2}\equiv 4^{10n+2}[11]$ ولدينا $4^{10n+2}=4^{5(2n)+2}=4^{5p+2}$ ومنه $4^{10n+2}\equiv 5[11]$ إذن
$26^{10n+2}\equiv 5[11]$
إذن $6\times 1995^n+26^{10n+2}+7\equiv\left(6\times 4^n+5+7\right)[11]$ أي $6\times 1995^n+26^{10n+2}+7\equiv\left(6\times 4^n+1\right)[11]$
وبالتالي $6\times 1995^n+26^{10n+2}+7\equiv 0[11]$ معناه $6\times 4^n+1\equiv 0[11]$ ويكافئ $2\left(6\times 4^n+1\right)\equiv 0[11]$ أي
$4^n+2\equiv 0[11]$ ومعناه $4^n\equiv 9[11]$
ومعناه $n=5p+3$ مع $p\in\mathbb{N}$.

89 1) $5\equiv -2[7]$ ومنه $5^3\equiv -1[7]$ إذن $5^6\equiv 1[7]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي p ، $5^{6p}\equiv 1[7]$ وعليه :
$5^{6p+1}\equiv 5[7]$ ، $5^{6p+2}\equiv 4[7]$ ، $5^{6p+3}\equiv 6[7]$ ، $5^{6p+4}\equiv 2[7]$ ، $5^{6p+5}\equiv 3[7]$.

2) لدينا $26\equiv 5[7]$ و $47\equiv 5[7]$
إذن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $26^{6n+5}\equiv 5^{6n+5}[7]$ و $47^{12n+2}\equiv 5^{6(2n)+2}[7]$ وعليه $26^{6n+5}\equiv 3[7]$
و $47^{12n+2}\equiv 4[7]$.
$26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+3\equiv(3+2\times 4+3)[7]$ أي $26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+3\equiv 14[7]$ ويكافئ
$26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+3\equiv 0[7]$.

3) $26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+5n\equiv 0[7]$ معناه $4+5n\equiv 0[7]$ ويكافئ $3(4+5n)\equiv 0[7]$ ومعناه $12+n\equiv 0[7]$
أي $n\equiv 2[7]$.

90 1) $3^3=27$ ومنه $3^3\equiv 1[13]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي p ، $3^{3p}\equiv 1[13]$ وعليه $3^{3p+1}\equiv 3[13]$ ،
$3^{3p+2}\equiv 9[13]$.

2) $4\left(3^{n+1}-1\right)\equiv 0[13]$ يكافئ $40\left(3^{n+1}-1\right)\equiv 0[13]$ ويكافئ $3^{n+1}-1\equiv 0[13]$ معناه $3^{n+1}\equiv 1[13]$ ومعناه
$n+1\equiv 0[3]$
أي $n\equiv 2[3]$.

91 $16\equiv 2[7]$ إذن $16^3\equiv 2^3[7]$ أي $16^3\equiv 1[7]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي p ، $16^{3p}\equiv 1[7]$.
إذا كان $n=3p$ فإن $15\left(16^{n+1}-1\right)=15\left(16\times 16^{3p}-1\right)$ ومنه $15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv 1(2\times 1-1)[7]$ أي
$15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv 1[7]$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

إذا كان $n=3p+1$ فإن $15\left(16^{n+1}-1\right)=15\left(16^2\times16^{3p}-1\right)$ ومنه $15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv1(4\times1-1)[7]$
أي $15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv3[7]$.
إذا كان $n=3p+2$ فإن $15\left(16^{n+1}-1\right)=15\left(16^3\times16^{3p}-1\right)$ ومنه $15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv1(8\times1-1)[7]$ أي
$15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv0[7]$.

92 1) ــ أ ــ $3^4=81$ ومنه $3^4\equiv1[10]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي p , $3^{4p}\equiv1[10]$ وعليه
$3^{4p+3}\equiv7[10]$, $3^{4p+2}\equiv9[10]$, $3^{4p+1}\equiv3[10]$
ــ ب ــ $9^{2001}=3^{4002}=3^{4\times1000+2}$ ومنه $63\times9^{2001}\equiv3\times9[10]$ أي $63\times9^{2001}\equiv7[10]$.
$7\equiv-3[10]$ ومنه $7^{1422}\equiv(-3)^{1422}[10]$ أي $7^{1422}\equiv3^{4\times355+2}[10]$ معناه $7^{1422}\equiv9[10]$.
إذن $63\times9^{2001}-7^{1422}\equiv(7-9)[10]$ معناه $63\times9^{2001}-7^{1422}\equiv-2[10]$ أي $63\times9^{2001}-7^{1422}\equiv8[10]$.
2) - أ - لدينا $3n\times9^n=3n\times3^{2n}=n\times3^{2n+1}$
ولدينا $7\equiv-3[10]$ ومنه $7^{2n+1}\equiv(-3)^{2n+1}[10]$ أي $7^{2n+1}\equiv-3^{2n+1}[10]$
إذن $3n\times9^n+7^{2n+1}\equiv\left(n3^{2n+1}-3^{2n+1}\right)[10]$
أي $3n\times9^n+7^{2n+1}\equiv(n-1)3^{2n+1}[10]$.
- ب - $3n\times9^n+7^{2n+1}\equiv0[10]$ معناه $(n-1)3^{2n+1}\equiv0[10]$ ومعناه $(n-1)3^{2n+1}\equiv0[10]$ أي
$(n-1)3^{4n+4}\equiv0[10]$ ويكافئ $n-1\equiv0[10]$ أي $n\equiv1[10]$.

93 1) $27\equiv-1[7]$ أي $3^3\equiv-1[7]$ ومنه $3^6\equiv1[7]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي k , $3^{6k}\equiv1[7]$ وعليه
$3^{6k+1}\equiv3[7]$, $3^{6k+2}\equiv2[7]$, $3^{6k+3}\equiv6[7]$, $3^{6k+4}\equiv4[7]$, $3^{6k+5}\equiv5[7]$.
$64\equiv1[7]$ ومنه $4^3\equiv1[7]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي p , $4^{3p}\equiv1[7]$ وعليه $4^{3p+1}\equiv4[7]$,
$4^{3p+2}\equiv2[7]$.
2) $2006\equiv4[7]$ ؛ $1424\equiv3[7]$ ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$, $2006^{3n+2}\equiv4^{3n+2}[7]$ ؛ $1424^{6n+1}\equiv3^{6n+1}[7]$
ومنه $2006^{3n+2}\equiv2[7]$ ؛ $1424^{6n+1}\equiv3[7]$ إذن $2\times2006^{3n+2}+1424^{6n+1}\equiv(2\times2+3)[7]$ أي
$2\times2006^{3n+2}+1424^{6n+1}\equiv0[7]$.
3) $2\times3^0+2\times3^1+\ldots+2\times3^n=2\left(3^0+3^1+\ldots+3^n\right)$

$2\times3^0+2\times3^1+\ldots+2\times3^n=3^{n+1}-1$
$3\times4^0+3\times4^1+\ldots+3\times4^n=3\left(4^0+4^1+\ldots+4^n\right)$
$3\times4^0+3\times4^1+\ldots+3\times4^n=4^{n+1}-1$ إذن $s_n=u_0+u_1+\ldots+u_n=3^{n+1}+4^{n+1}-2$

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$3^{n+1}\equiv$	3	2	6	4	5	1	[7]
$4^{n+1}\equiv$	4	2	1	4	2	1	
$s_n\equiv$	5	2	5	6	5	0	

94 1) $49\equiv-1[10]$ أي $7^2\equiv-1[10]$ ومنه $7^4\equiv1[10]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي k , $7^{4k}\equiv1[10]$
وعليه $7^{4k+1}\equiv7[10]$, $7^{4k+2}\equiv9[10]$, $7^{4k+3}\equiv3[10]$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$7^{4k}+7^{4k+1}+7^{4k+2}+7^{4k+3}=(1+7+9+3)[10]$.

$7^{4k}+7^{4k+1}+7^{4k+2}+7^{4k+3}=0[10]$.

2) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$, $S_n=1+7+7^2+...+7^n$

$S_{n+4}=S_n+7^{n+1}+7^{n+2}+7^{n+3}+7^{n+4}$

$S_{n+4}=S_n+7^{n+1}\left(1+7+7^2+7^3\right)$

$1+7+7^2+7^3\equiv 0[10]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي n , $S_{n+4}=S_n[10]$.

$S_0=1$, $S_0\equiv 1[10]$ ؛ $S_1=8$, $S_1\equiv 8[10]$ ؛ $S_2=57$, $S_2\equiv 7[10]$ ؛ $S_3=400$, $S_3\equiv 0[10]$ ؛

$S_4=2801$, $S_4\equiv 1[10]$.

لنرهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $S_{4n}\equiv 1[10]$.

$S_0\equiv 1[10]$. ونفرض أن $S_{4p}\equiv 1[10]$.

لدينا $S_{4(p+1)}=S_{4p+4}$ وحسب السؤال السابق $S_{4p+4}=S_{4p}[10]$ إذن $S_{4(p+1)}\equiv 1[10]$ وبالتالي حسب مبدأ التراجع

ينتج من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $S_{4n}\equiv 1[10]$.

$S_{4n+1}=S_{4n}+7^{4n+1}$ ومنه $S_{4n+1}\equiv 1+7[10]$ أي $S_{4n+1}\equiv 8[10]$.

$S_{4n+2}=S_{4n+1}+7^{4n+2}$ ومنه $S_{4n+2}\equiv(8+9)[10]$ أي $S_{4n+2}\equiv 7[10]$.

$S_{4n+3}=S_{4n+2}+7^{4n+3}$ ومنه $S_{4n+3}\equiv(7+3)[10]$ أي $S_{4n+3}\equiv 0[10]$.

2 ـ أنظمة التعداد

95 نفرض $0<x<7$ و $0<y<7$. $\overline{yx}=10y+x$ و $\overline{xy}=7x+y$ إذن $7x+y=10y+x$ أي

$6x=9y$ معناه $2x=3y$ ومنه $2x\equiv 0[3]$ أي $4x\equiv 0[3]$ معناه $x\equiv 0[3]$ وبالتالي $x=3$ أو $x=6$

إذن $(x,y)=(3,2)$ أو $(x,y)=(6,4)$

96 الشروط : $0<x<7$ ؛ $0<z<7$ ؛ $0\le y<7$.

$n=\overline{xyz}=7^2x+7y+z$ و $n=\overline{zyx}=11^2z+11y+x$ ومنه $49x+7y+z=121z+11y+x$ أي :

$48x-4y-120z=0$ وهذا يكافئ $12x-y-30z=0$ معناه $y=12x-30z=6(2x-5z)$

إذن $y\equiv 0[6]$ ولدينا $0\le y<7$ إذن $y=0$ أو $y=6$

إذا كان $y=0$ فإن $6(2x-5z)=0$ أي $2x=5z$ ومنه $2x\equiv 0[5]$ معناه $6x\equiv 0[5]$ أي $x\equiv 0[5]$ بما

أن $0<x<7$ فإن $x=5$ ومنه $z=2$.

إذا كان $y=6$ فإن $6(2x-5z)=6$ أي $2x=5z+1$ ومنه $2x\equiv 1[5]$ معناه $6x\equiv 3[5]$ أي $x\equiv 3[5]$ بما

أن $0<x<7$ فإن $x=3$ ومنه $z=1$. $(x,y,z)=(5,0,2)$ أو $(x,y,z)=(3,6,1)$

97 $a>6$ ؛ $b+c=\overline{46}=4a+6$ ؛ $bc=\overline{555}=5a^2+5a+5$

b و c هما حلا للمعادلة $x^2-2(2a+3)x+(5a^2+5a+5)=0$ حيث x هو المجهول

$\Delta'=(2a+3)^2-(5a^2+5a+5)$ ؛ $\Delta'=-a^2+7a+4$ ؛ $\delta=49+16=65$

$\Delta'\ge 0$ معناه $\frac{7-\sqrt{65}}{2}\le a\le\frac{7+\sqrt{65}}{2}$ ومنه $6<a\le 7{,}53$ إذن $a=7$.

ومنه المعادلة تصبح $x^2-2(17)x+285=0$ و $\Delta'=4$ إذن $x'=17-2=15$ و $x'=17+2=19$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

بما أن $1\le a\le b\le c$ فإن $(a,b,c)=(7,15,19)$. ويكون $abc=1995$.

98 1) $45x-28y=130$ معناه $45x=130+28y=2(65+14y)$ ؛ $45x\equiv 0[2]$ أي $x\equiv 0[2]$.

$45x-28y=130$ معناه $28y=45x+130=5(9x+26)$ ومنه $28y\equiv 0[5]$ أي $56y\equiv 0[5]$ ومعناه $y\equiv 0[5]$.

2) $0\le\alpha\le 9$ و $0\le\beta\le 7$ ؛ $n=2\times 9^3+9^2\alpha+9\alpha+3=90\alpha+1461$ ؛

$n=5\times 7^3+7^2\beta+7\beta+6=56\beta+1721$.

إذن $90\alpha+1461=56\beta+1721$ ومعناه $90\alpha-56\beta=260$ أي $45\alpha-28\beta=130$

إذن $\alpha\equiv 0[2]$ و $\beta\equiv 0[5]$ بما أن $0\le\beta\le 7$ فإن $\beta=0$ أو $\beta=5$.

إذا كان $\beta=0$ فإن $45\alpha=130$ أي $\alpha=\dfrac{28}{9}$ مرفوض.

إذا كان $\beta=5$ فإن $45\alpha=270$ أي $\alpha=6$. إذن $n=90\alpha+1461=2001$.

99 $0<x<7$ ، $0<y<7$ و $0\le z<7$.

$N=1332x+121y+11z$ أي $N=11^3x+11^2y+11z+x$

$N=392y+7x+z$ أي $N=7^3y+7^2y+7x+z$

إذن $1325x+10z=271y$ أي $1332x+121y+11z=392y+7x+z$ أي $5(265x+2z)=271y$

إذن $271y\equiv 0[5]$ ومعناه $y\equiv 0[5]$ بما أن $0<y<7$ فإن $y=5$.

وبالتالي $265x+2z=271$ أي $265x=271-2z$ ومنه $265x=271[2]$ أي $x\equiv 1[2]$

بما أن $0<x<7$ فإن $x=1$ أو $x=3$ أو $x=5$.

إذا كان $x=1$ فإن $z=3$

إذا كان $x=3$ فإن z يكون سالب

إذا كان $x=5$ فإن z يكون سالب

وبالتالي $(x,y,z)=(1,5,3)$.

100 $n=\overline{1271x}=9^4+2\times 9^3+7\times 9^2+9+x$

1) $n\equiv 1+2+7+1+x\ [8]$ أي $n\equiv 3+x\ [8]$.

يكون $n\equiv 0[8]$ معناه $x+3\equiv 0[8]$ أي $x\equiv 5[8]$ وبما أن $0\le x<9$ فإن $x=5$.

2) $n=\overline{1271x}=9^4+2\times 9^3+7\times 9^2+9+x$

$n=9^3(9+2)+7\times 9^2+9+x$ ؛ $n\equiv 4+x\ [11]$

يكون $n\equiv 0[11]$ معناه $x+4\equiv 0[11]$ أي $x\equiv 7[11]$ وبما أن $0\le x<9$ فإن $x=7$.

101 $0\le x\le 9$ و $0\le y\le 9$. $n=\overline{27x\,85y}$ ؛ $n=2\times 10^5+7\times 10^4+x\times 10^3+8\times 10^2+5\times 10+y$

$n\equiv 2+7+x+8+5+y\ [3]$ و $n\equiv -2+7-x+8-5+y\ [11]$

معناه $n\equiv x+1+y\ [3]$ و $n\equiv -x+8+y\ [11]$

$n\equiv 0[3]$ و $n\equiv 0[11]$ معناه $x+1+y\equiv 0[3]$ و $-x+8+y\equiv 0[11]$

أي $x+y\equiv 2[3]$ و $x-y\equiv 8[11]$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$x-y\equiv 8[11]$ معناه $x-y\equiv -3[11]$

ومنه $(x,y)\in\{(0,3),(1,4),(2,5),(3,6),(4,7),$

$(5,8),(6,9),(8,0),(9,1)\}$

بما أن $x+y\equiv 2[3]$ فإن $(x,y)\in\{(1,4),(4,7),(8,0)\}$

$n=\overline{271854}$ أو $n=\overline{274857}$ أو $n=\overline{278850}$.

102 1) إذا كان $3x\equiv 0[7]$ فإن $3\times 5x\equiv 0\times 5[7]$ وبما أن $15\equiv 1[7]$ فإن $x\equiv 0[7]$.

العكس إذا كان $x\equiv 0[7]$ فإن $3x\equiv 3\times 0[7]$ ومنه $3x\equiv 0[7]$.

2) $N=\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$ أي $N=a_n 10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_1 10+a_0$

$N'=\overline{a_n a_{n-1}...a_1}$ أي $N'=a_n 10^{n-1}+a_{n-1}10^{n-2}+...+a_2 10+a_1$ ومعناه

$N=10N'+a_0$ إذن $10N'=a_n 10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_2 10^2+a_1 10$

$N\equiv 0[7]$ معناه $10N'+a_0\equiv 0[7]$ أي $3N'-6a_0\equiv 0[7]$ ويكافئ $3(N'-2a_0)\equiv 0[7]$ ومعناه

$N'-2a_0\equiv 0[7]$ وهذا حسب السؤال السابق .

3) $105154\equiv 0[7]$ يكافئ $10515-8\equiv 0[7]$ أي $10507\equiv 0[7]$ ويكافئ $1050-14\equiv 0[7]$ أي

$1036\equiv 0[7]$ ويكافئ $103-12\equiv 0[7]$ أي $91\equiv 0[7]$ ويكافئ $9-2\equiv 0[7]$ أي $7\equiv 0[7]$

خلاصة $7\equiv 0[7]$ معناه $105154\equiv 0[7]$.

$263572\equiv 0[7]$ معناه $26357-4\equiv 0[7]$ ؛ $26353\equiv 0[7]$ يكافئ $2635-6\equiv 0[7]$ ؛ $2629\equiv 0[7]$ يكافئ

$262-18\equiv 0[7]$ ؛ $244\equiv 0[7]$ يكافئ $24-8\equiv 0[7]$ أي $16\equiv 0[7]$ وهذا غير صحيح إذن 263572 لا يقبل

القسمة على 7 .

103 1) $N=a_n 10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_1 10+a_0$ ؛ $N'=a_n 10^{n-1}+a_{n-1}10^{n-2}+...+a_2 10+a_1$.

$N=10N'+a_0$. $N\equiv 0[13]$ معناه $10N'+a_0\equiv 0[13]$ ومعناه $4(10N'+a_0)\equiv 0[13]$ ويكافئ

$40N'+4a_0\equiv 0[13]$ أي $N'+4a_0\equiv 0[13]$ لأن $40\equiv 1[13]$

2) $1631216\equiv 0[13]$ معناه $163121+24\equiv 0[13]$ أي $163144\equiv 0[13]$ معناه $16314+16\equiv 0[13]$ أي

$16330\equiv 0[13]$ ومعناه $1633\equiv 0[13]$ ومعناه $163+12\equiv 0[13]$ أي $175\equiv 0[13]$ ومعناه $17+20\equiv 0[13]$

أي $37\equiv 0[13]$ وهذا تناقض إذن 1631216 لا يقبل القسمة على 13 .

$48662029\equiv 0[13]$ معناه $4866202+36\equiv 0[13]$ أي $4866238\equiv 0[13]$ معناه $486623+32\equiv 0[13]$ أي

$486655\equiv 0[13]$ معناه $48665+20\equiv 0[13]$ أي $48685\equiv 0[13]$ معناه $4868+20\equiv 0[13]$ أي

$4888\equiv 0[13]$ معناه $488+32\equiv 0[13]$ أي $520\equiv 0[13]$ معناه $52\equiv 0[13]$ أي $5+8\equiv 0[13]$ معناه

$13\equiv 0[13]$ وهذا صحيح إذن $48662029\equiv 0[13]$.

105 1) $(a^2+a+1)(a^2-a+1)=a^4+a^2+1$.

2) ليكن a عدد طبيعي حيث $a>1$. $111=a^2+a+1$ ولدينا $10101=1\times a^4+0\times a^3+1\times a^2+0\times a+1$ أي

$10101=111(a^2-a+1)$ أي $10101=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$ معناه $10101=a^4+a^2+1$ ومنه 111 يقسم

10101 .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الحاصل هو $a+1$ $(a-1)a+1=a^2-a+1$ أي $\overline{\beta 1}=\beta a+1=a^2-a+1$.

106 1) في النظام التعداد ذي الأساس a لدينا $11=a+1$ و $1001=a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)$

أي $1001=11(a^2-a+1)$ ومنه العدد 1001 يقبل القسمة على 11 .

2) الحاصل هو أي $\overline{\beta 1}=(a-1)a+1=a^2-a+1$.

3) $1001=11\times\overline{\beta 1}$

في النظام ذي الأساس 10 يكون $1001=11\times 91$

في النظام ذي الأساس 12 لدينا $\overline{1001}=12^3+1=1729$ ، $\overline{11}=12+1=13$ ، $\overline{\beta 1}=11\times 12+1=133$.

ولدينا $1729=13\times 133$.

107 1) ليكن a عدد طبيعي ، $(a+1)^3=a^3+3a^2+3a+1$ ومنه إذا كان $a>3$ فيكون في الأساس a ،

$(a+1)^3=1331$.

2) $(a+1)^4=(a^3+3a^2+3a+1)(a+1)$ ؛ $(a+1)^4=a^4+4a^3+6a^2+4a+1$

ومنه إذا كان $a>6$ فيكون في الأساس a ، $(a+1)^4=14641$.

108 1) $\overline{11}=n^2+2=(n^2+1)+1$ ؛ $\overline{1(2n-1)}=n^2+2n=(n^2+1)+(2n-1)$ ؛

$\overline{121}=(n^2+2)^2=\left[(n^2+1)+1\right]^2=(n^2+1)^2+2(n^2+1)+1$ ؛

$\overline{(n^2-1)1}=n^4=(n^4-1)+1=(n^2-1)(n^2+1)+1$ ؛ $n^4=(n^2-1)1$.

ـ التحقيق من أجل الأساس $a=5$ أي $n=2$.

$\overline{11}=5+1=6$ و $n^2+2=6$.

$\overline{1(2n-1)}=5+3=8$ و $n^2+2n=8$.

$\overline{121}=5^2+2\times 5+1=36$ و $(n^2+2)^2=36$.

$\overline{(n^2-1)1}=3\times 5+1=16$ و $n^4=16$.

ـ التحقيق من أجل الأساس $a=10$ أي $n=3$.

$\overline{11}=10+1=11$ و $n^2+2=11$.

$\overline{1(2n-1)}=10+5=15$ و $n^2+2n=15$.

$\overline{121}=121$ و $(n^2+2)^2=121$.

$\overline{(n^2-1)1}=8\times 10+1=81$ و $n^4=81$.

2) $u=n(n^2+2)=n(a+1)=na+n=\overline{nn}$

$v=n^2(n^2+2)=n^2(a+1)=n^2a+n^2=\overline{n^2n^2}$

$x=u^2=n^2(a+1)^2=n^2a^2+2n^2a+n^2$ ؛ $x=(a-1)a^2+2(a-1)a+n^2=a^3+a^2-2a+n^2$

$x=a^3+(a-2)a+n^2=a^3+(n^2-1)a+n^2$ ؛ $x=\overline{10(n^2-1)n^2}$.

$y=v^2=(n^2a+n^2)^2=n^4a^2+2n^4a+n^4$ ؛ $y=(a-1)^2a^2+2(a-1)^2a+(a-1)^2$ ؛

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$y=a^4-2a^2+1=\left(n^2+1\right)a^3-2a^2+1$ ؛ $y=a^4-2a^3+a^2+2a^3-4a^2+2a+a^2-2a+1$

$y=a^4-2a^2+1=n^2a^3+a^2\left(n^2-1\right)+1$ ؛ $y=a^4-2a^2+1=n^2a^3+a^2\left(a-2\right)+1$

$y=a^4-2a^2+1=\overline{n^2\left(n^2-1\right)01}$.

المسائل

109 I) 1) نفترض أن a و b زوجيان معا ، معناه $a\equiv 0[2]$ و $b\equiv 0[2]$ ومنه $a^2\equiv 0[2]$ و $b^2\equiv 0[2]$ وبالتالي $a^2-b^2\equiv 0[2]$ أي $N\equiv 0[2]$.

نفترض أن a و b فرديان معا ، معناه $a\equiv 1[2]$ و $b\equiv 1[2]$ ومنه $a^2\equiv 1[2]$ و $b^2\equiv 1[2]$ وبالتالي $a^2-b^2\equiv 0[2]$ أي $N\equiv 0[2]$

إذن إذا كان a و b من نفس الشفعية فيكون N عددا طبيعيا زوجيا وهذا تناقض لأن N عدد طبيعي فردي وبالتالي a و b ليس من شفعية واحدة .

2) $N=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ ؛ بوضع $a-b=p$ و $a+b=q$ يكون $N=pq$.

3) بما أن a و b ليس من شفعية واحدة فإن مجموعهما وفرقهما يكونا فرديين أي p و q فرديين معا .

II) 1) أ -

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	[9]
x^2	0	1	4	0	7	7	0	4	1	[9]

ب - $a^2-250507\equiv a^2-1[9]$

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	[9]
b^2	0	1	4	0	7	7	0	4	1	[9]
$a^2-250507$	0	1	4	0	7	7	0	4	1	[9]
a^2-1	0	1	4	0	7	7	0	4	1	[9]
a^2	1	2	5	1	8	8	1	5	2	[9]

جـ - من السؤال أ ــ لا يمكن أن تكون الأعداد 2 ، 5 و 8 بواقي لمربع بتردد 9 وبالتالي $a^2\equiv 1[9]$ هي الحالة الوحيدة الممكنة وينتج أن $a\equiv 1[9]$ أو $a\equiv 8[9]$.

2) أ ــ $a^2-250507=b^2$ ومنه $a^2-250507\geq 0$ ويكافئ $a\leq -\sqrt{250507}$ أو $a\geq \sqrt{250507}$ بينما a عدد طبيعي إذن $a\geq \sqrt{250507}$ أي $a\geq 500,51$ ومنه $a\geq 501$.

ب ــ $a^2-250507=501^2-250507=494$ إذن $b^2=494$ أي $b=22,23$ إذن $a\neq 501$.

3) أ ــ نفرض $a\equiv 8[9]$ ، لدينا $503\equiv 8[9]$ معناه $503\equiv 8[9]$ ومنه $a\equiv 503[9]$.

نفرض $a\equiv 1[9]$ ، لدينا $505\equiv 1[9]$ معناه $505\equiv 1[9]$ ومنه $a\equiv 505[9]$.

ب ــ $a=505+9k$ معناه $a^2-250507=81k^2+9090k+4518$ ويكافئ $b^2=81k^2+9090k+4518$ أي $b^2=9\left(9k^2+1010k+502\right)$

من أجل $k=0$ لدينا $b^2=4518$ أي $b=3\sqrt{502}$ مرفوض .

من أجل $k=1$ لدينا $b^2=9\times 1521=117^2$ أي $b=117$ إذن أصغر عدد طبيعي k حيث تكون الثنائية $\left(505+9k\ ,b\right)$ تحقق العلاقة (E) هو $k=1$ وبالتالي $(a,b)=(514,117)$.

III) 1) $a^2-250507=b^2$ معناه $250507=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ أي $250507=397\times 631$.

2)

	1	1	1	2	3	2	1	1	1	2	
631	397	234	163	71	21	8	5	3	2	1	0

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

إذن $p\gcd(631,397)=1$.

110 جزء I ــ

1) لدينا $1^2+3^2+5^2=35=4\times8+3$ ومنه $1^2+3^2+5^2\equiv3[4]$ أي $1^2+3^2+5^2\equiv2^2-1[2^2]$

2) نفترض أن $n=3$.

أ.

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R	0	1	4	1	0	1	4	1

ب - من أجل كل ثلاث أعداد R_1 ، R_2 و R_3 من المجموعة $\{0,1,4\}$ يكون $R_1+R_2+R_3\neq0$.

إذن لا يمكن إيجاد x ، y و z حيث $x^2+y^2+z^2\equiv7[8]$.

الجزء II ــ دراسة الحالة العامة مع $n\geq3$.

1) لدينا $x^2+y^2+z^2\equiv(2^n-1)[2^n]$ معناه $x^2+y^2+z^2=2^np+2^n-1=2^n(p+1)-1$ ومنه

$x^2+y^2+z^2$ عدد فردي .

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$.

إذن $(x+y+z)^2$ هو عدد فردي وبالتالي $x+y+z$ عدد فردي .

إذن تكون الأعداد x ، y و z كلها فردية أو واحد منها فري وآخرين زوجيين .

2) نفترض أن x و y زوجيان و z فردي .

أ - $x=2p$ ، $y=2k$ و $z=2l+1$ ومنه $x^2=4p^2$ ، $y^2=4k$ و $z^2=4l^2+4l+1$ إذن $x^2\equiv0[4]$ ،

$y^2\equiv0[4]$ و $z^2\equiv1[4]$ وبالتالي $x^2+y^2+z^2\equiv1[4]$.

ب - بما أن $n\geq3$ فإن $2^n\equiv0[4]$ أي $2^n=4\alpha$ ولدينا $x^2+y^2+z^2=2^np+2^n-1=2^n(p+1)-1$ أي

$x^2+y^2+z^2=4\alpha(p+1)-1$ وبالتالي $x^2+y^2+z^2\equiv-1[4]$ أي $x^2+y^2+z^2\equiv3[4]$ وهذا تناقض مع النتيجة السابقة .

3) نفترض أن x ، y و z كلها فردية .

أ - $k^2+k=k(k+1)$ جداء عددين متتاليين هو عدد زوجي أي $k^2+k\equiv0[2]$.

ب - ليكن t عدد طبيعي فردي أي $t=2k+1$ ومنه $t^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$ وبما أن

$k^2+k\equiv0[2]$ فإن $k^2+k\equiv2k'$ إذن $t^2=8k'+1$ أي $t^2\equiv1[8]$

بما أن x ، y و z كلها فردية . فإن $x^2\equiv1[8]$ ، $y^2\equiv1[8]$ و $z^2\equiv1[8]$ وبالتالي $x^2+y^2+z^2\equiv3[8]$.

جـ - الخلاصة : $x^2+y^2+z^2=2^n(p+1)-1$

من أجل $n\geq3$ يكون $2^n\equiv0[8]$ إذن $x^2+y^2+z^2\equiv-1[8]$ أي $x^2+y^2+z^2\equiv7[8]$ وهذا تناقض مع النتيجة $x^2+y^2+z^2\equiv3[8]$

إذن لا توجد أي ثلاثية (x,y,z) تحقق $x^2+y^2+z^2\equiv(2^n-1)[2^n]$ مع $n\geq3$ سواء كانت x ، y و z كلها فردية أو واحد منها فردي والآخرين زوجيين ؛ وبالتالي $n=2$ هي الحالة الوحيدة التي توجد فيها ثلاثية (x,y,z) تحقق $x^2+y^2+z^2\equiv(2^n-1)[2^n]$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM