تصحيح: /
الهدف: توظيف قوى عدد حقيقي موجب تماما.
توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
الحل: بسيط

فاتورة الهاتف
تصحيح: /
الهدف: توظيف الدلالة الأسية و التزايد المقارن.
توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 ـ قوى عدد حقيقي موجب تماما

4

$$a=9^{\frac{3}{2}}\times 27^{\frac{1}{4}}=\left(3^2\right)^{\frac{3}{2}}\times\left(3^3\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$a=3^3\times 3^{\frac{3}{4}}=3^{3+\frac{3}{4}}=3^{\frac{15}{4}}$$

$$b=3^{-\frac{5}{4}}\times 81^{\frac{5}{3}}=3^{\frac{65}{12}}$$

$$c=\left(3^{-4}\right)^{\frac{1}{3}}\times 27^{-\frac{1}{3}}=3^{-\frac{7}{3}}$$

7

1) $12^x=3$ تكافئ $e^{\ln 12^x}=e^{\ln 3}$

تكافئ $e^{x\ln 12}=e^{\ln 3}$

تكافئ $x\ln 12=\ln 3$

تكافئ $x=\dfrac{\ln 3}{\ln 12}$

2) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x=\dfrac{1}{8}$ تكافئ $x=\dfrac{\ln 8}{\ln 4}$

3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=3$ تكافئ $x=-\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$

4) $5^{x-1}=2^x$ تكافئ $x=\dfrac{\ln 5}{\ln 5-\ln 2}$

5) $3^x=4^{2x+1}$ تكافئ $x=\dfrac{\ln 4}{\ln\dfrac{3}{16}}$

6) $5^{1-3x}=\dfrac{1}{125}$ تكافئ $x=\dfrac{4}{3}$

12

4) $5^{-x}<5^{2x}$ تكافئ $-x\ln 5<2x\ln 5$ تكافئ $x\in\left]0;+\infty\right[$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

5) $\frac{2^x}{2^x+1}<\frac{1}{3}$ تكافئ $\frac{2.2^x-1}{3\left(2^x+1\right)}<0$ تكافئ $2^{x+1}<1$ تكافئ $x\in\left]-\infty;-1\right[$

6) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x\le 2$ تكافئ $-x\ln\sqrt{2}\le\ln 2$ تكافئ $-\frac{1}{2}x\le 1$ تكافئ $x\in\left[-2;+\infty\right[$.

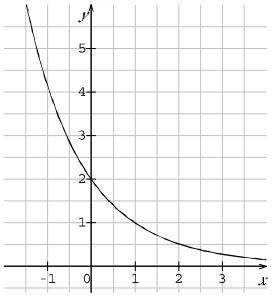
2 ـ دراسة الدوال: $x\mapsto a^x$ و $x\mapsto\sqrt[n]{x}$

38 1) $2^x+3^x=5^x$ تكافئ $\frac{2^x}{5^x}+\frac{3^x}{5^x}=1$

$\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x=1$ تكافئ $2^x+3^x=5^x$

2) $f(x)=\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x$ ، $f'(x)=\left(\ln\frac{2}{5}\right)\left(e^{x\ln\frac{2}{5}}\right)+\left(\ln\frac{3}{5}\right)\left(e^{x\ln\frac{3}{5}}\right)$

$f'(x)=\left(\ln\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\ln\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^x$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$



x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
f	$+\infty$ ↘ 0

3 ـ التزايد المقارن

40 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+1-e^x$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{e^x}{x^2}\right)=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}-\frac{x}{x^2}=+\infty$

47 1) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2xe^x-e^x=0$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}e^{-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^{2x}}=0$

52 1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3^x}{x^2}=0$

ب) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{3^x}{x^2}=+\infty$

2) $f(x)=\frac{3^x}{x^2}=\frac{e^{x\ln3}}{x^2}=\frac{e^{x\ln3}\times\left[\ln3\right]^2}{x^2\left[\ln3\right]^2}=\frac{e^{x\ln3}}{\left[x\ln3\right]^2}\times\left[\ln3\right]^2$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\ln 3}}{[x\ln 3]^2} \times [\ln 3]^2 = +\infty$ بوضع $X = x\ln 3$.

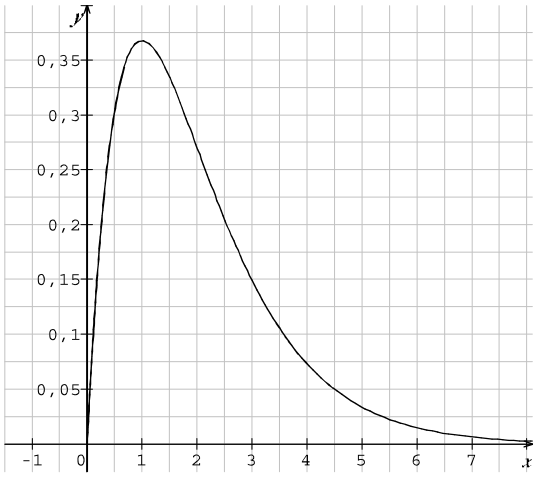
تمارين للتعمق

61 الجزء1: 1) أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

ب) $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ جـ)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

جـ)



2) أ) المستقيم الذي معادلته $y = m$ يقطع المنحني (Γ) في نقطتين.إذن المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين.

ب) $f(0,3573) \approx 0,2499$ و $f(0,3574) \approx 0,25001$

جـ) $f(x) = 0$ تكافئ $x = 0$ و $f(x) = \frac{1}{e}$ تكافئ $x = 1$

الجزء2: تصويب: $u_0 = \alpha$ و $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$

1) أ) $u_0 = \alpha$ و $\alpha > 0$ و إذا كان $u_n > 0$ فإن $u_n e^{-u_n} > 0$ و منه $u_{n+1} > 0$.إذن $u_n > 0$.

ب) $u_{n+1} - u_n = u_n\left(e^{-u_n} - 1\right)$

بما أن $u_n > 0$ و $e^{-u_n} < 1$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ و بالتالي (u_n) متناقصة

جـ) (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل بـ0 فهي متقاربة.لتكن ℓ نهايتها.

لدينا $\ell = \ell e^{-\ell}$ تكافئ $\ell = 0$

2. $w_n = \ln u_n$. $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ ومنه $\ln u_{n+1} = \ln u_n + \ln e^{-u_n} = \ln u_n - u_n$

ومنه $w_{n+1} = w_n - u_n$ أي $u_n = w_n - w_{n+1}$

ب) $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (w_0 - w_1) + (w_1 - w_2) + (w_{n-1} - w_n) + (w_n - w_{n+1}) = w_0 - w_{n+1}$

جـ) بما أن u_n يؤول إلى0 ، w_n يؤول إلى $-\infty$ ، إذن S_n يؤول إلى $+\infty$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3) $u_1 = f(\alpha) = \frac{1}{4}$ و $f(\beta) = \frac{1}{4}$ إن إذا أخذنا $v_0 = \beta$ ، ابتداءً من الرتبة1 يكون $u_n = v_n$.

62 1) المستقيم D يمر بالنقطتين $J(0;1)$ و $K(-1;0)$ معادلته $y = x+1$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (mx+p) = 0$

أي أن المستقيم الذي معادلته $y = mx+p$ مقارب للمنحني عند $+\infty$ و هو المستقيم D .إذن $m = p = 1$.

ب) النقطة J مركز تناظر للمنحني.

جـ) $f(x) = x+1+\varphi(x)$ ، $f(-x) = -x+1+\varphi(-x)$

ومنه $f(x)+f(-x) = 2+\varphi(x)+\varphi(-x)$ و نعلم أن $f(x)+f(-x) = 2$ ،إذن $\varphi(x)+\varphi(-x) = 0$

$\varphi(-x) = -\varphi(x)$ ومنه الدالة φ فردية

د) $f(x)+f(-x) = 2$ و منه $f'(x)-f'(-x) = 0$ ومنه $f'(x) = f'(-x)$.إذن f' زوجية.

3) أ) $\varphi(x) = (ax+b)e^{-x^2}$ ومنه $\varphi(-x) = (-ax+b)e^{-x^2}$ ،

بما أن الدالة φ فردية يكون $-ax+b = -ax-b$ و منه $b = 0$

ب) $f(x) = x+1+\varphi(x) = x+1+axe^{-x^2}$ ومنه $f'(x) = 1+\varphi'(x) = 1+a(1-2x^2)e^{-x^2}$

جـ) معامل توجيه المماس T عند النقطة التي فاصلتها0 (النقطة J) هو $f'(0) = 1-e$

$f'(0) = 1+a$ معناه $1-e = 1+a$ أي $a = -e$

د) $f(x) = x+1+axe^{-x^2} = x+1-exe^{-x^2}$

64 الجزء1: $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$

1) $g'(x) = e^x - 1$. $g'(x)$ موجبة إذا كان $x \geq 0$ و سالبة إذا كان $x \leq 0$

إذن الدالة g متزايدة إذا كان $x \geq 0$ و متناقصة إذا كان $x \leq 0$ و $g(0) = 0$ و بالتالي $g(x) \geq 0$.

2) $g(x) \geq 0$ معناه $e^x - x \geq 1$ أي $e^x - x > 0$

الجزء2:

1) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

ب) عند $-\infty$ المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = -1$ و عند $+\infty$ المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = 0$.

2) أ) $f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - x)^2}$

ب) إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $(1-x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-1	↗	$\frac{1}{e-1}$	↘	0

3) أ) معادلة المماس T للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها0 هي $y = x$.

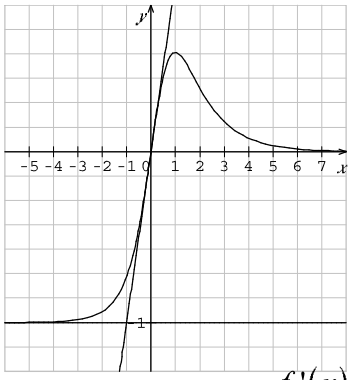
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ب) وضعية المنحني (C) بالنسبة للمماس T : $f(x)-x=\dfrac{-xg(x)}{e^x-x}$.

بما أن $g(x)\geq 0$ و $e^x-x>0$ فإن إشارة $f(x)-x$ هي من إشارة $(-x)$

في المجال $]-\infty;0[$ (C) أعلى T و في المجال $]0;+\infty[$ (C) أسفل T .

4)



66 1. $f'(x)=(x+1)(1-x)e^{-x}$

$f'(x)>0$ إذا كان $-1<x<1$

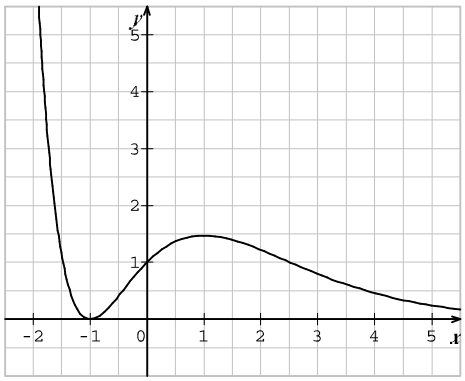
$f'(x)<0$ إذا كان $x<-1$ أو $x>1$

$f'(x)=0$ إذا كان $x=-1$ أو $x=1$

إذن الدالة f متزايدة تماما في المجال $[-1;1]$ و متناقصة تماما في المجالين $]-\infty;-1[$ و $]1;+\infty[$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x}=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x^2}}=0$ المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=0$ عند $+\infty$

3.التمثيل البياني:



4.أ) إذا كان $k<0$ المعادلة لا تقبل حلولا.

- إذا كان $k=0$ المعادلة تقبل حلا واحدا $x=-1$
- إذا كان $0<k<\dfrac{4}{e}$ المعادلة تقبل 3 حلول.
- إذا كان $k=\dfrac{4}{e}$ المعادلة تقبل حلين أحدهما $x=1$
- إذا كان $k>\dfrac{4}{e}$ المعادلة تقبل حلا واحدا

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ب) – إذا كان $x>-1$ فإن $f(x)\le\frac{4}{e}$ و بالتالي $f(x)<2$.إذن المعادلة $f(x)=2$ ليس لها حل على المجال $]-1;+\infty[$

– إذا كان $x<-1$ فإن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما و تأخذ قيمها في المجال $]0;+\infty[$.بما أن 2 ينتمي إلى المجال $]0;+\infty[$ فإنه توجد قيمة وحيدة x تحقق $f(x)=2$

$f(-2)\approx 7,39$ و $f(-1)=0$

بما أن $0<2<7,39$ فإن $-2<\alpha<-1$

جـ) نعلم أن $f(\alpha)=2$ و منه $(\alpha+1)^2e^{-\alpha}=2$ ومنه $(\alpha+1)^2=2e^{\alpha}$

ومنه $\left(\alpha+1=\sqrt{2e^{\alpha}}\right)$ أو $\left(\alpha+1=-\sqrt{2e^{\alpha}}\right)$

بما أن $\alpha<-1$ فإن $\alpha=-1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$

68 1) أ) $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{2}{e}$	↘	0

2) $f(1)=0$ و $f'(1)=1$ إذن معادلة T هي $y=x-1$

3) $g(x)=x-1-f(x)$

أ) $g'(x)=1-f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{x}}\left[\ln x+2\left(x\sqrt{x}-1\right)\right]$

ب) $g'(1)=0$ ،و إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $\ln x+2\left(x\sqrt{x}-1\right)$

- على $]0;1[$: $\ln x<0$ و $x\sqrt{x}-1<0$ ومنه $g'(x)<0$
- على $]1;+\infty[$: $\ln x>0$ و $x\sqrt{x}-1>0$ ومنه $g'(x)<0$.

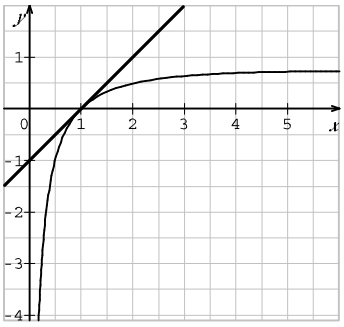
جـ) $g(1)=0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖	↘	0	↗	

نستنتج من جدول التغيرات أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g(x)\ge 0$

د) من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، (C) أسفل T.

4) الرسم(انظر الشكل)



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

73 **الجزء الأول:** $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$

1. $h'(x)=e^x\left(x+1\right)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h			$1-\dfrac{1}{e}$		

من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x)\geq 1-\dfrac{1}{e}$ أي $h(x)>0$ من أجل x من $\mathbb{R}$.

2. تصويب: $g(x)$ بدلا من $h(x)$

أ- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{e^x}{x}\right)=-\infty$

ب) $g'(x)=1-e^x$

x	$-\infty$		β	0	α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		0		$-$	
g	$-\infty$		0	1	0		$-\infty$

جـ) نستعمل مبرهنة القيم المتوسطة

د) إذا كان $x\in]-\infty;\beta[\cup]\alpha;+\infty[$ فإن $g(x)<0$ و إذا كان $x\in]\beta;\alpha[$ فإن $g(x)>0$

الجزء الثاني: دراسة تغيرات الدالة f و رسم المنحنى $\mathcal{C}$:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

2. أ) $f'(x)=\dfrac{e^x\left(xe^x+1\right)-\left(xe^x+e^x\right)\left(e^x-1\right)}{\left(xe^x+1\right)^2}$

$$f'(x)=\frac{2e^x-e^{2x}+xe^x}{\left(xe^x+1\right)^2}=\frac{e^x\left(2-e^x+x\right)}{\left(xe^x+1\right)^2}=\frac{e^x g(x)}{\left(xe^x+1\right)^2}$$

ب) جدول التغيرات

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	-1		$f(\beta)$		$f(\alpha)$		0

3) أ) $g(\alpha)=0$ ومنه $e^{\alpha}=\alpha+2$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}+1}=\frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1}=\frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}=\frac{1}{\alpha+1}$$

ب) تصويب : عين حصرا للعدد $f(\alpha)$ $1,14<\alpha<1,15$ و منه $2,14<\alpha+1<2,15$

ومنه $\frac{1}{2,15}<\frac{1}{\alpha+1}<\frac{1}{2,14}$ أي $0,465<f(\alpha)<0,467$ (الصر سعته 2×10^{-3})

4.معادلة المماس T هي $y=x$

5.أ) $f(x)-x=\frac{e^x-1}{xe^x+1}-x=\frac{e^x-1-x^2e^x-x}{xe^x+1}=\frac{e^x-1-x^2e^x-x+xe^x-xe^x}{xe^x+1}$

$$f(x)-x=\frac{x\left(e^x-xe^x-1\right)+\left(e^x-xe^x-1\right)}{xe^x+1}=\frac{\left(e^x-xe^x-1\right)(x+1)}{xe^x+1}$$

ب) $u'(x)=-xe^x$

إشارة $u'(x)$ هي من نفس إشارة $(-x)$

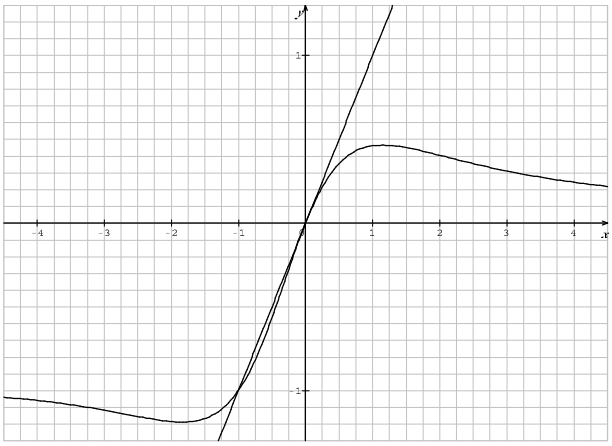
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
u			0		

إشارة $u(x)$: من أجل كل عدد حقيقي x، $u(x)\leq 0$

جـ) إشارة $x-f(x)$ هي من نفس إشارة $-(x+1)$

(C) أعلى T في المجالين $]-1;-\infty[$ و $]0;+\infty[$ و (C) أسفل T في المجال $]-1;0[$

6) الرسم



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM