إذن $u_n \le \ln 2 \le u_n + \frac{1}{2n}$.

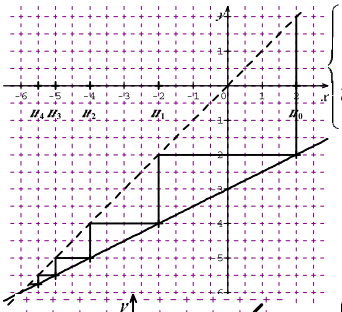
4) المتباينة السابقة تكافئ $0 \le \ln 2 - u_n \le \frac{1}{2n}$ ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln 2 - u_n) = 0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$ .

# التمارين

## التمارين التطبيقية

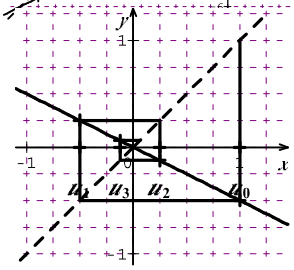
### 1 ـ تذكير بالمتتاليات العددية.

**1** أ ـ $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \end{cases}$



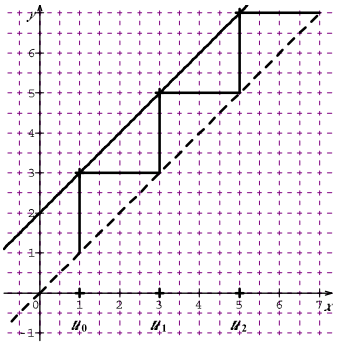
متناقصة تماما.

ب ـ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n \end{cases}$.



ليست رتيبة .

جـ ـ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$.



متزايدة تماما.

**2** $v_{n+1} - v_n = \frac{3}{5}r$ و $w_{n+1} - w_n = u_{3n+3} - u_{3n} = u_{3n} + 3r - u_{3n} = 3r$.

**3** لدينا $(90-2r)+(90-r)+90 = 180$ ومنه $90 = 3r$ أي $r = 30$ إذن الأقياس هي $30^\circ$ ، $60^\circ$ و $90^\circ$.

**4** 1) استعمال التراجع.

2) لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{v_n + 1}{v_n} = 1 + \frac{1}{v_n} = 1 + u_n$ إذن $(u_n)$ حسابية أساسها 1.

**5** $u_7 = u_3 + 4r$ معناه $r = \frac{u_7 - u_3}{4}$ أي $r = 6$ ؛ $u_{17} = u_3 + 14r = 97$.

**6** 1) $u_n = u_1 + 3(n-1) = 3n - 5$ .

2) $u_1 + u_2 + \ldots + u_{20} = \frac{20}{2}(u_1 + u_{20})$ ولدينا $u_{20} = 55$ إذن $u_1 + u_2 + \ldots + u_{20} = 530$.

**7** $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \ldots + 10$.

$S$ هو مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $a_1 = \frac{1}{2}$ ؛ $a_n = a_1 + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}n$

إذن $a_n = 10$ معناه $n = 20$ وبالتالي $S = \frac{20}{2}\left(\frac{1}{2} + 10\right)$

أي $S = 105$.

**8** $u_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{7^{n+2}} = \frac{5^n \times 5}{7^{n+1} \times 7} = \frac{5^n}{7^{n+1}} \times \frac{5}{7} = u_n \times \frac{5}{7}$.

**9** $q^3 = \frac{u_{10}}{u_7} = \left(\frac{18}{11}\right)^3$ ؛ $q = \frac{18}{11}$ ؛ $u_{30} = u_{10} \times q^{20}$

أي $u_{30} = \frac{27 \times 18^{20}}{11^{23}}$

**10** 1) $u_n = -2 \times 3^{n-1}$.

2) $u_1 + u_2 + \ldots + u_7 = (-2)\frac{3^7 - 1}{3 - 1} = -2186$.

3) $v_{n+1} = u_{2n+2} = u_{2n} \times 3^2 = 9v_n$.

إذن $(v_n)$ هندسية أساسها 9 وحدها الأول $v_1 = u_2 = -6$

$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = (-6)\frac{9^n - 1}{9 - 1} = -\frac{3}{4}(9^n - 1)$.

**11** 1) $u_3 = 9\,u_1$ معناه $u_1 \times q^2 = 9u_1$ أي $q^2 = 9$

لأن $u_1 > 0$ وعليه $q = 3$ أو $q = -3$ وبما أن كل الحدود موجبة تماما فإن $q = 3$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2) $u_n = u_0 \times q^n = 2 \times 3^n$.

3) $s_n = u_0 \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} = 3^{n+1} - 1$.

## 2 - الاستدلال بالتراجع .

**12** $p(0)$ تعني $0 = \dfrac{0(0+1)}{2}$.

إذا كانت $1+2+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ فإن

$$1+2+\ldots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$$

أي $1+2+\ldots+k+(k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

**13** $p(0)$ تعني $0^2 = \dfrac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6}$.

إذا كانت $1^2+2^2+\ldots+k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ فإن

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

**14** $p(0)$ تعني $0^3 = \dfrac{0^2(0+1)^2}{4}$.

إذا كانت $1^3+2^3+\ldots+k^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$ فإن

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$$

**15** أ) $p(1)$ تعني $u_1 > 1$ أي $2 > 1$.

$u_k > 1$ معناه $\sqrt{u_k} > \sqrt{1}$ ومعناه $u_{k+1} > 1$.

ب) $p'(1)$ تعني $u_2 \le \dfrac{3}{2}$ أي $\sqrt{2} \le \dfrac{3}{2}$.

إذا كان $u_{k+1} \le \dfrac{3}{2}$ فإن $u_{k+1} \le \dfrac{9}{4}$ ومنه $\sqrt{u_{k+1}} \le \sqrt{\dfrac{9}{4}}$

مع الملاحظة أن $u_{k+1} > 1$ إذن $u_{k+2} \le \dfrac{3}{2}$ .

**16** $p(n)$ هي الخاصية " $u_n = 3$ "

$p(0)$ تعني $u_0 = 3$.

إذا كانت $u_k = 3$ فإن $u_{k+1} = \sqrt{6+u_k} = \sqrt{9} = 3$.

**17** 1) $p(0)$ تعني $0 < u_0 < 1$

$0 < u_k < 1$ معناه $0^2 < u_k{}^2 < 1^2$ أي $0 < u_{k+1} < 1$.

2) بما أن $0 < u_n < 1$ فإن $u_{n+1} - u_n = u_n(u_n - 1)$

$u_n > 0$ و $u_n - 1 < 0$ إذن $u_{n+1} - u_n < 0$.

**18** $p(0)$ تعني $2^0 - 1$ مضاعف لـ 7 .

لدينا $2^{3k} - 1 = 7\alpha$ معناه $2^{3k} = 7\alpha + 1$ .

$2^{3(k+1)} - 1 = 8 \times 2^{3k} - 1 = 8 \times (7\alpha + 1) - 1$ أي

$2^{3(k+1)} - 1 = 7 \times (8\alpha + 1)$.

**19** $p(0)$ تعني $3^0 - 1$ مضاعف لـ 8 .

لدينا $3^{2k} - 1 = 8\alpha$ معناه $3^{2k} = 8\alpha + 1$ .

$3^{2(k+1)} - 1 = 9 \times 3^{2k} - 1 = 9 \times (8\alpha + 1) - 1$ أي

$3^{2(k+1)} - 1 = 8 \times (9\alpha + 1)$.

**20** $p(n)$ هي " $\mathbf{3^{2n} - 2^n}$ مضاعف للعدد 7 "

$p(0)$ هي الخاصية $3^0 - 2^0$ مضاعف لـ 7 .

$3^{2n} - 2^n = 7\alpha$ معناه $3^{2n} - 2^n = 7\alpha + 2^n$ .

$3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 9 \times 3^{2n} - 2 \times 2^n$ أي

$3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 9(7\alpha + 2^n) - 2 \times 2^n = 7(9\alpha + 2^n)$

يمكن اعتبار $p(n)$ هي " $\mathbf{3^{2n+1} + 2^{n+2}}$ مضاعف للعدد 7 ".

**21** $p(0)$ تعني $0^3 - 2 \times 0$ يقبل القسمة على 3 .

نفرض أن $n^3 + 2n = 3\alpha$

لدينا $(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 2n + 3$

أي $(n+1)^3 + 2(n+1) = 3\alpha + 3n^2 + 3n + 3$ .

**22** 1) لدينا $10^n + 1 = 9\alpha$ معناه $10^n = 9\alpha - 1$ أي

$10^{n+1} = 90\alpha - 10$ ومعناه $10^{n+1} = 9(10\alpha - 1) - 1$.

2) من أجل $n = 0$ ، $10^0 + 1 = 2$ و 2 ليس مضاعف لـ 9 .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## 3 ـ تقارب متتالية عددية .

**23** لدينا $-10^{-3}<u_n<10^{-3}$ معناه $0<\frac{1}{n\sqrt{n}}<10^{-3}$

ومعناه $n\sqrt{n}>\frac{1}{10^{-3}}$ ويكافئ $n^3>10^6$ أي $n>10^2$ .

**24** $u_n>10^6$ معناه $n\sqrt{n}>10^6$ ومعناه $n^3>10^{12}$

أي $n>10^4$ .

**25** لدينا $u_n=\frac{3}{2^n}$ ؛ $u_n<10^{-5}$ معناه $2^n>3\times10^5$

أي $n>\frac{3\times10^5}{\ln 2}$ إذن ابتداء من الدليل 432809 .

**26** لدينا $u_n=3^n$ ؛ $u_n>10^{12}$ معناه $3^n>10^{12}$ أي

$n>\frac{10^{12}}{\ln 3}$ إذن ابتداء من الدليل 910239226627 .

**27** 1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n+2}{2n-1}=\frac{3}{2}$ . 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5n-2}{4n-3}=\frac{5}{4}$ .

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}2n-\frac{2}{n+1}=+\infty$ .

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{3}-4+\frac{n+2}{n^2+1}=+\infty$ .

**28** 1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7n^2-3n+2}{n^2-n+1}=7$ .

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-n^2+4n+2}{(n+2)^2}=-1$ .

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-3n+12}{n^2+1}=0$ . 4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n}{4n+3}=+\infty$ .

**29** 1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{3n+2}{2n+1}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$ .

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n^2+2}{n+3}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ .

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}+2}{2n+1}=0$ .

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n\sqrt{n}+n}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\left(\sqrt{n}+1\right)=+\infty$ .

**30** 1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{3\pi n+2}{2n+\pi}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$ .

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{-3\pi n+2}{n+2\pi}\right)=\cos(-3\pi)=-1$ .

3) $u_n=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{17}$ . لدينا $-\frac{1}{n}\le u_n\le\frac{1}{n}$ ،

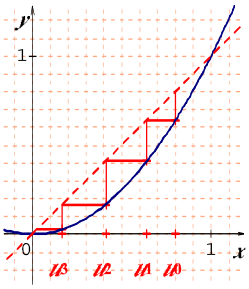
بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ .

**31** 1) تقاطع $\mathscr{C}$ و $\Delta$ هما النقطتان $O(0;0)$ و $A(1;1)$ .

2) $f$ متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ إذن $(u_n)$ متزايدة تماما.

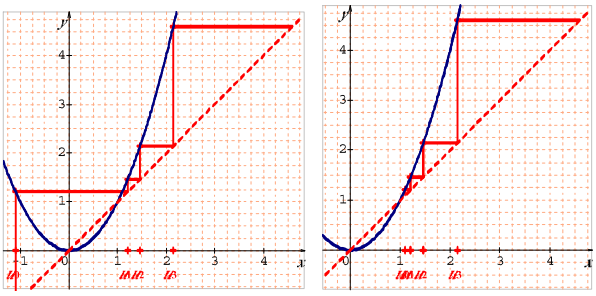
$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ومنه $(u_n)$ متباعدة.

3) في حالة $v_0=0{,}8$ نلاحظ أن المتتالية $(v_n)$ متناقصة تماما وتتقارب نحو 0



في حالة $v_0=-1{,}1$ نلاحظ أن المتتالية $(v_n)$ متزايدة تماما و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$

في حالة $v_0=1{,}1$ نلاحظ أن المتتالية $(v_n)$ متزايدة تماما و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$



4) لدينا $f(0)=0$ و $f(1)=1$ إذن باختيار $v_0=0$ أو $v_0=1$ فتكون $(v_n)$ ثابتة .

## 4 ـ المتتاليات المحدودة .

**32** لدينا $u_{10^4}=5-\frac{10}{10^8}=5-10^{-7}=4{,}9999999$

ومنه $u_{10^4}>4{,}99999$ إذن العددين 0 و 4,99999 ليس عنصران حدان من الأعلى للمتتالية $(u_n)$ .

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $-\frac{10}{n^2}<0$

ومنه $u_n<5$ وبالتالي 5 و 6 هما عنصران حادان من الأعلى للمتتالية.

**33** أ ـ لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $-1\le\sin\left(\frac{n\pi}{7}\right)\le1$

إذن $(u_n)$ محدودة بـ $-1$ و 1 .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**ب -** لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $1 < 1+\frac{1}{n^2} \leq 2$ إذن

$(u_n)$ محدودة بـ 1 و 2.

**جـ -** لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $1 < 1+\frac{1}{n+2} < 2$ إذن

$(u_n)$ محدودة بـ 1 و 2.

**د -** لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $0 < \frac{1}{1+n^2} \leq 1$ إذن

$(u_n)$ محدودة بـ 0 و 1.

**34** أ - $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ ؛ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ؛

$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

| $x$ | $0$ $\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0$ $\nearrow$ $1$ |

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $0 \leq u_n < 1$.

**ب -** $u_n = \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}}$ ؛ $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$ ؛

$f'(x) = \frac{4x}{2(x^2+1)}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$.

| $x$ | $1$ $\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0$ $\nearrow$ $1$ |

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $0 \leq u_n < 1$.

**جـ -** $u_n = \frac{-3}{\sqrt{3n+2}}$ ؛ $f(x) = \frac{-3}{\sqrt{3x+2}}$

$f'(x) = \frac{9}{2(3x+2)\sqrt{3x+2}}$

| $x$ | $0$ $\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\frac{-3\sqrt{2}}{2}$ $\nearrow$ $0$ |

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $\frac{-3\sqrt{2}}{2} \leq u_n < 0$.

**35** أ - $u_n = 2^n$ ؛ $(u_n)$ متتالية متزايدة إذن محدودة من الأسفل بـ $u_0 = 1$ وبما أنها غير متقاربة أي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ فإنها غير محدودة من الأعلى.

**ب -** $u_n = n\sqrt{3} - 2$ ؛ $(u_n)$ متتالية حسابية متزايدة إذن محدودة من الأسفل بـ $u_0 = -2$ وبما أنها غير متقاربة أي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ فإنها غير محدودة من الأعلى.

**جـ -** $u_n = n^2 + n - 1$ ؛ $f(x) = x^2 + x - 1$ ؛

$f'(x) = 2x + 1$

| $x$ | $0$ $\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-1$ $\nearrow$ $+\infty$ |

$(u_n)$ محدودة من الأسفل بـ $u_0 = -1$ فقط.

**36** أ - $u_n = \frac{1}{n+1} + n^2$ ؛ من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n > n^2 \geq 0$ إذن $(u_n)$ محدودة من الأسفل وغير محدودة من الأعلى.

**ب -** $u_n = n + \cos n$ ؛ $f(x) = x + \cos x$ ؛

$f'(x) = 1 - \sin x$ ولدينا $1 - \sin x \geq 0$.

بما أن $x - 1 \leq x + \cos x$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

| $x$ | $0$ $\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ $+$ |
| $f(x)$ | $1$ $\nearrow$ $+\infty$ |

$(u_n)$ محدودة من الأسفل بـ $u_0 = 1$ فقط.

**جـ -** $u_n = (-1)^n \times n^2$ ؛ إذا كان $n$ زوجيا فإن $u_n = n^2$ وبالتالي $(u_n)$ ليست محدودة من الأعلى؛

وإذا كان $n$ فرديا فإن $u_n = -n^2$ وبالتالي $(u_n)$ ليست محدودة من الأسفل.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**37** 1) $f(x)=x^2-5x+6$ ؛ $f'(x)=2x-5$.

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{5}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | | $-\frac{1}{4}$ | | $+\infty$ |

2) الدالة $f$ متزايدة تماما على $[4;+\infty[$ إذن من أجل كل $x\geq 4$ ، $f(x)\geq f(4)$ أي $x^2-5x+6\geq 2$.

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي $n$ أكبر من أو يساوي 4 ،

$n^2-5n+6\geq 2$ وهذا يعني $\frac{1}{n^2-5n+6}\leq\frac{1}{2}$.

## 5 ـ المتتاليتان المتجاورتان .

**38** $u_n=\frac{-1}{2n+4}$ و $v_n=\frac{1}{n+1}$ ؛ من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ لدينا :

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+2)(n+3)}$

و $v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{(n+1)(n+2)}$ إذن $(u_n)$ متزايدة

و $(v_n)$ متناقصة ، ولدينا $u_n-v_n=\frac{-3n-5}{2n^2+6n+4}$ إذن

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$ وبالتالي $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتين.

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$

**39** $u_n=\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$ و $v_n=1+\frac{1}{n^2}$ ؛

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n(n+1)}$ إذن $(u_n)$ متزايدة.

$v_{n+1}-v_n=\frac{-(2n+1)}{n^2(n+1)^2}$ إذن $(v_n)$ متناقصة.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=0$ .

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=1$ .

**40** أ ـ $u_n=\frac{2n-3}{n+1}$ ؛ $u_{n+1}-u_n=\frac{5}{(n+1)(n+2)}$

ومنه $(u_n)$ متزايدة.

$v_n=\frac{2n+3}{n+1}$ ؛ ومنه $v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{(n+2)(n+1)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-6}{n+1}=0$ . $(v_n)$ متناقصة.

إذن $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتان .

ب ـ $u_n=3+\frac{(-1)^n}{n}$ ؛ $u_{n+1}-u_n=\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n+1}$

ومنه $(u_n)$ ليست رتيبة وبالتالي $(u_n)$ و $(v_n)$ غير متجاورتين .

**41** $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$ ؛

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$ إذن $(u_n)$ متزايدة.

$v_n=u_n+\frac{1}{n}$ ؛ $v_{n+1}-v_n=\frac{-3n-2}{2n(n+1)(2n+1)}$

إذن $(v_n)$ متناقصة. $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ .

**42** $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$ ؛

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$ إذن $(u_n)$ متزايدة.

$v_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}$ ؛

$v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{2n(2n+1)}$ إذن $(v_n)$ متناقصة.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}=0$ .

**43** $u_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$ ؛

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^2}$ إذن $(u_n)$ متزايدة.

$v_n=u_n+\frac{1}{n}$ ؛ $v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{n(n+1)^2}$ إذن $(v_n)$

متناقصة. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}=0$ .

**44** $u_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+1}$ ؛

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}\left(2n+3+2\sqrt{(n+2)(n+1)}\right)}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ومنه $(u_n)$ متزايدة.

$v_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$ ؛

$v_{n+1}-v_n = \frac{-2n^2-2n-1}{\sqrt{n+1}\left(2\sqrt{n(n+1)}+(2n+1)\right)}$ ومنه

$(v_n)$ متناقصة.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 0$

## تمارين للتعمّق

### 1 ـ تذكير بالمتتاليات العددية .

**45** $u_n = \frac{\ln n}{n}$ ؛ ليكن $n$ عدد طبيعي غير معدوم ؛

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ؛ $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)\le 0$ معناه $x \ge e$ ؛ إذن $f$ متناقصة تماما على $[e;+\infty[$ وبالتالي $(u_n)$ متناقصة ابتداء من الرتبة 3.

**46** $u : n \mapsto \frac{5^n}{n!}$ ؛ كل حدود $u$ موجبة تماما ؛ ولدينا

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5}{n+1}$ ؛ $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ معناه $\frac{5}{n+1}<1$ أي $n>4$

إذن المتتالية $u$ تكون متناقصة ابتداء من الدليل 5 أي الرتبة السادسة.

**47** $u : n \mapsto \frac{n!}{7^n}$ ؛ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{7}$ ؛ $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ معناه

$n>6$ إذن $u$ تكون متزايدة ابتداء من الدليل 7 أي الرتبة الثامنة.

**48** $u_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ ؛

$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{(n+1)!}$ إذن $u_{n+1}-u_n>0$.

$v_{n+1}-v_n = \frac{-1}{(n!)n(n+1)^2}$ إذن $v_{n+1}-v_n<0$.

**49** 1) أ ـ $\begin{cases} v_1+v_2+v_3 = 24 \\ v_4+v_5+v_6+v_7 = 74 \end{cases}$ معناه

$\begin{cases} v_1+r = 8 \\ 2v_1+9r = 37 \end{cases}$ أي $\begin{cases} v_1 = 5 \\ r = 3 \end{cases}$ .

ب ـ $v_n = 3n+2$ ؛ $v_n > 6023$ معناه $n>2007$

وبالتالي أصغر عدد طبيعي $n$ هو 2008 .

2) $2S_n = n(3n+7)$ معناه $n(u_1+u_n) = n(3n+7)$

أي $(d-3)n-d+2u_1-7=0$ إذن $d=3$ و $u_1=5$.

**50** $(u_n)$ متتالية حسابية أساسها $-5$ و $u_0=-4$ .

1) $u_n = -5n-4$ .

2) $S = u_{26}+u_{27}+\ldots+u_{125} = 50(u_{26}+u_{125})$ أي

$S = 50(-5\times 26-4-5\times 125-4) = -38150$

**51** $u_0 = 2$ ، $4u_{n+1}-2u_n = 9$ ، $v_n = 2u_n-9$

أ - $u_1 = 3,25$ ، $u_2 = 3,875$ و $u_3 = 4,1875$ .

$v_0 = -5$ ؛ $v_1 = -2,5$ ، $v_2 = -1,25$ و $v_3 = -0,625$.

ب - $v_{n+1} = 2u_{n+1}-9 = u_n-\frac{9}{2} = \frac{1}{2}v_n$

جـ - $v_n = -5\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ؛ $u_n = -5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\frac{9}{2}$.

د - $v_0+v_1+\ldots+v_n = 10\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]$ ؛

$u_0+u_1+\ldots+u_n = 5\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]-\frac{9}{2}(n+1)$ .

**52** $u_0 = 14$ ؛ $u_{n+1} = 4u_n+3$ ، $v_n = u_n+1$.

1) $v_{n+1} = u_{n+1}+1 = 4(u_n+1) = 4v_n$ إذن $(v_n)$

متتالية هندسية أساسها 4 وحدها الأول $v_0 = u_0+1 = 15$.

2) $v_n = 15\times 4^n$ ؛ $u_n = 15\times 4^n-1$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

3) $S_n = {u_0}^2 + {u_1}^2 + \ldots + {u_n}^2$ ؛ لدينا

ومنه ${u_n}^2 = 225\times 4^{2n} - 30\times 4^n + 1$

$S_n = 225\left(4^0 + 4^2 + \ldots + 4^{2n}\right)$

$-30\left(4^0 + 4^1 + \ldots + 4^n\right) + n + 1$

$S_n = 15\times 4^{2(n+1)} - 10\times 4^{n+1} + n - 4$.

**53** $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها 3 و $u_0 = \frac{2}{9}$

$S = u_3 + u_4 + \ldots + u_{10} = u_3\frac{3^8 - 1}{2} = \frac{2}{9}\times 3^3 \times \frac{3^8 - 1}{2}$

أي $S = 19680$.

**54** $S = 0,02 - 0,1 + 0,5 - 2,5 + \ldots + 312,5$ ؛

مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $-5$ ؛

بوضع $u_1 = 0,02$ يكون $u_n = 0,02(-5)^{n-1}$

$u_n = 312,5$ معناه $(-5)^{n-1} = 15625$ أي $n = 7$.

$S = 0,02\frac{(-5)^7 - 1}{-6} = -52,08$.

**55** $u_n = 2\times 3^n + 3\times 4^n$ . $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

$s_n = 2\frac{3^{n+1} - 1}{2} + 3\frac{4^{n+1} - 1}{3} = 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2$.

**56** $u_1 = 1$ ، $u_{n+1} = 2u_n + 3$ ، $v_n = u_n + 3$

1) $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = 2u_n + 6 = 2v_n$ إذن $(v_n)$ هندسية أساسها 2.

- $v_n = 4\times 2^{n-1} = 2^{n+1}$ ؛ $u_n = 2^{n+1} - 3$.

2) $s_n = v_1\frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^{n+2} - 4$.

- أي $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + 3n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$

$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + 3n = 2^{n+2} - 4 = 4\left(2^n - 4\right)$ .

**57** $u_0 = \frac{1}{6}$ ، $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{5}{8}$ ؛ $v_n = 2u_n + \frac{5}{3}$.

1) $u_1 = -\frac{7}{12}$ ؛ $u_2 = -\frac{37}{48}$ و $u_3 = -\frac{157}{192}$ . $v_0 = 2$ ،

$v_1 = \frac{1}{2}$ و $v_2 = \frac{1}{8}$ .

2) $v_{n+1} = 2u_{n+1} + \frac{5}{3} = \frac{1}{2}u_n + \frac{5}{12} = \frac{1}{4}v_n$ إذن $(v_n)$

هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ . - $v_n = \frac{2}{4^n}$ ؛ $u_n = \frac{1}{4^n} - \frac{5}{6}$ .

3) أحسب بدلالة $n$ كلا من $s_n$ و $t_n$ حيث :

$s_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = 2\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{2}{3\times 4^n} + \frac{8}{3}$ ،

لدينا $u_n = \frac{1}{2}v_n - \frac{5}{6}$ ومنه $t_n = -\frac{1}{3\times 4^n} - \frac{5}{6}n + \frac{1}{2}$.

**58** $\begin{cases} u_0 = 2\ ,\ u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1} \end{cases}$ : من أجل كل $n \geq 1$ .

1) $\begin{cases} a + b = 4 \\ ab = 1 \end{cases}$ ؛ $a$ و $b$ هما حلا المعادلة

$x^2 - 4x + 1 = 0$ إذن $(a;b) = \left(2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\right)$ أو

$(a;b) = \left(2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}\right)$ .

2) $v_n = u_{n+1} - au_n$ ؛ ليكن $n$ عددا طبيعيا ،

أي $v_{n+1} = u_{n+2} - au_{n+1} = 4u_{n+1} - u_n - au_{n+1}$

أي $v_{n+1} = (4 - a)u_{n+1} - u_n = bu_{n+1} - abu_n$

إذن $v_{n+1} = bv_n$ $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $b$ .

3) $w_n = u_{n+1} - bu_n$ ؛ ليكن $n$ عددا طبيعيا ،

$w_{n+1} = u_{n+2} - bu_{n+1} = 4u_{n+1} - u_n - bu_{n+1}$

أي $w_{n+1} = (4 - b)u_{n+1} - u_n = au_{n+1} - abu_n$

إذن $w_{n+1} = aw_n$ $(w_n)$ متتالية هندسية أساسها $a$ .

4) $v_0 = u_1 - au_0 = 4 - 2a = b - a$

و $w_0 = u_1 - bu_0 = 4 - 2b = a - b$

$v_n = v_0 b^n = (b - a)b^n$ و $w_n = w_0 a^n = (a - b)a^n$

لدينا : $v_n = u_{n+1} - au_n$ و $w_n = u_{n+1} - bu_n$ إذن

ومنه $w_n - v_n = -bu_n + au_n = (a - b)u_n$

$u_n = \frac{w_n - v_n}{a - b} = a^n + b^n = \left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \left(2 - \sqrt{3}\right)^n$.

**59** $a$ ، $b$ و $c$ أعداد حقيقية غير معدومة .

1) $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + 2ca - b^2 + c^2$

بما أن $b^2 = ac$ فإن $2b^2 = 2ac$ ، ومنه

$(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2) لدينا $\begin{cases} a+b+c=78 \\ a^2+b^2+c^2=3276 \end{cases}$ معناه

أي $\begin{cases} a+b+c=78 \\ (a+b+c)(a-b+c)=3276 \end{cases}$

إذن $\begin{cases} a+b+c=78 \\ a-b+c=42 \end{cases}$ أي $2b=78-42=36$ أي $b=18$.

$a$ و $c$ هما حلا المعادلة ذات $\begin{cases} a+c=60 \\ ac=18^2=324 \end{cases}$ ؛

المجهول $x$ التالية : $x^2-60x+324=0$ . إذن

$(a;b;c)=(6;18;54)$ أو $(a;b;c)=(54;18;6)$.

**60** $a$ ، $b$ و $c$ ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية .

$b^3=343$ أي $b=7$ .

$\begin{cases} a+c=29,75 \\ ac=49 \end{cases}$ . $x^2-29,75x+49=0$

$(a;b;c)=\left(28;7;\frac{7}{4}\right)$ أو $(a;b;c)=\left(\frac{7}{4};7;28\right)$.

**61** لدينا $b=qa$ و $c=q^2a$ ؛ إذن $3a+c=4b$

بما أن $a\neq 0$ فإن $q^2-4q+3=0$ $3a+q^2a=4qa$

أي $q=1$ أو $q=3$.

**62** 1) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ، $v_{n+1}=13u_{n+1}-4$ معناه

$v_{n+1}=13\left(\frac{4}{10}-\frac{3}{10}u_n\right)-4=\frac{12}{10}-\frac{39}{10}\times\frac{v_n+4}{13}$

أي : $v_{n+1}=\frac{12}{10}-\frac{3}{10}v_n+\frac{12}{13}=-\frac{3}{10}v_n$ وبالتالي

$(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q=-\frac{3}{10}$ .

2) $v_n=v_1\times q^{n-1}$ ومنه $v_n=(13a-4)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$

$u_n=\frac{v_n+4}{13}=\frac{1}{13}\left[(13a-4)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}+4\right]$

أي $u_n=\frac{(13a-4)}{13}\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}+\frac{4}{13}$ .

3) $s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$ معناه

ومعناه $s_n=\frac{1}{13}(v_1+4+v_2+4+\ldots+v_n+4)$

أي $s_n=\frac{1}{13}(v_1+v_2+\ldots+v_n+4n)$ ؛

$s_n=\frac{v_1}{13}\times\frac{q^n-1}{q-1}+\frac{4n}{13}$

$s_n=-\frac{10}{13}\left(a-\frac{4}{13}\right)\left[\left(-\frac{3}{10}\right)^n-1\right]+\frac{4n}{13}$

**63** $\alpha_1=3$ ؛ $\alpha_3+\alpha_5=\frac{15}{16}$ .

1) $q=\frac{1}{2}$ .

2) $s_n=\alpha_1\frac{q^n-1}{q-1}=-6\left(\frac{1}{2}\right)^n+6$

ليكن $n$ عدد طبيعي غير معدوم ،

$\beta_{n+1}-\beta_n=\ln(\alpha_{n+1})-\ln(\alpha_n)=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$

وبالتالي $(\beta_n)$ هي متتالية حسابية أساسها $-\ln 2$

ب - $t_n=\frac{n}{2}(\beta_1+\beta_n)=\frac{n}{2}(2\beta_1-(n-1)\ln 2)$

$t_n=\frac{n}{2}(2\ln 3-\ln 2^{n-1})=\frac{n}{2}\ln\frac{9}{2^{n-1}}$

**64** لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ،

$A_n=\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ رقم}}$ ومنه $9A_n=\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ رقم}}$ ومنه

$9A_n+1=1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ رقم}}=10^n$

المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n=10^n$ هي هندسية

أساسها 10 . ولدينا : $A_n=\frac{1}{9}(10^n-1)=\frac{1}{9}(u_n-1)$

ومنه $s_n=\frac{1}{9}(u_1-1)+\frac{1}{9}(u_2-1)+\ldots+\frac{1}{9}(u_n-1)$

$s_n=\frac{10}{81}(10^n-1)-\frac{1}{9}n$ .

**65** $A_n=\frac{1}{3}(u_n-1)$ و $u_n=10^n$

وعليه $s_n=\frac{1}{3}\left[(u_1+u_2+\ldots+u_n)-n\right]$ ؛

$s_n=\frac{1}{3}\left[u_1\frac{10^n-1}{9}-n\right]=\frac{10}{27}(10^n-1)-\frac{1}{3}n$

**66** $u_{n+1}=5u_n-7n$ ، $u_0=5$ ؛

$v_n=u_n-\frac{7}{4}n-\frac{7}{16}$ .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

1) النتائج المحصل عليها مع حساب $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 5 | 25 | 118 | 576 | 2859 |
| $v_n$ | 4.5625 | 22.81 | 114.06 | 570.31 | 2851.56 |
| | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |

| 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|
| 14267 | 71300 | 356458 | 1782241 |
| 14257,81 | 71289,1 | 356445,313 | 1782226,56 |
| 5 | 5 | 5 | 5 |

يبدو أن المتتالية $(v_n)$ هندسية ذات الأساس 5 .

2) ليكن $n$ عدد طبيعي ، $v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{7}{4}(n+1)-\frac{7}{16}$

$v_{n+1}=5v_n$ إذن المتتالية $(v_n)$ هندسية ذات الأساس 5 .

$v_n=v_0\times5^n$ ومنه $v_n=\frac{73}{16}\times5^n$ ؛

$u_n=\frac{73}{16}\times5^n+\frac{7}{4}n+\frac{7}{16}$ .

3) $s_n=u_0+u_1+...+u_n$ ، ولدينا

$u_n=v_n+\frac{7}{4}n+\frac{7}{16}$ ،

$s_n=\left(v_0+\frac{7}{16}\right)+\left(v_1+\frac{7}{4}+\frac{7}{16}\right)+...+\left(v_n+\frac{7}{4}n+\frac{7}{16}\right)$

$s_n=(v_0+v_1+...+v_n)+\frac{7}{4}(1+2+...+n)+\frac{7}{16}(n+1)$

$s_n=v_0\frac{5^{n+1}-1}{4}+\frac{7n(n+1)}{8}+\frac{7}{16}(n+1)$ ؛

$s_n=\frac{73}{64}(5^{n+1}-1)+\frac{7}{16}(2n^2+3n+1)$ .

**67** $u_0=-2$ ، $u_{n+1}=\alpha u_n+\beta$ ، $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان غير معدومين ويختلفان عن 1 .

1) من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n=u_0=-2$ ومنه العلاقة $u_{n+1}=\alpha u_n+\beta$ تصبح $-2=-2\alpha+\beta$ أي : $\beta=2\alpha-2$ .

2) أ ـ ليكن $n$ عددا طبيعيا ، $v_{n+1}=u_{n+1}+\gamma$ .

$v_{n+1}=\alpha u_n+\beta+\gamma=\alpha(v_n-\gamma)+\beta+\gamma$

$v_{n+1}=\alpha v_n-\alpha\gamma+\beta+\gamma=\alpha v_n-\gamma(\alpha-1)+\beta$

إذن لكي تكون المتتالية $(v_n)$ هندسية يجب أن يكون

$-\gamma(\alpha-1)+\beta=0$ : أي $\gamma=\frac{\beta}{\alpha-1}$ .

ب ـ $\alpha=3$ ، $\beta=2$ و $\gamma=1$ العلاقة $\gamma=\frac{\beta}{\alpha-1}$ محققة وبالتالي $(v_n)$ هندسية أساسها $\alpha=3$ حدها الأول $v_0=-1$ ؛ ومنه $s_n=v_0\frac{3^n-1}{3-1}=-\frac{3^n}{2}+\frac{1}{2}$ .

لدينا $u_n=v_n-1$ معناه $v_n=u_n+1$ ومنه

$t_n=(v_0-1)+(v_1-1)+...+(v_n-1)=s_n-(n+1)$

$t_n=-\frac{3^n}{2}-n-\frac{1}{2}$ .

## 2 ـ الاستدلال بالتراجع .

**68** 1) أ ـ $s_1=1$ ، $s_2=5$ ، $s_3=14$ و $s_4=30$.

ب ـ $s_{n+1}=s_n+(n+1)^2$.

2) $p(1)$ هي الخاصية $s_1=\frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}$

إذا كان $s_k=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ فإن

أي $s_{k+1}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$

$s_{k+1}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

**69** 1) $t_1=1\times2=2$ ، $t_2=t_1+2\times3=8$ ؛

$t_3=t_2+3\times4=20$ و $t_4=t_3+4\times5=40$ .

$t_{n+1}=t_n+(n+1)(n+2)$.

2) $p(1)$ تعني $t_1=\frac{1}{3}\times1(1+1)(1+2)$ وهي صحيحة.

إذا كانت $t_k=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$ فإن

معناه $t_{k+1}=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$

أي $t_{k+1}=\left(\frac{1}{3}k+1\right)(k+1)(k+2)$

$t_{k+1}=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$.

**70** $p(2)$ و $s_2=1$ تعني. $s_2=1+\left(\frac{1}{2}\times2-1\right)2^2$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

إذا كانت $s_k = 1+\left(\frac{1}{2}k-1\right)2^k$ فإن

$s_{k+1} = 1+\left(\frac{1}{2}k-1\right)2^k + k\times 2^{k-1}$ معناه

$s_{k+1} = 1+\left(\frac{k+1}{2}-1\right)2^{k+1}$.

$(n-1)2^n - n\times 2^{n-1}+1 = n\times 2^n - 2^n - \frac{1}{2}n\times 2^n + 1$

$= -2^n + \frac{1}{2}n\times 2^n + 1 = 1+\left(\frac{1}{2}n-1\right)2^n = s_n$

**71** $p(1)$ تعني $1\times 2\times 3 = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4}$.

نضع $\alpha_n = 1\times 2\times 3+2\times 3\times 4+\ldots+n(n+1)(n+2)$

نفرض $\alpha_k = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$؛

$\alpha_{k+1} = \alpha_k + (k+1)(k+2)(k+3)$ معناه

$\alpha_{k+1} = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + \frac{4(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$

أي $\alpha_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$

**72** $p(1)$ تعني $1 = (1+1)!-1$.

نضع $\alpha_n = 1+2\times 2!+3\times 3!+\ldots+n(n!)$

نفرض $\alpha_k = (k+1)!-1$.

$\alpha_{k+1} = \alpha_k + (k+1)[(k+1)!]$ معناه

أي $\alpha_{k+1} = (k+1)!-1+(k+1)[(k+1)!]$

$\alpha_{k+1} = (k+1)!(k+2)-1 = (k+2)!-1$

**73** $p(1)$ تعني $1! \geq 2^{1-1}$.

من أجل كل $k\in\mathbb{N}^*$ ؛ $k+1\geq 2$

إذا كان $k! \geq 2^{k-1}$ فإن $(k!)(k+1)\geq 2^{k-1}\times 2$

أي $(k+1)! \geq 2^k$.

**74** $\mathcal{P}(4)$ تعني $2^4 \geq 4^2$ .

ليكن $k$ عددا طبيعيا كيفيا حيث $k\geq 4$ ونفرض $2^k \geq k^2$.

إذا كان $k\geq 4$ فإن $2k\geq 8$ وكذلك إذا كان $k\geq 4$

فإن $2k>1$ ومنه $2k+2k>1+2k$ إذن

وبالتالي $k^2 > 2k+1$ وحسب فرضية التراجع لدينا

$2^k \geq k^2$ إذن $2^k > 2k+1$

لدينا إذن $2^k \geq k^2$ و $2^k > 2k+1$ بجمع طرف إلى طرف نجد $2^k+2^k > k^2+2k+1$ أي

$2^{k+1} > (k+1)^2$ معناه $2\times 2^k > (k+1)^2$

ومنه $2^{k+1} \geq (k+1)^2$.

**75** $\mathcal{P}(2)$ تعني $5^2 \geq 4^2+3^2$.

نفرض $5^k \geq 4^k+3^k$ ومنه $5^{k+1} \geq 5\times 4^k+5\times 3^k$ ،

بما أن $5\times 4^k \geq 4\times 4^k$ و $5\times 3^k \geq 3\times 3^k$ فإن

ومنه $5\times 4^k+5\times 3^k \geq 4^{k+1}+3^{k+1}$ $5^{k+1} \geq 4^{k+1}+3^{k+1}$.

**76** متباينة برنولي ( *Bernoulli* )

1) $p(1)$ تعني $1+a\geq 1+a$.

نفرض $(1+a)^k \geq 1+ka$ ومنه

$(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a$.

2) إذا كان $q>1$ فإن $q=1+a$ مع $a>0$

ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $q^n \geq 1+an$ ولدينا

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1+an = +\infty$ لأن $a>0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

**77** 1) $p(2)$ تعني $12\geq 9$. نفرض $3k^2 \geq (k+1)^2$

ومنه $3k^2+6k+3 \geq (k+1)^2+6k+3$

أي $3(k+1)^2 \geq k^2+8k+4$ بما أن $8k\geq 4k$ فإن

$3(k+1)^2 \geq k^2+4k+4$ أي $3(k+1)^2 \geq (k+2)^2$.

2) نسمي $P_n$ الخاصية : " $3^n \geq 2^n+5n^2$ " .

أ ــ $P_1$ تعني $3\geq 7$ ؛ $P_2$ تعني $9\geq 24$ ؛ $P_3$ تعني

$27\geq 53$ ؛ $P_4$ تعني $81\geq 96$ ؛ $P_5$ تعني $243\geq 157$

إذن $P_5$ هي الخاصية الأولى الصحيحة .

ب ــ نفرض $3^k \geq 2^k+5k^2$ مع $k\geq 5$ ، ومنه

$3^{k+1} \geq 3\times 2^k+5\times 3k^2 \geq 2\times 2^k+5\times(k+1)^2$

لأن $3\geq 2$ ومن 1) لدينا $3k^2 \geq (k+1)^2$.

**78** من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $P_n$ تعني " $3^n \geq (n+2)^2$ ".

1) $P_0$ تعني $1\geq 4$ ، $P_1$ تعني $3\geq 9$ ، $P_2$ تعني $9\geq 16$

و $P_3$ تعني $27\geq 25$ وهي الخصية الصحيحة.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2) نفرض $3^k \geq (k+2)^2$ من أجل $k \geq 3$ إذن $3^{k+1} \geq 3(k+2)^2$ معناه $3^{k+1} \geq 3k^2+12k+12$ ومنه $3^{k+1} \geq k^2+6k+9$ أي $3^{k+1} \geq (k+3)^2$.

**79** $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$.

1) $u_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ، $u_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ، $u_3 = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$ ؛ يبدو أن $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{n+1}$.

2) $p(0)$ تعني $u_0 = 1$.

نفرض $u_k = \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$ ؛ $u_{k+1} = \dfrac{u_k}{\sqrt{u_k^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{k+2}}$.

**80** $u_0 = 7$ ؛ $u_{n+1} = 10u_n - 18$.

1) $u_1 = 52$ ، $u_2 = 502$ ، $u_3 = 5002$ ، $u_4 50002$ و $u_5 = 500002$ . في الحد $u_n$ يوجد $(n-1)$ صفرا

2) $u_n = 5\times 10^n + 2$.

$p(0)$ تعني $u_0 = 5\times 10^0 + 2 = 7$.

نفرض $u_k = 5\times 10^k + 2$ ؛ $u_{k+1} = 10u_k - 18$ معناه $u_{k+1} = 10(5\times 10^n + 2) - 18 = 5\times 10^{n+1} + 2$.

**81** $u_0 = 2$ ؛ $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

1) $u_1 = 1$ ؛ $u_2 = -1$ ؛ $u_3 = -5$ ؛ $u_4 = -13$ و $u_5 = -29$ . $3 - u_n = 2^n$.

2) $p(0)$ تعني $3 - u_0 = 2^0$. نفرض $3 - u_k = 2^k$ ؛ $3 - u_{k+1} = 6 - 2u_k = 6 - 2(3 - 2^k) = 2^{k+1}$ .

**82** $u_0 = 3$ ؛ $u_{n+1} = 4 - u_n$ .

1) $u_1 = 1$ ؛ $u_2 = 3$ ؛ $u_3 = 1$ ؛ $u_4 = 3$ و $u_5 = 1$.

$u_{2n+1} = 1$ و $u_{2n} = 3$.

2) $p(0)$ تعني $u_0 = 3$ و $u_1 = 1$.

نفرض $u_{2k} = 3$ و $u_{2k+1} = 1$ . لدينا $u_{2(k+1)} = 4 - u_{2k+1} = 3$ و $u_{2(k+1)+1} = 4 - u_{2(k+1)} = 1$.

**83** $s_n = 1+3+5+\ldots+(2n-1)$ .

1) $s_1 = 1$ ، $s_2 = 4$ ، $s_3 = 9$ و $s_4 = 16$ . $s_n = n^2$.

2) $p(1)$ تعني $s_1 = 1^2$ . نفرض $s_k = k^2$ ؛ $s_{k+1} = s_k + (2k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$.

3) $s_n$ هو مجموع $n$ حدا الأولى من متتالية حسابية أساسها 2 وحدها الأول 1 إذن $s_n = \dfrac{n}{2}(1+2n-1) = n^2$.

**84** $u_0 = 1$ ؛ $u_{n+1} = n + u_n$ .

1) $u_1 = 1$ ؛ $u_2 = 2$ ؛ $u_3 = 4$ ؛ $u_4 = 7$ ؛ $u_5 = 11$.

يبدو أن $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2} + 1$ .

2) $p(0)$ تعني $u_0 = \dfrac{0(0-1)}{2} + 1$.

نفرض $u_k = \dfrac{k(k-1)}{2} + 1$ ؛

$u_{k+1} = k + \dfrac{k(k-1)}{2} + 1 = \dfrac{k(k+1)}{2} + 1$.

**85** $u_0 = 1$ ؛ $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 2}$ .

1) $u_1 = \dfrac{1}{3}$ ؛ $u_2 = \dfrac{1}{7}$ ؛ $u_3 = \dfrac{1}{15}$ ؛ $u_4 = \dfrac{1}{31}$ ؛ $u_5 = \dfrac{1}{63}$ .

$u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}-1}$.

2) $p(0)$ تعني $u_0 = \dfrac{1}{2-1}$. نفرض $u_k = \dfrac{1}{2^{k+1}-1}$ ؛

أي $u_{k+1} = \dfrac{u_k}{u_k + 2} = \dfrac{1}{2^{k+1}-1} \Big/ \left(\dfrac{1}{2^{k+1}-1} + 2\right)$

$u_{k+1} = \dfrac{1}{2^{k+1}-1} \Big/ \left(\dfrac{2^{k+2}-1}{2^{k+1}-1}\right) = \dfrac{1}{2^{k+2}-1}$.

**86** $u_0 = 1$ ؛ $u_{n+1} = u_n + 2$ .

$v_0 = 1$ ؛ $v_{n+1} = v_n + u_n$ .

1) $u_n$ هو الحد العام لمتتالية حسابية أساسها 2 ومنه $u_n = 2n + 1$ .

2) $p(0)$ تعني $v_0 = 1 + 0^2$. نفرض $v_k = 1 + k^2$ ؛ $v_{k+1} = v_k + u_k = 1 + k^2 + 2k + 1 = 1 + (k+1)^2$.

**87** $u_0 = 1$ ؛ $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ .

1) $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$ ومنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ؛ $u_{n+1} - u_n > 0$ أي $(u_n)$ متزايدة تماما.

2) $p(0)$ تعني $u_0 > 0$ نفرض $u_k > k^2$ ؛

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$u_{k+1}=u_k+2k+3$ ومنه $u_{k+1}>k^2+2k+3$

وعليه $u_{k+1}>k^2+2k+1$.

**88** $u_0\in]0;1[$ ؛ $u_{n+1}=-u_n^2+2u_n$ **تصحيح** .

$p(0)$ تعني $0<u_0<1$ . نفرض $0<u_k<1$.

نعتبر الدالة $f:x\mapsto -x^2+2x$ ؛ $f'(x)=-2x+2$

ومنه $f'$ موجبة تماما على $]0;1[$ أي $f$ متزايدة تماما على $]0;1[$ وبالتالي $f(0)<f(u_k)<f(1)$ أي $0<u_{k+1}<1$.

**89** $u_0=1$ ؛ $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ .

* $p(0)$ تعني $0\le u_0\le 2$. نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $[0;2]$ بـ : $f(x)=\sqrt{2+x}$ ؛ $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}$

$f'$ موجبة على $[0;2]$ ومنه $f$ متزايدة تماما على $[0;2]$

وبالتالي إذا كان $0\le u_k\le 2$ فإن $f(0)\le f(u_k)\le f(2)$

أي $\sqrt{2}\le u_{k+1}\le 2$ ومنه $0\le u_{k+1}\le 2$

* $p(n)$ هي الخاصية $u_{n+1}>u_n$.

$p(0)$ تعني $u_1>u_0$ أي $\sqrt{3}>1$. نفرض $u_{k+1}>u_k$ معناه $u_{k+2}>u_{k+1}$ فإن $u_n\ge 0$ وبما أن $u_{k+1}+2>u_k+2$

**90** $u_0=0$ ؛ $u_{n+1}=\sqrt{12+u_n}$ .

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ , $0\le u_n<4$ .

3) أدرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ .

1) $u_1=\sqrt{12}\simeq 3.464$ ؛ $u_2=\sqrt{12+\sqrt{12}}\simeq 3.93$ ,

$u_3=\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}}\simeq 3,991$ ، هي تنتمي إلى المجال $]0;4[$ .

2) الخاصية $\mathcal{P}(0)$ هي $0\le u_0<4$ وهذا صحيح

ليكن $k$ عددا طبيعيا كيفيا ونفترض $0\le u_k<4$ ومنه

$12\le 12+u_k<16$ أي $\sqrt{12}\le\sqrt{12+u_k}<4$

ومنه $0\le\sqrt{12+u_k}<4$ إذن $0\le u_{k+1}<4$ .

3) نلاحظ أن $u_0<u_1<u_2<u_3$ لنبرهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}>u_n$ وهذا باستعمال الاستدلال بالراجع

الخاصية $\mathcal{P}(0)$ هي $u_1>u_0$ وهذا صحيح لأن $u_0=0$

و $u_1=\sqrt{12}$. ليكن $k$ عددا طبيعيا كيفيا ونفرض

$u_{k+1}>u_k$ ومنه $12+u_{k+1}>12+u_k$ ومما سبق كل الحدود موجبة إذن $\sqrt{12+u_{k+1}}>\sqrt{12+u_k}$ ومنه $u_{k+2}>u_{k+1}$ .

**91** $u_0=2$ و $u_{n+1}=0,6\,u_n-1,2$ .

1) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $\mathcal{P}(n)$ هي الخاصية $u_{n+1}<u_n$.

الخاصية $\mathcal{P}(0)$ هي $u_1<u_0$ ولدينا من تعرف المتتالية $u_0=2$ و $u_1=0$ ومنه $u_1<u_0$ إذن $\mathcal{P}(0)$ صحيحة .

ليكن $k$ عددا طبيعيا كيفيا ونفرض $u_{k+1}<u_k$ ومنه $0,6u_{k+1}<0,6u_k$ أي $0,6u_{k+1}-1,2<0,6u_k-1,2$

ومعناه $u_{k+2}<u_{k+1}$ .

2) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $\mathcal{P}'(n)$ هي الخاصية $u_n>-3$.

$\mathcal{P}'(0)$ تعني $u_0>-3$ وهذا صحيح لأن $u_0=2$.

ليكن $k$ عددا طبيعيا كيفيا ونفرض $u_k>-3$ معناه $0,6u_k>-1,8$ أي $0,6u_k-1,2>-1,8-1,2$

وباستعمال تعريف المتتالية يكون $u_{k+1}>-3$ .

**92** $u_0=1$ ؛ $u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{u_n+3}$ .

1) $p(0)$ تعني $0\le u_0\le 1$ وهي صحيحة.

نفرض $0\le u_k\le 1$ ؛ لدينا $u_{k+1}=\dfrac{u_k+1}{u_k+3}$ ومنه $u_{k+1}\ge 0$.

$u_{k+1}-1=\dfrac{-2}{u_k+3}$ ومنه $u_{k+1}-1\le 0$ أي $0\le u_{k+1}\le 1$.

2) $p'(n)$ هي الخاصية $u_{n+1}<u_n$ .

$p'(0)$ تعني $u_1<u_0$ أي $\dfrac{1}{2}<1$. نعتبر الدالة

$f:x\mapsto\dfrac{x+1}{x+3}$ ؛ $f'(x)=\dfrac{2}{(x+3)}$ ومنه $f'(x)>0$

إذن $f$ متزايدة تماما على $[0;1]$ وبالتالي إذا كان $u_{k+1}<u_k$ فإن $f(u_{k+1})<f(u_k)$ أي $u_{k+2}<u_{k+1}$.

**93** $\theta$ عدد حقيقي من المجال $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ .

$u_0=2\cos\theta$ ؛ $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ .

1) أ - $u_1=\sqrt{2(1+\cos\theta)}=\sqrt{4\cos^2\dfrac{\theta}{2}}=2\cos\dfrac{\theta}{2}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$u_2=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}=2\cos\frac{\theta}{4}$ .

ب - $p(0)$ هي $u_0>0$ أي $2\cos\theta>0$ وهذا صحيح لأن $\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ . نفرض $u_k>0$ إذن $2+u_k>2$ ومنه $\sqrt{2+u_k}>\sqrt{2}$ أي $u_{k+1}>\sqrt{2}$ ومنه $u_{k+1}>0$.

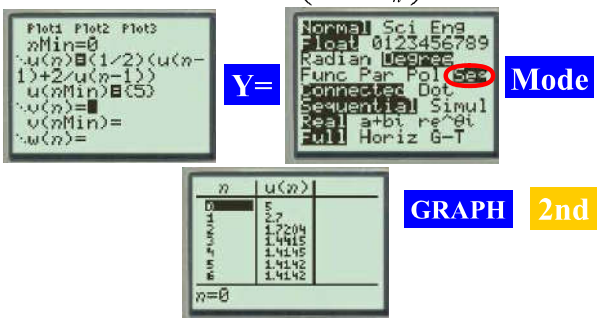
2) $p'(n)$ هي الخاصية $u_n=2\cos\frac{\theta}{2^n}$ ؛

$p'(0)$ تعني $u_0=2\cos\frac{\theta}{2^0}=2\cos\theta$ .

نفرض $u_k=2\cos\frac{\theta}{2^k}$ ، أي $u_{k+1}=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2^k}\right)}$

$u_{k+1}=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2^k\times2}}=2\cos\frac{\theta}{2^{k+1}}$

**94** $u_0=5$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)$ .




2) يبدو أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة .

نعتبر الدالة $f:x\mapsto\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$ لدينا من أجل كل عدد $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)$

ومنه من أجل كل $f'(x)\geq0$ وبالتالي $x\in\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ .

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)-u_n=\frac{2-u_n^2}{2u_n}$

من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $\mathcal{P}(n)$ هي الخاصية "$u_n>\sqrt{2}$".

$\mathcal{P}(0)$ هي $u_0>\sqrt{2}$ وهذا صحيح لأن $u_0=5$ .

ليكن $k$ عددا طبيعيا كيفيا ونفرض $u_k>\sqrt{2}$ ، لدينا $f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$ و $f(u_k)=u_{k+1}$ من فرضية التراجع $u_k>\sqrt{2}$ وبما أن $f$ متزايدة تماما على $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ ينتج $f(u_k)>f(\sqrt{2})$ أي $u_{k+1}>\sqrt{2}$.

لدينا $2-u_n^2<0$ و $u_n>0$ إذن $\frac{2-u_n^2}{2u_n}<0$

أي $u_{n+1}-u_n<0$ وبالتالي المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما.

**95** من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ : $u_n=n\times2^{n-1}$ .

$p(1)$ تعني $u_1=1+(1-1)2^1$ .

نفرض أن $u_1+u_2+\ldots+u_k=1+(k-1)2^k$ ؛

$u_1+u_2+\ldots+u_k+u_{k+1}=1+(k-1)2^k+(k+1)2^k$

أي $u_1+u_2+\ldots+u_k+u_{k+1}=1+k\,2^{k+1}$.

**96** من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ : $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$ .

1) لدينا $u_1=\frac{1}{2}$ و $p(1)$ تعني $u_1=\frac{1}{1+1}$.

نفرض $u_1+u_2+\ldots+u_k=\frac{k}{k+1}$ ؛

$u_1+u_2+\ldots+u_k+u_{k+1}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

أي $u_1+u_2+\ldots+u_{k+1}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$.

2) نسمي $S$ المجموع

$\frac{1}{1427\times1428}+\frac{1}{1428\times1429}+\ldots+\frac{1}{2007\times2008}$.

ونضع $T=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\ldots+\frac{1}{2007\times2008}$

و $t=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\ldots+\frac{1}{1426\times1427}$

إذن $S=T-t=\frac{2007}{2008}-\frac{1426}{1427}=\frac{581}{2865416}$

**97** الخاصية الابتدائية هي $(2+\sqrt{3})^0=p_0+q_0\sqrt{3}$

وهي صحيحة بأخذ $p_0=1$ و $q_0=0$.

نفرض أنه من أجل $k\in\mathbb{N}$ ، يوجد عددان طبيعيان $p_k$ و $q_k$ حيث $(2+\sqrt{3})^k=p_k+q_k\sqrt{3}$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(p_k+q_k\sqrt{3}\right)$ معناه

$\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}=\left(2p_k+3q_k\right)+\left(p_k+2q_k\right)\sqrt{3}$

بوضع $p_{k+1}=2p_k+3q_k$ و $q_{k+1}=p_k+2q_k$ وهما

عددان طبيعيان فيكون $\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}=p_{k+1}+q_{k+1}\sqrt{3}$.

**98** 1) $u_1=1$ ، $u_2=3$ ، $u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n$ .

أ ــ $u_3=5$ ، $u_4=7$ و $u_5=9$ . $u_n=2n-1$.

ب ــ الخاصية الابتدائية صحيحة لأن $u_1=2\times1-1=1$.

نفرض $u_k=2k-1$ ؛

$u_{k+1}=2u_k-u_{k-1}=4k-2-2k+3=2k+1$

2) $v_0=\frac{2}{5}$ ، $v_1=1$ و $v_{n+2}=5v_{n+1}-6v_n$ .

الخاصية الابتدائية صحيحة لأن $v_0=\frac{2^0+3^0}{5}=\frac{2}{5}$.

نفرض $v_k=\frac{2^k+3^k}{5}$ ؛ $v_{k+1}=5v_k-6v_{k-1}$

$v_{k+1}=2^k+3^k-\frac{6}{5}\left(2^{k-1}+3^{k-1}\right)$ ؛

$v_{k+1}=2^k+3^k-\frac{3}{5}2^k-\frac{2}{5}3^k=\frac{1}{5}2^{k+1}+\frac{1}{5}3^{k+1}$.

**99** $u_0=1$ ، $u_1=2$ ، $u_{n+1}+u_{n-1}=4u_n$.

الخاصية الابتدائية $u_0=\frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^0+\left(2-\sqrt{3}\right)^0\right]$.

نفرض $u_k=\frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^k+\left(2-\sqrt{3}\right)^k\right]$ ؛

ومعناه $u_{k+1}=4u_k-u_{k-1}$

$u_{k+1}=2\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^k+\left(2-\sqrt{3}\right)^k\right]$

$-\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^{k-1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{k-1}}{2}$

$u_{k+1}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{k-1}\left(4+2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)+$

$\left(2-\sqrt{3}\right)^{k-1}\left(4-2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)$

$4+2\sqrt{3}-\frac{1}{2}=\frac{4+3+2\sqrt{3}}{2}=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{2}$

$4-2\sqrt{3}-\frac{1}{2}=\frac{4+3-2\sqrt{3}}{2}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{2}$

ومنه $u_{k+1}=\frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{k+1}\right]$.

**100** $u_0=2$ و $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$ .

أ ـ الخاصية الابتدائية $u_0>-1$.

نفرض $u_k>-1$ معناه $u_k+1>0$ ومنه $\sqrt{u_k+1}>0$

أي $u_{k+1}>0$ وبالتالي $u_{k+1}>-1$.

ب ـ $u_0=2$ و $u_1=\sqrt{3}$ ومنه $u_1<u_0$.

نفرض $u_{k+1}<u_k$ ومنه $u_{k+1}+1<u_k+1$ إذن $0<u_{k+1}+1<u_k+1$

أي $\sqrt{u_{k+1}+1}<\sqrt{u_k+1}$ . $u_{k+2}<u_{k+1}$

جـ ـ الخاصية الابتدائية $u_0\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ أي $2\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

نفرض $u_k\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ومنه $u_k+1\geq\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ إذن

أي $\sqrt{u_k+1}\geq\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ . $u_{k+1}\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

لأن $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}}=\frac{\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

**101** $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\frac{u_n+4}{u_n-2}$ ، $v_n=\frac{u_n+1}{u_n-4}$ .

1) $u_0=1$ ومنه $u_0\neq4$ . نفرض $u_k\neq4$

ونفترض $u_{k+1}=4$ أي $\frac{u_k+4}{u_k-2}=4$ معناه $u_k=4$

وهذا تناقض إذن $u_{k+1}\neq4$ أي كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_n\neq4$.

$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}-4}=\frac{2u_n+2}{u_n-2}\times\frac{u_n-2}{-3u_n+12}$ ؛

$v_{n+1}=-\frac{2}{3}\times\frac{u_n+1}{u_n-4}=-\frac{2}{3}v_n$ .

2) $v_n=v_0\left(-\frac{2}{3}\right)^n=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ .

$v_n=\frac{u_n+1}{u_n-4}$ معناه $u_n\left(v_n-1\right)=4v_n+1$

لنبرهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $v_n\neq1$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لدينا الخاصية الابتدائية $v_0 \neq 1$ لأن $v_0 = -\frac{2}{3}$ . إذا كان $v_k \neq 1$ أي $\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} \neq 1$ فإن $\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+2} \neq 1$ ومنه $v_{k+1} \neq 1$.

$u_n = \frac{4v_n + 1}{v_n - 1} = \left[4\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1\right] / \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right]$.

**102** $p(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$ .

1) $p(x+1) - p(x) = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x + \frac{1}{3} - \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2} + \frac{x+1}{6}\right) - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}\right) = x^2$

2) الخاصية الابتدائية هي $p(0) = 0$ إذن $p(0) \in \mathbb{N}$ .

نفرض $p(k) \in \mathbb{N}$ لدينا $p(k+1) = p(k) + k^2$ ومنه $p(k+1) \in \mathbb{N}$ .

3) الخاصية الابتدائية هي $p(1) = 0^2$ وهذا صحيح لأن $p(1) = \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2-3+1}{6} = 0$ .

نفرض $p(k+1) = 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2$ ؛

لدينا $p(n+2) = p(n+1) + (n+1)^2$ معناه

$p(n+2) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2$ .

**103** $u_1 = 0$ ، $u_{n+1} = \frac{-1}{u_n - 2}$ .

لدينا $u_2 = \frac{1}{2}$ ، $u_3 = \frac{2}{3}$ ، $u_4 = \frac{3}{4}$ يبدو أن $u_n = \frac{n-1}{n}$

لنبرهن باستعمال التراجع .

الخاصية الابتدائية هي $u_1 = \frac{1-1}{1} = 0$ وهي صحيحة.

نفرض $u_k = \frac{k-1}{k}$ ؛ $u_{k+1} = \frac{-1}{u_k - 2} = \frac{-1}{\frac{k-1}{k} - 2} = \frac{k}{k+1}$

$u_{2006} = \frac{2005}{2006}$ .

**104** إذا كان $n = 24$ فإن $n = 5 \times 2 + 7 \times 2$

نفرض من أجل $k \geq 24$ فيكون $k = 5a + 7b$

- إذا كان $b = 0$ فإن $k = 5a$ وعليه $a \geq 5$ ولدينا :

$k + 1 = 5a - 20 + 21 = 5(a-4) + 7 \times 3$ .

- إذا كان $b = 1$ فإن $k = 5a + 7$ وعليه $a \geq 4$ ولدينا :

$k + 1 = 5a - 20 + 28 = 5(a-4) + 7 \times 4$ .

- إذا كان $b \geq 2$ فإن $k + 1 = 5a + 7b + 15 - 14$

أي $k + 1 = 5(a+3) + 7(b-2)$ .

**105** 1) $u_1 = \frac{1}{2}$ ، $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right) u_n$ .

أ ــ $u_2 = \frac{1}{2}$ ، $u_3 = \frac{3}{8}$ ، $u_4 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ ، $u_5 = \frac{5}{32}$ .

ب ــ الخاصية الابتدائية هي $u_1 = \frac{1}{2^1}$ . نفرض $u_k = \frac{k}{2^k}$ ؛

$u_{k+1} = \left(\frac{k+1}{2k}\right) u_k = \left(\frac{k+1}{2k}\right) \frac{k}{2^k} = \frac{k+1}{2^{k+1}}$ .

2) $k \in \mathbb{N}^*$ ، $v_1 = \frac{1}{k}$ ، $v_{n+1} = \left(\frac{n+1}{kn}\right) v_n$ .

$v_1 = \frac{1}{k}$ ، $v_2 = \frac{2}{k^2}$ ، $v_3 = \frac{3}{k^3}$ ، ... $v_n = \frac{n}{k^n}$.

الخاصية الابتدائية هي $v_1 = \frac{1}{k^1}$ . نفرض $v_r = \frac{r}{k^r}$ ،

$v_{r+1} = \left(\frac{r+1}{kr}\right) v_n = \left(\frac{r+1}{kr}\right) \frac{r}{k^r} = \frac{r+1}{k^{r+1}}$.

## 3 ـ تقارب متتالية عددية .

**106** 1) $\lim_{n \to +\infty} e^{1-n} = 0$ 2) $\lim_{n \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2n+3}\right) = 0$ .

3) $\lim_{n \to +\infty} (n+2)e^{-n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{e^n} + 2e^{-n} = 0$ .

4) $\lim_{n \to +\infty} \ln\left(3 + e^{2-n}\right) = \ln 3$ .

5) $\lim_{n \to +\infty} \frac{e^n - 6}{2e^n + 1} = \frac{1}{2}$ . 6) $\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{-n} - 1}{2e^{-n} + 1} = -1$ .

7) $\lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{e^n - 3}{e^n + 1}\right) = \ln 1 = 0$ .

8) $\lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{e^n + 2}{e^{2n} + 1}\right) = 0$ .

**107** 1) $u_n = n^2\left(\sqrt{3 + \frac{2}{n+1}} - \sqrt{3}\right)$ .

$u_n = \frac{2n^2}{n+1} \frac{1}{\sqrt{3 + \frac{2}{n+1}} + \sqrt{3}}$ ؛ $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{\sqrt{3}} = +\infty$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2) $u_n=\sqrt{3n^2-1}-\sqrt{3n}=\dfrac{-1}{\sqrt{3n^2-1}+\sqrt{3n}}$ .

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ .

3) $u_n=\dfrac{n}{\sqrt{n+2}}-\dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$ .

$u_n=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+3n+2}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}\right)$

$u_n=\dfrac{-1}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

4) $u_n=\dfrac{3n-\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}=\dfrac{-1}{\sqrt{n^2+5}\left(3n+\sqrt{9n^2+1}\right)}$ ،

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ .

**108** - أ - $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n}{5^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=0$ لأن $-1<\dfrac{2}{5}<1$ .

ب - $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3{,}01^n}{3^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3{,}01}{3}\right)^n=+\infty$ لأن $\dfrac{3{,}01}{3}>1$ .

جـ - $u_n=1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+...+\dfrac{1}{5^n}$ ؛

$u_n=-\dfrac{5}{4}\left[\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}-1\right]$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{5}{4}$ .

**109** $u_0=2$ ، $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{3u_n+1}$ و $v_n=\dfrac{1}{u_n}$ .

1) استعمال التراجع ؛ $p(0)$ تعني $u_0>0$ .

إذا كانت $u_k>0$ فإن $3u_k+1>0$ ومنه $u_{k+1}>0$ .

2) ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، $v_{n+1}=\dfrac{1}{u_{n+1}}=\dfrac{3u_n+1}{u_n}=3+v_n$ .

3) $v_n=3n+\dfrac{1}{2}$ ومنه $u_n=\dfrac{2}{6n+1}$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ .

**110** $u_0=2$ ، $u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n-2$ و $v_n=u_n+3$ .

$s_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $t_n=u_0+u_1+...+u_n$ .

1) ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، $v_{n+1}=u_{n+1}+3=\dfrac{1}{3}u_n+1$ معناه $(v_n)$ هندسية . ومنه $v_n=5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

2) $u_n=v_n-3=5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-3$ بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-3$ .

$s_n=\dfrac{3}{2}v_0\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=\dfrac{3}{2}v_0=\dfrac{15}{2}$ .

$t_n=s_n-3(n+1)$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=-\infty$

**111** $u_n=\dfrac{n^2+1}{n+1}$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$ .

$v_n=\dfrac{u_n}{n}=\dfrac{n^2+1}{n^2+n}$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{n^2}=1$ .

$w_n=u_n-n=\dfrac{1-n}{n+1}$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-n}{n}=-1$ .

$t_n=\dfrac{v_n-1}{w_n-1}=\dfrac{n-1}{2n^2}$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n}=0$ .

**112** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2-4}{n+1}=+\infty$ .

$\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{n}=3$ .

$\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-3n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-3n-4}{n+1}=-3$ .

**113** من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $u_n=\dfrac{1}{n!}$ .

1) $u_1=1$ ؛ $u_2=\dfrac{1}{2}$ ؛ $u_3=\dfrac{1}{6}$ ؛ $u_4=\dfrac{1}{24}$ ؛

$u_5=\dfrac{1}{120}$ ؛ $u_6=\dfrac{1}{720}$ .

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ؛ $n!\geq n$

ومنه $0<u_n\leq\dfrac{1}{n}$ ؛ بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ .

**114** من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_n=\dfrac{\cos(3n-\pi)}{\sqrt{n}}$ .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $-1\le\cos(3n-\pi)\le 1$

ومنه من أجل $n\neq 0$ ، $-\frac{1}{\sqrt{n}}\le u_n\le\frac{1}{\sqrt{n}}$ ؛ بما أن

$\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ .

**115** من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_n=n+1-\cos\frac{n\pi}{5}$ .

$n\le u_n\le n+2$ ومنه $-1\le-\cos\frac{n\pi}{5}\le 1$ ؛ بما أن

$\lim\limits_{n\to+\infty}n=\lim\limits_{n\to+\infty}n+2=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

**116** من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_n=\left(\frac{n}{10}-1\right)^n$ .

1) القيم المقربة لأحد عشر الحدود الأولى من $(u_n)$.

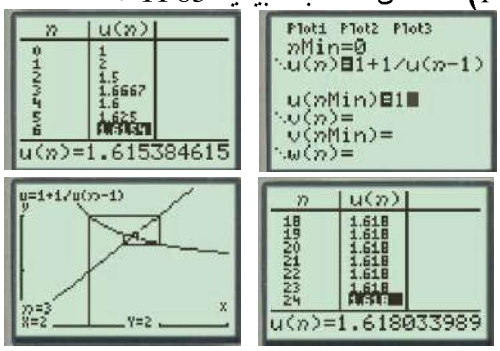



2) ليكن $n$ عدد طبيعي، $n\ge 30$ معناه $\frac{n}{10}-1\ge 2$

ومعناه $\left(\frac{n}{10}-1\right)^n\ge 2^n$ أي $u_n\ge 2^n$

ومنه $2>1$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ .

**117** 1) استعمال الحاسبة البيانية TI 83 .




ابتداء من $u_{23}$ أي الدليل 23 تستقر قيم الحدود على 1,618033989.

يبدو أن المتتالية متقاربة ونهايتها العدد الحقيقي 1,618033989 .

إذا كانت المتتالية $u$ متقاربة فإنه يوجد عدد حقيقي $l$ حيث $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ وكذلك $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=l$ هذا من جهة ،

ومن جهة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}1+\frac{1}{u_n}=1+\frac{1}{l}$ إذن

$l=1+\frac{1}{l}$ ومعناه $l^2-l-1=0$ و $l\neq 0$ .

مميز المعادلة $l^2-l-1=0$ هو 5 ومنه المعادلة تقبل

حلين متمايزين هما $l'=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $l''=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

لدينا $u_0=1$ ومنه $u_0>0$ وإذا كان $u_k>0$ من أجل $k$

عدد طبيعي كيفي, فإن $1+\frac{1}{u_k}>0$ أي $u_{k+1}>0$




وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، إذن $u_n>0$

وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n>0$ $l=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

**118** لدينا $u_1=0,57=57\times\frac{1}{100}$ ،

$u_2=0,57+0,0057=0,57+0,57\times\frac{1}{100}$

$u_2=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}\right)$ .

نفترض أن $u_k=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\ldots+\frac{1}{100^k}\right)$ من

أجل $k$ عدد طبيعي كيفي غير معدوم. $u_{k+1}=0,\underbrace{57\ldots57}_{2k+2}$ رقما

ومنه $u_{k+1}=\underbrace{0,00\ldots0057}_{2k}+\underbrace{0,00\ldots0057}_{2k+2}$ رقما

إذن $u_{k+1}=u_k+\frac{57}{10^{2k+2}}$ ؛

$u_{k+1}=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\ldots+\frac{1}{100^k}\right)+57\times\frac{1}{100^{k+1}}$

$u_{k+1}=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\ldots+\frac{1}{100^k}+\frac{1}{100^{k+1}}\right)$.

وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $u_n=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\ldots+\frac{1}{100^n}\right)$

هو مجمع حدود متتابعة $\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\ldots+\frac{1}{100^n}\right)$

لمتتالية هندسية أساسها وحدها الأول مساويين للعدد $\frac{1}{100}$ .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$$u_n = 57\times\frac{1}{100}\times\frac{1-\left(\frac{1}{100}\right)^n}{1-\frac{1}{100}} = \frac{57}{100}\times\frac{100}{99}\left[1-\left(\frac{1}{100}\right)^n\right]$$

ومنه $u_n = \frac{57}{99}\left[1-\left(\frac{1}{100}\right)^n\right]$ بما أن $-1<\frac{1}{100}<1$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n = 0$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{57}{99}$ .

**119** $(u_n)$ معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = \sqrt{n^2+n}-n$ .

1) حساب الحدود باستعمال مجدول إكسيل .

| $n$ | $u_n$ |
|---|---|
| 1 | 0.4142135623731 |
| 2 | 0.4494897427832 |
| 3 | 0.4641016151378 |
| 4 | 0.4721359549996 |

| $n$ | $u_{10^n}$ |
|---|---|
| 1 | 0.4880884817015 |
| 2 | 0.4987562112089 |
| 3 | 0.4998750624610 |
| 4 | 0.4999875006251 |
| 5 | 0.4999987500050 |
| 6 | 0.4999998749699 |
| 7 | 0.4999999869615 |
| 8 | 0.5000000000000 |
| 9 | 0.5000000000000 |
| 10 | 0.5000000000000 |
| 11 | 0.5000000000000 |
| 12 | 0.5000000000000 |
| 13 | 0.5000000000000 |
| 14 | 0.5000000000000 |
| 15 | 0.0000000000000 |

2) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ،

$$u_n = \sqrt{n^2+n}-n$$

$$u_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}$$

$$u_n = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n} = \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$

من أجل القيم الكبيرة للعدد $n$ ، في المجدولات أو الحاسبات $n$ يهمل بالنسبة لـ $n^2$ ولا يمكن التمييز بين $n^2$ و $n^2+n$ ولهذا نتائج الحساب لـ $\sqrt{n^2+n}-n$ تسجل 0.

**120** $(u_n)$ معرفة بـ $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{14}{3}$ .

1) لنبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}>u_n$ .

لدينا $u_0=1$ و $u_1=\frac{1}{3}u_0+\frac{14}{3}=5$ إذن $u_1>u_0$ .

نفترض أن $u_{k+1}\geq u_k$ وهذا من أجل $k$ عدد طبيعي كيفي. الدالة التآلفية $f: x\mapsto\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ إذن $f(u_{k+1})>f(u_k)$ أي $u_{k+2}>u_{k+1}$

وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}>u_n$ أي المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما .

2) $x=\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$ معناه $3x=x+14$ ومعناه $2x=14$ أي $x=7$ .

3) إذا كانت المتتالية $(u_n)$ متقاربة فإنها تقبل نهاية عددا حقيقيا $l$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ وكذلك $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=l$

لدينا $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{14}{3}$ ومنه

$$\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}u_n+\frac{14}{3}\right)=\frac{1}{3}l+\frac{14}{3}$$

وبالتالي $\frac{1}{3}l+\frac{14}{3}=l$ وحسب السؤال السابق يكون $l=7$ .

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $v_n=u_n-7$ معناه

$v_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{14}{3}-7=\frac{1}{3}u_n-\frac{7}{3}$ أي $v_{n+1}=u_{n+1}-7$

بما أن $u_n=v_n+7$ فإن $v_{n+1}=\frac{1}{3}(v_n+7)-\frac{7}{3}=\frac{1}{3}v_n$

وبالتالي المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=-6$ .

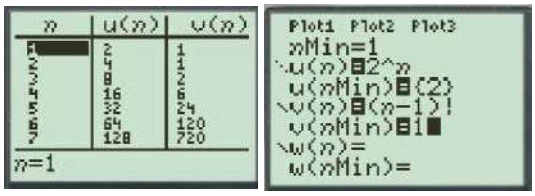
$$v_n=v_0\left(\frac{1}{3}\right)^n=-6\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$u_n=v_n+7$ معناه $v_n=u_n-7$

أي $u_n=-6\left(\frac{1}{3}\right)^n+7$ . بما أن $-1<\frac{1}{3}<1$ فإن

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=7$ إذن $(u_n)$ متقاربة.

**121**




1) الخاصية $2^n\leq(n-1)!$ تكون صحيحة من أجل $n=6$ .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

نفترض أن $2^k \leq (k-1)!$ من أجل $k$ عدد طبيعي كيفي أكبر من أو يساوي 6 . إذن $2^k \leq (k-1)!$ و $k \geq 2$ ومنه $2^{k+1} \leq k(k-1)!$ وبالتالي $2 \times 2^k \leq k(k-1)!$

إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من كل عدد طبيعي $n \geq 6$ ، $2^n \leq (n-1)!$

2) ليكن $n \geq 6$ ، $2^n \leq (n-1)!$ معناه $2^n \leq \frac{n(n-1)!}{n}$ أي $2^n \leq \frac{n!}{n}$ و بالتالي $\frac{2^n}{n!} \leq \frac{1}{n}$ .

إذن من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n \geq 6$ ،

$0 \leq \frac{2^n}{n!} \leq \frac{1}{n}$ بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ ،

إذن المتتالية ذات الحد العام $\frac{2^n}{n!}$ ، متقاربة .

**122** $a$ عدد حقيقي و $(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$u_0 = a$ و العلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{u_n}{2+u_n^2}$ .

1) ليكن $n$ عددا طبيعيا، $2 + u_n^2 \geq 2$ معناه $\frac{1}{2+u_n^2} \leq \frac{1}{2}$ ومعناه $\frac{|u_n|}{2+u_n^2} \leq \frac{|u_n|}{2}$

ولدينا $u_{n+1} = \frac{u_n}{2+u_n^2}$ إذن $|u_{n+1}| = \frac{|u_n|}{|2+u_n^2|} = \frac{|u_n|}{2+u_n^2}$

وبالتالي : من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ ، $|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{2}$ .

2) لدينا $|u_0| = |a|$ و $\frac{|a|}{2^0} = |a|$ إذن الخاصية $|u_0| \leq \frac{|a|}{2^0}$ صحيحة .

نفترض أن الخاصية $|u_k| \leq \frac{|a|}{2^k}$ من أجل عدد طبيعي $k$ كيفي إذن $\frac{1}{2}|u_k| \leq \frac{1}{2} \times \frac{|a|}{2^k}$ ، ومنه $\frac{|u_k|}{2} \leq \frac{|a|}{2^{k+1}}$ بما أن $|u_{k+1}| \leq \frac{|u_k|}{2}$ من السؤال السابق فإن $|u_{k+1}| \leq \frac{|a|}{2^{k+1}}$ إذن حسب مبدأ التراجع ينتج من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ ،

$|u_n| \leq \frac{|a|}{2^n}$ .

3) حسب السؤال السابق من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ ،

$|u_n| \leq \frac{|a|}{2^n}$ معناه $-\frac{|a|}{2^n} \leq u_n \leq \frac{|a|}{2^n}$ أي

$-|a|\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq u_n \leq |a|\left(\frac{1}{2}\right)^n$

بما أن $-1 < \frac{1}{2} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ومنه

$\lim\limits_{n\to+\infty} -|a|\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} |a|\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ .

**123** $(u_n)$ معرفة بـ $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}$ .

1) أ - لدينا : $u_0 > 0$ نفترض أن $u_k > 0$ من أجل $k$ عدد طبيعي كيفي ، ومنه $u_k + 2 > 0$ و $2u_k + 1 > 0$ إذن $\frac{u_k + 2}{2u_k + 1} > 0$ وبالتالي $u_{k+1} > 0$ وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ ، $u_n > 0$ .

ب - إذا كانت المتتالية $(u_n)$ متقاربة فإنها تقبل نهاية أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ حيث $l \in \mathbb{R}_+^*$ ، ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ هذا من جهة . ومن جهة أخرى لدينا

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n + 2}{2u_n + 1} = \frac{l+2}{2l+1}$ ومنه $\frac{l+2}{2l+1} = l$

ومعناه $2l^2 = 2$ أي $l^2 = 1$ ومنه $l = 1$ .

2) $\mathscr{C}$ المنحنى الممثل للدالة $f : x \mapsto \frac{x+2}{2x+1}$ ، الدالة $f$ تقبل الاشتقاق على $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$ و $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

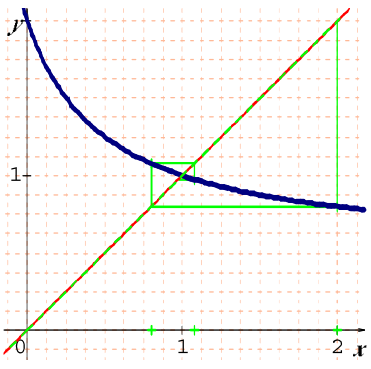
ولدينا : $f'(x) = \frac{(2x+1)-2(x+2)}{(2x+1)^2} = \frac{-3}{(2x+1)^2}$

ومنه من أجل كل عدد $x$ من $[0\,;\,2{,}2]$ $f'(x) < 0$

إذن الدالة $f$ متناقصة تماما على $[0\,;\,2{,}2]$

| $x$ | 0 | 1 | 2,2 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | | 0,77 |
| | | 1 | |

يبدو أن $(u_n)$ متقاربة




قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ونهايتها 1 .

3) نضع من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ ، $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$ .

أ- ليكن $n$ عددا طبيعيا ، $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}$

$$v_{n+1}=\frac{\dfrac{u_n+2}{2u_n+1}-1}{\dfrac{u_n+2}{2u_n+1}+1}=\frac{-u_n+1}{3u_n+3}=-\frac{1}{3}\times\frac{u_n-1}{u_n+1}=-\frac{1}{3}v_n$$

إذن $(v_n)$ هندسية أساسها $-\dfrac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=\dfrac{u_0-1}{u_0+1}=\dfrac{1}{3}$

بما أن $-1<-\dfrac{1}{3}<1$ فإن $(v_n)$ متقاربة .

$v_n=v_0\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n=(-1)^n\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$ .

ب- ليكن $n$ عددا طبيعيا ، $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

لدينا $v_n=1$ معناه $\dfrac{u_n-1}{u_n+1}=1$ ومعناه $u_n-1=u_n+1$

أي $-1=1$ وهذا تناقض إذن $v_n\neq 1$.

$v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$ معناه $v_nu_n+v_n=u_n-1$ ومعناه

$v_nu_n-u_n=-v_n-1$ يكافئ $(v_n-1)u_n=-v_n-1$

أي $u_n=\dfrac{-v_n-1}{v_n-1}$ .

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_0\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n=0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

وبالتالي $(u_n)$ متقاربة.

**124** $(u_n)$ معرفة بـ $u_0=5$ و $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$.

1) لدينا $u_0=5$ ، $u_1=\sqrt{7}$ و $2\le\sqrt{7}\le 5$ إذن

$2\le u_1\le u_0$ .

نفترض $2\le u_{k+1}\le u_k$ يعني $4\le 2+u_{k+1}\le 2+u_k$

بما أن الدالة الجدر التربيعي متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

فإن $2\le u_{k+2}\le u_{k+1}$ أي $\sqrt{4}\le\sqrt{2+u_{k+1}}\le\sqrt{2+u_k}$

وحسب مبدأ التراجع نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي

$n$ ، $2\le u_{n+1}\le u_n$ .

2) من السؤال السابق ينتج أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 2 إذن هي متقاربة ونهايتها $l\ge 2$.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=l$ هذا من جهة ، ومن جهة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2+u_n}=\sqrt{2+l}$ إذن $l=\sqrt{2+l}$.

لدينا $l\ge 2$ و $l=\sqrt{2+l}$ إذن $l^2=2+l$ معناه

$l^2-l-2=0$ ومعناه $(l+1)(l-2)=0$ يكافئ

$l=2$ أو $l=-1$. بما أن $l\ge 2$ فإن $l=2$ .

**125** نعتبر المتتالية $u$ المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ

$u_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ .

1) الدالة $f:x\mapsto\ln(x+1)-x$ تقبل الاشتقاق على $]-1;+\infty[$ و $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1=\dfrac{-x}{x+1}$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)=-\infty$ ؛

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\frac{\ln(x+1)}{x+1}-\frac{x}{x+1}\right]=-\infty$$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\infty$ |

2) من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $f(x)\le 0$ معناه $\ln(x+1)\le x$ ، بوضع $x=\dfrac{1}{k}$ مع $k\in\mathbb{N}^*$ يكون $\ln\left(\dfrac{1}{k}+1\right)\le\dfrac{1}{k}$ ومنه $x\in]-1;+\infty[$ ولدينا

$$\ln\left(\frac{1}{k}+1\right)=\ln\left(\frac{1+k}{k}\right)=\ln(1+k)-\ln k$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ومنه من أجل كل $k$ من $\mathbb{N}^*$، $\ln(k+1)-\ln k \le \frac{1}{k}$.

بتطبيق هذه المتباينة $n$ مرة نحصل على :

$\ln 2-\ln 1\le 1$ ، $\ln 3-\ln 2\le \frac{1}{2}$ ، $\ln 4-\ln 3\le \frac{1}{3}$ ؛ ... ، $\ln(n+1)-\ln n\le \frac{1}{n}$ ؛ وبجمع طرفا إلى طرف

نجد من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}^*$ ، $\ln(n+1)\le u_n$ .

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$ و $\ln(n+1)\le u_n$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ .

3) البرنامج الذي يحدّد أصغر عدد طبيعي $n$ يحقق: $u_n\ge 10$ .

```
PROGRAM:YOUCEF
:0→U
:0→K
:While U<10
:K+1→K
:U+1/K→U
:End
:Disp K
:Disp U
```

```
prgmYOUCEF
          12367
    10.00004301
          Done
```

أصغر عدد طبيعي $n$ يحقق $u_n\ge 10$ هو $n=12367$ .

## 4 ـ المتتاليات المحدودة .

**126** المتتاليتان $(u_n)$ و $(v_n)$ معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بِـ : $u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و $v_n=\frac{1}{n}$ .

1) من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$، $n^2+1>1$ معناه $\sqrt{n^2+1}>1$

أي $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}<1$، إذن 1 عنصر حاد من الأعلى لـ $(u_n)$.

2) من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$، $n^2+1>n^2$ معناه $\sqrt{n^2+1}>n$ أي $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}<\frac{1}{n}$

3) $0<u_n<v_n<1$.

**127** $(u_n)$ معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بِـ : $u_n=\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ .

1) من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_{n+1}-u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ أي $\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>0$ معناه $1+\frac{1}{n+1}>1$

$(u_n)$ متزايدة .

2) $u_n=\ln(2)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+...+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$u_n=\ln\left(2\times\frac{3}{2}\times...\times\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)$

3) $(u_n)$ متزايدة ونهايتها $+\infty$ إذن هي محدودة من الأسفل بِـ $u_0=\ln 2$ وليست محدودة من الأعلى.

**128** $(u_n)$ معرفة بِـ : $u_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}$ .

1) $u_n=\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times 3^{n-1}}$ ومنه

$u_n-\frac{3}{2}<0$ أي $u_n-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2\times 3^{n-1}}$ معناه $u_n<\frac{3}{2}$.

إذن العدد $\frac{3}{2}$ هو عنصر حاد من الأعلى للمتتالية $(u_n)$ .

2) $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3^{n+1}}$ إذن $u_{n+1}-u_n>0$

ومنه المتتالية $(u_n)$ متزايدة .

$(u_n)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى إذن هي متقاربة .

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times 3^{n-1}}=\frac{3}{2}$ .

**129** لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة بحدها الأول $u_0$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=e^{-u_n}$.

نستعمل البرهان بالتراجع لإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 2$ ، $0<u_n<1$ .

لدينا $u_1=e^{-u_0}$ ومن أجل كل عدد حقيقي $u_0$ $e^{-u_0}>0$

إذن $u_1>0$ وبما أن الدالة $x\mapsto e^{-x}$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ فإن $0<e^{-u_1}<e^{-0}$ أي $0<e^{-u_1}<1$ وبالتالي $0<u_2<1$ .

نفترض أنه من أجل $k$ عدد طبيعي كيفي ، $0<u_k<1$

ولنبرهن أن $0<u_{k+1}<1$ .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

بما أن الدالة $x \mapsto e^{-x}$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ فإنه من فرضية التراجع $0 < u_k < 1$ ينتج : $e^{-0} > e^{-u_k} > e^{-1}$

أي $1 > e^{-u_k} > \frac{1}{e}$ ، ومن تعريف المتتالية لدينا $u_{k+1} = e^{-u_k}$

إذن $1 > u_{k+1} > \frac{1}{e}$ ومنه $0 < u_{k+1} < 1$ .

إذن حسب مبدأ التراجع نستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ , $0 < u_n < 1$ .

**130** $(u_n)$ معرفة بـ : $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^n}$ .

1) من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4^{n+1}}$

ومنه $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4^{n+1}}$ ؛ إذن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ،

$u_{n+1} - u_n > 0$ ، وبالتالي $(u_n)$ متزايدة تماما .

2) $u_n$ هو مجموع حدود متتابعة للمتتالية الهندسية ذات الأساس $\frac{1}{4}$ والحد الأول 1 ؛

إذن $u_n = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{4}{3}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1\right]$ أي

$u_n = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ . بما أن

$-1 < \frac{1}{4} < 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{4}{3}$ .

3) بما أن المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما فإنها محدودة من الأسفل بحدها الأول $u_0$ . زيادة عن هذا فإنها تتقارب إلى $\frac{4}{3}$ إذن هي محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{4}{3}$ وبالتالي لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ , $1 \leq u_n < \frac{4}{3}$ .

$u_n > 1{,}333333$ معناه $\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n > 1{,}333333$

ومعناه $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n < \frac{4}{3} - 1{,}333333$ ويكافئ

$\left(\frac{1}{4}\right)^n < 4 - 3{,}999999$ ومعناه

$n > \frac{\ln 10^{-6}}{\ln 0{,}25}$ أي $n \ln 0{,}25 < \ln(0{,}000001)$ ومنه

$n \geq 10$ إذن ليس $1{,}333333$ عنصرا حادا للمتتالية $(u_n)$ .

**131** $(u_n)$ المعرفة بـ $u_0$ عدد حقيقي معطى و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = u_n^{\,2} - 3u_n + 5$ .

1) $u_{n+1} - u_n - 1 = u_n^{\,2} - 4u_n + 4 = (u_n + 2)^2$

إذن من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} - u_n \geq 1$ ،

نستنتج أن $(u_n)$ متزايدة.

2) إذا كانت $(u_n)$ متقاربة ونهايتها $l$ فإن $l = l^2 - 3l + 5$ معناه $l^2 - 4l + 5 = 0$ .

3) المميز المختصر لـ $l^2 - 4l + 5 = 0$ هو $-1$ إذن لا يوجد أي عدد حقيقي $l$ يحقق المعادلة $l^2 - 4l + 5 = 0$

ومنه المتتالية $(u_n)$ متباعدة.

إذا كانت $(u_n)$ محدودة بما أنها متزايدة فتكون متقاربة وهذا تناقض إذن $(u_n)$ ليست محدودة من الأعلى.

مما سبق نستنتج أن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

**132** لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة بـ $u_0 = \frac{11}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = 3u_n - 4$ .

1) $u_1 = \frac{17}{4}$ و $u_2 = \frac{35}{4}$ .

2) استعمال الاستدلال بالتراجع للبرهان على الخاصية $u_{n+1} \geq u_n$.

3) $(v_n)$ معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 4u_n + \alpha$ حيث $\alpha$ عدد حقيقي .

أ ـ $v_{n+1} = 4u_{n+1} + \alpha = 4(3u_n - 4) + \alpha$ ؛

$v_{n+1} = 12u_n - 16 + \alpha = 12\left(\frac{v_n - \alpha}{4}\right) - 16 + \alpha$ ؛

$v_{n+1} = 3v_n - 16 - 2\alpha$

تكون المتتالية $(v_n)$ هندسية إذا وفقط إذا كان $\alpha = -8$ .

ب ـ $v_n = 4u_n - 8$ ومنه $v_0 = 4u_0 - 8 = 3$ ،

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$v_n = 3^{n+1}$ ؛ $u_n = \frac{v_n + 8}{4} = \frac{3^{n+1}+8}{4}$.

**ج ــ** $(u_n)$ متزايدة إذن محدودة من الأسفل بـ $u_0 = \frac{11}{4}$

ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ إذن $(u_n)$ ليست محدودة من الأعلى وبالتالي هي ليست محدودة.

**د ــ** نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ ،

$w_n = u_0 + \frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{4^2} + \ldots + \frac{u_n}{4^n}$.

$w_n = \frac{3+8}{4} + \frac{3^2+8}{4^2} + \frac{3^3+8}{4^3} + \ldots + \frac{3^{n+1}+8}{4^{n+1}}$،

$w_n = \left(\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) + 8\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^{n+1}}\right)$

$w_n = \frac{3}{4}\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} + \frac{8}{4}\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}$،

$w_n = 3\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) + \frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$،

$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 3 + \frac{8}{3} = \frac{17}{3}$ إذن $(w_n)$ متقاربة .

## 5 ـ المتتاليتان المتجاورتان .

**133** لتكن $(u_n)$ و $(v_n)$ المتتاليتين المعرفتين على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$.

1) ليكن $n$ عددا طبيعيا ، ومنه $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$ وبالتالي $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن

$(u_n)$ متزايدة تماما .

ليكن $n$ عددا طبيعيا ،

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n\times n!}$

$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n\times n!}$

$= \frac{1}{(n+1)\times n!} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)\times n!} - \frac{1}{n\times n!}$

$= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)^2 \times n!}$

$= \frac{n^2+n+n-n^2-2n-1}{n(n+1)^2\times n!} = \frac{-1}{n(n+1)^2\times n!}$

إذن $v_{n+1} - v_n < 0$ وبالتالي $(v_n)$ متناقصة تماما .

ومنه $v_n - u_n = \frac{1}{n\times n!}$ معناه $v_n = u_n + \frac{1}{n\times n!}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\times n!} = 0$ .

خلاصة : $(u_n)$ و $(v_n)$ متتاليتان متجاورتان .

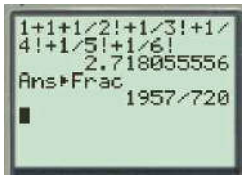
2) بما أن $(u_n)$ متزايدة و $(v_n)$ متناقصة فإنه من أجل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $u_n \le l \le v_n$ أي

$u_n \le l \le u_n + \frac{1}{n\times n!}$

لكي يكون $u_n$ قيمة مقربة بالنقصان إلى $10^{-3}$ للعدد $l$ يكفي أن يكون $\frac{1}{n\times n!} \le 10^{-3}$ أي $n\times n! \ge 1000$

لدينا $5\times 5! = 600$ و $6\times 6! = 4320$ وهذا يبين أن $u_6$ هو أقرب قيمة بالنقصان إلى $10^{-3}$ للعدد $l$ .

$u_6 \simeq 2,718055556$ ، $u_6 = \frac{1957}{720}$







**134** $u_0 = 0$ ، $v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ :

$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4}$ و $v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}$ .

1) الخاصية الابتدائية $u_0 \le 1 \le v_0$ ؛ نفرض $u_k \le 1 \le v_k$

معناه $3u_k \le 3 \le 3v_k$ ومعناه $3u_k + 1 \le 4 \le 3v_k + 1$

أي $\frac{3u_k + 1}{4} \le 1 \le \frac{3v_k + 1}{4}$ .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2) $u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n+1}{4}-u_n=\frac{1-u_n}{4}$ بما أن $u_n\le 1$

فإن $u_{n+1}-u_n\ge 0$ ومنه $(u_n)$ متزايدة.

$v_{n+1}-v_n=\frac{3v_n+1}{4}-v_n=\frac{1-v_n}{4}$ بما أن $v_n\le 1$ فإن

$v_{n+1}-v_n\le 0$ ومنه $(v_n)$ متناقصة.

$u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{3u_n+1}{4}-\frac{3v_n+1}{4}=\frac{3}{4}(u_n-v_n)$ ومنه

المتتالية $(w_n)$ المعرفة بـ $w_n=u_n-v_n$ هندسية

أساسها $\frac{3}{4}$ وعليه $u_n-v_n=(u_0-v_0)\left(\frac{3}{4}\right)^n$ إذن

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ ؛ إذن $(u_n)$

و $(v_n)$ متجاورتان .

$u_{n+1}=\frac{3u_n+1}{4}$ معناه $4u_{n+1}-3u_n=1$ إذن

$\lim\limits_{n\to+\infty}(4u_{n+1}-3u_n)=1$ أي $l=1$ .

**135** $u_0=1$ ، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ :

$u_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}$ ، $v_{n+1}=\frac{u_n+4v_n}{5}$ .

1) ليكن $n$ عددا طبيعيا ،

$w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}$

$=\frac{u_n+2v_n}{3}-\frac{u_n+4v_n}{5}=\frac{2u_n-2v_n}{15}$

أي $w_{n+1}=\frac{2}{15}(u_n-v_n)=\frac{2}{15}w_n$ ، إذن $(w_n)$

هندسية أساسها $\frac{2}{15}$ وحدها الأول $w_0=u_0-v_0=-1$ وبما

أن $-1<\frac{2}{15}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$ . $w_n=-\left(\frac{2}{15}\right)^n$ .

2) لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}$

إذن $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2v_n}{3}-u_n=\frac{-2u_n+2v_n}{3}$ أي

$u_{n+1}-u_n=-\frac{2}{3}(u_n-v_n)=-\frac{2}{3}w_n$ .

وكذلك لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$ :

$v_{n+1}=\frac{u_n+4v_n}{5}$ ومنه $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+4v_n}{5}-v_n$

أي $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n-v_n}{5}=\frac{w_n}{5}$ .

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $w_n<0$ إذن

$u_{n+1}-u_n>0$ و $v_{n+1}-v_n<0$ ومنه $(u_n)$ متزايدة

تماما و $(v_n)$ متناقصة تماما.

بما أن $(u_n)$ متزايدة ، $(v_n)$ متناقصة

و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$ فإن $(u_n)$ و $(v_n)$

متجاورتان وبالتالي لهما نفس النهاية العدد الحقيقي $l$ .

4) من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، ومنه $t_n=3u_n+10v_n$

$t_{n+1}-t_n=3u_{n+1}+10v_{n+1}-3u_n-10v_n$

$=3(u_{n+1}-u_n)+10(v_{n+1}-v_n)=-2w_n+2w_n=0$

وبالتالي المتتالية $(t_n)$ ثابتة .

ومنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $t_n=t_0$ أي

إذن $3u_n+10v_n=3u_0+10v_0=23$

هذا من جهة. ومن جهة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty}(3u_n+10v_n)=23$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}(3u_n+10v_n)=3l+10l=13l$

وبالتالي $13l=23$ . $l=\frac{23}{13}$ .

**136** $u_0=3$ ، $v_0=4$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ،

$u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ ؛ $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}$ .

1) $u_1=\frac{7}{2}$ ، $v_1=\frac{15}{4}$ ، $u_2=\frac{29}{8}$ و $v_2=\frac{59}{16}$ .

2) من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، نضع : $w_n=v_n-u_n$ .

$w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}-u_{n+1}=\frac{v_n-u_{n+1}}{2}$

إذن $w_{n+1}=\frac{v_n-u_n}{4}=\frac{1}{4}w_n$ هندسية .

$\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}w_0\left(\frac{1}{4}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$

3) $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+v_n}{2}-u_n=\frac{v_n-u_n}{2}=\frac{w_n}{2}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$v_{n+1}-v_n=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}-v_n=\frac{u_{n+1}-v_n}{2}=\frac{u_n-v_n}{4}$

$v_{n+1}-v_n=-\frac{w_n}{4}$ بما أن $w_n>0$ فإن $(u_n)$ متزايدة تماما و $(v_n)$ متناقصة تماما .

ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$ إذن $(u_n)$ و $(v_n)$ مجاورتان .

4) تحذف **(برهن أن)** من المعطيات .

$t_{n+1}=\frac{1}{3}(u_{n+1}+2v_{n+1})=\frac{1}{3}(2u_{n+1}+v_n)$

$t_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n+2v_n)=t_n$ إذن $(t_n)$ متتالية ثابتة .

$\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=t_0=\frac{1}{3}(u_0+2v_0)=\frac{11}{3}$

و $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=\frac{1}{3}(l+2l)=l$ إذن $l=\frac{11}{3}$ .

**137** $f$ معرفة على $[0;2]$ بِـ : $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$

.

1) $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ ومنه $f$ متزايدة تماما على $[0;2]$

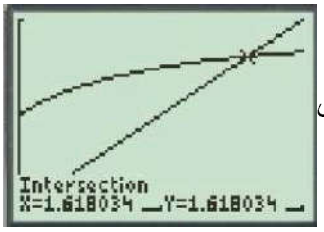
وبالتالي إذا كان $1\le x\le 2$ فإن

$f(1)\le f(x)\le f(2)$ أي $\frac{3}{2}\le f(x)\le\frac{5}{3}$ ومنه

$f(x)\in[1;2]$.

2) $u_0=1$ ؛ $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$،

$u_{n+1}=f(u_n)$ ؛ $v_{n+1}=f(v_n)$ .




يبدو أن $(u_n)$ متزايدة و $(v_n)$ متناقصة ولهما نفس النهاية وهي فاصلة نقطة تقاطع المنحنيين .

3) البرهان بالتراجع عن الخواص :

* " $1\le u_n\le 2$ " ؛ $u_0=1$ ومنه $1\le u_0\le 2$

إذا كان $1\le u_k\le 2$ فإن $1\le f(u_k)\le 2$ أي $1\le u_{k+1}\le 2$ .

* " $1\le v_n\le 2$ " ؛ نفس البرهان.

* " $u_n\le u_{n+1}$ " ؛ $u_0=1$ و $u_1=\frac{3}{2}$ إذن $u_0\le u_1$ .

إذا كان $u_k\le u_{k+1}$ فإن $f(u_k)\le f(u_{k+1})$ لأن $f$ متزايدة ومنه $u_{k+1}\le u_{k+2}$.

* " $v_n\ge v_{n+1}$ " ؛ نفس البرهان.

4) من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا :

$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{2v_n+1}{v_n+1}-\frac{2u_n+1}{u_n+1}=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.

$1\le u_n\le 2$ و $1\le v_n\le 2$ إذن $2\le u_n+1\le 3$

و $2\le v_n+1\le 3$ ومنه $4\le(u_n+1)(v_n+1)\le 9$ ،

إذن $v_n-u_n$ و $v_{n+1}-u_{n+1}$ لهما نفس الإشارة ؛

استعمال التراجع : $v_0-u_0=1$ ومنه $v_0-u_0\ge 0$ ، وإذا كان $v_k-u_k\ge 0$ فإن $v_{k+1}-u_{k+1}\ge 0$.

لدينا $4\le(u_n+1)(v_n+1)\le 9$ ومنه

بما أن $v_n-u_n\ge 0$ فإن $0<\frac{1}{(u_n+1)(v_n+1)}\le\frac{1}{4}$

أي $\frac{v_n-u_n}{(u_n+1)(v_n+1)}\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)$

$v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)$ .

استعمال التراجع لإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ،

$v_n-u_n\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$ .

لدينا $v_0-u_0=1$ و $\left(\frac{1}{4}\right)^0=1$ إذن $v_0-u_0\le\left(\frac{1}{4}\right)^0$

نفرض أن $v_k-u_k\le\left(\frac{1}{4}\right)^k$ .

$v_{k+1}-u_{k+1}\le\frac{1}{4}(v_k-u_k)\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^k$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

لدينا $0\le v_n-u_n\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ إذن

$\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ وحسب السؤال 3) لدينا $u_n\le u_{n+1}$

و $v_n\ge v_{n+1}$ معناه $(u_n)$ متزايدة و $(v_n)$ متناقصة إذن

$(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتان وبالتالي لهما نفس النهاية $l$.

$u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+1}$ معناه $u_{n+1}u_n+u_{n+1}-2u_n-1=0$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}u_n+u_{n+1}-2u_n-1)=0$ أي

$l^2-l-1=0$ ومعناه $l=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ أو $l=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

بينما $1\le u_n\le 2$ و $1\le v_n\le 2$ إذن $l=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

**138** $a$ و $b$ عددان حقيقيان حيث $0<a<b$ .

المتتاليتان $(u_n)$ و $(v_n)$ معرفتان بـ : $u_0=a$، $v_0=b$

ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}$، $v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$.

1) نسمي $p_n$ الخاصية " $0<u_n\le v_n$ "

لدينا $u_0=a$ ، $v_0=b$ و $0<a<b$ إذن

$0<u_0\le v_0$ ومنه الخاصية $p_0$ صحيحة .

نفرض أن الخاصية $p_k$ صحيحة أي $0<u_k\le v_k$

لدينا $u_kv_k>0$ إذن $\sqrt{u_kv_k}>0$ وبالتالي $0<u_{k+1}$ .

لدينا $(u_k+v_k)^2-(u_k-v_k)^2=4u_kv_k$ معناه

بما أن $0<u_k\le v_k$ فإن $(u_k+v_k)^2\ge 4u_kv_k$

ومنه $u_k+v_k>0$ معناه $u_k+v_k\ge 2\sqrt{u_kv_k}$

وبالتالي : $\frac{u_k+v_k}{2}\ge\sqrt{u_kv_k}$ أي $v_{k+1}\ge u_{k+1}$

إذن الخاصية $p_{k+1}$ صحيحة $0<u_{k+1}\le v_{k+1}$ .

وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ،

الخاصية $p_n$ أي $0<u_n\le v_n$ .

2) ليكن $n$ عددا طبيعيا

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_n+v_n-2\sqrt{u_nv_n}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{u_n}^2+\sqrt{v_n}^2-2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n}}{2}=\frac{\left(\sqrt{v_n}-\sqrt{u_n}\right)^2}{2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{v_n}-\sqrt{u_n}\right)\left(\sqrt{v_n}-\sqrt{u_n}\right)\left(\sqrt{v_n}+\sqrt{u_n}\right)}{2\left(\sqrt{v_n}+\sqrt{u_n}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{v_n}-\sqrt{u_n}\right)}{\left(\sqrt{v_n}+\sqrt{u_n}\right)}(v_n-u_n)$$

$-\sqrt{u_n}<\sqrt{u_n}$ ومنه $\sqrt{v_n}-\sqrt{u_n}<\sqrt{v_n}+\sqrt{u_n}$

إذن $\frac{\sqrt{v_n}-\sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n}+\sqrt{u_n}}<1$

وبالتالي $\frac{1}{2}(v_n-u_n)\frac{\sqrt{v_n}-\sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n}+\sqrt{u_n}}<\frac{1}{2}(v_n-u_n)$

أي $v_{n+1}-u_{n+1}<\frac{1}{2}(v_n-u_n)$ .

نستعمل التراجع ولدينا الخاصية $v_0-u_0\le\frac{1}{2^0}(b-a)$

تكافئ $v_0-u_0\le(b-a)$ وهي صحيحة .

نفرض أن الخاصية $v_k-u_k\le\frac{1}{2^k}(b-a)$ ولنبرهن

صحة الخاصية $v_{k++}-u_{k+1}\le\frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$

لدينا مما سبق $v_{k+1}-u_{k+1}<\frac{1}{2}(v_k-u_k)$ ومن فرضية

التراجع $v_k-u_k\le\frac{1}{2^k}(b-a)$ ينتج أن

إذن $\frac{1}{2}(v_k-u_k)\le\frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$

وحسب مبدأ التراجع ينتج $v_{k+1}-u_{k+1}\le\frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$

أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $v_n-u_n\le\frac{1}{2^n}(b-a)$.

3) لدينا كل حدود المتتالية $(u_n)$ موجبة تماما إذن ندرس

$\frac{u_{n+1}}{u_n}$ .

بما أن $0<u_n\le v_n$ فإن $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\sqrt{u_nv_n}}{\sqrt{u_n}^2}=\frac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{u_n}}$

ومنه $0<\sqrt{u_n}\le\sqrt{v_n}$ أي $\frac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{u_n}}\ge 1$ $\frac{u_{n+1}}{u_n}\ge 1$

وبالتالي $(u_n)$ متزايدة .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+v_n}{2}-v_n=\frac{u_n-v_n}{2}$ بما أن

$0<u_n\le v_n$ فإن $u_n-v_n\le 0$ أي $v_{n+1}-v_n\le 0$

وبالتالي $(v_n)$ متناقصة .

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$ ،

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}(b-a)=0$ و $0\le v_n-u_n\le\frac{1}{2^n}(b-a)$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ .

خلاصة : المتتاليتان $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتان .

4) $a=2$ و $b=5$, إذن $v_n-u_n\le\frac{3}{2^n}$ .

$\frac{3}{2^n}<10^{-3}$ معناه $2^n>3000$ ولدينا $2^{11}=2048$

و $2^{12}=4096$ إذن $n\ge 12$

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| u | 2 | 3,1623 | 3,32686 | 3,3289968 | 3,3289971 | 3,328997 |
| v | 5 | 3,5 | 3,33114 | 3,3289975 | 3,3289971 | 3,328997 |

| | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|
| ' | 3,3289971 | 3,328997 | 3,328997 | 3,3289971 | 3,329 |
| ' | 3,3289971 | 3,328997 | 3,328997 | 3,3289971 | 3,329 |

والعدد $l\simeq 3,329$ هو النهاية المشتركة لـ $(u_n)$ و $(v_n)$.

**139** $u_0=-1$ ، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ؛

$u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ ؛ $v_{n+1}=\frac{u_n+4v_n}{5}$ .

1) أ ــ $u_0<v_0$ صحيحة . من أجل $k$ عدد طبيعي ،

$u_k<v_k$ معناه $u_k-v_k<0$ . لدينا

$u_{k+1}-v_{k+1}=\frac{u_k+v_k}{2}-\frac{u_k+4v_k}{5}=\frac{3u_k-3v_k}{10}$

أي $u_{k+1}-v_{k+1}=\frac{3}{10}(u_k-v_k)$ إذن $u_{k+1}-v_{k+1}<0$

ب ــ $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+v_n}{2}-u_n=\frac{v_n-u_n}{2}$

لدينا $u_n<v_n$ معناه $v_n-u_n>0$ إذن $u_{n+1}-u_n>0$

وبالتالي $(u_n)$ متزايدة تماما.

$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+4v_n}{5}-v_n=\frac{u_n-v_n}{5}$ ومنه

$v_{n+1}-v_n<0$ إذن $(v_n)$ متناقصة تماما.

$u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{3}{10}(u_n-v_n)$

نضع $w_n=u_n-v_n$ ، $(w_n)$ هندسية أساسها $\frac{3}{10}$ ومنه

إذن $w_n=u_n-v_n=(u_0-v_0)\left(\frac{3}{10}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$ ؛ ومنه $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتان .

2) من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، نضع $x_n=u_n+av_n$

و $y_n=u_n+bv_n$ حيث $a$ و $b$ عددين حقيقيين متمايزين.

$x_{n+1}=u_{n+1}+av_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}+a\frac{u_n+4v_n}{5}$

$x_{n+1}=\frac{(2a+5)u_n+(8a+5)v_n}{10}$

$x_{n+1}=\frac{(2a+5)}{10}\left(u_n+\frac{8a+5}{2a+5}v_n\right)$

$(x_n)$ هندسية معناه $\frac{8a+5}{2a+5}=a$ أي $2a^2-3a-5=0$

وكذلك $(y_n)$ هندسية معناه $2b^2-3b-5=0$

إذن $a$ و $b$ هما الحلان المتمايزان للمعادلة

$2x^2-3x-5=0$ أي $a=-1$ و $b=\frac{5}{2}$ أو $b=-1$

و $a=\frac{5}{2}$.

نفرض $a=-1$ و $b=\frac{5}{2}$ إذن

$x_{n+1}=\frac{3}{10}(u_n-v_n)=\frac{3}{10}x_n$

و $y_{n+1}=\left(u_n+\frac{5}{2}v_n\right)=y_n$ .

لدينا $x_0=u_0-v_0=-3$ و $y_0=u_0+\frac{5}{2}v_0=4$ إذن

$x_n=-3\left(\frac{3}{10}\right)^n$ و $y_n=y_0=4$.

3) إيجاد النهاية المشتركة للمتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$.

لدينا $x_n=u_n+av_n$ و $y_n=u_n+bv_n$ أي

$y_n=u_n+\frac{5}{2}v_n=4$ و $x_n=u_n-v_n=-3\left(\frac{3}{10}\right)^n$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ومنه $v_n = 4 + 3\left(\frac{3}{10}\right)^n$ أي $\frac{7}{2}v_n = 4 + 3\left(\frac{3}{10}\right)^n$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{8}{7}$

## مسائل

**140** لتكن $(E)$ مجموعة المتتاليات غير المعدومة $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ والتي تحقق الخاصية التالية :

$u_{n+2} = \frac{3}{35}u_{n+1} + \frac{2}{35}u_n$.

1) $(u_n)$ ثابتة معناه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ،

$u_n = \frac{3}{35}u_n + \frac{2}{35}u_n$ معناه $\frac{6}{7}u_n = 0$ أي $u_n = 0$.

$(u_n)$ حسابية ذات الأساس $r$ معناه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ،

$u_n = -\frac{67}{30}r$ أي $u_n + 2r = \frac{3}{35}(u_n + r) + \frac{2}{35}u_n$

ومنه $(u_n)$ ثابتة أي $u_n = 0$.

$(u_n)$ هندسية ذات الأساس $q$ معناه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ،

$u_n q^2 = \frac{3}{35}(u_n q) + \frac{2}{35}u_n$ ومعناه

$u_n\left(35q^2 - 3q - 2\right) = 0$ أي $u_n = 0$ أو $q = -\frac{2}{5}$

أو $q = \frac{4}{7}$.

بما أن $(E)$ هي مجموعة المتتاليات غير المعدومة فإنه لا توجد فيها متتالية ثابتة ولا متتالية حسابية ؛ بينما توجد متتاليتان هندسيتان في المجموعة $(E)$ أساسهما $q = -\frac{2}{5}$

و $q = \frac{4}{7}$.

2) ليكن $\alpha$ و $\beta$ عددين حقيقيين،

$$\frac{3}{35}u_{n+1} + \frac{2}{35}u_n = \frac{3}{35}\left[\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^{n+1}\right] + \frac{2}{35}\left[\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{35}\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n\left(\frac{6}{7} + 2\right) + \frac{1}{35}\beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n\left(\frac{-3}{5} + 2\right)$$

$$= \alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n\left(\frac{4}{49}\right) + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n\left(\frac{1}{25}\right)$$

$$= \alpha\left(\frac{2}{7}\right)^{n+2} + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^{n+2} = u_{n+2}$$

إذن المتتالية $(u_n)$ هي عنصر من المجموعة $(E)$ .

3) $u_0 = 3$ معناه $\alpha + \beta = 3$ و $u_1 = -\frac{4}{35}$ معناه $\frac{2}{7}\alpha - \frac{1}{5}\beta = -\frac{4}{35}$ أي $10\alpha - 7\beta = -4$ وبالتالي نجد

$\alpha = 1$ و $\beta = 2$ أي $u_n = \left(\frac{2}{7}\right)^n + 2\left(\frac{-1}{5}\right)^n$.

$-1 < \frac{2}{7} < 1$ و $-1 < \frac{-1}{5} < 1$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n = 0$

و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^n = 0$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ .

**141** $I$ 1) الدالة $f$ قابلة للاشتقاق ومن أجل كل $x \geq 0$ لدينا $f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x}$ ومنه $f'(x) \leq 0$ إذن الدالة $f$ متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

الدالة $g$ قابلة للاشتقاق ومن أجل كل $x \geq 0$ لدينا $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$ ومنه $g'(x) \leq 0$ إذن الدالة $g$ متناقصة تماما على $[0;+\infty[$ .

2) لدينا $f(0) = 0$ وإذا كان $x > 0$ فإن $f(x) < f(0)$ أي $f(x) < 0$ وبالتالي من أجل كل $x \geq 0$ ، $f(x) \leq 0$ أي $x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(1+x) \leq 0$

معناه $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x)$ .

لدينا $g(0) = 0$ وإذا كان $x > 0$ فإن $g(x) < g(0)$ أي $g(x) < 0$ وبالتالي من أجل كل $x \geq 0$ , $g(x) \leq 0$ أي $\ln(1+x) - x \leq 0$ معناه $\ln(1+x) \leq x$ .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

خلاصة: من أجل كل $x \geq 0$ ، $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

II – 1) لدينا $u_1 = \frac{3}{2}$ ومنه $u_1 > 0$ . نفرض أن $u_n > 0$ بما أن $1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 0$ فإن $u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$ ومنه $u_{n+1} > 0$ إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $u_n > 0$ .

2) $\ln u_1 = \frac{3}{2}$ و $\ln\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ إذن $\ln u_1 = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)$ . نفرض أن

$$\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + ... + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

ولدينا

$$\ln u_{n+1} = \ln u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \ln u_n + \ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

ومنه :

$$\ln u_{n+1} = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + ... + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

وبالتالي حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ،

$$\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + ... + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

3) ليكن $k$ عددا طبيعيا حيث $1 \leq k \leq n$ , نضع $x = \frac{1}{2^k}$ العلاقة (1) تصبح

$$\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4^k} \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$$

وعدد هذه العلاقات هو $n$ لأن $k$ يتغير من 1 إلى $n$ وبجمع أطراف كل العلاقات نحصل على

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$$

4) أ - $S_n$ و $T_n$ هما مجموعان لحدود متتابعة لمتتاليتين هندسيتين أساسهما $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ على الترتيب .

$$S_n = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ ؛ } T_n = \frac{1}{4}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n .$$

ب - $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{3}$ .

5) أ - ليكن $n$ عددا طبيعيا غير معدوم , $u_{n+1} - u_n = u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) - u_n = \frac{1}{2^{n+1}} \times u_n$ ، لدينا $\frac{1}{2^{n+1}} > 0$ , من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ و $u_n > 0$ (من السؤال 1) إذن $\frac{1}{2^{n+1}} \times u_n > 0$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي $(u_n)$ متزايدة تماما .

ب - لدينا $S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $S_n \leq 1$ بما أن $\ln u_n \leq S_n$ فإن $\ln u_n \leq 1$ ومنه $u_n \leq e$ إذن المتتالية $(u_n)$ محدودة من الأعلى وبما أنها متزايدة تماما فإنها متقاربة .

جـ - بما أن $(u_n)$ متقاربة فإنه يوجد عدد حقيقي $l$ حيث $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ؛ لدينا $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(S_n - \frac{1}{2}T_n\right) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ أي $1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \leq \ln l \leq 1$ معناه $\frac{5}{6} \leq \ln l \leq 1$ ويكافئ $e^{\frac{5}{6}} \leq l \leq e$.

**142** $(u_n)$ و $(v_n)$ معرفتان من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ بـ :

$$u_n = \sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + ... + \sin\frac{n}{n^2}$$

و $v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... + \frac{n}{n^2}$ .

1) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، $v_n = \frac{1}{n^2}(1+2+...+n) = \frac{n(n+1)}{2n^2}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

أي $v_n=\frac{n+1}{2n}$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$ .

2) $f:x\mapsto x-\sin x$ ؛ من أجل كل $x$ من المجال $[0;+\infty[$ ، $f'(x)=1-\cos x$ ومنه $f'(x)\geq 0$ إذن $f$ متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ ولدينا $f(0)=0$ وإذا كان $x>0$ فإن $f(x)>f(0)$ أي $f(x)>0$ وبالتالي الدالة $f$ موجبة .

$x\in[0;+\infty[$ ، $g:x\mapsto -1+\frac{x^2}{2}+\cos x$ ؛ من أجل كل $[0;+\infty[$

$g'(x)=x-\sin x=f(x)$ بما أن $f$ موجبة فإن $g'(x)\geq 0$ وبالتالي $g$ متزايدة تماما ولدينا $g(0)=0$ وإذا كان $x>0$ فإن $g(x)>g(0)$ أي $g(x)>0$ وبالتالي الدالة $g$ موجبة .

$x\in[0;+\infty[$ ، $h:x\mapsto -x+\frac{x^3}{6}+\sin x$ ؛ من أجل كل $[0;+\infty[$

$h'(x)=-1+\frac{x^2}{2}+\cos x=g(x)$ بما أن $g$ موجبة فإن $h'(x)\geq 0$ وبالتالي $h$ متزايدة تماما ولدينا $h(0)=0$ وإذا كان $x>0$ فإن $h(x)>h(0)$ أي $h(x)>0$ وبالتالي الدالة $h$ موجبة .

3) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ، من أجل كل عدد طبيعي $k$ حيث $1\leq k\leq n$ لدينا $1\leq k^3\leq n^3$ أي $1^3\leq n^3$ ، $2^3\leq n^3$ ، ... ، $n^3\leq n^3$ وبالجمع طرفا إلى طرف نحصل على $1^3+2^3+...+n^3\leq n\times n^3$ أي $1^3+2^3+...+n^3\leq n^4$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب $x$ ، $f(x)\geq 0$ و $h(x)\geq 0$ معناه $x\geq\sin x$ و $\sin x\geq x-\frac{x^3}{6}$

أي $x-\frac{x^3}{6}\leq\sin x\leq x$ . نضع $x=\frac{k}{n^2}$ ومنه

$\frac{k}{n^2}-\frac{k^3}{6n^6}\leq\sin\frac{k}{n^2}\leq\frac{k}{n^2}$ إذن $\frac{x^3}{6}=\frac{k^3}{6n^6}$

وبالجمع نحصل على :

$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{n}{n^2}-\frac{1}{6n^6}\left(1^3+2^3+...+n^3\right)\leq\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+...+\sin\frac{n}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{n}{n^2}$

أي $v_n-\frac{1}{6n^6}\left(1^3+2^3+...+n^3\right)\leq u_n\leq v_n$

ولدينا $1^3+2^3+...+n^3\leq n^4$ معناه

$-\frac{1}{6n^6}\left(1^3+2^3+...+n^3\right)\geq-\frac{1}{6n^6}n^4$

ومعناه $v_n-\frac{1}{6n^6}\left(1^3+2^3+...+n^3\right)\geq v_n-\frac{1}{6n^2}$ إذن

$v_n-\frac{1}{6n^2}\leq u_n\leq v_n$ .

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{6n^2}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\frac{1}{2}$ ومنه

$\lim\limits_{n\to+\infty}v_n-\frac{1}{6n^2}=\frac{1}{2}$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}$ .

إذن المتتالية $(u_n)$ متقاربة ، ونهايتها $\frac{1}{2}$ .

**143** $I-f$ معرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$ .

1) من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g'(x)=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$

ومنه $g'(x)>0$ إذن الدالة $g$ متزايدة تماما .

$g$ مستمرة على $]0;+\infty[$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}g(x)=-\infty$

و $\lim\limits_{x\xrightarrow{}+\infty}g(x)=+\infty$

خلاصة : المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\beta$ .

لدينا : $g(0,27)\simeq$ -0.039 و $g(0,28)\simeq 0.007$ إذن

$0,27\leq\beta\leq 0,28$

2) من أجل $x>0$ لدينا

$f'(x)=\frac{(\ln x+1)(x+1)-x\ln x}{(x+1)^2}=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$ .

$f'(\beta)=0$ ومن أجل $x\in]-\infty;\beta[$ ، $f'(x)<0$

ومن أجل $x\in]\beta;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ .

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x\ln x}{x+1}=0$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ .

$II-1$) نلاحظ أن $f(1)=0$ ولدينا $g(\beta)=0$ معناه

$f(\beta)=\frac{\beta\ln\beta}{\beta+1}=-\beta$ إذن $\ln\beta=-1-\beta$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الدالتان $x \mapsto x\sin x$ و $x \mapsto x+1$ مستمرتان على $]0;+\infty[$ و من أجل $x>0$ $x+1\neq 0$ إذن الدالة $f$ مستمرة على $]0;+\infty[$ ومنه جدول تغيراتها:

| $x$ | $0$ | $\beta$ | $1$ | $\alpha_n$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0$ | $-\beta$ | $0$ | $n$ | $+\infty$ |

إذن المعادلة $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا $\alpha_n$ .

2) أ - $f\left(e^n\right)=\dfrac{e^n\ln e^n}{e^n+1}=n\dfrac{e^n}{e^n+1}$ ولدينا

$e^n\leq e^n+1$ أي $\dfrac{e^n}{e^n+1}\leq 1$ ومعناه $\dfrac{ne^n}{e^n+1}\leq n$ إذن

$f\left(e^n\right)\leq n$ .

بما أن $f(\alpha_n)=n$ فإن $f\left(e^n\right)\leq f(\alpha_n)$ وبما أن $f$ متزايدة تماما على $[1;+\infty[$ فإن حتما يكون $e^n\leq\alpha_n$ .

ب - $f(\alpha_n)=n$ تكافئ $\dfrac{\alpha_n\ln\alpha_n}{\alpha_n+1}=n$ وتكافئ

$\alpha_n\ln\alpha_n=n\alpha_n+n$ أي $\alpha_n(\ln\alpha_n-n)=n$ ومعناه

$\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{e^n}\right)=\dfrac{n}{\alpha_n}$ أي $\ln\alpha_n-\ln e^n=\dfrac{n}{\alpha_n}$ ...(1)

لدينا $e^n\leq\alpha_n$ معناه $\dfrac{e^n}{n}\leq\dfrac{\alpha_n}{n}$ بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^n}{n}=+\infty$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha_n}{n}=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\alpha_n}=0$ إذن

$\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\dfrac{\alpha_n}{e^n}=0$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha_n}{e^n}=1$ .

3) أ - (2) معناه $\dfrac{\alpha_n}{e^n}=1+\varepsilon_n$ ومنه

$(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)=\dfrac{\alpha_n}{e^n}\ln\dfrac{\alpha_n}{e^n}$ ومن (1) ينتج

$(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)=\dfrac{n}{e^n}$ .

ب - الدالة $u:t\mapsto(1+t)\ln(1+t)-t$ تقبل الاشتقاق على $[0;+\infty[$ ولدينا $u'(t)=\ln(1+t)+(1+t)\dfrac{1}{1+t}-1$

أي $u'(t)=\ln(1+t)$ ، من أجل $t\geq 0$ يكون

$(1+t)\geq 1$ ومنه $\ln(1+t)\geq 0$ إذن $u'(t)\geq 0$

وبالتالي $u$ متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ لدينا $u(0)=0$

ومن أجل $t>0$ يكون $u(t)>u(0)$ . إذن من أجل كل $t\geq 0$ , $u(t)\geq 0$ أي $(1+t)\ln(1+t)-t\geq 0$ .

الدالة $v:t\mapsto(1+t)\ln(1+t)-t-\dfrac{t^2}{2}$ تقبل الاشتقاق

ومن أجل كل $t\geq 0$ لدينا $v'(t)=\ln(1+t)-t$

$v''(t)=\dfrac{1}{1+t}-1=\dfrac{-t}{1+t}$ من أجل $t\geq 0$ يكون

$v''(t)\leq 0$ إذن $v'$ متناقصة على $[0;+\infty[$ و $v'(0)=0$

إذن من أجل $t\geq 0$ يكون $v'(t)\leq 0$

إذن $v$ متناقصة على $[0;+\infty[$ و $v(0)=0$ إذن من أجل $t\geq 0$ يكون $v(t)\leq 0$ أي

$(1+t)\ln(1+t)-t-\dfrac{t^2}{2}\leq 0$ معناه

$(1+t)\ln(1+t)-t\leq\dfrac{t^2}{2}$ .

خلاصة : من أجل كل $t\geq 0$ ,

$0\leq(1+t)\ln(1+t)-t\leq\dfrac{t^2}{2}$ .

جـ - نضع $t=\varepsilon_n$ يكون إذن

$0\leq(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)-\varepsilon_n\leq\dfrac{\varepsilon_n^{\,2}}{2}$ ولدينا

$(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)=\dfrac{n}{e^n}$ ،

إذن $0\leq\dfrac{n}{e^n}-\varepsilon_n\leq\dfrac{\varepsilon_n^{\,2}}{2}$ من المتباينة الأولى ينتج

$\varepsilon_n\leq\dfrac{n}{e^n}$ ويكافئ $\varepsilon_n^{\,2}\leq\dfrac{n^2}{e^{2n}}$ أي $\dfrac{\varepsilon_n^{\,2}}{2}\leq\dfrac{n^2}{2e^{2n}}$ .

وبالتالي $0\leq\dfrac{n}{e^n}-\varepsilon_n\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n}{e^n}\right)^2$ أي

$0\leq ne^{-n}-\varepsilon_n\leq\dfrac{n^2}{2}e^{-2n}$

د - (3) تكافئ $0\leq n-\varepsilon_n e^n\leq\dfrac{n^2}{2}e^{-n}$ و (2) تكافئ

$0\leq n-\alpha_n+e^n\leq\dfrac{n^2}{2}e^{-n}$ إذن $\varepsilon_n e^n=\alpha_n-e^n$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

ولدينا $\lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{n}{2}\right)^2\left(e^{\frac{1}{2}n}\right)^2 = 0$ إذن $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2}e^{-n} = 0$

$\lim_{n\to+\infty}\left(e^n + n - \alpha_n\right) = 0$

## اختبر معلوماتك

### اختيار من متعدد

**144** نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بـ $u_0 = 0$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$ .

**تصحيح إضافة** $u_1 = 1$.

$v_n = u_{n+1} - u_n$ و $w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$ .

1) **ب -** المتتالية $(w_n)$ حسابية أساسها 0 وحدها الأول 1.

**جـ -** المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $-\frac{2}{3}$ وحدها الأول 1.

**د -** المتتالية $(w_n)$ هندسية أساسها 1.

2) **أ -** $v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$. **جـ -** $w_n = 1$ .

3) **أ -** $u_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$.

**ب -** $u_n = \frac{3}{5}\left(w_n - v_n\right)$ .

**د -** المتتالية $(u_n)$ متقاربة ونهايتها $\frac{3}{5}$ .

**145** 1) **ب -** $\frac{2n + (-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$. **جـ -** $n\sin\frac{1}{n}$ و $n > 0$.

2) **ب -** المتتالية $v$ محدودة من الأسفل.

**د -** لا يمكن معرفة إن كانت المتتالية $v$ تقبل نهاية أم لا .

### أصحيح أم خطأ ؟

**146** 1) **صحيحة** لأن كل متتالية متناقصة هي محدودة من الأعلى بحدها الأول.

2) كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فتكون نهايتها معدومة ، **جملة خاطئة** لأن نهايتها موجبة ويمكن أن تكون غير معدومة مثلا المتتالية المعرفة بـ $u_n = 1 + \frac{1}{n+1}$.

3) إذا كانت متتالية متزايدة فإنها محدودة من الأسفل بحدها الأول؛ والجملة المعطاة **صحيحة**.

4) الجملة **صحيحة**.

5) الجملة **صحيحة**.

6) جملة **خاطئة** لأنه يمكن أن تكون $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$ مثلا $u_n = \frac{1}{n+2}$ و $v_n = \frac{1}{n+1}$.

**148** $(u_n)$ معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1{,}5$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = 2u_n - 1$ .

1) **صحيحة** لأنه $u_{n+1} = f(u_n)$ و $f(x) = 2x - 1$، $f(x) = x$ معناه $x = 1$.

2) $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2u_n - 2 = 2v_n$ إذن الجملة **صحيحة**.

3) $v_n = 2^{n-1}$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ وبالتالي المتتالية $(v_n)$ ليست محدودة من الأعلى ، والجملة المعطاة **خاطئة**

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM