التمرين رقم 01

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ حيث ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$$

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > -2$.

ب) بين أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتج أنها متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}$$

- أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.

3) عبر بدلالة n عن v_n و u_n، واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$$

حل التمرين رقم 01

لدينا:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5} \end{cases}$$

1) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > -2$

نسمي $P(n)$ الخاصية:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$ »

التحقق من صحة الخاصية $P(0)$:

لدينا من أجل $n = 0$:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \quad و \\ 1 > -2 \end{cases} \longrightarrow u_0 > -2$$

ومنه:

الخاصية $P(0)$ محققة.

نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة.

أي:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$ »

ونبرهن أن الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

أي:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} > -2$ »

لدينا من الفرضية:

$$u_n > -2$$
$$u_n + 5 > -2 + 5$$
$$u_n + 5 > 3$$
$$\frac{1}{u_n + 5} < \frac{1}{3}$$
$$\frac{9}{u_n + 5} < \frac{9}{3}$$
$$\frac{9}{u_n + 5} < 3$$
$$-\frac{9}{u_n + 5} > -3$$
$$1 - \frac{9}{u_n + 5} > 1 - 3$$
$$1 - \frac{9}{u_n + 5} > -2$$
$$u_{n+1} > -2$$

ومنه:

الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

نتيجة:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$ »

1) ب) البرهان أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$:

معناه نبرهن أن:

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

لدينا:

$$u_{n+1}-u_n = 1-\frac{9}{u_n+5}-u_n$$
$$= \frac{u_n+5-9-u_n(u_n+5)}{u_n+5}$$
$$= \frac{u_n-4-{u_n}^2-5u_n}{u_n+5}$$
$$= \frac{-{u_n}^2-4u_n-4}{u_n+5}$$
$$= -\frac{{u_n}^2+4u_n+4}{u_n+5}$$

$$u_{n+1}-u_n = -\frac{(u_n+2)^2}{u_n+5}$$

حسب نتيجة البرهان بالتراجع لدينا:

$$u_n > -2$$

ينتج:

$$\begin{cases} u_n+2>0 \\ \text{و} \\ u_n+5>3 \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} (u_n+2)^2>0 \\ \text{و} \\ u_n+5>0 \quad (\text{لأن: } 3>0) \end{cases}$$

فنكتب:

$$\frac{(u_n+2)^2}{u_n+5}>0$$

وعليه:

$$-\frac{(u_n+2)^2}{u_n+5}<0$$

ومنه:

$$u_{n+1}-u_n<0$$

نتيجة:

(u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة:

بما أن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ $(u_{n+1}-u_n<0)$ ومحدودة من الأسفل بالعدد -2 $(u_n>-2)$ فهي إذن متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_n = \frac{1}{u_n+2}$$

البرهان أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول:

تكون (v_n) متتالية حسابية أساسها r إذا كان:

$$v_{n+1} = r+v_n$$

لدينا:

$$v_n = \frac{1}{u_n+2}$$

ومنه:

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}+2}$$
$$= \frac{1}{1-\frac{9}{u_n+5}+2}$$
$$= \frac{1}{3-\frac{9}{u_n+5}}$$
$$= \frac{1}{\frac{3(u_n+5)-9}{u_n+5}}$$
$$= \frac{1}{\frac{3u_n+15-9}{u_n+5}}$$
$$= \frac{1}{\frac{3u_n+6}{u_n+5}}$$
$$= \frac{1}{\frac{3(u_n+2)}{u_n+5}}$$
$$= \frac{u_n+5}{3(u_n+2)}$$

بتفكيك البسط نكتب:

$$v_{n+1}=\frac{(u_n+2)+3}{3(u_n+2)}$$

$$=\frac{\cancel{(u_n+2)}}{3\cancel{(u_n+2)}}+\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}(u_n+2)} \qquad (\text{تذكر أن}: u_n>-2)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{(u_n+2)}$$

$$v_{n+1}=\frac{1}{3}+v_n \qquad (\text{من الشكل}: v_{n+1}=r+v_n)$$

نتيجة:

المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$

وحدها الأول:

$$v_0=\frac{1}{u_0+2}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$$

$$v_0=\frac{1}{3}$$

3) التعبير بدلالة n عن v_n و u_n وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

التعبير بدلالة n عن v_n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول v_0 بالعبارة:

$$v_n=v_0+r\times n$$

ومنه:

$$v_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}n=\frac{1}{3}(n+1)$$

$$v_n=\frac{1}{3}(n+1)$$

التعبير بدلالة n عن u_n:

لدينا:

$$v_n=\frac{1}{u_n+2}$$

ومنه:

$$v_n(u_n+2)=1$$

$$v_nu_n+2v_n=1$$

$$v_nu_n=1-2v_n$$

$$u_n=\frac{1-2v_n}{v_n}$$

$$u_n=\frac{1}{v_n}-\frac{2v_n}{v_n}$$

$$u_n=\frac{1}{v_n}-2$$

بالتعويض:

$$u_n=\frac{1}{\frac{n+1}{3}}-2$$

$$=\frac{3}{n+1}-2$$

$$u_n=\frac{3}{n+1}-2$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{n+1}-2\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(3\times\frac{1}{n+1}-2\right)=-2$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=-2$$

لأن:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)=0$$

4) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_0v_0+u_1v_1+\cdots+u_nv_n=\frac{1}{3}(1-n^2)$$

نضع:

$$T=u_0v_0+u_1v_1+\cdots+u_nv_n$$

لدينا مما سبق:

$$u_n=\frac{1}{v_n}-2$$

ومنه:

$$T=\left(\frac{1}{v_0}-2\right)v_0+\left(\frac{1}{v_1}-2\right)v_1+\cdots+\left(\frac{1}{v_n}-2\right)v_n$$

$$=1-2v_0+1-2v_1+\cdots+1-2v_n$$

$$=(1+1+\cdots+1)-2(v_0+v_1+\cdots+v_n)$$

$$=S_1-2S_2$$

حيث:

$$\begin{cases} S_1 = 1+1+\cdots+1 \\ \text{و} \\ S_2 = v_0+v_1+\cdots+v_n \end{cases}$$

■ S_1 هو مجموع $(n+1)$ مرة العدد 1.

أي:

$$S_1 = n+1$$

■ S_2 هو مجموع $(n+1)$ حدا من حدود متتابعة لمتتالية حسابية حدها الأول $v_0 = \frac{1}{3}$ وأساسها $r = \frac{1}{3}$، يعطى بالعبارة:

$$S_2 = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times \left(\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع}\right)$$

بالتعويض:

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{n+1}{2}(v_0+v_n) \\ &= \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(n+1)\right) \\ &= \frac{n+1}{2}\left(\frac{1+n+1}{3}\right) \end{aligned}$$

$$S_2 = \frac{(n+1)(n+2)}{6}$$

لدينا مما سبق:

$$T = S_1 - 2S_2$$

ومنه:

$$\begin{aligned} T &= n+1-2\frac{(n+1)(n+2)}{6} \\ &= n+1-\frac{(n+1)(n+2)}{3} \\ &= \frac{3(n+1)-(n+1)(n+2)}{3} \\ &= \frac{1}{3}[3(n+1)-(n+1)(n+2)] \\ &= \frac{1}{3}(n+1)(3-n-2) \\ &= \frac{1}{3}(n+1)(1-n) \\ &= \frac{1}{3}(1+n)(1-n) \\ &= \frac{1}{3}(1-n^2) \end{aligned}$$

ومنه:

$$u_0v_0+u_1v_1+\cdots+u_nv_n = \frac{1}{3}(1-n^2)$$

BAC