التمرين رقم 02

يحوي صندوق 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها أربع كريات بيضاء مرقمة بـ : 1 ، 2 ، 2 ، 3 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ : 2 ، 2 ، 3 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ : 2 ، 3 ، 3.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الحادثتين:

A : «الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني»

B : «الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم»

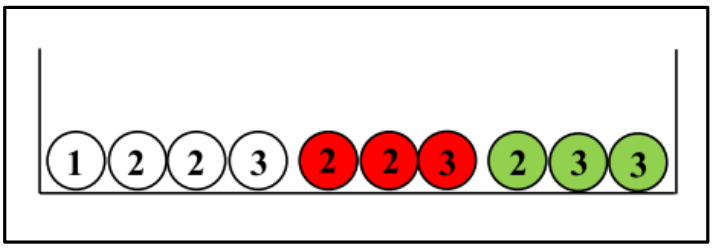
1) أ- أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب.

ب- بين أن: $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا.

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

حل التمرين رقم 02



1) أ- حساب $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب:

عدد الحالات الممكنة لسحب 3 كريات عشوائيا من الصندوق في آن واحد هو:

$$card(\Omega) = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 7!} = 10 \times 3 \times 4 = 120$$

$$card(\Omega) = 120$$

حساب $P(A)$ احتمال الحادثة A:

A : «الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني»

معناه نسحب:

- كرية واحدة بيضاء (توجد 4 كريات بيضاء في الصندوق).

و:

- كرية واحدة حمراء (توجد 3 كريات حمراء في الصندوق).

و:

- كرية واحدة خضراء (توجد 3 كريات خضراء في الصندوق).

فيكون عدد الحالات الملائمة للحادثة A هو:

$$card(A) = C_4^1 \times C_3^1 \times C_3^1 = 4 \times 3 \times 3 = 36$$

$$card(A) = 36$$

ومنه:

احتمال الحادثة A هو:

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{36}{120} = \frac{3 \times 12}{10 \times 12} = \frac{3}{10}$$

$$P(A) = \frac{3}{10}$$

حساب $P(B)$ احتمال الحادثة B:

B : «الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم»

معناه نسحب:

- 3 كريات تحمل الرقم 2 (في الصندوق 5 كريات تحمل الرقم 2).

أو:

- 3 كريات تحمل الرقم 3 (في الصندوق 4 كريات تحمل الرقم 3).

ملاحظة:

لا يمكن سحب 3 كريات تحمل كلها الرقم 1 لأن الصندوق يحوي كرية واحدة فقط تحمل الرقم 1.

فيكون عدد الحالات الملائمة للحادثة B هو:

$$card(B) = C_5^3 + C_4^3 = \frac{5!}{2! \times 3!} + \frac{4!}{3! \times 1!}$$
$$= \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} + \frac{4 \times 3!}{3!}$$
$$= 10 + 4 = 14$$
$$card(B) = 14$$

ومنه:

احتمال الحادثة B هو:

$$P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{14}{120} = \frac{7 \times 2}{60 \times 2} = \frac{7}{60}$$
$$P(B) = \frac{7}{60}$$

ب- البرهان أن: $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ ثم استنتاج $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$:

البرهان أن $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$:

تعرف الحادثة $A \cap B$ كما يلي:

$A \cap B$: «الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني وتحمل كلها نفس الرقم»

معناه نسحب:

- كرية واحدة بيضاء تحمل الرقم 2 و كرية واحدة حمراء تحمل الرقم 2 و كرية واحدة خضراء تحمل الرقم 2.

أو:

- كرية واحدة بيضاء تحمل الرقم 3 و كرية واحدة حمراء تحمل الرقم 3 و كرية واحدة خضراء تحمل الرقم 3.

حيث يوجد في الصندوق:

- كريتان بيضاوان تحملان الرقم 2 وكريتان حمراوان تحملان الرقم 2 وكرية واحدة خضراء تحمل الرقم 2.

- كرية واحدة بيضاء تحمل الرقم 3 وكرية واحدة حمراء تحمل الرقم 3 وكريتان خضراوان تحملان الرقم 3.

فيكون عدد الحالات الملائمة للحادثة $A \cap B$ هو:

$$card(A \cap B) = (C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1) + (C_1^1 \times C_1^1 \times C_2^1)$$
$$= (2 \times 2 \times 1) + (1 \times 1 \times 2) = 6$$
$$card(A \cap B) = 6$$

ومنه:

احتمال الحادثة $A \cap B$ هو:

$$P(A \cap B) = \frac{card(A \cap B)}{card(\Omega)} = \frac{6}{120} = \frac{1 \times 6}{20 \times 6} = \frac{1}{20}$$
$$P(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

استنتاج $P_A(B)$:

معناه:

احتمال الحادثة B علما أن الحادثة A محققة.

أي:

احتمال أن تكون الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم علما أنها تحمل ألوان العلم الوطني.

لدينا:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$
$$= \frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{20} \times \frac{10}{3} = \frac{1}{6}$$
$$P_A(B) = \frac{1}{6}$$

استنتاج $P(A \cup B)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{3}{10} + \frac{7}{60} - \frac{1}{20}$$
$$= \frac{18 + 7 - 3}{60} = \frac{22}{60} = \frac{11 \times 2}{30 \times 2} = \frac{11}{30}$$
$$P(A \cup B) = \frac{11}{30}$$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا.

تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X وحساب أمله الرياضياتي:

تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X:

المتغير العشوائي X يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا.

معناه:

السحب يُظْهِر إحدى الحالات الأربع التالية:

- الكريات الثلاث المسحوبة لا تحمل ولا رقما فرديا.
- الكريات الثلاث المسحوبة تحمل رقما فرديا واحدا.
- الكريات الثلاث المسحوبة تحمل رقمين فرديين.
- الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ثلاثة أرقام فردية.

ومنه:

قيم المتغير العشوائي X هي:

$$X = \{0\,;1\,;2\,;3\}$$

حيث يوجد في الصندوق:

- خمس (5) كريات تحمل رقما فرديا (كريتان بيضاوان، كرية واحدة حمراء وكريتان خضراوان).
- خمس (5) كريات تحمل رقما زوجيا (كريتان بيضاوان، كريتان حمراوان وكرية واحدة خضراء).

الحالة الأولى:

- الكريات الثلاث المسحوبة لا تحمل ولا رقما فرديا $(X = 0)$.

معناه:

الكريات الثلاث المسحوبة تحمل رقما زوجيا.

أي:

نسحب الكريات الثلاث من الكريات الخمس التي تحمل رقما زوجيا.

ومنه:

$$P(X=0) = \frac{C_5^3}{\Omega} = \frac{10}{120} = \frac{1\times 10}{12\times 10} = \frac{1}{12}$$

$$P(X=0) = \frac{1}{12}$$

الحالة الثانية:

- الكريات الثلاث المسحوبة تحمل رقما فرديا واحدا $(X = 1)$.

معناه:

من بين الكريات الثلاث المسحوبة، توجد كرية واحدة تحمل رقما فرديا وكريتين تحملان رقما زوجيا.

أي:

نسحب كرية واحدة من الكريات الخمس التي تحمل رقما فرديا، ونسحب كريتين من الكريات الخمس التي تحمل رقما زوجيا.

ومنه:

$$P(X=1) = \frac{C_5^1 \times C_5^2}{\Omega} = \frac{5\times 10}{120} = \frac{50}{120} = \frac{5\times 10}{12\times 10} = \frac{5}{12}$$

$$P(X=1) = \frac{5}{12}$$

الحالة الثالثة:

- الكريات الثلاث المسحوبة تحمل رقمين فرديين $(X = 2)$.

معناه:

من بين الكريات الثلاث المسحوبة، توجد كريتين تحملان رقما فرديا وكرية واحدة تحمل رقما زوجيا.

أي:

نسحب كريتين من الكريات الخمس التي تحمل رقما فرديا، ونسحب كرية واحدة من الكريات الخمس التي تحمل رقما زوجيا.

ومنه:

$$P(X=2) = \frac{C_5^2 \times C_5^1}{\Omega} = \frac{10\times 5}{120} = \frac{50}{120} = \frac{5\times 10}{12\times 10} = \frac{5}{12}$$

$$P(X=2) = \frac{5}{12}$$

الحالة الرابعة:

- الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ثلاثة أرقام فردية $(X=3)$.

معناه:

نسحب الكريات الثلاث من الكريات الخمس التي تحمل رقما فرديا.

ومنه:

$$P(X=3)=\frac{C_5^3}{\Omega}=\frac{10}{120}=\frac{1\times 10}{12\times 10}=\frac{1}{12}$$

$$P(X=3)=\frac{1}{12}$$

قانون احتمال المتغير العشوائي X:

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

لاحظ أن:

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$$

حساب الأمل الرياضياتي $E(x)$:

$$E(x)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{5}{12}+3\times\frac{1}{12}$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{10}{12}+\frac{3}{12}=\frac{18}{12}=\frac{3\times 6}{2\times 6}=\frac{3}{2}$$

$$E(x)=\frac{3}{2}$$

BAC