تمرين شامل في الهندسة الفضائية

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقط : A(1;0;-1) ، B(2;2;3) ، C(3;1;-2) ، D(-4;2;1)

1. بين أن النقط A ، B ، C تعين مستويا
2. عين شعاعا ناظميا للمستوي (ABC)
3. استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)
4. أثبت أن المثلث ABC قائم
5. أحسب مساحة المثلث ABC
6. عين بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ، ثم احسب حجم رباعي الوجوه DABC
7. عين ω مركز سطح الكرة (S) الذي معادلته $x^2+y^2+z^2+2y-6z-15=0$
8. أحسب بعد النقطة ω عن المستوي (ABC)
9. اعط التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة ω و يعامد المستوي (ABC)
10. عيّن طبيعة و خصائص تقاطع المستوي (ABC) و سطح الكرة (S)
11. ليكن (P) المستوي الذي معادلته: $x+y+z-1=0$. بيّن أنّ المستويين (P) و (ABC) متعامدان
12. اعط التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ') تقاطع (P) و (ABC)
13. عين بعد النقطة D عن المستوي (P) ، ثمّ استنتج المسافة بين D و (Δ')
14. لتكن M_t, نقطة من المستقيم (Δ')
    أ. عبّر عن المسافة DM_t, بدلالة t'
    ب. أدرس اتجاه تغيّر الدالة $f(t')=DM_t$,
    ج. استنتج بطريقة ثانية المسافة بين D و (Δ')
15. ادرس الوضع النسبي للمستقيمين (Δ) و (Δ')
16. اعط المعادلة الديكارتية لـ (Q) المستوي المحوري للقطعة [MN] حيث $M(1;0;0)$ و $N(-1;0;2)$
17. عيّن تقاطع المستويات الثلاث (P) ، (Q) و (ABC)
18. عين إحداثيات النقطتين G و G' حيث G مركز ثقل المثلث ABC و G' مرجح الجملة $\{(A;3),(B;-1);(C;1)\}$
19. عيّن في كل حالة من الحالات التالية مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :
    أ. $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6$
    ب. $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$
    ج. $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$
    د. $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$
    ه. $\left(3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$
    و. $MA^2+MB^2+MC^2=30$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تصحيح الموضوع

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط : A(1;0;-1) ، B(2;2;3) ، C(3;1;-2) ، D(-4;2;1)

1- بين أن النقط A ، B ، C تعين مستويا

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix};\frac{1}{2}\neq\frac{2}{1};\ \overrightarrow{AB}\ \#\ \overrightarrow{AC};$$

2- عين شعاعا ناظميا للمستوي (ABC)

$$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases};\ \begin{cases}a+2b+4c=0\\2a+b-c=0\end{cases};\ \begin{cases}a+2b+4c=0\\8a+4b-4c=0\end{cases};9a+6b=0\,;b=-\frac{3}{2}a$$

$$2a-\frac{3}{2}a-c=0\,;c=\frac{1}{2}a\,;a=2\,;\ \boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}}$$

3- استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

$$(ABC):2x-3y+z+d=0\,;A\in(ABC):2-1+d=0\,;d=-1$$

$$\boxed{(ABC):2x-3y+z-1=0}$$

4- أثبت أن المثلث ABC قائم

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}.\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=2+2-4=0\,;\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$$

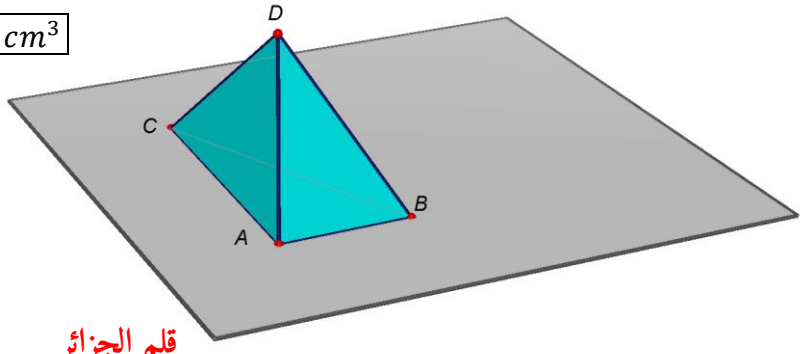
5- أحسب مساحة المثلث ABC

$$S=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{\sqrt{1^2+2^2+4^2}\times\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}{2}=\frac{\sqrt{21}\times\sqrt{6}}{2}=\boxed{\frac{3}{2}\sqrt{14}\ cm^2}$$

6- عين بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ، ثم احسب حجم رباعي الوجوه DABC

$$d\big(D,(ABC)\big)=\frac{|2(-4)-3(2)+1-1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\boxed{\sqrt{14}}$$

$$V=\frac{1}{3}S\times h=\frac{1}{3}.\frac{3}{2}\sqrt{14}.\sqrt{14}=\frac{14}{2}=\boxed{7\ cm^3}$$



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

7- عين ω مركز سطح الكرة (S) الذي معادلته $x^2+y^2+z^2+2y-6z-15=0$

$$x^2+(y+1)^2-1^2+(z-3)^2-3^2-15=0$$

$$x^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25\,;\boxed{w(0;-1;3)\,;r=\sqrt{25}=5}$$

8- أحسب بعد النقطة ω عن المستوي (ABC)

$$d\big(w,(ABC)\big)=\frac{|2(0)-3(-1)+3-1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{14}}=\boxed{\frac{5\sqrt{14}}{14}}$$

9- اعط التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة ω و يعامد المستوي (ABC)

$$M(x;y;z)\in(\Delta)\,;\ \overrightarrow{wM}=t.\vec{n}\,;\ \boxed{\begin{cases}x=2t\\y=-1-3t\\z=3+t\end{cases};t\in R}$$

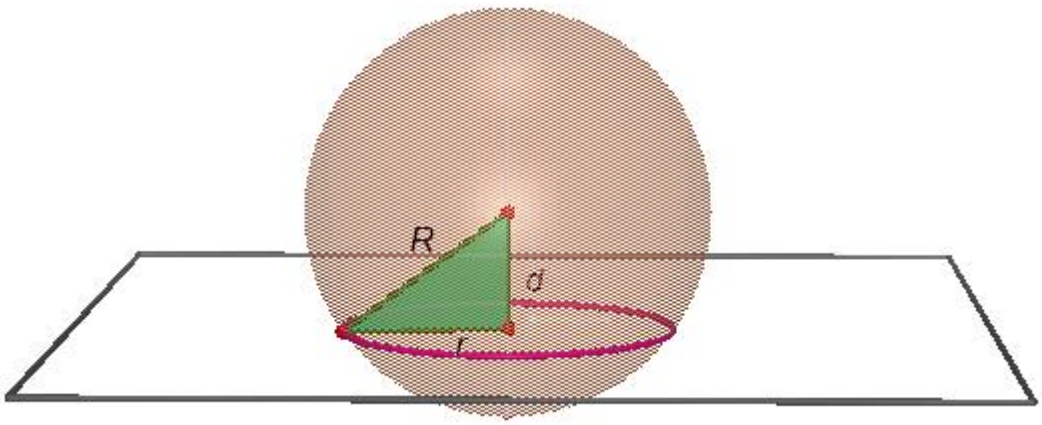
10- عيّن طبيعة و خصائص تقاطع المستوي (ABC) و سطح الكرة (S)

$$d\big(w,(ABC)\big)<r\,;(S)\cap(ABC)=(C')$$

$$2(2t)-3(-1-3t)+3+t-1=0\,;14t=-5\,;t=-\frac{5}{14}\,;$$

$$\boxed{w'\left(-\frac{5}{7};+\frac{1}{14};\frac{37}{14}\right)}$$

$$R^2=d^2+r^2;r^2=R^2-d^2=5^2-\frac{25}{14};\boxed{r=5\sqrt{\frac{13}{14}}}$$



11- ليكن (P) المستوي الذي معادلته: $x+y+z-1=0$. بيّن أنّ المستويين (P) و (ABC) متعامدان

$$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}.\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2-3+1=0\,;\ \vec{n}\perp\overrightarrow{n'}\,;(ABC)\perp(P)$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

12- اعط التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ') تقاطع (P) و (ABC)

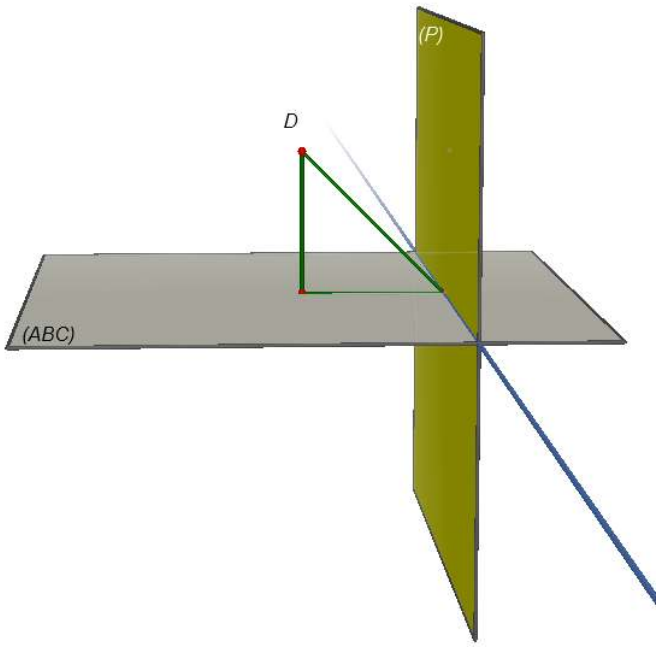
$$\begin{cases} 2x-3y+z-1=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases} ; x-4y=0 ; x=4y ; 4y+y+z-1=0 ; z=-5y+1$$

$$\boxed{(\Delta'): \begin{cases} x=4t' \\ y=t' \\ z=1-5t' \end{cases} ; t' \in R}$$

13- عين بعد النقطة D عن المستوي (P) ، ثمّ استنتج المسافة بين D و (Δ')

$$d\big(D,(P)\big)=\frac{|-4+2+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

$$d^2\big(D,(\Delta')\big)=d^2\big(D,(ABC)\big)+d^2\big(D,(P)\big)=14+\frac{4}{3}=\frac{46}{3} \; ; \; d\big(D,(\Delta')\big)=\sqrt{\frac{46}{3}}=\boxed{\frac{\sqrt{138}}{3}}$$



14- $M_{t'}$ نقطة من المستقيم (Δ') ، أي $M_{t'}(4t',t',1-5t')$

أ. $DM_{t'}=\sqrt{(4t'+4)^2+(t'-2)^2+(-5t')^2}=\sqrt{42t'^2+28t'+20}$

ب. $f'(t')=\frac{84t'+28}{2\sqrt{42t'^2+28t'+20}}=\frac{2(21t'+7)}{\sqrt{42t'^2+28t'+20}}$ ، $f'(t')=0\Rightarrow 21t'+7=0\Rightarrow t'=-\frac{1}{3}$

f' متزايدة $\Rightarrow f'(t')\geq 0 : t'\in\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$ ؛ f' متناقصة $\Rightarrow f'(t')<0 : t'\in\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[$

ج. ممّا سبق نستنتج أنّ المسافة بين D و (Δ') هي : $d\big(D,(\Delta')\big)=f\left(-\frac{1}{3}\right)=\sqrt{\frac{42}{9}-\frac{28}{3}+20}=\boxed{\frac{\sqrt{138}}{3}}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

15- ادرس الوضع النسبي للمستقيمين (Δ) و (Δ′)

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}\ ;\frac{2}{4}\neq-\frac{3}{1}\ ;\ \vec{u}\#\overrightarrow{u'}\ ;$$

$$\begin{cases}2t=4t'\\-1-3t=t'\end{cases}\ ;\ \begin{cases}2t=4(-1-3t)\\-1-3t=t'\end{cases}\ ;\ \begin{cases}t=-\frac{2}{7}\\t'=-\frac{1}{7}\end{cases}$$

$$M_{(\Delta)}\left(-\frac{4}{7};-\frac{1}{7};\frac{19}{7}\right)\ ;\ M'_{(\Delta')}\left(-\frac{4}{7};-\frac{1}{7};\frac{12}{7}\right)\ ;\ \boxed{\text{(Δ) و (Δ′) لا ينتميان إلى نفس المستوي}}$$

16- اعط المعادلة الديكارتية لـ (Q) المستوي المحوري للقطعة [MN] حيث $M(1;0;0)$ و $N(-1;0;2)$

$$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}\ ;H(0;0;1);(Q):-2x+2z+d=0\ ;H\in(Q):2+d=0\ ;d=-2$$

$$\boxed{(Q):-2x+2z-2=0}$$

17- عيّن تقاطع المستويات الثلاث (P) ، (Q) و (ABC)

$$(Q)\cap(\Delta'):-2(4t')+2(1-5t')-2=0\ ;\ -18t'=0\ ;t'=0$$

$$\boxed{(Q)\cap(P)\cap(ABC)=\{(0;0;1)\}=\{H\}}$$

18- عين إحداثيات النقطتين G و G' حيث G مركز ثقل المثلث ABC و G' مرجح الجملة $\{(A;3),(B;-1);(C;1)\}$

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)\ ;\ \boxed{G(2;1;0)}$$

$$G'\left(\frac{3x_A-x_B+x_C}{3};\frac{3y_A-y_B+y_C}{3};\frac{3z_A-z_B+z_C}{3}\right);\boxed{G'(\frac{4}{3};-\frac{1}{3};-\frac{8}{3})}$$

19- عيّن في كل حالة من الحالات التالية مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6\ \Rightarrow\ 3\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=6\ \Rightarrow\ \left\|\overrightarrow{MG}\right\|=2$$

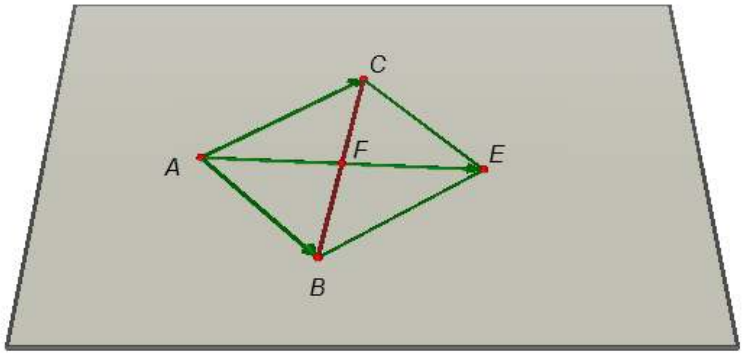
مجموعة النقط M هي سطح كرة مركزها G و نصف قطرها 2

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|\ \Rightarrow\ 3\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MG'}\right\|\ \Rightarrow\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{MG'}\right\|$$

مجموعة النقط M هي المستوي المحوري للقطعة [GG']

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|\ \Rightarrow\ 3\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM



$$3\|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{AE}\| = 2\|\overrightarrow{AF}\| \Rightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = \frac{2}{3}\|\overrightarrow{AF}\|$$

بما أنّ الرباعي $ABEC$ متوازي الأضلاع ، فإنّ النقطة F هي تقاطع القطرين (AE) و (BC) ، أي F منتصف $[BC]$

$$F\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \|\overrightarrow{AF}\| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}-1\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+1\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2}{3}\|\overrightarrow{AF}\| = \sqrt{3}$$

مجموعة النقط M هي سطح كرة مركزها G و نصف قطرها $\sqrt{3}$

$$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right) = 0 \Rightarrow 3\overrightarrow{MG}.3\overrightarrow{MG'} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MG'} = 0$$

مجموعة النقط M هي سطح كرة قطرها ['GG]

$$\left(3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right) = 0 \Rightarrow 3\overrightarrow{MG'}.\overrightarrow{BA} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MG'}.\overrightarrow{AB} = 0$$

مجموعة النقط M هي المستوي الذي يشمل 'G و يعامد $\overrightarrow{AB}$

$$MA^2+MB^2+MC^2 = 30\ ;\ \overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2 = 30\ ;\ (\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2 = 30$$

$$3\overrightarrow{MG}^2+\overrightarrow{GA}^2+\overrightarrow{GB}^2+\overrightarrow{GC}^2+2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right) = 30$$

$$3\overrightarrow{MG}^2 = 30-\overrightarrow{GA}^2-\overrightarrow{GB}^2-\overrightarrow{GC}^2$$

$$\overrightarrow{GA}^2 = 3\ ;\overrightarrow{GB}^2 = 10\ ;\overrightarrow{GC}^2 = 5$$

$$3\ \overrightarrow{MG}^2 = 12 \Rightarrow \overrightarrow{MG}^2 = 4$$

مجموعة النقط M هي سطح كرة مركزها G و نصف قطرها 2



قسم الجزائر
WWW.DZPEN.COM