الأعمال الموجهة

تعيين معاملي بيزو

تصحيح: /

الهدف: توظيف مجدول اكسال لتعيين معاملي بيزو.

توجيهات: يقدم العمل في شكل أفواج مع استغلال جهاز الداتاشو.

الحل: يكفي إتباع مختلف التوجيهات المقدمة لبلوغ النتائج المتوخاة.

المبرهنة الصغيرة لـ فيرما

تصحيح: /

الهدف: توظيف الموافقات و الأعداد الأولية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: معقد.

التمارين

التمارين التطبيقية

1 - الأعداد الأوّلية .

2 أ ــ 1429 لا يقبل القسمة على 2 ولا على 3 ولا على 5 ؛ $1429=7\times204+$ ، $1429=11\times129+$ ،
$1429=13\times109+$ ، $1429=17\times84+$ ، $1429=19\times75+$ ، $1429=23\times62+$ ، $1429=29\times49+$ ،
$1429=31\times46+$ ، $1429=37\times38+$ ، $1429=41\times34+$ ؛ عدد القسمات هو 13.

ب ــ 1429 أولي .

3 أ - الخاصية 2 صفحة 90 .

ب - $\sqrt{853}\approx29,2$ و 853 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، 19 ، 23 ، 29 ، إذن العدد 853 أولي.

4 أ - 251 أولي. ب - 341 ليس أوليا.

ج - 1023 ليس أوليا.

7 إذا كان $n=2$ فإن $n+7=9$ وهو غير أولي.

إذا كان $n>2$ فإن n فردي ومنه $n+7$ يكون زوجيا يقبل القسمة على 2 وهو غير أولي.

15 $n^2+8n+15=(n+3)(n+5)$ ليس أوليا .

17 أ - $\sqrt{173}\approx13,15$ و 173 لا يقبل القسمة على 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 إذن العدد 173 أولي .

ب - $x^2-y^2=173$ معناه $(x-y)(x+y)=173$

إذن $x-y=1$ و $x+y=173$ أي $(x,y)=(87,86)$

ج ــ p عدد طبيعي أوّلي فردي . $x-y=1$ و $x+y=p$ ومنه $(x,y)=\left(\frac{p+1}{2},\frac{p-1}{2}\right)$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

2 ـ المضاعف المشترك الأصغر لعددين .

28 أ - $ppcm(26,12)=156$.

ب - $ppcm(18,-15)=90$.

جـ - $ppcm(-12,-13)=156$.

د - $ppcm(230,128)=14720$.

هـ - $ppcm(876,1028)=225132$

29 * $\frac{9}{140}+\frac{13}{84}=\frac{27+65}{420}=\frac{92}{420}=\frac{23}{105}$.

* $\frac{55}{195}+\frac{23}{216}=\frac{1091}{2808}$. * $\frac{82}{75}+\frac{19}{210}=\frac{1243}{1050}$.

30 في كل حالة من الحالات التالية ، عين قيم العدد الطبيعي a غير المعدومة حيث :

أ - $ppcm(a,56)=392$ ؛ نضع $p\gcd(a,56)=d$

معناه $a=da'$ ، $56=db'$ و $p\gcd(a',b')=1$.

لدينا $56a=392d$ أي $a=7d$ إذن $p\gcd(7,b')=1$

أي $p\gcd\left(7,\frac{56}{d}\right)=1$ إذن $d\in\{7;14;28;56\}$

$a\in\{49;98;196;392\}$.

ب - $ppcm(a,18)=630$ ؛ $a\in\{35;70;210;315;630\}$.

31 أ ــ $n\equiv 3[35]$ و $n\equiv 3[28]$ معناه $n-3\equiv 0[35]$ و $n-3\equiv 0[28]$ إذن $n-3$ مضاعف مشترك للعددين 28 و 35 .

أصغر قيمة لـــ $n-3$ هي $ppcm(28,35)=140$

إذن أصغر قيمة للعدد n هي 143.

32 $a=52p+7=64p'+7$ ومنه $a-7=52p=64p'$ إذن $a-7=ppmc(52,64)=832$ أي $a=839$.

33 $n\in\mathbb{N}^*$ ؛ $p\gcd(n,2n+1)=1$ ومنه $ppcm(n,2n+1)=n(2n+1)$.

34 لدينا $ppcm(2n+2,4n+2)=2ppcm(n+1,2n+1)$

و $p\gcd(n+1,2n+1)=1$ إذن

$ppcm(n+1,2n+1)=(n+1)(2n+1)$ ومنه

$ppcm(2n+2,4n+2)=2(n+1)(2n+1)$.

35 $n\in\mathbb{N}^*$ ؛ $a=(3^{2n}-1)(7^{2n}-1)$

$a=(3^n-1)(3^n+1)(7^n-1)(7^n+1)$ ؛

$a=b(3^n-1)(7^n-1)$ ؛ a مضاعف لـ b إذن

$ppcm(a,b)=a$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

40 أ ــ $\begin{cases} a+b=60 \\ ppcm(a,b)=40 \end{cases}$ ؛ $p\gcd(a,b)=d$ ،

$a=da'$ ، $b=db'$ مع $p\gcd(a',b')=1$.

لدينا $ab=40d$ معناه $a'b'd=40$.

ولدينا $a+b=60$ معناه $d(a'+b')=60$.

وبالتالي d يقسم $p\gcd(40,60)=20$ أي $d\in\{1,2,4,5,10,20\}$.

لدينا $a'+b'=\frac{60}{d}$ و $a'b'=\frac{40}{d}$ إذن a' و b' هما حلا المعادلة $x^2-\frac{60}{d}x+\frac{40}{d}=0$ أي $dx^2-60x+40=0$

المميز المختصر هو $\Delta'=900-40d$ ؛ إذا كان $d\in\{1,2,4,5,10\}$ فإن

$\sqrt{\Delta'}\notin\mathbb{N}$ وبالتالي الحلان ليس طبيعيان.

إذا كان $d=20$ فإن $\Delta'=100$ ومنه $x'=1$ و $x''=2$ ؛ ومنه $(a',b')=(1,2)$ أو $(a',b')=(2,1)$

إذن $(a,b)=(20,40)$ أو $(a,b)=(40,20)$.

ب ــ $\begin{cases} a-b=22932 \\ ppcm(a,b)=98280 \end{cases}$ ؛ d يقسم $p\gcd(22932,98280)=3276$ أي

$d\in\{1,2,3,4,6,7,9,12,13,14,18,21,26,28,36,39,42,52,63,78,84,91,117,126,156,182,234,$
$252,273,364,468,546,819,1092,1638,3276\}$

الحالة الوحيدة التي تحقق وهي $d=3276$ ونجد $a=32760$ و $b=9828$

41 أ ــ $ppcm(a,b)=21\times p\gcd(a,b)$.

$ab=md$ معناه $a'b'd=m$ أي $a'b'=21$ ونجد $(a,b)\in\{(d,21d);(3d,7d);(7d,3d);(21d,d)\}$ مع

$d\in\mathbb{N}^*$.

ب ــ $ppcm(a,b)-p\gcd(a,b)=187$.

$m-d=187$ معناه $d(a'b'-1)=187=11\times17$

ومنه $d\in\{1,11,17,187\}$ ثم ندرس الحالات

3 ـ مبرهنة بيزو .

46 أ ــ $a=n$ ؛ $b=2n+1$. $-2a+b=1$

ب ــ $a=2n+3$ ؛ $b=3n+5$. $-3a+2b=1$

47 تطبيق مبرهنة بيزو $11(7n+2)-7(11n+3)=1$ معناه $PGCD(11n+3,7n+2)=1$.

$PGCD(n,n^2+1)=1$.

49 n عدد طبيعي غير معدوم .

أ ــ بالنشر نجد : $(n^3+1)^2=n^2(n^4+2n)+1$.

ب ــ $(n^3+1)^2-n^2(n^4+2n)=1$ بوضع $\alpha=n^3+1$ و $\beta=-n^2$ حسب مبرهنة بيزو يكون العددان

n^3+1 و n^4+2n أوّليين فيما بينهما .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

4 ـ مبرهنة غوص .

60 نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول (x,y) التالية $2045x-64y=1$ $\ldots(1)$.

1) $PGCD(2045,64)=1$.

2) حسب مبرهنة بيزو المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$. $(21,671)$ هو حل خاص للمعادلة (1).

3) $2045x-64y=1$ و $2045\times21-64\times671=1$ إذن

$2045(x-21)-64(y-64)=0$ أي $2045(x-21)=64(y-64)$

64 يقسم $2045(x-21)$ و $PGCD(2045,64)=1$

إذن حسب مبرهنة غوص 64 يقسم $x-21$ أي $x-21=64k$ مع $k\in\mathbb{Z}$ وبالتعويض نجد $y-64=2045k$.

5 ـ المبرهنة الصغيرة لفرما .

66 $7^{10}\equiv1[11]$ حسب مبرهنة فرما.

$7^{2521}=7\times7^{2520}=7\times\left(7^{10}\right)^{252}$ ومنه $7^{2521}\equiv7[11]$.

68 حسب نتيجة فرما : $n^5\equiv n[5]$ و $n^3\equiv n[3]$ وهذا من أجل $n\in\mathbb{Z}$ لأن كل من 5 و 3 أولي.

$n^5\equiv n[5]$ معناه $n^5-n\equiv0[5]$

من $n^3\equiv n[3]$ ينتج أن $n^2\times n^3\equiv n^2\times n[3]$ ومنه $n^5\equiv n[3]$ أي $n^5-n\equiv0[3]$ بما أن 5 و 3 أوليان فيما بينهما فإن $n^5-n\equiv0[15]$.

71 1) $x^3\equiv x[3]$ لأن 3 أولي.

2)

$x\equiv$	0	1	2	3	[4]
$x^3\equiv$	0	1	0	3	[4]

إذن $x\equiv0[4]$ أو $x\equiv1[4]$ أو $x\equiv3[4]$

3) $x^3\equiv x[12]$ معناه $x\equiv0[4]$ أو $x\equiv1[4]$ أو $x\equiv3[4]$.

6 ـ تشفير الكلمات

أ	ب	ت	ث	ج	ح	خ	د	ذ	ر	ز	س	ش	ص	ض
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

ط	ظ	ع	غ	ف	ق	ك	ل	م	ن	ه	و	ي
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

73 نقوم بعملية التشفير باستعمال التحويل $x\mapsto y$ حيث y هو باقي قسمة $x+3$ على 28 .

1) تشفير كلمة " **الجزائر** " هو " **ثهدصثثش** ".

2) ليكن y من المجموعة $\mathscr{N}$ ؛ $x+3\equiv y[28]$ معناه $x\equiv y-3[28]$ ؛ إذا كان $y\geq3$ فإن $x=y-3$ وإذا كان $y<3$ فإن $x=y-3+28=y+25$

3) حل تشفير : **تبضل:** يوسف ؛ **لثغوا ثهصاثثث:** فاطمة الزهراء ؛ **وذوز** : محمد.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM