4- نهاية دالة مركبة – النهايات بالمقارنة :

حل التمرين 30 ص28 ج1 :

حساب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3}\left[\sqrt{\dfrac{3x+4}{x-3}}\right]=\sqrt{\dfrac{13}{0^+}}=+\infty$.

2) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1}\left[\sqrt{\dfrac{3-6x}{1-x}}\right]=\sqrt{\dfrac{-3}{0^-}}=+\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2}\right]=+\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{-2x^3+x-3}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{-2x^3}\right]=-2(-\infty)=+\infty$.

حل التمرين 31 ص28 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $]-2;2[$ بـ : $f(x)=\dfrac{-3}{\sqrt{4-x^2}}$

حساب نهاية الدالة f عند 2- وَ 2 :

f معرفة إذا كان $4-x^2\geq 0$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2}\left[\dfrac{-3}{\sqrt{4-x^2}}\right]=\left[\dfrac{-3}{0^+}\right]=-\infty$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2}\left[\dfrac{-3}{\sqrt{4-x^2}}\right]=\left[\dfrac{-3}{0^+}\right]=-\infty$.

عن موقع www.eddirasa.com
البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com

حل التمرين 32 ص28 ج1 :

حساب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\dfrac{x+4}{x^2-3}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\dfrac{x}{x^2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\cos(0)\right]=1$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\dfrac{\pi x-1}{2x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\dfrac{\pi x}{2x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right]=0$.

3) $\lim\limits_{x\to-1}\left[\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}x\right)+\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]=\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{1}{0^+}\right]=1+(+\infty)=+\infty$.

4) $\left[\cos(\pi\times 1)\right]=\left[\cos\pi\right]=-1$ ، لأن $\lim\limits_{x\to0}\left[\cos\left(\pi\dfrac{\sin x}{x}\right)\right]$ $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\sin x}{x}\right]=1$.

حل التمرين 33 ص28 ج1 :

- إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > -1$: $\frac{-1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$:

لدينا $x > -1$ و منه $x+1 > 0$ ، أي $\frac{1}{x+1} > 0$

ولدينا كذلك $-1 \leq \cos x \leq 1$ ، وبضرب أطراف المتباينة في العدد الموجب $\frac{1}{x+1}$ نحصل على :

$$-1 \times \frac{1}{x+1} \leq \cos x \times \frac{1}{x+1} \leq 1 \times \frac{1}{x+1}$$

إذن: $\frac{-1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$.

- حساب نهاية الدالة $f : x \mapsto \frac{\cos x}{x+1}$ عند $+\infty$:

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{x+1}\right] = 0$ وَ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{-1}{x+1}\right] = 0$ ، فإنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{\cos x}{x+1}\right] = 0$

إذن : الدالة $f : x \mapsto \frac{\cos x}{x+1}$ تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي 0 .

حل التمرين 34 ص28 ج1 :

f دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$ ، $\frac{3x + \cos x}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x+7}{x-1}$:

- لنبحث عن نهاية الدالة f عند $+\infty$:

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{3x+7}{x-1}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{3x}{x}\right] = 3$

و لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{3x + \cos x}{x}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{3x}{x} + \frac{\cos x}{x}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[3 + \frac{\cos x}{x}\right] = 3$ ، لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{\cos x}{x}\right] = 0$.

و لدينا $\frac{3x + \cos x}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x+7}{x-1}$ ، ومنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

إذن : الدالة f تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي 3 .

عن موقع www.eddirasa.com

البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com

حل التمرين 35 ص28 ج1 :

f دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$ ، $|f(x) - 3| \leq \frac{1}{x^2+1}$:

- لنبحث عن نهاية الدالة f عند $+\infty$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$ ، $|f(x) - 3| \leq \frac{1}{x^2+1}$ ، أي $\frac{-1}{x^2+1} \leq f(x) - 3 \leq \frac{1}{x^2+1}$

لأن $\frac{1}{x^2+1} > 0$ ، و منه $3 - \frac{1}{x^2+1} \leq f(x) \leq 3 + \frac{1}{x^2+1}$

و بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[3 + \frac{1}{x^2+1}\right] = 3$ ، لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[3 - \frac{1}{x^2+1}\right] = 0$

فإنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

إذن : الدالة f تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي 3 .

حل التمرين 36 ص28 ج1 :

f دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x<0$ ، $f(x)\le -2x^3$:

- لنبحث عن نهاية الدالة f عند $+\infty$:

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-2x^3\right]=-\infty$ وَ $f(x)\le -2x^3$ من أجل كل عدد حقيقي $x<0$ ،

فإنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

إذن : الدالة f تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي $-\infty$.

حل التمرين 37 ص28 ج1 :

f دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x>0$ ، $f(x)\ge \frac{1}{2}x^4+x$:

- لنبحث عن نهاية الدالة f عند $+\infty$:

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}x^4+x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}x^4\right]=+\infty$ وَ $f(x)\ge\frac{1}{2}x^4+x$ من أجل كل عدد حقيقي $x>0$ ،

فإنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

إذن : الدالة f تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي $+\infty$.

عن موقع www.eddirasa.com

البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com

حل التمرين 38 ص29 ج1 :

1) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $1\le 3+2\cos x\le 5$:

نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $-1\le\cos x\le 1$ ، وبضرب أطراف المتباينة في العدد 2 نجد : $-2\le 2\cos x\le 2$ و بإضافة العدد 3 إلى أطراف المتباينة نجد $3-2\le 3+2\cos x\le 3+2$

إذن: $1\le 3+2\cos x\le 5$.

2) لنبحث عن نهاية الدالة $f:x\mapsto\frac{x-1}{3+2\cos x}$ عند $+\infty$:

لدينا $1\le 3+2\cos x\le 5$ ومنه $\frac{1}{5}\le\frac{1}{3+2\cos x}\le 1$ ، وبضرب أطراف المتباينة في $(x-1)$ نجد :

$\frac{x-1}{5}\le\frac{x-1}{3+2\cos x}\le x-1$ ، ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x-1}{5}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}[x-1]=+\infty$

وبالتالي فإنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

إذن : الدالة f تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي $+\infty$.

حل التمرين 39 ص29 ج1 :

1) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $x^2-3\sin x\ge x^2-3$:

نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $-1\le\sin x\le 1$ ، وبضرب أطراف المتباينة في العدد -3 نجد : $3\ge -3\sin x\ge -3$ و بإضافة x^2 إلى أطراف المتباينة نجد $3+x^2\ge x^2-3\sin x\ge x^2-3$

إذن: $x^2-3\sin x\ge x^2-3$.

2) لنبحث عن نهاية الدالة $f:x\mapsto x^2-3\sin x$ عند $+\infty$:

(كتبت في الكتاب خطأ $f:x\mapsto x^2-\sin 3x$)

لدينا $x^2-3\sin x\ge x^2-3$ ، ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2-3\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\right]=+\infty$

وبالتالي فإنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

إذن : الدالة f تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي $+\infty$.

حل التمرين 40 ص29 ج1 :

- لنبحث عن نهاية الدالة $f : x \mapsto x^2 + 2x \sin x$ عند $+\infty$ وَ عند $-\infty$:

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} [x + 2\sin x] = +\infty$ ،

إذن : الدالة f تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} [x^2 + 2x \sin x] = \lim\limits_{x \to -\infty} [x(x + 2\sin x)] = (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$ ،

إذن : الدالة f تقبل نهاية عند $-\infty$ ، ونهايتها هي $+\infty$.

حل التمرين 41 ص29 ج1 :

f دالة معرفة على $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ بـ : $f(x) = \frac{x + \sin x}{2x + 1}$:

1) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > -\frac{1}{2}$ ، $\frac{x-1}{2x+1} \le f(x) \le \frac{x+1}{2x+1}$:

لدينا $-1 \le \sin x \le 1$ ، بإضافة x لأطراف المتباينة نجد : $x - 1 \le x + \sin x \le x + 1$ و بقسمة أطراف المتباينة على $2x + 1$ نجد $\frac{x-1}{2x+1} \le \frac{x + \sin x}{2x+1} \le \frac{x+1}{2x+1}$

إذن: $\frac{x-1}{2x+1} \le f(x) \le \frac{x+1}{2x+1}$.

2) لنبحث عن نهاية الدالة f عند $+\infty$:

لدينا $\frac{x-1}{2x+1} \le f(x) \le \frac{x+1}{2x+1}$ ، ولدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{x-1}{2x+1}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{x-1}{2x+1}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{x}{2x}\right] = \frac{1}{2}$

ومنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

إذن : الدالة f تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي $\frac{1}{2}$.

عن موقع www.eddirasa.com

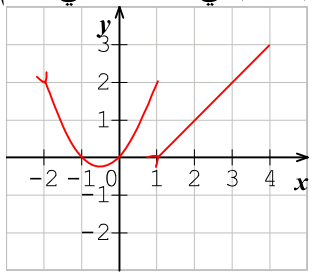
البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com

5- الاستمرارية :

حل التمرين 42 ص29 ج1 :

- نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2;4[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = x^2 + x ; & x \in [-2;1[\\ f(x) = x - 1 ; & x \in [1;4[\end{cases}$

1) التمثيل البياني للدالة f في معلم :



لنبحث عن نهاية الدالة f عند 1 :

لدينا لمّا $x \in [-2;1[$ ، $f(x) = x^2 + x$ ، ومنه $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} [x^2 + x] = 1^2 + 1 = 2$

ولدينا لمّا $x \in [1;4[$ ، $f(x) = x - 1$ ، ومنه $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} [x - 1] = 1 - 1 = 0$

إذن وجدنا أن : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) \neq \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$ ، ومنه الدالة f لا تقبل نهاية عند 1 .

2) الدالة f غير مستمرة على المجال $]-2;4[$ ، لأنها غير مستمرة عند 1 (لا تقبل نهاية عند 1) ، و العدد1 هو عنصر ينتمي إلى المجال $]-2;4[$.

3) على المجال $[2;3]$ الدالة f معرفة بـ $f(x)=x-1$ وحسب التمثيل البياني فهي مستمرة على هذا المجال ، وكذلك هذه الدالة كثير حدود إذن فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالتالي فهي مستمرة على $[2;3]$.

حل التمرين 43 ص29 ج1 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=x^2-2x+1; & x\le 2 \\ f(x)=x^2+x-5; & x>2 \end{cases}$:

1) دراسة استمرارية الدالة f عند 2 :

لدينا من أجل $x\in]-\infty;2]$ ، $f(x)=x^2-2x+1$

ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\left[x^2-2x+1\right]=4-4+1=1$ ، إذن: الدالة f مستمرة عند 2 على اليسار .

ولدينا من أجل $x\in]2;+\infty[$ ، $f(x)=x^2+x-5$

ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}\left[x^2+x-5\right]=4+2-5=1$ ، إذن: الدالة f مستمرة عند 2 على اليمين .

وجدنا أن الدالة f مستمرة عند 2 على اليمين و على اليسار ، و منه فهي مستمرة عند 2 .

2) نعم الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ، لأنها مستمرة عند 2 و مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;2[$ وَ $]2;+\infty[$ لأنها عبارة عن دالة كثير حدود معرفة على كل من المجالين على حدا .

حل التمرين 44 ص29 ج1 :

- دراسة استمرارية الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\begin{cases} f(x)=-x^2+x+2; & x\le 1 \\ f(x)=\frac{1}{2}x+1; & x>1 \end{cases}$:

لدينا من أجل $x\in]-\infty;1]$ ، $f(x)=-x^2+x+2$

ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\left[-x^2+x+2\right]=-1+1+2=2$

ولدينا من أجل $x\in]1;+\infty[$ ، $f(x)=\frac{1}{2}x+1$

ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\left[\frac{1}{2}x+1\right]=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

وجدنا أن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)\neq\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)$ ، ومنه الدالة f لا تقبل نهاية عند 1 .

إذن : الدالة f غير مستمرة عند 1 ، ومنه فهي ليست مستمرة على $\mathbb{R}$. لكنها مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;1[$ وَ $]1;+\infty[$.

عن موقع www.eddirasa.com
البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com

حل التمرين 45 ص29 ج1 :

f دالة عددية معرفة كما يلي : $f(x)=\frac{x^3-3}{x-1}$ إذا كان $x\neq 1$ وَ $f(1)=3$:

1) دراسة استمرارية الدالة f عند 1 :

لدينا من أجل $x \in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ ، $f(x)=\frac{x^3-3}{x-1}$ ، بإجراء القسمة الإقليدية نحصل على :

عن موقع www.eddirasa.com
البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com

$$\begin{array}{r|l} x^3-1 & x-1 \\ \hline x^3-x^2 & x^2+x+1 \\ \hline x^2-1 & \\ x^2-x & \\ \hline x-1 & \\ x-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

إذن $f(x)=x^2+x+1$ ،

ومنه لمّا $x \in]-\infty;1[$ ، نجد $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1}\left[x^2+x+1\right]=1+1+1=3$.

ولمّا $x \in]1;+\infty[$ ، نجد $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1}\left[x^2+x+1\right]=1+1+1=3$.

إذن $\lim\limits_{x \to 1} f(x)=3$ و لدينا $f(1)=3$ ، ومنه : الدالة f مستمرة عند 1

إذن : فهي مستمرة على $\mathbb{R}$.

حل التمرين 46 ص29 ج1 :

لتكن الدالتان f وَ g المعرفتان على $\mathbb{R}$ وَ $\mathbb{R}-\{1\}$ على الترتيب كما يلي :

$$f(x)=2x^3-x+1 \quad \text{وَ} \quad g(x)=\frac{x^2-2x+3}{x-1}$$

- دراسة استمرارية الدالتان f وَ g :

نعلم أن الدوال كثيرات الحدود معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ ، ولدينا $f(x)=2x^3-x+1$ هي دالة كثير حدود و منه فهي مستمرة على $\mathbb{R}$.

و نعلم كذلك أن الدوال الناطقة معرفة و مستمرة على مجال تعريفها ، ولدينا $g(x)=\frac{x^2-2x+3}{x-1}$ دالة ناطقة مجموعة تعريفها $D_g=\mathbb{R}-\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ ، ومنه فهي غير مستمرة عند 1 .

إذن: الدالة g مستمرة على المجال $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

حل التمرين 47 ص29 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\left(x^2-x\right)\sin x$:

- إثبات أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$:

لنعرف الدالتين u وَ v كما يلي : $u:x \mapsto \sin x$ ، وَ $v:x \mapsto x^2-x$

نعلم أن الدالة $x \mapsto \sin x$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ أي الدالة $u:x \mapsto \sin x$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$

و نعلم أيضًا أن الدوال كثيرات الحدود معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ ، و منه فالدالة $v:x \mapsto x^2-x$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$.

إذن جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ هو دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ ، ومنه فالدالة $f(x)=\left(x^2-x\right)\sin x$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

حل التمرين 48 ص29 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+x^2}$:

- دراسة استمرارية الدالة f :

لدينا الدالة f هي جداء الدالتين المستمرتين على $\mathbb{R}$ و المعرفتين بـ : $x\mapsto\cos x$ ، وَ $x\mapsto\dfrac{1}{1+x^2}$

إذن جداء هذين الدالتين هو $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+x^2}$ ، ونعلم أن جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ هو دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ ، ومنه فالدالة $f(x)$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

حل التمرين 49 ص29 ج1 :

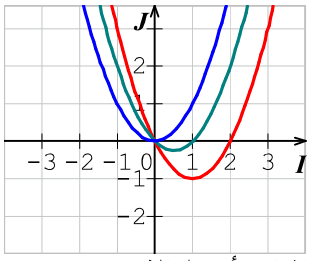
نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2;1[$ كما يلي : $f(x)=x\left(x+E(x)\right)$ حيث الدالة $x\mapsto E(x)$ هي دالة الجزء الصحيح :

1) تعيين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية : $[-2;-1[$ ، $[-2;0[$ ، $[-2;1[$:

نعلم أن دالة الجزء الصحيح معرفة كما يلي : $E(x)=\begin{cases}-2 : x\in[-2;-1[\\ -1 : x\in[-2;0[\\ 0 : x\in[-2;1[\end{cases}$

ومنه فالدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=\begin{cases}x(x-2) : x\in[-2;-1[\\ x(x-1) : x\in[-2;0[\\ x(x+0) : x\in[-2;1[\end{cases}$ ، أي $f(x)=\begin{cases}x^2-2x : x\in[-2;-1[\\ x^2-x : x\in[-2;0[\\ x^2 : x\in[-2;1[\end{cases}$

2) رسم في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ المنحنى الممثل للدالة f :



3) إثبات أن الدالة f مستمرة على المجالات $[-2;-1[$ ، $[-2;0[$ ، $[-2;1[$:

- الدالة f معرفة على المجال $[-2;-1[$ بـ $f(x)=x^2-2x$ ومنه فهي دالة كثير حدود إذن الدالة f مستمرة على $[-2;-1[$.
- الدالة f معرفة على المجال $[-2;0[$ بـ $f(x)=x^2-x$ ومنه فهي دالة كثير حدود إذن الدالة f مستمرة على $[-2;0[$.
- الدالة f معرفة على المجال $[-2;0[$ بـ $f(x)=x^2$ ومنه فهي دالة كثير حدود ، إذن الدالة f مستمرة على $[-2;0[$.

عن موقع www.eddirasa.com

البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com