ملخص ونصائح عامة:

1) سحابة النقط $M(x_i;y_i)$:

تمثل سحابة النقط $M(x_i;y_i)$ للسلسلة الإحصائية في معلم متعامد (مناسب) أي نحترم السلّم المعطى في نص التمرين

2) نصائح تتعلق بحساب إحداثيي النقطة المتوسطة $G(\overline{x};\overline{y})$ ومعادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا:

بعد تناول نص التمرين الإطلاع على الجدول الإحصائي ، أنصح أعزائي الطلبة بإضافة صفين إلى الجدول يحتوي الأول على المقدار $x_i.y_i$ والصف الثاني على المقدار $(x_i-\overline{x})^2$ وعمود جانبي يحتوي على المجموع ، وذلك لتسهيل إنجاز الحسابات المطلوبة والتقليل من هامش الوقوع في الأخطاء. ونوضح ذلك في المثال التالي:

السنة	2006	2007	2008	2009	2010	المجموع
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5	
كمية الإنتاج y_i	2.6	2.8	3.2	4	4.4	
$x_i.y_i$						
$(x_i-\overline{x})^2$						

أ) النقطة المتوسطة $G(\overline{x};\overline{y})$:

إحداثيي النقطة $G(\overline{x};\overline{y})$ هي: $\overline{y}=\frac{\sum y_i}{n}$ $\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n}$

ب) معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا :

معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا من الشكل $y=ax+b$ حيث: $a=\frac{\sum x_i.y_i-n.\overline{x}.\overline{y}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}$ $b=\overline{y}-a\overline{x}$.

ج)الإنتقال من رتبة السنة x_i إلى السنة الموافقة n :

يتم الإنتقال من رتبة السنة x_i إلى السنة الموافقة n وفقا للعلاقة: $n-p+x_0=x_i$

حيث: n هي السنة الموافقة لرتبة x_i ، p هي السنة الوجودة في أول خانة في الجدول، x_0 رتبةالسنة الوجودة في أول خانة في الجدول ، x_i رتبة السنةالمطلوبة.

د)سؤال و جواب :

سؤال : هل يمكن القيام بتسوية خطية أو تعديل خطي لسحابة النقط $M(x_i;y_i)$

جواب : يمكن القيام بتسوية خطية أو تعديل خطي إذا كانت سحابة النقط $M(x_i;y_i)$ موزعة توزيع بشكل متطاول ،أما إذا كانت سحابة النقط $M(x_i;y_i)$ متفرقة أو بها نقط شاذة لايمكن القيام بتسوية أو تعديل خطي.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

سلسلة الإحصاء شعبة التسيير و الإقتصاد

التمرين الأول: بكالوريا 2008الموضوع الأول.

يمثل الجدول الآتي تطور إنتاج معمل الإسمنت 6 خلال سنوات من 2000 إلى 2005.

السنة	2000	2001	2002	2003	2004	2005
ترتيب السنوات x_i	1	2	3	4	5	6
الإنتاج بالمليون طن y_i	3.8	4	4.5	4.8	5.2	5.6

1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد ومتجانس حيث وحدة الأطوال $2cm$.

2) عين إحداثيي النقطة المتوسطة G.

3) أ) بين أن a معامل توجيه مستقيم الإنحدار (D) مدورا إلى هو $a = 0.37$.

علما أن G نقطة من (D) ، عين معادلة المختصرة للمستقيم (D).

ب) من أهداف المعمل الوصول إلى إنتاج 7.3 مليون طن في سنة 2009.

– بين بإستعمال التعديل الخطي السابق إذا كان هذا الهدف يمكن ان يتحقق؟.

التمرين الثاني: بكالوريا 2008 الموضوع الثاني.

الجدول التالي يمثل نسبة البطالة في بلد بين السنوات 1970 و 2005.

السنة a_i	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005
رتبة السنة $x_i = a_i - 1970$	0	5	10	15	20	25	30	35
النسبة المئوية y_i	1.3	1.5	1.5	1.3	1.4	2.2	2.5	2

1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد ، ($1cm$ لكل 5 سنوات على محور الفواصل، $1cm$ لكل 0.5% على محور التراتيب).

2) عين إحداثيي النقطة المتوسطة G لسحابة النقط، ثم علمها.

3) أ) بين أن المعادلة المختصرة لـ (Δ) مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا لهذه السلسلة هي: $y = 0.03x + 1.19$ ، ثم أرسمه.

ب) ما هي نسبة البطالة في هذا البلد سنة 2009 ؟.

جـ) إبتداءا من اي سنة تصبح نسبة المتوقعة للبطالة أكبر من 3% ؟.

التمرين الثالث: بكالوريا 2009 الموضوع الثاني.

يمثل الجدول التالي عدد الزوار (بالآلاف) لأحد الحمامات المعدنية بين سنتي 2000 و 2007.

السنة	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
عدد الزوار (بالآلاف) y_i	4.5	4.9	5.5	5.2	5.7	6	6.8	7.4

1) مثل سحابة النقط بالسلسة الإحصائية $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد، (على محور الفواصل $2cm$ لكل سنة، على محور التراتيب $1cm$ لكل ألف زائر).

2) عين إحداثيي النقطة المتوسطة G لهذه السلسة، ثم علمها.

3) بين أن المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا لهذه السلسلة تكتب على الشكل: $y = 0.38x + 4$.

4) بإستعمال التعديل الخطي السابق عين عدد زوار هذا الحمام في سنة 2009 ؟.

التمرين الرابع: بكالوريا 2010 الموضوع الأول.

يمثل الجدول التالي ضغط الدم y_i بدلالة السن x_i لعينة من الرجال.

السن x_i	35	40	45	50	55	60	65
ضغط الدم y_i	12.2	12.4	12.5	13	13.3	13.6	14

1) مثل الجدول بسحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد مبدؤه $O(30;11)$، وبوحدة لكل 5 سنوات على محور الفواصل، و $2cm$ لكل وحدة على محور التراتيب.

2) أ) عين إحداثيي G النقطة المتوسطة لسحابة.

ب) مثل النقطة G في المعلم السابق.

3) أوجد معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا: $y = ax + b$ ، تعطى a و b مدورة إلى 10^{-2}.

4) أرسم هذا المستقيم في المعلم السابق.

5) رجل عمره، 70 سنة وضغط دمه 15.2 ،هل هذا معقول حسب هذا التعديل؟علل.

التمرين الخامس: بكالوريا 2010 الموضوع الثاني.

يمثل الجدول التالي تطور إنتاج سنوي لأحد انواع السمك في إحدى المجمعات المائية لتربية الأسماك.

السنة	2004	2005	2006	2007	2008	2009
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5	6
الإنتاج y_i	530	640	770	850	980	1115

1) مثل سحابة النقط بالسلسلة الإحصائية $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد ، (على محور الفواصل $2cm$ يمثل سنةواحدة ، على محور التراتيب $1cm$ يمثل 100 طن من السمك).

2) عين إحداثيي النقطة المتوسطة G.

3) بين أن معادلة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي: $y = 115x + 411.67$.

4) عين إنتاج هذا المجمع المائي في سنة 2015. (تعطى النتائج مدورة إلى 10^{-2}).

التمرين السادس: بكالوريا 2011 الموضوع الأول.

إليك فيما يل جدول يمثل أجور 5 موظفين في مؤسسة وطنية وذلك حسب أقدميتهم في المهنة:

الأقدمية (بالسنوات) x_i	2	8	15	19	24
الأجرة (بالدنانير) y_i	32400	35400	39600	41400	44700

1) أ) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد ، ($1cm$ لكل سنتين على محور الفواصل و $1cm$ لكل 1000 دينار ، على محور التراتيب ،يبدأ التدرج على هذا المحور ابتداءا من 30000 دينار).

ب) أذكر لماذا يمكننا إجراء تعديل خطي لهذه السحابة.

2) أ) عين إحداثيي النقطة المتوسطة G لهذه السحابة.

ب) لتكن $y = ax + b$ معادلة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا.

* بين أن مدور a إلى 10^{-2} هو $a = 556.356$.
* عين مدور b إلى 10^{-2} بإعتبار $a = 556.356$.

3) أ) بإستعمال التعديل الخطي السابق، قدّر أجرة موظف له 30 سنة أقدمية.

ب) بعد كم سنة من العمل تتجاوز أجرة الموظف 50000 دينارا؟.

التمرين السابع: بكالوريا 2011 الموضوع الثاني.

يمثل الجدول التالي الكميات المنتجة لسلعة شركة من سنة 2006 إلى سنة 2010 .(الكميات مقدرة بالطن)

السنة	2006	2007	2008	2009	2010
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5
كمية الإنتاج y_i	2.6	2.8	3.2	4	4.4

1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد ، ($1cm$ يمثل رتبة واحدة على محور الفواصل و $1cm$ يمثل 0.4 طن على محور التراتيب).

2) عين إحداثيي النقطة المتوسطة G لهذه السحابة، ومثلها في المعلم السابق.

3) أ) جد معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا.

ب) أرسم هذا المستقيم في المعلم السابق.

4) ما هي كمية الإنتاج المتوقعة خلال سنة 2015 ؟.

التمرين الثامن: بكالوريا 2012 الموضوع الأول.

يعطى الجدول أدناه، كميات الحليب مقدرة بالهيكتولتر hL ، التي تم تجميعها في إحدى ولايات الوطن من سنة 2006 إلى سنة 2011.

السنة	2006	2007	2008	2009	2010	2011
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5	6
كمية الحليب المجمعة (بالهكتولتر hL) y_i	25000	26000	28500	29000	31000	334985

1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد ، مبدأه $O'(0;20000)$ وبوحدة $1cm$ لكل سنة على محور الفواصل و $1cm$ لكل $2000.hL$ ، على محور التراتيب.

2) أ) عين إحداثيي النقطة المتوسطة G لهذه السحابة.

ب) عين معادلة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا،(تعطى النتائج كل حساب مدورة إلى 10^{-2}).

3) قدر كمية الحليب التي يمكن تجميعها في سنة 2015 بإستعمال التعديل الخطي السابق.

4) إذا إعتبرنا أن كمية الحليب المجمعة في السنوات الموالية لسنة 2011 تتم بنفس الوتيرة التي تمت بها من سنة 2006 إلى سنة 2011 ، من أية سنة ستتعدى الكمية المجمعة $50000.hL$ ؟.

التمرين التاسع: بكالوريا 2013 الموضوع الأول.

الجدول التالي يعطي تطور النسب المئوية من مزانية إحدى الجامعات،والمخصصة للإنفاق على البحث العلمي بين سنتي 2005 و 2012.

السنة	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
النسبة المئوية $y_i\%$	3.3	3.8	4.5	4.7	5	5.2	5.7	6.2

1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد .

2) عين إحداثيي النقطة المتوسطة G لسحابة، ثم علّمها.

3) بيّن أنّ المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا $y=0.38x+3.09$ ، ثمّ أرسمه.

4) بفرض أنّ تغيّر النسب المئوية يبقى بهذه الوتيرة في السنوات القادمة.

أ) قدّر النسبة المئوية لإنفاق هذه الجامعة على البحث العلمي في سنة 2015.

ب) في أية سنة تصبح النسبة المئوية المتوقّعة لإنفاق على البحث العلمي لهذه الجامعة هي 9.93% ؟.

التمرين العاشر: بكالوريا 2013 الموضوع الثاني.

الجدول التالي يعطي عدد مستعملي الهاتف النقال في مدينة ما من سنة 2006 إلى سنة 2012.

السنة	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5	6	7
عدد المستعملين y_i	21400	32400	48000	75600	121200	207000	280000

1) أ) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد ،(نأخذ على محور الفواصل $1cm$ لكل سنة و على محور التراتيب $1cm$ لكل 20000 مستعمل).

ب) هل يمكن تسوية سحابة النقط بتعديل خطي؟ برّر إجابتك.

2) بوضع: $z_i = \ln y_i$ من أجل $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ ،(تدوّر النتائج إلى 10^{-2}).

أ) أنقل الجدول التالي على ورقة الإجابة، ثمّ أكمله.

رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	...	...	...	...	...	...	...

ب) مثل سحابة النقط $M'(x_i;z_i)$ في معلم متعامد آخر، مبدؤه $O'(0;9)$ بوحدة $1cm$ لكل سنة على محور الفواصل و $5cm$ لكل وحدة على محور التراتيب.

جـ) عين إحداثيي النقطة المتوسطة G السحابة النقط $M'(x_i;z_i)$.

د) بيّن أنّ معادلة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا $(x_i;z_i)$ للسلسلة هي: $z = 0.44x + 9.51$.

3) أ) تحقق أنّ: $y = k.e^{0.44x}$ ، حيث k عدد حقيقي يطلب تعيينه. (تدوّر النتائج إلى الوحدة).

ب) بفرض أنّ مستعملي الهاتف النقال يتزايد بنفس الوتيرة، قدّر عددهم سنة 2014.

التمرين الحادي عشر: بكالوريا 2014 الموضوع الثاني.

الجدوا الآتي يمثل تغير سعر الكيلوغرام الواحد من مادة إستهلاكية بين السنوات 2008 و 2012.

السنة	2008	2009	2010	2011	2012
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5
سعر $1kg$ بالدولار y_i	3.64	3.76	3.81	3.95	4.39

1) أحسب النسبة المئوية لتغير سعر الكيلوغرام الواحد من هذه المادة بين سنتي 2008 و 2012.

2) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد .

3) عين إحداثيي النقطة المتوسطة G لسحابة النقط السابقة.

4) بيّن أنّ المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا $y = 0.17x + 3.40$ (النتائج مدورة إلى 10^{-2}).

5) بفرض أنّ تغيّر سعر الكيلوغرام الواحد من هذه المادة يبقى على نفس الوتيرة في السنوات القادمة.

أ) قدّر سعر الكيلوغرام الواحد من هذه المادة في سنة 2016.

ب) في أية سنة سيصبح سعر الكيلوغرام الواحد من هذه المادة الإستهلاكية 5.61 دولارا؟.

التمرين الثاني عشر: بكالوريا 2015 الموضوع الأول.

يعطى الجدول التالي لإستهلاك y_i (باللتر l لكل $100.km$)من وقود قاطرة منجمية بدلالة سرعتها x_i مقدّرة بـ km/h.

x_i مقدّرة بـ (km/h)	50	60	70	80	90
y_i مقدّرةبـ $(l/100km)$	3.2	3.4	3.8	4.4	5.2

1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد .

2) تعطى معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا لـ y بدلالة x كالآتي: $y=0.05x+0.5$.
بإستعمال هذا التعديل، ما هو تقديرك لإستهلاك هذه القاطرة من الوقود عندما تسير بسرعة $130km/h$ ؟.

3) نبحث في هذا الجزء عن تعديل آخر.

أ) أتمم الجدول التالي:(تدور نتائج الحسابات إلى 10^{-2} عند ملء الجدول).

x_i مقدّرة بـ (km/h)	50	60	70	80	90
y_i مقدّرةبـ $(l/100km)$	3.2	3.4	3.8	4.4	5.2
$y_i=\ln z_i$					

ب) $(\overline{x};\overline{z})$ إحداثيي النقطة المتوسطة للسلسلة الإحصائية $(x_i;z_i)$.

جـ) عيّن معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا لـ z بدلالة x كالآتي: $z=ax+b$.

د) عبّر عن y بدلالة x ، بإستعمال هذا التعديل، ما هو تقديرك لإستهلاك هذه القاطرة من الوقود عندما تسير بسرعة $130km/h$ ؟.

هـ) في الواقع أنّه إبتداءا من السرعة $90km/h$ ، كلما زادت هذه الأخيرة بمقدار $10km/h$ إرتفع إستهلاك القاطرة من الوقود مقدار $0.75l$

من بين التعديلين السابقين، أيهما يعطي أفضل تقدير لإستهلاك القاطرة من الوقود عندما تسير بسرعة $130km/h$ ؟.

التمرين الثالث عشر: بكالوريا 2016 الموضوع الثاني.

الجدول التالي يبيّن كمية الإنتاج السنوي بآلاف الأطنان من البطاطا لتعاونية فلاحية ما بين سنتي 2010 و 2015.

السنة	2010	2011	2012	2013	2014	2015
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5	6
كمية المنتوج بآلاف الأطنان y_i%	25	30	33	42	48	55

1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد ومتجانس حيث على محور الفواصل كل $1cm$ يمثل سنة واحدة وعلى محور التراتيب كل $1cm$ يمثل آلاف 10 طن.

2) أحسب إحداثيات النقطة المتوسطة G لسحابة، ثم علّمها.

3) أ) بيّن أنّ المعادلة من الشكل: $y=ax+b$ لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا.(تدور a و b إلى 10^{-2}).

ب) أنشئ المستقيم (Δ).

4) بإستعمال هذا التعديل:

أ) أحسب كمية إنتاج التعاونية سنة 2020.

ب) في أية سنة يتجاوز الإنتاج 120 ألف طن؟.

التمرين الرابع عشر: بكالوريا 2017 الموضوع الأول.

الجدول التالي يمثل تطور ميزانية الإشهار بالمليون دينار لمؤسسة إقتصادية من سنة 2009 إلى سنة 2016.

السنة	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
الميزانية بالمليون دينار y_i	0.4	0.45	0.5	0.56	0.63	0.68	0.75	0.83

1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد، (نأخذ $1cm$ لكل سنة على محور الفواصل و $1cm$ لكل $100000.DA$ ، على محور التراتيب).

2) جد إحداثيات G النقطة المتوسطة لسحابة النقط، ثمّ علمها.

3) بيّن أنّ معادلة لمستقيم الإنحدار (Δ) بالمربعات الدنيا هي: $y = 0.06x + 0.33$ ،(النتائج تدور إلى 10^{-2}) ثمّ أرسم المستقيم (Δ) في المعلم السابق.

4) أ) بإستعمال التعديل الخطي السابق قدّر الميزانية المتوقعة سنة 2020.

ب) إبتداءا من أي سنة تتجاوز الميزانية $1200000.DA$.

التمرين الخامس عشر: بكالوريا 2017 الموضوع الثاني.

يمثل الجدول التالي نسب النجاح في شهادة البكالوريا لشعبة التسيير والإقتصاد بثانوية في الفترة من سنة 2010 إلى سنة 2014.

السنة	2010	2011	2012	2013	2014
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5
النسبة المئوية y_i	33.1	36.8	41.0	41.1	44.1
$z_i = \ln y_i$					

1) عيّن إحداثيات G النقطة المتوسطة لسحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$.

2) لتكن $y = ax + b$ معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا للسلسة $(x_i;y_i)$.

- بيّن أنّ: $a = 2.63$ ، ثمّ أحسب قيمة b.

3) أ) أكمل السطر الأخير من الجدول أعلاه.(تدور النتائج إلى 10^{-2}).

ب) بيّن أنّ معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا للسلسة $(x_i;z_i)$ هي: $z = 0.07x + 3.46$.

4) من بين التعديلين، ماهو التعديل الذي يعطي أكبر نسبة نجاح في سنة 2017 ؟.

التمرين السادس عشر: بكالوريا 2017 الدورة الإستثنائية الموضوع الأول.

الجدول الآتي يعطي نسبة الأمية في بلد ما، خلال الفترة الممتدة من 1948 إلى سنة 2008.

السنة	1948	1958	1968	1978	1988	1998	2008
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5	6	7
النسبة المئوية y_i	14	92	74.6	60	31	38.4	22

1) أ) أحسب إحداثيات النقطة المتوسطة G. (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

ب) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد،(على محور الفواصل $1cm$ يمثل رتبة واحدة و على محور التراتيب $1cm$ يمثل 10%).

2) بيّن أنّ معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي: $y=-4.53x+65.54$.

3) بإستعمال التعديل الخطي السابق، قدّر نسبة الأمية في سنة 2038 هذا البلد.

4) إبتداءا من أيّ سنة تكون نسبة الأمية في هذا البلد أقل من 5% ؟.

التمرين السابع عشر: بكالوريا 2017 الدورة الإستثنائية الموضوع الثاني.

يمثل الجدول الآتي تطور إنتاج مصنع للإسمنت، خلال الفترة الممتدة من 2010 إلى سنة 2014.

السنة	2010	2011	2012	2013	2014
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5
الإنتاج بالمليون طن y_i	4.8	5	5.5	6.2	7

1) عيّن إحداثيي النقطة المتوسطة G ، ثمّ مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد،($1cm$ يمثل رتبة واحدة على محور الفواصل و $1cm$ يمثل 1 مليون طن على محور التراتيب).

2) لتكن $y=ax+b$ معادلة (Δ) مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا للسلسلة $(x_i;y_i)$.

- بيّن أنّ: $a=0.56$ ، ثمّ أحسب b (تعطى النتيجة مدورة إلى 10^{-2}).

3) من أهداف المصنع الوصول إلى إنتاج يفوق 8.45 مليون طن في سنة 2017.

- هل يمكن تحقيق هذا الهدف بإستعمال التعديل الخطي السابق؟مع التبرير.

4) إبتداءا من أيّ سنة يتعدى إنتاج المصنع 10.17 مليون طن في السنة.

التمرين الثامن عشر: بكالوريا 2018 الموضوع الأول.

يمثل الجدول التالي تطور النسبة المئوية لنتائج البكالوريا في ثانوية ما، من سنة 2011 إلى سنة 2017.

السنة	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5	6	7
النسبة المئوية y_i	44.78	49.79	51.36	56.07	58.84	62.45	75.01

1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد، نأخذ $1cm$ لكل سنة على محور الفواصل و $1cm$ يمثل 5% على محور التراتيب
2) أحسب إحداثيي G ،النقطة المتوسطة لسحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$.
3) لتكن $y=ax+b$ معادلة (Δ) مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا للسلسلة $(x_i;y_i)$.
- بيّن أنّ: $a=4.41$ ، ثمّ أحسب b (تعطى النتيجة مدورة إلى 10^{-2}).
4) بإستعمال التعديل الخطي السابق، إبتداءا من أيّ سنة تتجاوز نسبة النجاح 80% ؟.

التمرين التاسع عشر: بكالوريا 2018 الموضوع الثاني.

يمثل الجدول التالي تطور عدد المتقاعدين من سنة 2009 إلى سنة 2014 في الجزائر.(الديوان الوطني للإحصائيات).

السنة	2009	2010	2011	2012	2013	2014
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5	6
عدد المتقلعدين (بالملايين) y_i	2.17	2.19	2.32	2.48	2.63	2.77

1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد،(نأخذ كوحدة بيانية: $2cm$ لكل سنة على محور الفواصل و $2cm$ لكل مليون متقاعد على محور التراتيب
2) عيّن إحداثيي النقطة المتوسطة G ، ثمّ علّمها.
3) أكتب معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا.
4) نفرض أن تطوّر يبقى على هذه الوتيرة في السنوات الموالية.
أ) قدّر عدد المتقاعدين في الجزائر سنة 2020.
ب) إبتداءا من أيّ سنة يتعدى عدد المتقاعدين في الجزائر 4 ملايين متقاعد.

التمرين العشرون: بكالوريا 2019 الموضوع الأول.

يمثل الجدول التالي الواردات في الجزائر مقدّرة بالمليار دولار من سنة 2009 إلى سنة 2014 في الجزائر.(الديوان الوطني للإحصائيات).

السنة	2009	2010	2011	2012	2013	2014
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5	6
الواردات (بالمليار دولار) y_i	39.29	40.47	47.25	47.49	54.85	58.33

المرجع:(المركز الوطني للإعلام الآلي والإحصاء التابع للجمارك)

1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد،(نأخذ $1cm$ لكل سنة على محور الفواصل و $1cm$ لكل 10 مليار دولار على محور التراتيب
2) جدّ إحداثيي النقطة المتوسطة G ، ثمّ علّمها.
3) بيّن أنّ معادلة (Δ) مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا للسلسلة الإحصائية هي: $y=3.96x+34.09$ ، ثمّ مثل (Δ) (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

4) إعتمادا على التعديل الخطي السابق، إبتداءا من أيّ سنة تفوق الواردات 77 مليار دولار؟.

التمرين الحادي والعشرون: بكالوريا 2019 الموضوع الثاني.

يمثل الجدول التالي تطور الإنتج السنوي(الوحدة: طن)لأحد أحواض الأسماك في حوض مائي لتربية الأسماك.

السنة	2013	2014	2015	2016	2017	2018
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5	6
الإنتاج (بالطن) y_i	490	510	595	630	840	999

1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد،(نأخذ $1cm$ لكل سنة على محور الفواصل و $1cm$ لكل 100 طن على محور التراتيب

2) جدّ إحداثيي النقطة المتوسطة لهذه السحابة G.

3) بيّن أنّ معادلة
مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا للسلسة الإحصائية هي: $y = 102x + 320.33$ ، ثمّ مثله بيانيا (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

4) بإعتبار أنّ كمية الإنتاج تتبع نفس الوتيرة:

أ) ماهي كمية الإنتاج المتوقعة لسنة 2023.

ب) إبتداءا من أيّ سنة تتجاوز كمية الإنتاج 2000 طن؟.



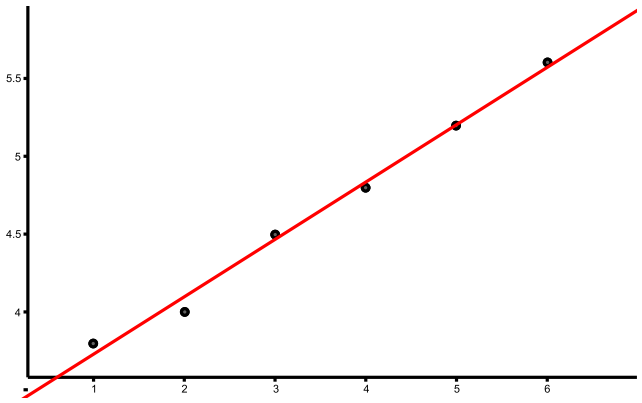
♢
تُرِي كَمْ
قَدْ بَدَتْ مِنْكُمْ
أُمُورٌ مَاعَهِدْنَاهَا وَ
عَرَضْتُمْ بِأَقْوَالٍ وَ مَا نَجْهَل
مَعْنَاهَا نَبَشْتُمْ بَيْنَنَا أَشْيَاءَ كُنَّا قَدْ دَفَنَّاهَا
وَ طَرَقْتُمْ إِلَى الغَدْرِ طَرِيقًا مَاسَلَكْنَاهَا وَ
قَبَحْتُمْ بِأَسْمَاءٍ وَ حَسَنْتُمْ مُسَمَّاهَا وَ
كَمْ جَاءَتْ لَنَا عَنْكُمْ أَحَادِيثُ
رَدَدْنَاهَا وَ أَشْيَاء
رَأَيْنَاهَا وَ قُلْنَا مَا
رَأَيْنَاهَا
♢

نتأمل، نحاول، نطمح، نحلم،
نجتهد لنيل المستحيل، نطمح بكل مافينا،
نحلم بكل ماضينا، نأمل بأن سوف نغير قوانينا،
نحاول رغم الضربات التي تأتينا، ننسى ونكرر
المحاولة مرة مرتان بكل عرق ينبض فينا،
نجتهد بكل طاقتنا لنحصل على ماتريد
خواطرنا وما نريد أن نكون
مادمنا بارين بوالدينا
♡

حلول سلسلة الإحصاء شعبة التسيير و الإقتصاد

حل التمرين الأول: بكالوريا 2008الموضوع الأول.

السنة	2000	2001	2002	2003	2004	2005	المجموع
x_i	1	2	3	4	5	6	21
y_i	3.8	4	4.5	4.8	5.2	5.6	27.9
x_iy_i	3.8	8	13.5	19.2	26	33.6	104.1
$(x_i-\overline{x})^2$	6.25	2.25	0.25	0.25	2.25	6.25	17.5



1) تمثيل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد ومتجانس حيث وحدة الأطوال $2cm$.

2) تعين إحداثيي النقطة المتوسطة G.

$$\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{21}{6}=3.5 \qquad \overline{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{27.9}{6}=4.65$$

3) أ) بيان أن a معامل توجيه مستقيم الإنحدار (D) مدورا إلى هو $a=0.37$.

$$a=\frac{\sum x_i.y_i-n.\overline{x}.\overline{y}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}=\frac{104.1-(6\times3.5\times4.65)}{17.5}=\frac{104.1-97.65}{17.5}=\frac{6.45}{17.5}\approx0.368\approx0.37$$

علما أن G نقطة من (D) ، عين معادلة المختصرة للمستقيم (D).

لدينا معادلة المستقيم $(D):y=ax+b$ و نقطة Gمن (D) و$a=0.37$ ومنه $b=\overline{y}-a\overline{x}=4.65-(0.37\times3.5)=4.65-1.295=3.355\approx3.36$

أي معادلة المستقيم (D) هي $(D):y=0.37x+3.36$.

ب) من أهداف المعمل الوصول إلى إنتاج 7.3 مليون طن في سنة 2009.

– بين بإستعمال التعديل الخطي السابق إذا كان هذا الهدف يمكن ان يتحقق؟.

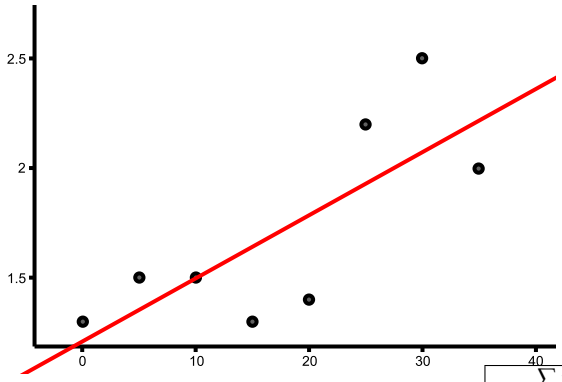
رتبة 2009 تعطى بالعلاقة $n-p+1=x_i$ حيث $n=2009$السنة المطلوبة، $p=2000$السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، x_i رتبة السنة 2009، ومنه: $x_i=2009-2000+1=10$ وبالتعويض في المعادلة المختصرة للمستقيم (D) نجد:

$(D):y=0.37\times10+3.36=3.7+3.36=7.06$.

لدينا: $y=7.06<7.3$ ومنه لايمكن تحقيق هذا الهدف حسب هذا التعديل.

حل التمرين الثاني: بكالوريا 2008 الموضوع الثاني.

السنة	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	المجموع
$x_i=a_i-1970$	0	5	10	15	20	25	30	35	140
y_i	1.3	1.5	1.5	1.3	1.4	2.2	2.5	2	13.7
x_iy_i	0	7.5	15	19.5	28	55	75	70	270
$(x_i-\overline{x})^2$	306.25	156.25	56.25	6.25	6.25	56.25	156.25	306.25	1050



1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد ، ($1cm$ لكل 5 سنوات على محور الفواصل، $1cm$ لكل 0.5% على محور التراتيب).

2) عين إحداثيي النقطة المتوسطة G لسحابة النقط، ثم علمها.

$$\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{140}{8}=17.5 \qquad \overline{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{13.7}{8}=1.71$$

3) أ) بين أن المعادلة المختصرة لـ (Δ) مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا لهذه السلسلة هي: $y=0.03x+1.19$ ، ثم أرسمه.

معادلة المستقيم (Δ) من الشكل $y=ax+b$ حيث:

$$a=\frac{\sum x_i.y_i-n.\overline{x}.\overline{y}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}=\frac{270-(8\times 17.5\times 1.71)}{1050}=\frac{270-239.4}{1050}=\frac{30.6}{1050}\approx 0.029\approx 0.03$$

و نقطة G من (Δ). ومنه $b=\overline{y}-a\overline{x}=1.71-(0.03\times 17.5)=1.71-0.525=1.185\approx 1.19$.

ومنه المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي $y=0.03x+1.19$.

ب) ما هي نسبة البطالة في هذا البلد سنة 2009 ؟.

لدينا $x_i=a_i-1970$ ومنه رتبة 2009 هي $x_i=a_i-1970=2009-1970=39$.

بالتعويض في المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) نجد: $y=0.03\times 39+1.19=1.17+1.19=2.36$.

ومنه نسبة البطالة سنة 2009 هي 2.36%.

جـ) إبتداءا من اي سنة تصبح نسبة المتوقعة للبطالة أكبر من 3% ؟.

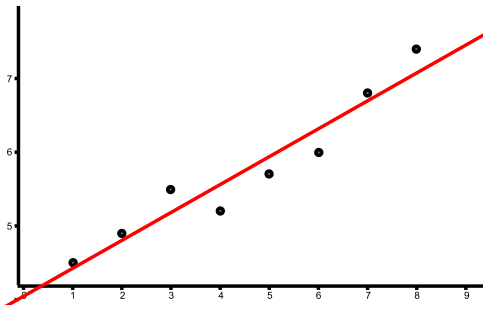
لدينا $y=3$ وبالتعويض في المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) نجد: $0.03x+1.19>3$ أي $0.03x>3-1.19$ ومنه $x>\frac{1.81}{0.03}\approx 60.33$.

أي $x=61$ بالتعويض في قانون الرتبة المعطى $x_i=a_i-1970$ نجد: $61=a_i-1970$ أي $a_i=1970+61=2031$.

إبتداءا من سنة 2031 تصبح نسبة المتوقعة للبطالة أكبر من 3%.

حل التمرين الثالث: بكالوريا 2009 الموضوع الثاني.

السنة	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	المجموع
x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	36
y_i	4.5	4.9	5.5	5.2	5.7	6	6.8	7.4	46
x_iy_i	4.5	9.8	16.5	20.8	28.5	36	47.6	59.2	222.9
$(x_i-\overline{x})^2$	12.25	6.25	2.25	0.25	0.25	2.25	6.25	12.25	42



1) مثل سحابة النقط بالسلسة الإحصائية $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد، (على محور الفواصل $2cm$ لكل سنة، على محور التراتيب $1cm$ لكل ألف زائر).

2) عين إحداثيي النقطة المتوسطة G لهذه السلسة، ثم علمها.

$$\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{36}{8}=4.5 \qquad \overline{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{46}{8}=5.75$$

3) بين أن المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا لهذه السلسلة تكتب على الشكل: $y=0.38x+4$.

معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا من الشكل $y=ax+b$ حيث:

$$a=\frac{\sum x_i.y_i-n.\overline{x}.\overline{y}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}=\frac{223.2-(8\times 4.5\times 5.75)}{42}=\frac{223-207}{42}=\frac{16}{42}\approx 0.38095\approx 0.38$$

و نقطة G من المستقيم. ومنه $b=\overline{y}-a\overline{x}=5.75-(0.38\times 4.5)=5.75-1.71=4.04\approx 4$.

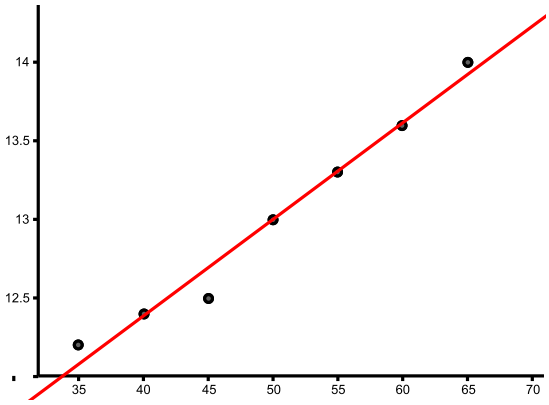
ومنه المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي $y=0.38x+4$.

4)بإستعمال التعديل الخطي السابق عين عدد زوار هذا الحمام في سنة 2010؟.

رتبة 2010 تعطى بالعلاقة $x_i = n - p + 1$ حيث $n = 2010$ السنة المطلوبة، $p = 2000$ السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، x_i رتبة السنة 2009، ومنه: $x_i = 2010 - 2000 + 1 = 11$ وبالتعويض في المعادلة المختصرة للمستقيم (D) نجد: $(D) : y = 0.38 \times 11 + 4 = 3.8 + 4 = 8.18$.
عدد زوار هذا الحمام في سنة 2010 حسب هذا التعديل هو 8.18 ألف زائر.

حل التمرين الرابع: بكالوريا 2010 الموضوع الأول.

								المجموع
x_i	35	40	45	50	55	60	65	350
y_i	12.2	12.4	12.5	13	13.3	13.6	14	91
$x_i y_i$	427	496	562.5	650	731.5	816	910	4593
$(x_i - \overline{x})^2$	225	100	25	0	25	100	225	700



1) مثل الجدول بسحابة النقط $M_i(x_i; y_i)$ في معلم متعامد مبدؤه $O(30; 11)$ وبوحدة لكل 5 سنوات على محور الفواصل، و $2cm$ لكل وحدة على محور التراتيب.

2) أ) عين إحداثيي G النقطة المتوسطة لسحابة.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{350}{7} = 50 \qquad \overline{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{91}{7} = 13$$

ب) مثل النقطة G في المعلم السابق.

3) أوجد معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا : $y = ax + b$ ، تعطى a و b مدورة إلى 10^{-2}.

معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا من الشكل $y = ax + b$ حيث:

$$a = \frac{\sum x_i.y_i - n.\overline{x}.\overline{y}}{\sum (x_i - \overline{x})^2} = \frac{4575 - (7 \times 50 \times 13)}{700} = \frac{4593 - 4550}{700} = \frac{43}{700} \approx 0.061 \approx 0.06$$

و نقطة G من المستقيم ومنه $b = \overline{y} - a\overline{x} = 13 - (0.06 \times 50) = 13 - 3 = 10$.
ومنه المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي $y = 0.06x + 10$.

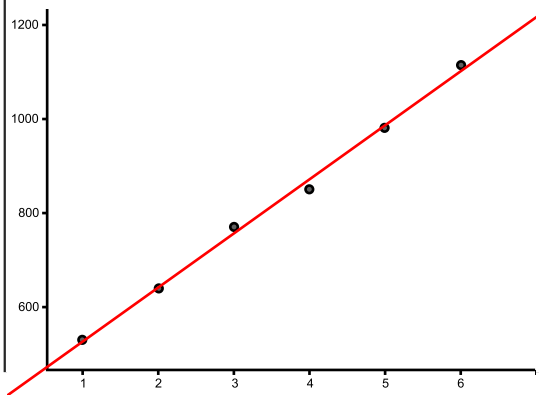
4) أرسم هذا المستقيم في المعلم السابق.

5) رجل عمره، 70 سنة وضغط دمه 15.2 ،هل هذا معقول حسب هذا التعديل؟علل.

لدينا معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي $y = 0.06x + 10$ و رجل عمره $x = 70$ بالتعويض في معادلة المستقيم نجد: $y =$
$0.06 \times 70 + 10 = 4.2 + 10 = 14.2 \neq 15.2$ ومنه غير معقول حسب هذا التعديل أن يكون ضغط دمه 15.2.

حل التمرين الخامس: بكالوريا 2010 الموضوع الثاني.

السنة	2004	2005	2006	2007	2008	2009	المجموع
x_i	1	2	3	4	5	6	21
y_i	530	640	770	850	980	1115	4885
$x_i y_i$	530	1280	2310	3400	4900	6690	19110
$(x_i - \overline{x})^2$	6.25	2.25	0.25	0.25	2.25	6.25	17.5



1) مثل سحابة النقط بالسلسلة الإحصائية $M_i(x_i; y_i)$ في معلم متعامد ، (على محور الفواصل $2cm$ يمثل سنةواحدة ، على محور التراتيب $1cm$ يمثل 100طن من السمك).

2) عين إحداثيي النقطة المتوسطة G.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{21}{6} = 3.5 \qquad \overline{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4885}{6} = 814.166 \approx 814.17$$

3) بين أن معادلة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي: $y = 115x + 411.67$.

معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا من الشكل $y = ax + b$ حيث:

$$a = \frac{\sum x_i.y_i - n.\overline{x}.\overline{y}}{\sum (x_i - \overline{x})^2} = \frac{19110 - (6 \times 3.5 \times 814.17)}{17.5} = \frac{19110 - 17079.57}{17.5} = \frac{2012.43}{17.5} \approx 114.996 \approx 115$$

و نقطة G من المستقيم ومنه $b = \overline{y} - a\overline{x} = 814.17 - (115 \times 3.5) = 814.17 - 402.5 = 411.67$.

ومنه المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي $y = 115x + 411.67$.

4) عين إنتاج هذا المجمع المائي في سنة 2015. (تعطى النتائج مدورة إلى 10^{-2}).

رتبة 2015 تعطى بالعلاقة $x_i = n - p + 1$ حيث $n = 2015$ السنة المطلوبة، $p = 2004$ السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، x_i رتبة السنة 2015، ومنه: $x_i = 2015 - 2004 + 1 = 12$ وبالتعويض في المعادلة المختصرة للمستقيم (D) نجد: $(D) : y = 115 \times 12 + 411.46 =$

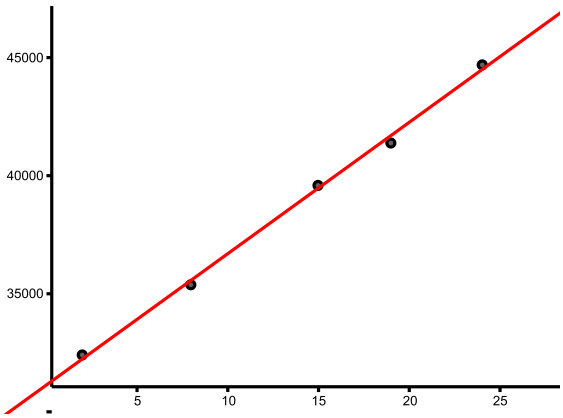
$1380 + 411.67 = 1791.67$.

إنتاج هذا المجمع المائي في سنة 2015 هو 1791.67 .

حل التمرين السادس: بكالوريا 2011 الموضوع الأول.

						المجموع
x_i	2	8	15	19	24	68
y_i	32400	35400	39600	41400	44700	193500
$x_i y_i$	64800	283200	594000	786600	1072800	2801400
$(x_i - \overline{x})^2$	134.56	31.36	1.96	29.16	108.16	305.2

1) 1) أ) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد ، ($1cm$ لكل سنتين على محور الفواصل و $1cm$ لكل 1000 دينار ، على محور التراتيب ،يبدأ التدرج على هذا المحور ابتداءا من 30000 دينار).



ب) أذكر لماذا يمكننا إجراء تعديل خطي لهذه السحابة.

يمكن القيام بتسوية خطية أو تعديل خطي لأن سحابة النقط $M(x_i;y_i)$ موزعة توزيع بشكل متطاول.

2) أ) عين إحداثيي النقطة المتوسطة G لهذه السحابة. $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{68}{5} = 13.6 \quad \overline{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{193500}{5} = 38700$

ب) لتكن $y = ax + b$ معادلة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا.

* بين أن مدور a إلى 10^{-2} هو $a = 556.356$.

معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا من الشكل $y = ax + b$ حيث:

$$a = \frac{\sum x_i.y_i - n.\overline{x}.\overline{y}}{\sum (x_i - \overline{x})^2} = \frac{2801400 - (5 \times 13.6 \times 38700)}{305.2} = \frac{2801400 - 2631600}{305.2} = \frac{169800}{305.2} \approx 556.3564 \approx 556.356$$

* عين مدور b إلى 10^{-2} بإعتبار $a = 556.356$.

نقطة G من مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا ومنه $b = \overline{y} - a\overline{x} = 38700 - (556.356 \times 13.6) = 38700 - 7566.442 = 31133.558$.

ومنه المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي $y = 556.356x + 31133.558$.

3) أ) بإستعمال التعديل الخطي السابق، قدّر أجرة موظف له 30 سنة أقدمية.

بالتعويض $x = 30$ في معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا نجد: $y = 556.356 \times 30 + 31133.558 = 16690.68 + 31133.558 = 47824.238$.

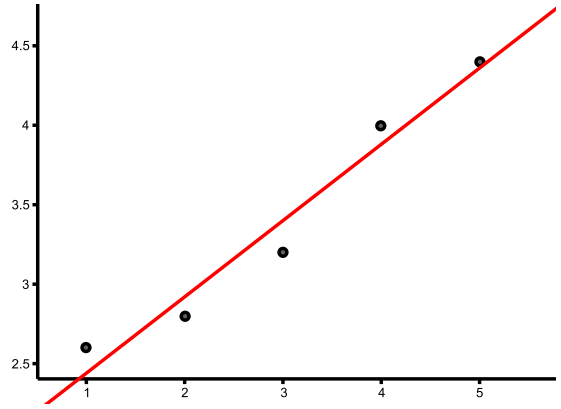
ب) بعد كم سنة من العمل تتجاوز أجرة الموظف 50000 دينار؟.

بالتعويض $y = 50000$ في معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا نجد: $556.356x + 31133.558 = 50000$ أي $556.356x = 50000 - 31133.558$

وبالتالي $556.356x = 18866.442$ ومنه $x = \frac{18866.442}{556.356} \approx 33.91 \approx 34$
ومنه بعد 34 سنة من العمل تتجاوز أجرة الموظف 50000 دينارا

حل التمرين السابع: بكالوريا 2011 الموضوع الثاني.

السنة	2006	2007	2008	2009	2010	المجموع
x_i	1	2	3	4	5	15
y_i	2.6	2.8	3.2	4	4.4	17
$x_i y_i$	2.6	5.6	9.6	16	22	55.8
$(x_i - \overline{x})^2$	4	1	0	1	4	10



1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i; y_i)$ في معلم متعامد ، ($1cm$ يمثل رتبة واحدة على محور الفواصل و $1cm$ يمثل 0.4 طن على محور التراتيب).

2) عين إحداثيي النقطة المتوسطة G لهذه السحابة، ومثلها في المعلم السابق.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{15}{5} = 3 \qquad \overline{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{17}{5} = 3.4$$

3) أ) جد معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا.

معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا من الشكل $y = ax + b$ حيث:

$$a = \frac{\sum x_i.y_i - n.\overline{x}.\overline{y}}{\sum (x_i - \overline{x})^2} = \frac{55.8 - (5 \times 3 \times 3.4)}{10} = \frac{55.8 - 51}{10} = \frac{4.8}{10} \approx 0.48$$

و نقطة G من المستقيم ومنه $b = \overline{y} - a\overline{x} = 3.4 - (0.48 \times 3) = 3.4 - 1.44 = 1.96$.

ومنه المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي $y = 0.48x + 1.96$.

ب) أرسم هذا المستقيم في المعلم السابق.

4)ما هي كمية الإنتاج المتوقعة خلال سنة 2015 ؟.

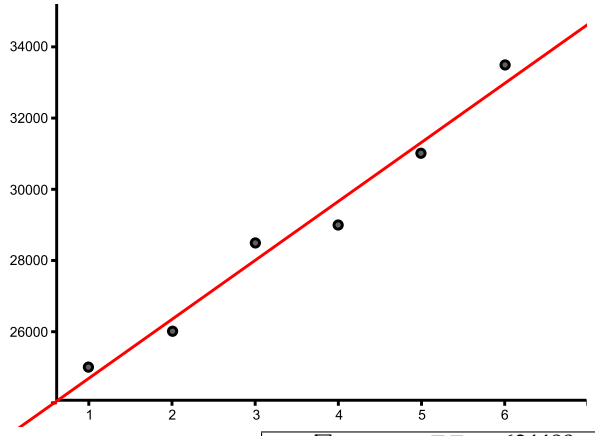
رتبة 2015 تعطى بالعلاقة $x_i = n - p + 1$ حيث $n = 2015$السنة المطلوبة، $p = 2006$السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، x_i رتبة السنة 2015، ومنه: $x_i = 2015 - 2006 + 1 = 10$ وبالتعويض في المعادلة المختصرة للمستقيم (D) نجد:

$(D) : y = 0.48 \times 10 + 1.96 = 4.8 + 1.96 = 6.76$.

كمية الإنتاج المتوقعة خلال سنة 2015 هي 6.76 طن.

حل التمرين الثامن: بكالوريا 2012 الموضوع الأول.

السنة	2006	2007	2008	2009	2010	2011	المجموع
x_i	1	2	3	4	5	6	21
y_i	25000	26000	28500	29000	31000	33498	172998
$x_i y_i$	25000	52000	85500	116000	155000	200988	634488
$(x_i - \overline{x})^2$	6.25	2.25	0.25	0.25	2.25	6.25	17.5



1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد ، مبدأه $O'(0;20000)$ وبوحدة $1cm$ لكل سنة على محور الفواصل و $1cm$ لكل $2000.hL$ ، على محور التراتيب.

2) أ) عين إحداثيي النقطة المتوسطة G لهذه السحابة.

$$\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{21}{6}=3.5 \quad \overline{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{172998}{6}\approx 28833$$

ب) عين معادلة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا،(تعطى النتائج كل حساب مدورة إلى 10^{-2}).

معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا من الشكل $y=ax+b$ حيث:

$$a=\frac{\sum x_i.y_i-n.\overline{x}.\overline{y}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}=\frac{634488-(6\times 3.5\times 28833)}{17.5}=\frac{634488-605493}{17.5}=\frac{28995}{17.5}\approx 1656.857\approx 1656.86$$

و نقطة G من المستقيم ومنه $b=\overline{y}-a\overline{x}=28833-(1656.86\times 3.5)=328833-5799.01=23033.99\approx 23034$.

ومنه المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي $y=1656.86x+23034$.

3) قدر كمية الحليب التي يمكن تجميعها في سنة 2015 بإستعمال التعديل الخطي السابق.

رتبة 2015 تعطى بالعلاقة $x_i=n-p+1$ حيث $n=2015$ السنة المطلوبة، $p=2006$ السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، x_i رتبة السنة 2015، ومنه: $x_i=2015-2006+1=10$ وبالتعويض في المعادلة المختصرة للمستقيم (D) نجد: $(D):y=1656.86\times 10+23034=16568.6+23034=39602.6$.

كمية الحليب التي يمكن تجميعها في سنة 2015 هي $39602.6hL$.

4) إذا إعتبرنا أن كمية الحليب المجمعة في السنوات الموالية لسنة 2011 تتم بنفس الوتيرة التي تمت بها من سنة 2006 إلى سنة 2011 ، من أية سنة ستتعدى الكمية المجمعة $50000.hL$ ؟.

ستتعدى الكمية المجمعة $50000.hL$ معناه $y>50000$ أي $1656.86x+23034>50000$ أي $1656.86x>50000-23034$ ومنه $1656.86x>26966$ أي $x>\frac{26966}{1656.86}\approx 16.275$ ومنه رتبة السنة هي $x=17$

وبالتعويض في قانون الرتبة نجد: $x_i=n-p+1$ حيث $n=$? السنة المطلوبة، $p=2006$ السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، $x_i=17$ رتبة السنة n، $n=x_i+p-1=17+2006-1=2022$.

في سنة 2022 ستتعدى الكمية المجمعة $50000hL$.

حل التمرين التاسع: بكالوريا 2013 الموضوع الأول.

السنة	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	المجموع
x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	36
$y_i\%$	3.3	3.8	4.5	4.7	5	5.2	5.7	6.2	38.4
x_iy_i	3.3	7.6	13.5	18.8	25	31.2	39.9	49.6	188.9
$(x_i-\overline{x})^2$	12.25	6.25	2.25	0.25	0.25	2.25	6.25	12.25	42

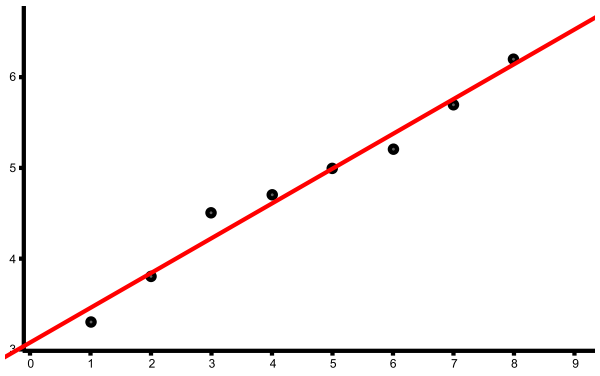
1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد .

2) عين إحداثيي النقطة المتوسطة G لسحابة، ثم علّمها.

$$\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{36}{8}=4.5 \quad \overline{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{38.4}{8}=4.8$$

3) بيّن أنّ المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا $y=0.38x+3.09$ ، ثمّ أرسمه.

$$a=\frac{\sum x_i.y_i-n.\overline{x}.\overline{y}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}=\frac{188.9-(8\times 4.5\times 4.8)}{42}=\frac{188.9-172.8}{42}=\frac{16.1}{42}\approx 1656.857\approx 0.383\approx 0.38$$



معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا من الشكل $y = ax + b$ حيث:
و نقطة G من المستقيم
ومنه $b = \overline{y} - a\overline{x} = 4.8 - (0.38 \times 4.5) = 4.8 - 1.71 = 3.09$.
ومنه المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي $y = 0.38x + 3.09$.

4) بفرض أنّ تغيّر النسب المئوية يبقى بهذه الوتيرة في السنوات القادمة.

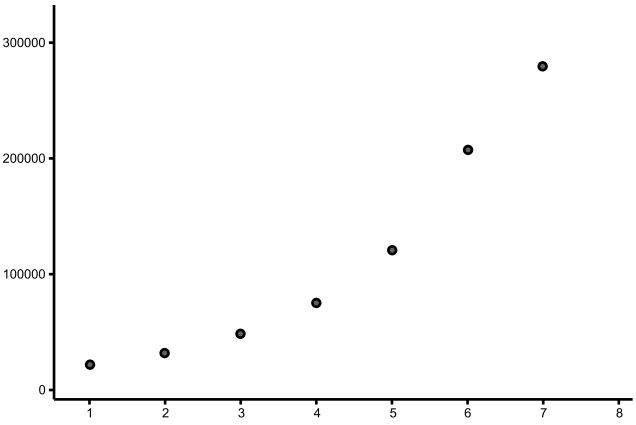
أ) قدّر النسبة المئوية لإنفاق هذه الجامعة على البحث العلمي في سنة 2015.

رتبة 2015 تعطى بالعلاقة $x_i = n - p + 1$ حيث $n = 2015$ السنة المطلوبة، $p = 2005$ السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، x_i رتبة السنة 2015، ومنه:
$x_i = 2015 - 2005 + 1 = 11$ وبالتعويض في المعادلة المختصرة للمستقيم نجد: $(D) : y = 0.38 \times 11 + 3.09 = 4.18 + 3.09 = 7.27$.
النسبة المئوية لإنفاق هذه الجامعة على البحث العلمي في سنة 2015 هي27%.

ب) في أية سنة تصبح النسبة المئوية المتوقّعة لإنفاق على البحث العلمي لهذه الجامعة هي 9.93% ؟.

بالتعويض $y = 9.93$ في معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا نجد: $0.38x + 3.09 = 9.93$ أي $0.38x = 9.93 - 3.09$ وبالتالي $0.38x = 6.84$
ومنه $x = \frac{6.84}{0.38} \approx 18$ ومنه رتبة السنة هي $x = 18$
وبالتعويض في قانون الرتبة نجد: $x_i = n - p + 1$ حيث $n = ?$ السنة المطلوبة، $p = 2005$ السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، $x_i = 18$
رتبة السنة n، $n = x_i + p - 1 = 18 + 2005 - 1 = 2023$.
في سنة 2023 صبح النسبة المئوية المتوقّعة لإنفاق على البحث العلمي لهذه الجامعة هي 9.93%.

حل التمرين العاشر: بكالوريا 2013 الموضوع الثاني .



1) أ) مثل سحابة النقط $M_i(x_i; y_i)$ في معلم متعامد ،(نأخذ على محور الفواصل $1cm$ لكل سنة و على محور التراتيب $1cm$ لكل20000 مستعمل).

ب) هل يمكن تسوية سحابة النقط بتعديل خطي؟ برّر إجابتك.

لايمكن القيام تسوية سحابة النقط بتعديل خطي لأن السحابة ليس لها شكل متطاول.

2) بوضع: $z_i = \ln y_i$ من أجل $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ ،(تدوّر النتائج إلى 10^{-2}).

أ) أنقل الجدول التالي على ورقة الإجابة، ثمّ أكمله.

								المجموع
x_i	1	2	3	4	5	6	7	28
y_i	21400	32400	48000	75600	121200	207000	280000	785600
$z_i = \ln y_i$	≈ 9.97	≈ 10.39	≈ 10.78	≈ 11.23	≈ 11.71	≈ 12.24	≈ 12.54	78.86
$x_i z_i$	9.97	20.78	32.34	44.92	58.55	73.44	87.78	327.78
$(x_i - \overline{x})^2$	9	4	1	0	1	4	9	28

ب) مثل سحابة النقط $M'(x_i; z_i)$ في معلم متعامد آخر، مبدؤه $O'(0;9)$ بوحدة$1cm$ لكل سنة على محور الفواصل و $5cm$ لكل وحدة على محور التراتيب.

ج) عين إحداثيي النقطة المتوسطة G السحابة النقط $M'(x_i;z_i)$.

$$\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{28}{7}=4 \quad \overline{z}=\frac{\sum z_i}{n}=\frac{78.86}{7}\approx 11.267\approx 11.27$$

د) بيّن أنّ معادلة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا $(x_i;z_i)$ للسلسلة هي:

$z=0.44x+9.51$.

معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا من الشكل $z=ax+b$ حيث:

$$a=\frac{\sum x_i.z_i-n.\overline{x}.\overline{z}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}=\frac{327.78-(8\times 4\times 11.27)}{28}=\frac{327.78-315.56}{28}$$
$$=\frac{12.22}{28}\approx 0.436\approx 0.44$$

و نقطة G من المستقيم

ومنه $b=\overline{z}-a\overline{x}=11.27-(0.44\times 4)=11.27-1.76=9.51$.

ومنه المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي $z=0.44x+9.51$.

3) أ) تحقق أنّ: $y=k.e^{0.44x}$ ، حيث kعدد حقيقي يطلب تعيينه (تدوّر النتائج إلى الوحدة).

لدينا $\ln y=z$ ومنه $y=e^z=e^{0.44x+9.51}=e^{0.44x}\times e^{9.51}=13493.99\times e^{0.44x}=13494\times e^{0.44x}$

ومنه تكتب على الشكل $y=k.e^{0.44x}$ حيث $k=13494$.

ب) بفرض أنّ مستعملي الهاتف النقال يتزايد بنفس الوتيرة، قدّر عددهم سنة 2014.

رتبة 2014 تعطى بالعلاقة $x_i=n-p+1$ حيث $n=2014$السنة المطلوبة، $p=2006$السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، x_i رتبة السنة 2014، ومنه: $x_i=2014-2006+1=9$ وبالتعويض في المعادلة المختصرة للمستقيم نجد:

$y=13494\times e^{0.44\times 9}=13494\times e^{3.96}=13494\times 52.457\approx 707859.156$.

عدد مستعملي الهاتف النقال سنة 2014 هو 707859.

حل التمرين الحادي عشر: بكالوريا 2014 الموضوع الثاني.

السنة	2008	2009	2010	2011	2012	المجموع
x_i	1	2	3	4	5	15
y_i	3.64	3.76	3.81	3.95	4.39	19.55
x_iy_i	3.64	7.52	11.43	15.8	21.95	60.34
$(x_i-\overline{x})^2$	4	1	0	1	4	10

1) أحسب النسبة المئوية لتغير سعر الكيلوغرام الواحد من هذه المادة بين سنتي 2008 و 2012.

$$\frac{x_{2012}-x_{2008}}{x_{2008}}\times 100=\frac{4.39-3.64}{3.64}\times 100=\frac{0.75}{3.64}\times 100$$
$$=0.2060\times 100=20.60\%$$

2) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد .

3) عين إحداثيي النقطة المتوسطة G لسحابة النقط السابقة.

$$\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{15}{5}=3 \quad \overline{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{19.55}{5}=3.91$$

4) بيّن أنّ المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا $y=0.17x+3.40$ (النتائج مدورة إلى 10^{-2}).

معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا من الشكل $y=ax+b$ حيث:

$$a=\frac{\sum x_i.y_i-n.\overline{x}.\overline{y}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}=\frac{60.34-(5\times3\times3.91)}{10}=\frac{60.34-58.65}{10}=\frac{1.69}{10}\approx0.169\approx0.383\approx0.17$$

و نقطة G من المستقيم ومنه $b=\overline{y}-a\overline{x}=3.91-(0.17\times3)=3.91-0.51=3.4$.

ومنه المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي $y=0.17x+3.4$.

5) بفرض أنّ تغيّر سعر الكيلوغرام الواحد من هذه المادة يبقى على نفس الوتيرة في السنوات القادمة.

أ) قدّر سعر الكيلوغرام الواحد من هذه المادة في سنة 2016.

رتبة 2016 تعطى بالعلاقة $n-p+1=x_i$ حيث $n=2016$السنة المطلوبة، $p=2008$السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، x_i رتبة السنة 2016، ومنه:$x_i=2016-2008+1=9$ وبالتعويض في المعادلة المختصرة للمستقيم نجد: $(D):y=0.17\times9+3.4=1.53+3.4=4.93$.

سعر الكيلوغرام الواحد من هذه المادة في سنة 2016 هو4.93 دولارا.

ب) في أية سنة سيصبح سعر الكيلوغرام الواحد من هذه المادة الإستهلاكية 5.61 دولارا؟.

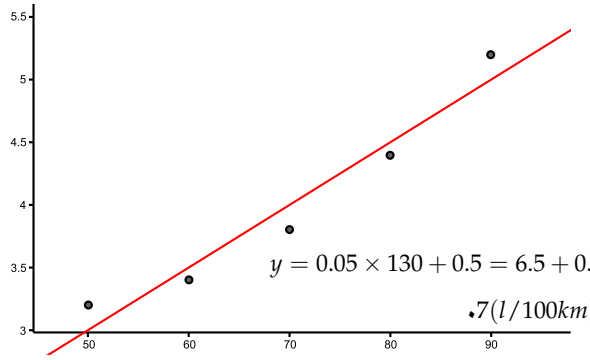
بالتعويض $y=5.61$ في معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا نجد: $0.17x+3.4=5.61$ أي $0.17x=5.61-3.4$ وبالتالي $0.17x=2.21$

ومنه $x=\frac{2.21}{0.17}=13$ ومنه رتبة السنة هي $x=13$

وبالتعويض في قانون الرتبة نجد: $n-p+1=x_i$ حيث $n=$? السنة المطلوبة، $p=2008$السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، $x_i=13$ رتبة السنة n، $n=x_i+p-1=13+2008-1=2020$.

في سنة 2023 سيصبح سعر الكيلوغرام الواحد من هذه المادة الإستهلاكية 5.61 دولارا.

حل التمرين الثاني عشر: بكالوريا 2015 الموضوع الأول.



1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد .

2) تعطى معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا لـ y بدلالة x كالآتي:

$y=0.05x+0.5$.

بإستعمال هذا التعديل، ما هو تقديرك لإستهلاك هذه القاطرة من الوقود عندما تسير بسرعة $130km/h$ ؟.

بالتعويض $x=130$ في معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا نجد: $y=0.05\times130+0.5=6.5+0.5=7$

تقديرك لإستهلاك هذه القاطرة من الوقود عندما تسير بسرعة $130km/h$ هو$7(l/100km)$.

3) نبحث في هذا الجزء عن تعديل آخر.

أ) أتمم الجدول التالي:(تدور نتائج الحسابات إلى 10^{-2} عند ملء الجدول).

						المجموع
x_i	50	60	70	80	90	350
y_i	3.2	3.4	3.8	4.4	5.2	20
$y_i=\ln z_i$	$\ln3.2\approx1.16$	$\ln3.4\approx1.22$	$\ln3.8\approx1.34$	$\ln4.4\approx1.48$	$\ln5.2\approx1.65$	6.85
x_iz_i	58	73.2	93.8	118.4	148.5	491.9
$(x_i-\overline{x})^2$	400	100	0	100	400	1000

ب) عيّن $(\overline{x};\overline{z})$ إحداثيي النقطة المتوسطة للسلسلة الإحصائية $(x_i;z_i)$.

$$\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{350}{5}=70\qquad \overline{z}=\frac{\sum z_i}{n}=\frac{6.85}{5}=1.37$$

جـ) عيّن معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا لـ z بدلالة x كالآتي: $z=ax+b$.

معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا من الشكل $z = ax + b$ حيث:

$$a = \frac{\sum x_i.z_i - n.\overline{x}.\overline{z}}{\sum(x_i - \overline{x})^2} = \frac{491.9 - (5 \times 70 \times 1.37)}{1000} = \frac{491.9 - 479.5}{1000} = \frac{12.4}{1000} = 0.0124$$

و نقطة G من المستقيم ومنه $b = \overline{z} - a\overline{x} = 1.37 - (0.0124 \times 70) = 1.37 - 0.868 = 0.502$.

ومنه المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي $z = 0.0124x + 0.502$.

د) عبّر عن y بدلالة x ، بإستعمال هذا التعديل، ما هو تقديرك لإستهلاك هذه القاطرة من الوقود عندما تسير بسرعة $130km/h$ ؟.

بالتعويض $x = 130$ في معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنياالثاني نجد: $z = 0.0124 \times 130 + 0.502 = 1.612 + 0.502 = 2.114$ ولدينا $z = \ln y$ أي $y = e^z$ ومنه $y = e^{2.114} \approx 8.281 \approx 8.28$

تقديرك لإستهلاك هذه القاطرة من الوقود عندما تسير بسرعة $130km/h$ هو$8.28(l/100km)$.

هـ) في الواقع أنّه إبتداءا من السرعة $90km/h$ ، كلما زادت هذه الأخيرة بمقدار $10km/h$ إرتفع إستهلاك القاطرة من الوقود مقدار $0.75l$

من بين التعديلين السابقين، أيهما يعطي أفضل تقدير لإستهلاك القاطرة من الوقود عندما تسير بسرعة$130km/h$ ؟.

إستهلاك الوقودعند السرعة $90km/h$ هو $5.2l$. ولدينا $130 - 90 = 40$ زادت إستهلاك القاطرة من الوقود مقدار $0.75l$على كل $10km/h$.

أي $0.75 \times 4 = 3l$ ومنه إستهلاك القاطرة من الوقود عندما تسير بسرعة$130km/h$هو $5.2 + 3 = 8.2l$.

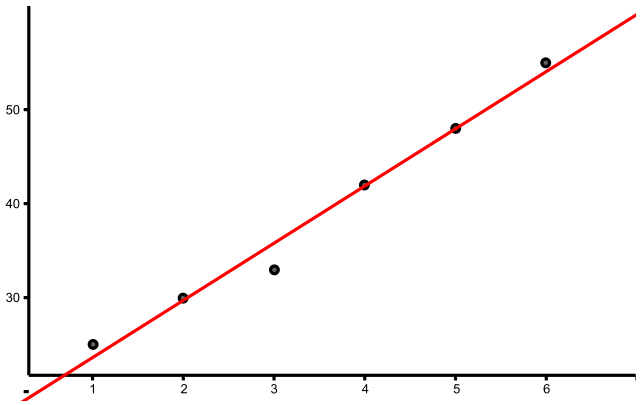
التعديل الاول تقديرك لإستهلاك هذه القاطرة من الوقود عندما تسير بسرعة $130km/h$ هو $8.28 \neq 7(l/100km)$.

التعديل الثاني (اللوغايتي) تقديرك لإستهلاك هذه القاطرة من الوقود عندما تسير بسرعة $130km/h$ هو $8.28 \approx 8.2(l/100km)$.

ومنه التعديل اللوغاريتمي يعطي أفضل تقدير لإستهلاك القاطرة من الوقود عندما تسير بسرعة$130km/h$.

حل التمرين الثالث عشر: بكالوريا 2016 الموضوع الثاني.

السنة	2010	2011	2012	2013	2014	2015	المجموع
x_i	1	2	3	4	5	6	21
y_i	25	30	33	42	48	55	233
x_iy_i	25	60	99	168	240	330	922
$(x_i - \overline{x})^2$	6.25	2.25	0.25	0.25	2.25	6.25	17.5



1) **مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد ومتجانس حيث على محور الفواصل كل $1cm$ يمثل سنة واحدة وعلى محور التراتيب كل $1cm$ يمثل آلاف 10 طن.**

2) **أحسب إحداثيات النقطة المتوسطة G لسحابة، ثم علّمها.**

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{21}{6} = 3.5 \quad \overline{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{233}{6} \approx 38.833 \approx 38.83$$

أ) بيّن أنّ المعادلة من الشكل: $y = ax + b$ لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا.(تدور a و b إلى 10^{-2}).

معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا من الشكل $y = ax + b$ حيث:

$$a = \frac{\sum x_i.y_i - n.\overline{x}.\overline{y}}{\sum(x_i - \overline{x})^2} = \frac{922 - (6 \times 3.5 \times 38.83)}{17.5} = \frac{922 - 815.43}{17.5} = \frac{106.57}{17.5} \approx 6.089 \approx 0.383 \approx 6.09$$

و نقطة G من المستقيم. ومنه $b = \overline{y} - a\overline{x} = 38.83 - (6.09 \times 3.5) = 38.83 - 21.32 = 17.52$.

ومنه المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي $y = 6.09x + 17.52$.

ب) أنشئ المستقيم (Δ).

4) **بإستعمال هذا التعديل:**

أ) أحسب كمية إنتاج التعاونية سنة 2020.

رتبة 2020 تعطى بالعلاقة $x_i = n - p + 1$ حيث $n = 2020$السنة المطلوبة، $p = 2010$السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، x_i رتبة السنة 2020، ومنه:$x_i = 2020 - 2010 + 1 = 11$ وبالتعويض في المعادلة المختصرة للمستقيم نجد:

$y = 6.09 \times 11 + 17.52 = 66.99 + 17.52 = 84.51$.

كمية إنتاج التعاونية سنة 2020هو84.51 ألف طن.

ب) في أية سنة يتجاوز الإنتاج 120 ألف طن؟.

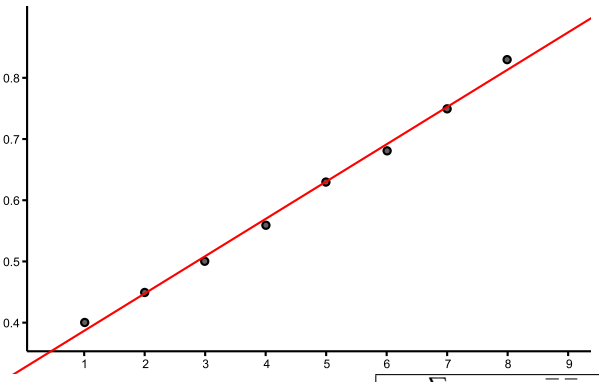
يتجاوز الإنتاج 120 معناه $y > 120$ أي $6.09x + 17.52 > 120$ أي $6.09x > 120 - 17.52$ ومنه $6.09x > 102.48$ أي $x > \frac{102.48}{6.09} \approx 16.82$ ومنه رتبة السنة هي $x = 17$

وبالتعويض في قانون الرتبة نجد: $x_i = n - p + 1$ حيث $n =$? السنة المطلوبة، $p = 2010$السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، $x_i = 17$ رتبة السنة n، $n = x_i + p - 1 = 17 + 2010 - 1 = 2026$.

في سنة2026 يتجاوز الإنتاج 120 ألف طن.

حل التمرين الرابع عشر: بكالوريا 2017 الموضوع الأول.

السنة	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	المجموع
x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	36
y_i	0.4	0.45	0.5	0.56	0.63	0.68	0.75	0.83	4.8
$x_i y_i$	0.4	0.9	1.5	2.24	3.15	4.08	5.25	6.64	24.16
$(x_i - \overline{x})^2$	12.25	6.25	2.25	0.25	0.25	2.25	6.25	12.25	42



1) **مثل سحابة النقط $M_i(x_i; y_i)$ في معلم متعامد، (نأخذ $1cm$ لكل سنة على محور الفواصل و $1cm$ لكل $100000.DA$ ، على محور التراتيب).**

2) **جد إحداثيات G النقطة المتوسطة لسحابة النقط، ثمّ علمها.**

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{36}{8} = 4.5 \quad \overline{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4.8}{8} = 0.6$$

3) **بيّن أنّ معادلة لمستقيم الإنحدار (Δ) بالمربعات الدنيا هي : $y = 0.06x +$ 0.33، (النتائج تدور إلى 10^{-2}) ثمّ أرسم المستقيم (Δ) في المعلم السابق.**

معادلة (Δ) مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا من الشكل $y = ax + b$ حيث:

$$a = \frac{\sum x_i.y_i - n.\overline{x}.\overline{y}}{\sum (x_i - \overline{x})^2} = \frac{24.16 - (8 \times 4.5 \times 0.6)}{42} = \frac{24.16 - 21.6}{42} = \frac{2.56}{42} \approx 6.089 \approx 0.060 \approx 0.6$$

و نقطة G من المستقيم (Δ) . ومنه $b = \overline{y} - a\overline{x} = 0.6 - (0.06 \times 4.5) = 0.6 - 0.27 = 0.33$.

ومنه المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا (Δ) هي $y = 0.06x + 0.33$.

4) **أ) بإستعمال التعديل الخطي السابق قدّر الميزانية المتوقعة سنة 2020.**

رتبة 2020 تعطى بالعلاقة $x_i = n - p + 1$ حيث $n = 2020$السنة المطلوبة، $p = 2009$السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، x_i رتبة السنة 2020، ومنه:$x_i = 2020 - 2009 + 1 = 12$ وبالتعويض في المعادلة المختصرة للمستقيم نجد: $y = 0.06 \times 12 + 0.33 = 0.72 + 0.33 = 1.05$.

الميزانية المتوقعة سنة 2020 هي1.05 مليون دينار.

ب) إبتداءا من أي تتجاوز الميزانية $1200000.DA$.

تتجاوز الميزانية $1200000.DA$ أي 1.2 مليون دينار معناه $y > 1.2$ أي $0.06x + 0.33 > 1.2$ أي $0.06x > 1.2 - 0.33$ ومنه $0.06x > 0.87$ أي $x > \frac{0.87}{0.06} \approx 14.5$ ومنه رتبة السنة هي $x = 15$

وبالتعويض في قانون الرتبة نجد: $x_i = n - p + 1$ حيث $n =$? السنة المطلوبة، $p = 2009$السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، $x_i = 15$

رتبة السنة n، $n = x_i + p - 1 = 15 + 2009 - 1 = 2023$.
في سنة2023 تتجاوز الميزانية $1200000.DA$.

حل التمرين الخامس عشر: بكالوريا 2017 الموضوع الثاني.

السنة	2010	2011	2012	2013	2014	المجموع
x_i	1	2	3	4	5	15
y_i	33.1	36.8	41.0	41.1	44.1	196.1
$x_i y_i$	33.1	73.6	123	164.4	220.5	614.6
$(x_i - \overline{x})^2$	4	1	0	1	4	10
$z_i = \ln y_i$	$\ln 33.1 \approx 3.50$	$\ln 36.8 \approx 3.61$	$\ln 41.0 \approx 3.71$	$\ln 41.1 \approx 3.72$	$\ln 44.1 \approx 3.79$	18.33
$x_i z_i$	3.50	7.22	11.13	14.88	18.95	55.68

1) عيّن إحداثيات G النقطة المتوسطة لسحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{15}{5} = 3 \quad \overline{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{196.1}{5} = 39.22$$

2) لتكن $y = ax + b$ معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا للسلسة $(x_i;y_i)$.

* بيّن أنّ: $a = 2.63$ ، ثمّ أحسب قيمة b.

معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا من الشكل $y = ax + b$ حيث:

$$a = \frac{\sum x_i.y_i - n.\overline{x}.\overline{y}}{\sum (x_i - \overline{x})^2} = \frac{614.6 - (5 \times 3 \times 39.22)}{10} = \frac{614.6 - 588.3}{10} = \frac{26.3}{10} = 2.63$$

و نقطة G من المستقيم . ومنه $b = \overline{y} - a\overline{x} = 39.22 - (2.63 \times 3) = 39.22 - 7.89 = 31.33$.

ومنه المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي $y = 2.63x + 31.33$.

3) أ) أكمل السطر الأخير من الجدول أعلاه.(تدور النتائج إلى 10^{-2}). أنظر الجدول.

ب) بيّن أنّ معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا للسلسة $(x_i;z_i)$ هي: $z = 0.07x + 3.46$.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{15}{5} = 3 \quad \overline{z} = \frac{\sum z_i}{n} = \frac{18.33}{5} \approx 3.666 \approx 3.67$$

معادلة (Δ) مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا من الشكل $y = ax + b$ حيث:

$$a = \frac{\sum x_i.z_i - n.\overline{x}.\overline{z}}{\sum (x_i - \overline{x})^2} = \frac{55.68 - (5 \times 3 \times 3.67)}{10} = \frac{55.68 - 54.99}{10} = \frac{0.69}{10} = 0.069 \approx 0.07$$

و نقطة G من المستقيم. ومنه $b = \overline{z} - a\overline{x} = 3.67 - (0.07 \times 3) = 3.67 - 0.21 = 3.46$.

ومنه المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي $z = 0.07x + 3.46$.

4) من بين التعديلين، ماهو التعديل الذي يعطي أكبر نسبة نجاح في سنة 2017 ؟.

رتبة 2017 تعطى بالعلاقة $x_i = n - p + 1$ حيث $n = 2017$السنة المطلوبة، $p = 2010$السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، x_i رتبة السنة 2017، ومنه:$x_i = 2017 - 2010 + 1 = 8$ وبالتعويض في المعادلة المختصرة للمستقيم التعديل الأول نجد: $y = 2.63 \times 8 + 31.33 = 21.04 + 31.33 = 52.37$.

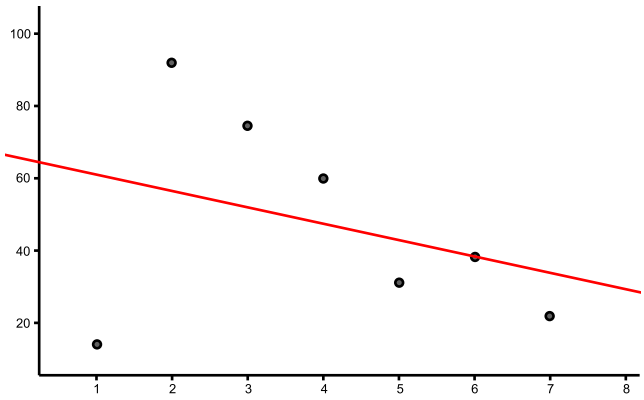
وبالتعويض في المعادلة المختصرة للمستقيم التعديل الثاني (اللوغاريتمي) نجد:

$z = 0.07 \times 8 + 3.46 = 0.56 + 3.46 = 4.02$ ولدينا $\ln y = z$ أي $y = e^{4.02} \approx 55.70$.

ومنه التعديل اللوغاريتمي هو التعديل الذي يعطي أكبر نسبة نجاح سنة 2017 .

حل التمرين السادس عشر: بكالوريا 2017 الدورة الإستثنائية الموضوع الأول.

السنة	1948	1958	1968	1978	1988	1998	2008	المجموع
x_i	1	2	3	4	5	6	7	28
y_i	14	92	74.6	60	31	38.4	22	332
x_iy_i	14	184	223.8	240	155	230.4	154	1201.2
$(x_i-\overline{x})^2$	9	4	1	0	1	4	9	28



1) أ) أحسب إحداثيات النقطة المتوسطة G. (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

$$\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{28}{7}=4 \quad \overline{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{332}{7}\approx 47.42$$

ب) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد،(على محور الفواصل $1cm$ يمثل رتبة واحدة و على محور التراتيب $1cm$ يمثل 10%).

2) بيّن أنّ معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي:

$y=-4.53x+65.54$.

معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا من الشكل $y=ax+b$

حيث:

$$a=\frac{\sum x_i.y_i-n.\overline{x}.\overline{y}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}=\frac{1201.2-(7\times 4\times 47.43)}{28}=\frac{1201.2-1328}{28}=\frac{-126.8}{28}\approx -4.528\approx -4.53$$

و نقطة G من المستقيم . ومنه $b=\overline{y}-a\overline{x}=47.42-(-4.53\times 4)=47.42+18.12=65.54$.

ومنه المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي $y=-4.53x+55.54$.

3) بإستعمال التعديل الخطي السابق، قدّر نسبة الأمية في سنة 2038 هذا البلد.

رتبة2038هي $x_i=10$

وبالتعويض في المعادلة المختصرة للمستقيم نجد: $y=-4.53\times 10+55.54=-45.3+55.54=10.24$.

سبة الأمية في سنة 2038 هي 10.24%.

4) إبتداءا من أيّ سنة تكون نسبة الأمية في هذا البلد أقل من 5% ؟.

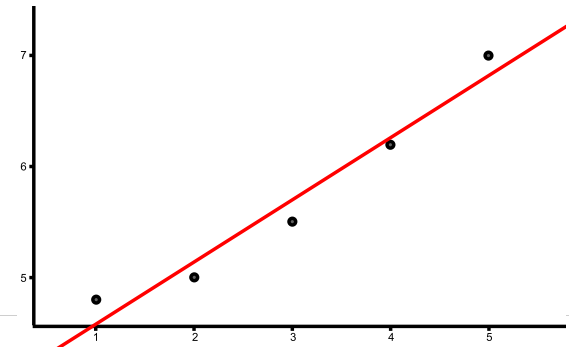
تكون نسبة الأمية في هذا البلد أقل من 5% معناه $y<5$ أي $-4.53x+55.54<5$ أي $-4.53x<-55.54+5$ ومنه $-4.53x<-50.54$

أي $x>\frac{-50.54}{-4.53}\approx 11.15$ ومنه رتبة السنة هي $x=12$ وهي سنة 2058.

في سنة 2058 سنة تكون نسبة الأمية في هذا البلد أقل من 5%.

حل التمرين السابع عشر: بكالوريا 2017 الدورة الإستثنائية الموضوع الثاني.

السنة	2010	2011	2012	2013	2014	المجموع
x_i	1	2	3	4	5	15
y_i	4.8	5	5.5	6.2	7	28.5
x_iy_i	4.8	10	16.5	24.8	35	91.1
$(x_i-\overline{x})^2$	4	1	0	1	4	10



1) عيّن إحداثيي النقطة المتوسطة G ، ثمّ مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد،(يمثل $1cm$ رتبة واحدة على محور الفواصل و $1cm$ يمثل 1 مليون طن على محور التراتيب).

2) لتكن $y=ax+b$ معادلة (Δ) مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا للسلسلة $(x_i;y_i)$.

* بيّن أنّ: $a=0.56$ ، ثمّ أحسب b(تعطى النتيجة مدورة إلى 10^{-2}).

$$\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{15}{5}=3 \quad \overline{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{28.5}{5}=5.7$$

معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا من الشكل $y=ax+b$ حيث:

$$a=\frac{\sum x_i.y_i-n.\overline{x}.\overline{y}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}=\frac{91.1-(5\times3\times5.7)}{10}=\frac{91.1-85.5}{10}=\frac{5.6}{10}=0.56$$

و نقطة G من المستقيم . ومنه $b=\overline{y}-a\overline{x}=5.7-(0.56\times3)=5.7-1.68=4.02$.

ومنه المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي $y=0.56x+4.02$.

3) من أهداف المصنع الوصول إلى إنتاج يفوق 8.45 مليون طن في سنة2017.

*هل يمكن تحقيق هذا الهدف بإستعمال التعديل الخطي السابق؟مع التبرير.

رتبة 2017 تعطى بالعلاقة $x_i=n-p+1$ حيث $n=2017$السنة المطلوبة، $p=2010$السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، x_i رتبة السنة 2020، ومنه:$x_i=2017-2010+1=8$ وبالتعويض في المعادلة المختصرة للمستقيم نجد: $y=0.56\times8+4.02=4.48+4.02=8.5$.

نعم ،إنتاج يفوق 8.45 مليون طن في سنة2017.

4) إبتداءا من أيّ سنة يتعدى إنتاج المصنع 10.17 مليون طن في السنة.

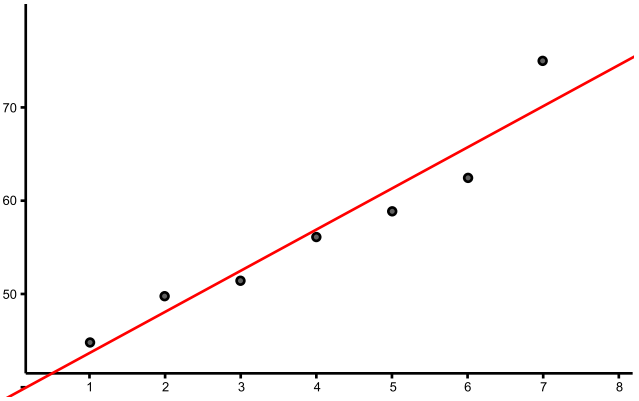
يتعدى إنتاج المصنع 10.17 مليون طن في السنة معناه $y>10.17$ أي $0.56x+4.02>10.17$ أي $0.56x>10.17-4.02$ ومنه $0.56x>6.15$ أي $x>\frac{6.15}{0.56}\approx10.98$ ومنه رتبة السنة هي $x=11$

وبالتعويض في قانون الرتبة نجد: $x_i=n-p+1$ حيث $n=$? السنة المطلوبة، $p=2010$السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، $x_i=11$ رتبة السنة n، $n=x_i+p-1=11+2010-1=2020$.

في سنة2020يتعدى إنتاج المصنع 10.17 مليون طن في السنة.

حل التمرين الثامن عشر: بكالوريا 2018 الموضوع الأول.

السنة	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	المجموع
x_i	1	2	3	4	5	6	7	28
y_i	44.78	49.79	51.36	56.07	58.84	62.45	75.01	398.3
x_iy_i	44.78	99.58	154.08	224.28	294.2	374.7	525.07	1716.69
$(x_i-\overline{x})^2$	9	4	1	0	1	4	9	28



1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد، نأخذ $1cm$ لكل سنة على محور الفواصل و $1cm$ يمثل 5% على محور التراتيب.

2) أحسب إحداثيي G ،النقطة المتوسطة لسحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$.

$$\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{28}{7}=4 \quad \overline{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{398.3}{7}=56.9$$

3) لتكن $y=ax+b$ معادلة (Δ) مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا للسلسلة $(x_i;y_i)$.

* بيّن أنّ: $a=4.41$ ، ثمّ أحسب b (تعطى النتيجة مدورة إلى 10^{-2}).

معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا (Δ) من الشكل $y=ax+b$ حيث:

$$a=\frac{\sum x_i.y_i-n.\overline{x}.\overline{y}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}=\frac{1716.69-(7\times4\times56.9)}{28}=\frac{1716.69-1593.2}{28}=\frac{123.49}{28}\approx4.410\approx4.41$$

و نقطة G من المستقيم (Δ). ومنه $b = \overline{y} - a\overline{x} = 56.9 - (4.41 \times 4) = 56.9 - 17.64 = 39.26$.
ومنه المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي $(\Delta) : y = 4.41x + 39.26$.

4) بإستعمال التعديل الخطي السابق، إبتداءا من أيّ سنة تتجاوز نسبة النجاح 80% ؟.

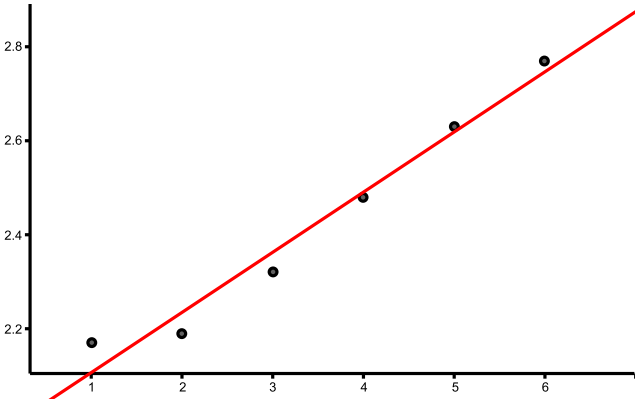
تتجاوز نسبة النجاح 80% معناه $y > 80$ أي $4.41x + 39.26 > 80$ أي $4.41x > 80 - 39.26$ ومنه $4.41x > 40.74$ أي $x > \frac{40.74}{4.41} \approx 9.23$ ومنه رتبة السنة هي $x = 10$

وبالتعويض في قانون الرتبة نجد: $n - p + 1 = x_i$ حيث $n =$? السنة المطلوبة، $p = 2011$السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، $x_i = 10$ رتبة السنة n، $n = x_i + p - 1 = 10 + 2011 - 1 = 2020$.

في سنة 2020 تتجاوز نسبة النجاح 80% .

حل التمرين التاسع عشر: بكالوريا 2018 الموضوع الثاني.

السنة	2009	2010	2011	2012	2013	2014	المجموع
x_i	1	2	3	4	5	6	21
y_i	2.17	2.19	2.32	2.48	2.63	2.77	14.56
$x_i y_i$	2.17	4.38	6.96	9.92	13.15	16.62	53.2
$(x_i - \overline{x})^2$	6.25	2.25	0.25	0.25	2.25	6.25	17.5



1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i; y_i)$ في معلم متعامد، (نأخذ كوحدة بيانية: $2cm$ لكل سنة على محور الفواصل و $2cm$ لكل مليون متقاعد على محور التراتيب.

2) عيّن إحداثيي النقطة المتوسطة G ، ثمّ علّمها.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{21}{6} = 3.5 \quad \overline{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{14.56}{6} \approx 2.426 \approx 2.43$$

3) أكتب معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا.

معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا من الشكل $y = ax + b$ حيث:

$$a = \frac{\sum x_i.y_i - n.\overline{x}.\overline{y}}{\sum (x_i - \overline{x})^2} = \frac{53.2 - (6 \times 3.5 \times 2.43)}{17.5} = \frac{53.2 - 50.96}{17.5} = \frac{2.24}{17.5} \approx 0.128$$

و نقطة G من المستقيم . ومنه $b = \overline{y} - a\overline{x} = 2.43 - (0.128 \times 3.5) = 2.43 - 0.448 = 1.982$.
ومنه المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي $y = -0.128x + 1.982$.

4) نفرض أن تطوّر يبقى على هذه الوتيرة في السنوات الموالية.

أ) قدّر عدد المتقاعدين في الجزائر سنة 2020.

رتبة 2020 تعطى بالعلاقة $n - p + 1 = x_i$ حيث $n = 2020$السنة المطلوبة، $p = 2009$السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، x_i رتبة السنة 2020، ومنه:$x_i = 2020 - 2009 + 1 = 12$ وبالتعويض في المعادلة المختصرة للمستقيم نجد: $y = 0.128 \times 12 + 1.982 = 1.536 + 1.982 = 3.158$.
عدد المتقاعدين في الجزائر سنة 2020 هي 3.158 مليون متقاعد.

ب) إبتداءا من أيّ سنة يتعدى عدد المتقاعدين في الجزائر 4 ملايين متقاعد.

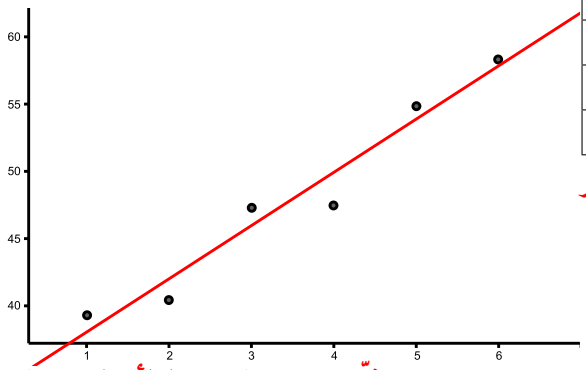
يتعدى عدد المتقاعدين في الجزائر 4 ملايين متقاعد معناه $y > 4$ أي $0.128x + 1.982 > 4$ أي $0.128x > 4 - 1.982$ ومنه $0.128x > 2.018$ أي $x > \frac{2.018}{0.128} \approx 15.76$ ومنه رتبة السنة هي $x = 16$

وبالتعويض في قانون الرتبة نجد: $n - p + 1 = x_i$ حيث $n =$? السنة المطلوبة، $p = 2009$السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، $x_i = 16$ رتبة السنة n، $n = x_i + p - 1 = 16 + 2009 - 1 = 2024$.

في سنة 2024 يتعدى عدد المتقاعدين في الجزائر 4 ملايين متقاعد .

حل التمرين العشرون: بكالوريا 2019 الموضوع الأول.

السنة	2009	2010	2011	2012	2013	2014	المجموع
x_i	1	2	3	4	5	6	21
y_i	39.29	40.47	47.25	47.49	54.85	58.33	287.68
x_iy_i	39.29	80.94	141.75	189.96	274.25	349.98	1076.17
$(x_i-\overline{x})^2$	6.25	2.25	0.25	0.25	2.25	6.25	17.5



1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد، (نأخذ $1cm$ لكل سنة على محور الفواصل و $1cm$ لكل 10 مليار دولار على محور التراتيب

2) جدّ إحداثيي النقطة المتوسطة G ، ثمّ علّمها.

$$\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{21}{6}=3.5 \qquad \overline{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{287.68}{6}\approx 47.946\approx 47.95$$

3) بيّن أنّ معادلة (Δ) مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا للسلسلة الإحصائية هي: $y=3.96x+34.09$، ثمّ مثّل (Δ) (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا من الشكل $y=ax+b$ حيث:

$$a=\frac{\sum x_i.y_i-n.\overline{x}.\overline{y}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}=\frac{1076.17-(6\times 3.5\times 47.95)}{17.5}=\frac{1076.17-1006.88}{17.5}=\frac{69.29}{17.5}\approx 3.959\approx 3.96$$

و نقطة G من المستقيم ومنه $b=\overline{y}-a\overline{x}=47.95-(3.96\times 3.5)=47.95-13.86=34.09$.

ومنه المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي $y=3.96x+34.09$.

4) إعتمادا على التعديل الخطي السابق، إبتداءا من أيّ سنة تفوق الواردات 77 مليار دولار؟.

تفوق الواردات 77 مليار دولار معناه $y>77$ أي $3.96x+34.09>77$ أي $3.96x>77-34.09$ ومنه $3.96x>42.91$ أي $x>\frac{42.91}{3.96}\approx 10.835$

ومنه رتبة السنة هي $x=11$

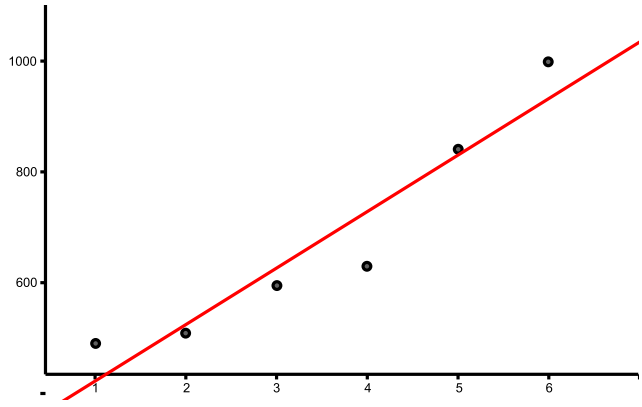
وبالتعويض في قانون الرتبة نجد: $x_i=n-p+1$ حيث $n=$? السنة المطلوبة، $p=2009$ السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، $x_i=11$

رتبة السنة n، $n=x_i+p-1=11+2009-1=2019$.

في سنة 2019 تفوق الواردات 77 مليار دولار.

حل التمرين الحادي والعشرون: بكالوريا 2019 الموضوع الثاني.

السنة	2013	2014	2015	2016	2017	2018	المجموع
x_i	1	2	3	4	5	6	21
y_i	490	510	595	630	840	999	4064
x_iy_i	490	1020	1785	2520	4200	5994	16009
$(x_i-\overline{x})^2$	6.25	2.25	0.25	0.25	2.25	6.25	17.5



1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد، (نأخذ $1cm$ لكل سنة على محور الفواصل و $1cm$ لكل 100 طن على محور التراتيب

2) جدّ إحداثيي النقطة المتوسطة لهذه السحابة G.

$$\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{21}{6}=3.5 \qquad \overline{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{4064}{6}\approx 677.333\approx 677.33$$

3) بيّن أنّ معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا للسلسلة الإحصائية هي:

$y=102x+320.33$ ، ثمّ مثله بيانيا (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا من الشكل $y=ax+b$ حيث:

$$a=\frac{\sum x_i.y_i-n.\overline{x}.\overline{y}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}=\frac{16009-(6\times 3.5\times 677.33)}{17.5}=\frac{16009-14224}{17.5}=\frac{1785}{17.5}=102$$

و نقطة G من المستقيم ومنه $b=\overline{y}-a\overline{x}=677.33-(102\times3.5)=677.33-357=320.33$.
ومنه المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا هي $y=102x+320.33$.

4) بإعتبار أنّ كمية الإنتاج تتبع نفس الوتيرة:

أ) ماهي كمية الإنتاج المتوقعة لسنة 2023.

رتبة 2023 تعطى بالعلاقة $x_i=n-p+1$ حيث $n=2023$السنة المطلوبة، $p=2013$السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، x_i رتبة السنة 2023، ومنه:$x_i=2023-2013+1=11$ وبالتعويض في المعادلة المختصرة للمستقيم نجد: $y=102\times11+320.33=1122+320.33=1442.33$.
كمية الإنتاج المتوقعة لسنة 2023 هي 1442.33 طن.

ب) إبتداءا من أيّ سنة تتجاوز كمية الإنتاج 2000 طن؟.

تتجاوز كمية الإنتاج 2000 طن معناه $y>2000$ أي $102x+320.33>2000$ أي $102x>2000-320.33$ ومنه $102x>1679.67$ أي $x>\frac{1679.67}{102}\approx16.467$ ومنه رتبة السنة هي $x=17$
وبالتعويض في قانون الرتبة نجد: $x_i=n-p+1$ حيث $n=$? السنة المطلوبة، $p=2013$السنة الموجودة في أول خانة في الجدول، $x_i=17$ رتبة السنة n، $n=x_i+p-1=17+2013-1=2029$.
في سنة 2029تتجاوز كمية الإنتاج 2000 طن.

تأمل، نحاول، نطمح، نحلم،
نجتهد لنيل المستحيل، نطمح بكل مافينا،
نحلم بكل ماضينا، نأمل بأن سوف نغير قوانينا،
نحاول رغم الضربات التي تأتينا، ننسى ونكرر
المحاولة مرة مرتان بكل عرق ينبض فينا،
نجتهد بكل طاقتنا لنحصل على ماتريد
خواطرنا وما نريد أن نكون
مادمنا بارين بوالدينا
♡

♢
تُرِي كَمْ
قَدْ بدَتْ مِنْكُمْ
أُمُورُ مَاعَهِدْنَاهَا وَ
عَرَضْتُمْ بِأَقْوَالٍ وَ مَا نَجْهَل
مَعْنَاهَا نَبَشْتُمْ بَيْنَنَا أَشْيَاءَ كُنَّا قَدْ دَفَنَّاهَا
وَ طَرَقْتُمْ إِلَى الغَدْرِ طَرِيقًا مَاسَلَكْنَاهَا وَ
قَبَحْتُمْ بِأَسْمَاءٍ وَ حَسَنْتُمْ مُسَمَّاهَا وَ
كَمْ جَاءَتْ لَنَا عَنْكُمْ أَحَادِيْثُ
رَدَدْنَاهَا وَ أَشْيَاء
رَأَيْنَاهَا وَ قُلْنَا مَا
رَأَيْنَاهَا
♢

