# الهندسة في الفضاء

# تمارين

## التمرين01

التعامد و التوازي - المسافة بين نقطة و مستو .

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;i,j;k)$ ، **تمثيلا وسيطيا لمستقيم** $(D)$ و معادلة ديكارتية لمستو $(P)$ :

$$(D):\begin{cases}x=1+2\lambda\\y=2-\lambda\\z=-3-\lambda\end{cases}\quad(\lambda\in\mathbb{R})\quad\text{و}\quad (P):x+2y-3z-1=0 .$$

اختر الجواب الصحيح في كل سطر من الجدول التالي :

| | الجواب ( أ ) | الجواب ( ب ) | الجواب ( جـ ) |
|---|---|---|---|
| **السطر1** | $A(-1;3;2)\in(D)$ | $B(2;-1;-1)\in(D)$ | $C(3;1;-4)\in(D)$ |
| **السطر2** | $u(1;2;3)$ هو شعاع توجيه لـ: $(D)$ | $v(-2;1;1)$ هو شعاع توجيه لـ: $(D)$ | $w(3;1;4)$ هو شعاع توجيه لـ: $(D)$ |
| **السطر3** | $(D)$ محتواة في $(P)$ | $(D)$ يوازي تماما $(P)$ | $(D)$ يثقب $(P)$ |
| **السطر4** | $A'(1;3;-2)\in(P)$ | $B'(1;3;2)\in(P)$ | $C'(1;3;-1)\in(P)$ |
| **السطر5** | المستوي $(Q_1)$ الذي معادلته $x+2y-3z+1=0$ يعامد المستوي $(P)$ | المستوي $(Q_2)$ الذي معادلته $-4x+5y+2z+3=0$ يعامد المستوي $(P)$ | المستوي $(Q_3)$ الذي معادلته $-3x+2y-z-1=0$ يعامد المستوي $(P)$ |
| **السطر6** | المسافة بين النقطة $M_1(-1;-3;2)$ و المستوي $(P)$ هي $\sqrt{14}$ | المسافة بين النقطة $M_1(-1;-3;2)$ و المستوي $(P)$ هي 14 | المسافة بين النقطة $M_1(-1;-3;2)$ و المستوي $(P)$ هي $2\sqrt{3}$ |

## التمرين 02

معادلة ديكارتية لمستو ، تمثيل وسيطي لمستقيم - المرجح - المسافة بين نقطة و مستو

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;i,j;k)$ .

نعتبر المستوي $P$ الذي معادلته $2x \quad y \quad 2z \quad 4 \quad 0$ و النقط $A\ 3;2;6$ ، $B\ 1;2;4$ و $C\ 4;\ 2;5$.

1)بيّن أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستو و بيّن أن هذا المستوي هو $P$ .

2) (2-1) بيّن أن المثلث $ABC$ قائم.

(2-2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل $O$ و يعامد المستوي $P$ .

(3-2) نسمي $K$ المسقط العمودي للنقطة $O$ على $P$ . احسب المسافة $OK$ .

(4-2) احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$ .

3)نسمي $G$ مرجح الجملة $C;1\ ,\ B;1\ ,\ A;1\ ,\ O;3$ .

(1-3) $I$ هي مركز ثقل المثلث $ABC$.بيّن أن $G$ تنتمي إلى $OI$ .

(2-3) عيّن المسافة بين $G$ و المستوي $P$ .

## التمرين 03

الاستقامية - مستقيم يعامد مستو – معادلة مستو - تقاطع مستقيم و مستقيم - المرجح - مجموعة نقطية .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;i,j;k)$ .

نعتبر النقط A (2 ; 1 ; 3) ، B(-3;-l;7) و C(3;2;4) .

1) بيّن أن A و B و C ليست على استقامة واحدة.

2) $t$ R هو تمثيل وسيطي للمستقيم $d$ .
$$\begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = 3t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

(2-1) بيّن أن $d$ يعامد المستوي (ABC) .

(2-2) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

3) $H$ هي تقاطع $d$ و (ABC) .

(1-3) بيّن أن $H$ هي مرجح الجملة $C;2\ ,\ B;\ 1\ ,\ A;\ 2$ .

(2-3) عيّن الطبيعة و العناصر المميّزة للمجموعة $_1$ للنقط $M$ من الفضاء حيث :

$$2MA \quad MB \quad 2MC \quad MB \quad MC \quad 0$$

(3-3) عيّن الطبيعة و العناصر المميّزة للمجموعة $_2$ للنقط $M$ من الفضاء حيث :

$$\left\| 2MA \quad MB \quad 2MC \right\| \quad \sqrt{29}$$

# التمرين 04

المسافة بين نقطة و مستو - تقاطع مستو و كرة .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;i,j;k)$ .

## الجزء الأول

$a, b, c$ و $d$ أعداد حقيقية حيث $(a, b, c) \neq (0 ; 0 ; 0)$ .

$P$ هو المستوي الذي معادلته $ax + by + cz + d = 0$ .

نعتبر النقطة $I(x_I;y_I;z_I)$ و الشعاع $n(a;b;c)$ .

الهدف في هذا الجزء الأول هو البرهان على أن المسافة بين $I$ و المستوي $P$ تساوي:

$$\frac{|a\,x_I \quad b\,y_I \quad c\,z_I \quad d|}{\sqrt{a^2 \quad b^2 \quad c^2}}$$

**1)** هو المستقيم الذي يمر بالنقطة $I$ و يعامد $P$ .

عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم بدلالة $a, b, c, d, x_I, y_I, z_I$ .

2) نسمي $H$ نقطة تقاطع و $P$ .

(2-1)بيّن أنه يوجد عدد حقيقي k حيث $IH = k\,n$ .

(2-2) عبر عن k بدلالة $a, b, c, d, x_I, y_I, z_I$ .

(3-2) استنتج أن : $IH = \dfrac{|a\,x_I \quad b\,y_I \quad c\,z_I \quad d|}{\sqrt{a^2 \quad b^2 \quad c^2}}$ .

## الجزء الثاني

المستوي $Q$ الذي معادلته $x - y + z - 11 = 0$ يمس الكرة $S$ التي مركزها $\Omega(3;\ 1;\ 1)$ .

1) عيّن نصف قطر الكرة $S$ .

2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل $\Omega$ و يعامد $Q$ .

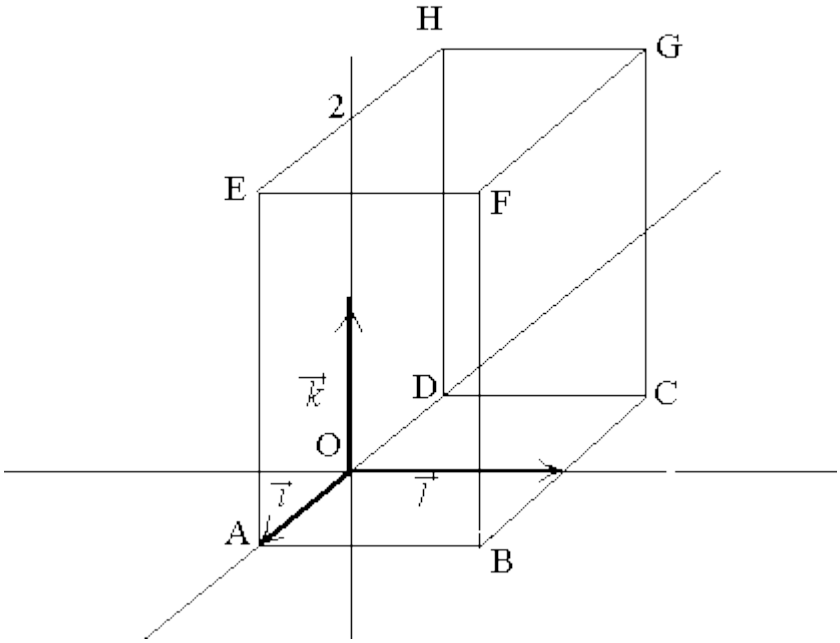
3) استنتج احداثيات نقطة تقاطع $S$ و $Q$ .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

# التمرين 05

معادلة ديكارتية لمستو - تمثيل وسيطي لمستقيم - تقاطع مستقيمات .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;i,j;k$ .




يمثل الشكل السابق متوازي مستطيلات، O هي منتصف [AD] ، P هي منتصف[EF] .

1) (1-1) ما هي مجموعة نقط الفضاء التي معادلتها $z = 2$ ؟

(1-2) عيّن معادلة للمستوي (ABF) .

(1-3) استنتج جملة معادلتين تميّز المستقيم (EF) .

2) (1-2) عيّن إحداثيات النقط A، G و P.

(2-2) ارسم النقطة $Q\ 0;\frac{1}{2};0$ .

(3-2) اكتب معادلة للمستوي (APQ) .

3) (1-3) ارسم القطعتين [PQ] و [AG] .

(2-3) هل $G$ $APQ$ ؟ علل.

4) ننشئ الشكل السابق باستعمال برمجية للهندسة ثم نطلب تمثيل نقطة تقاطع (AG) و(PQ).
ما هو الجواب الذي تتوقعه؟

# التمرين 06

معادلة ديكارتية لمستو - تمثيل وسيطي لمستقيم - المسافة بين نقطة و مستو – تقاطع مستو و كرة .

عيّن في كل حالة مما يلي الجواب الصحيح .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;i,j;k)$ .

نعتبر النقطة $S(1\ ;\ -2\ ;\ 0)$ و المستوي $P$ الذي معادلته $x+y-3z+4=0$ .

1) تمثيل وسيطي للمستقيم $D$ الذي يمر بالنقطة S و يعامد $P$ هو :

| الجواب1 | الجواب2 | الجواب3 | الجواب4 |
|---|---|---|---|
| $x \quad 1 \quad t$<br>$y \quad 1 \quad 2t$<br>$z \quad 3$<br>$t \quad \mathbb{R}$ | $x \quad 2 \quad t$<br>$y \quad 1 \quad t$<br>$z \quad 1 \quad 3t$<br>$t \quad \mathbb{R}$ | $x \quad 1 \quad t$<br>$y \quad 2 \quad 2t$<br>$z \quad 3t$<br>$t \quad \mathbb{R}$ | $x \quad 2 \quad t$<br>$y \quad 1 \quad t$<br>$z \quad 3 \quad 3t$<br>$t \quad \mathbb{R}$ |

2)إحداثيات النقطة H تقاطع المستقيم $D$ مع المستوي $P$ هي :

| الجواب1 | الجواب2 | الجواب3 | الجواب4 |
|---|---|---|---|
| $4;0;0$ | $\frac{6}{5};\frac{9}{5};\frac{3}{5}$ | $\frac{7}{9};\frac{2}{3};\frac{1}{3}$ | $\frac{8}{11};\frac{25}{11};\frac{9}{11}$ |

3) المسافة بين النقطة S و المستوي $P$ تساوي :

| الجواب1 | الجواب2 | الجواب3 | الجواب4 |
|---|---|---|---|
| $\frac{\sqrt{11}}{3}$ | $\frac{3}{\sqrt{11}}$ | $\frac{9}{\sqrt{11}}$ | $\frac{9}{11}$ |

4) نعتبر الكرة التي مركزها S و نصف قطرها 3 . تقاطع هذه الكرة و المستوي $P$ هي:

الجواب 1 : النقطة $I\ 1;\ 5;0$

الجواب 2 : الدّائرة التي مركزها $H$ و نصف قطرها $3\ \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{11}}$

الجواب 3 : الدّائرة التي مركزها $S$ و نصف قطرها $2$

الجواب 4 : الدّائرة التي مركزها $S$ و نصف قطرها $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{11}}$

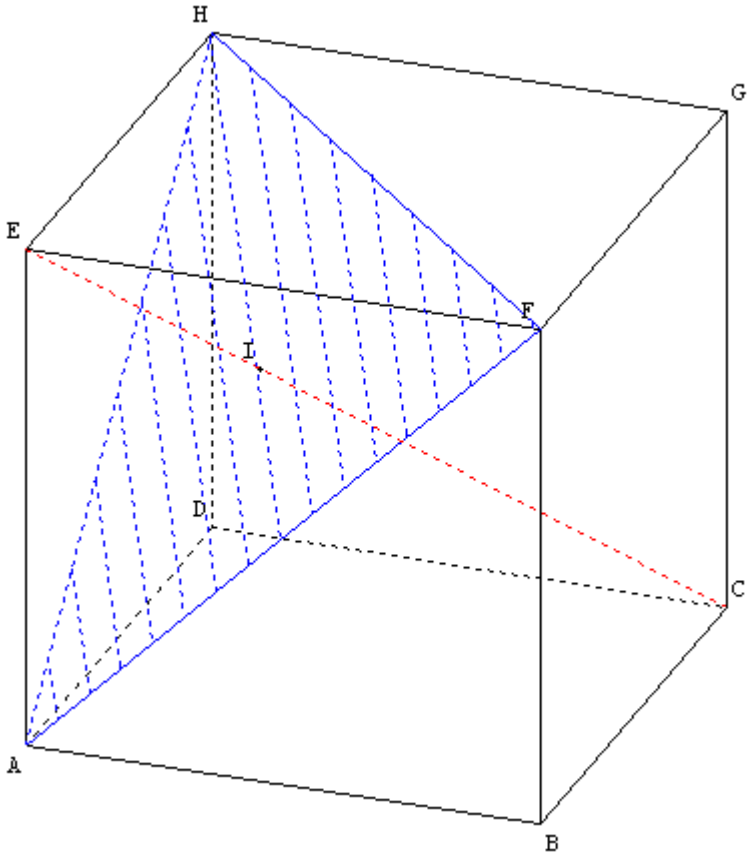
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

# التمرين 07

الجداء السلمي - التعامد .

ABCDEFGH مكعب طول حرفه $a$ ( $a$ عدد حقيقي موجب تماما).

نسمي $I$ نقطه تقاطع المستقيم (EC) و المستوي (AFH) .




**1)** بيّن أن المستقيم (HF) يعامد المستقيم (AG).

2) (1-2) احسب بدلالة $a$ الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EA}$ ، $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}$ .

(2-2) استنتج أن $(EC)$ يعامد $(AF)$ .

## التمرين 08

الجداء السلمي - التعامد - أقصر مسافة بين مستقيمين .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;i,j;k)$ . نعتبر المستقيمين :

$$(D_1):\begin{cases}x=3-4\alpha\\y=-2+\alpha\\z=-1+\alpha\\\alpha\in\mathbb{R}\end{cases} \quad \text{و} \quad (D_2):\begin{cases}x=-6\beta\\y=1+\beta\\z=2+2\beta\\\beta\in\mathbb{R}\end{cases}$$

1) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ تاذي يعامد $(D_1)$ و $(D_2)$ .

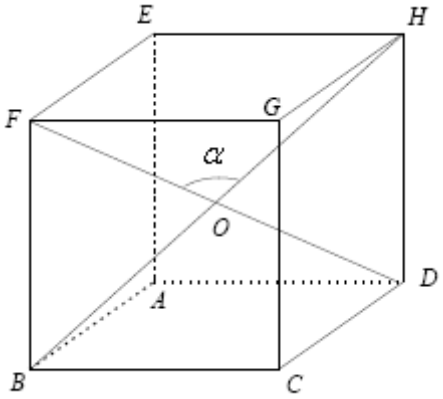
2) احسب أقصر مسافة بين المستقيمين $(D_1)$ و $(D_2)$ .

## التمرين 09

الجداء السلمي - التعاهد - المسافة بين نقطة و مستو .

***ABCDEFGH*** مكعب مركزه ***O*** و طول حرفه 1 .

نعتبر المعلم المتعامد و المتجانس $(A;AB,AD,AE)$ .




1) احسب ***FD*** و ***BH*** .

2) احسب قيمة مقربة للزاوية $\alpha = HOF$ .

3) برهن أن المستقيم (***FD***) يعامد المستوي (***EGB***) .

4) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (***EGB***) .

5) احسب المسافة بين النقطة **O** و المستوي (***EGB***) .

# حلول

## التمرين 01

- **في السطر1 :** الجواب الصحيح هو **الجواب (جـ)** ( $C(3;1;-4)\in(D)$ ) ، لأنه يوجد عدد حقيقي $\lambda$ حيث $\begin{cases}3=1+2\lambda\\1=2-\lambda\\-4=-3-\lambda\end{cases}$ $(\lambda=1)$ .

- **في السطر2 :** الجواب الصحيح هو **الجواب (ب)** لأن :

التمثيل الوسيطي المعطى $\begin{cases}x=1+2\lambda\\y=2-1\lambda\\z=-3-1\lambda\end{cases}$ يبيّن أن $r(2;-1;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم $(D)$ و $v(-2;1;1)$ يوازي $r(2;-1;-1)$ لأنه يوجد عدد حقيقي $t$ حيث $r=tv$ $(t=-1)$.

$v(-2;1;1)$ هو شعاعا توجيه آخر للمستقيم $(D)$.

- **في السطر3 :** الجواب الصحيح هو **الجواب (جـ)** لأن :

$r(2;-1;-1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم $(D)$

$n(1;2;-3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي $(P)$

لدينا $r\bullet n\neq 0$ إذن $r$ لا يعامد $n$ و منه $(D)$ لا يوازي $(P)$

**( $(D)$ لا يوازي $(P)$ تماما و ليس محتواة في $(P)$ )**

**ملاحظة:**

نقطة $M(x;y;z)$ من الفضاء تنتمي إلى $(P)$ و إلى $(D)$ إذا و فقط إذا كان

$\begin{cases}x+2y-3z-1=0\\x=1+2\lambda\\y=2-\lambda\\z=-3-\lambda\end{cases}$ أي $\begin{cases}(1+2\lambda)+2(2-\lambda)-3(-3-\lambda)-1=0\\x=1+2\lambda\\y=2-\lambda\\z=-3-\lambda\end{cases}$ أي

إذن $\begin{cases}\lambda=-\dfrac{13}{3}\\x=-\dfrac{23}{3}\\y=\dfrac{19}{3}\\z=\dfrac{4}{3}\end{cases}$

$(D)$ يثقب $(P)$ في النقطة التي إحداثيتها $\left(-\dfrac{23}{3};\dfrac{19}{3};\dfrac{4}{3}\right)$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

• **في السطر4 :** الجواب الصحيح هو **الجواب (ب )** لأن الاحداثيات $(1;3;2)$ للنقطة $B'$ تحقق معادلة المستوي $(P)$ ( التي هي $x+2y-3z-1=0$).

• **في السطر5 :** الجواب الصحيح هو **الجواب (ب )** لأن:

$n(1;2;-3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي $(P)$

$n_2(-4;5;2)$ هو شعاع ناظمي للمستوي $(Q_2)$

و $n \bullet n_1 = 0$ إذن $n$ يعامد $n_2$ ، نستنتج أن $(Q_2)$ يعامد $(P)$ .

• **في السطر6 :** الجواب الصحيح هو **الجواب (أ )** لأن:

المسافة بين النقطة $M_1(-1;-3;2)$ و المستوي الذي معادلته $1x+2y-3z-1=0$ هي

$$\frac{|1\times(-1)+2\times(-3)-3\times(2)-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}=\frac{|-14|}{\sqrt{14}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\frac{14\sqrt{14}}{14}=\sqrt{14}$$ .

## التمرين 02

1) **نبيّن أن النقط** $A$ ، $B$ و $C$ **تعيّن مستو**

لدينا $AB$ $2;0;2$ و $AC$ $1;4;1$ .

$k$ $2$ $2$ $k$

$k$ $0$ أي $0$ $4k$ تكافئ $AB$ $kAC$

$k$ $2$ $2$ $k$

لا يمكن للعدد الحقيقي $k$ أن يكون $0$ و $2$ في آن واحد إذن لا يوجد أي عدد $k$ حيث $AB$ $kAC$

و منه $AB$ لا يوازي $AC$ ، نستنتج أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستو، هو المستوي(ABC) .

**نبيّن أن هذا المستوي هو** $P$

$2 \times 3 + 2 - 2 \times 6 + 4 = 0$ إذن النقطة A تنتمي إلى $P$ .

$2 \times 1 + 2 - 2 \times 4 + 4 = 0$ إذن النقطة B تنتمي إلى $P$ .

$2 \times 1 + 2 - 2 \times 4 + 4 = 0$ إذن النقطة C تنتمي إلى $P$ .

النقط $A$ ، $B$ و $C$ تنتمي إلى $P$ ، إذن المستوي $P$ هو المستوي (ABC) .

2) (2-1) **نبيّن أن المثلث** ABC **قائم**

لدينا $0$ $1$ $2$ $4$ $0$ $1$ $2$ $AC$ $AB$

الشعاعان $AB$ و $AC$ متعامدان إذن المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان و منه المثلث ABC قائم في A .

**(2-2) تمثيل و سيطي للمستقيم**

بصفة عامة $n$ $a;b;c$ يعامد المستوي الذي معادلته $0$ $d$ $cz$ $by$ $ax$.

لدينا $2$ $1;$ $2;$ $n$ يعامد $P$ و هو أيضا شعاع توجيه للمستقيم .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$M\ x;y;z$ تكافئ $n$ إذن $OM$ $\begin{matrix} x & 2 \\ y & \\ z & 2 \end{matrix}$ و R

**(3-2) حساب المسافة OK**

لدينا $P$ (OK) و. (OK) = النقطة K تنتمي إلى $P$ و إلى إذن

$$\begin{matrix} x & 2 \\ y & \\ z & 2 \end{matrix} \text{ أي } \begin{matrix} x & 2 \\ y & \\ z & 2 \end{matrix} \text{ أي } \begin{matrix} x & 2 \\ y & \\ z & 2 \end{matrix}$$

$$2x \quad y \quad 2z \quad 4 \quad 0 \qquad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 0 \qquad \frac{4}{9}$$

و أخيرا $\begin{matrix} x & \frac{4}{9} \\ y & \frac{4}{9} \\ z & \frac{8}{9} \end{matrix}$ نجد عندئذ إحداثيات $K$ : $\frac{4}{9};\frac{8}{9};\frac{4}{9}$ $K$ $\frac{8}{9};$.

نستنتج حساب OK : $\frac{4}{3}$ $OK$ $\sqrt{\frac{8}{9}^2 \quad \frac{4}{9}^2 \quad \frac{8}{9}^2}$

**(4-2) حساب حجم رباعي الوجوه** $OABC$

قاعدة رباعي الوجوه $OABC$ هي ABC و ارتفاعه [OK].

لدينا $AB^2 = 4 + 4 = 8$ إذن $2\sqrt{2}$ $AB$ و نجد كذلك $3\sqrt{2}$ $AC$.

مساحة المثلث ABC هي : $6cm^2$ $Aire\ ABC$ $\frac{AB \quad AC}{2}$

نستنتج حجم رباعي الوجوه **OABC** : $\frac{8}{3}cm^3$ $Volume\ OABC$ $\frac{6 \quad OK}{3}$

**3) (1-3) نبيّن أن** $G$ **تنتمي إلى** $OI$

" I مركز ثقل المثلث ABC" يعني " I مرجح الجملة $A;1\ ,\ B;1\ ,\ C;1$ "

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$G$ هي مرجح الجملة $C;1$ , $B;1$ , $A;1$ , $O;3$ .

نستعمل خواص المرجح (التجميعية): $G$ هي مرجح الجملة $I;3$ , $O;3$

أي $G$ هي منتصف [OI] إذن $G$ تنتمي إلى المستقيم (OI) .

**(2-3) حساب المسافة بين $G$ و المستوي $P$**

لدينا $OB$ $OB$ $OA$ $\frac{1}{3}$ $OI$ إذن إحداثيات $I$ هي $\begin{matrix} x_I & \frac{8}{3} \\ y_I & \frac{2}{3} \\ z_I & 5 \end{matrix}$

G هي منتصف [OI] إذن $\frac{1}{2}OI$ $OG$ ، نستنتج إحداثيات G : $\begin{matrix} x_G & \frac{4}{3} \\ y_G & \frac{1}{3} \\ z_G & \frac{5}{2} \end{matrix}$

$2x$ $y$ $2z$ $4$ $0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $P$ ، المسافة بين $G$ و المستوي $P$ هي $\frac{2}{3}$ . $\frac{|2x_G \quad y_G \quad 2z_G \quad 4|}{\sqrt{2^2 \quad 1^2 \quad 2^{\,2}}}$

## التمرين 03

**1) A و B و C ليست على استقامة واحدة**

لدينا $4;\ 2;\ 5$ و $AB$ $1;1;1$ و $AC$ .

$5$ $k$

$2$ $k$ تكافئ $AB$ $k\,AC$

$4$ $k$

لا يمكن للعدد الحقيقي $k$ أن يكون $5$ ، $2$ و $4$ في آن واحد إذن لا يوجد أي عدد $k$ حيث $AB$ $k\,AC$ و منه $AB$ لا يوازي $AC$ ، نستنتج أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ ليست على استقامة واحدة .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**2) (1-2) $d$ يعامد المستوي (ABC)**

نعيّن شعاعا ; ; $n$ يعامد المستوي (ABC)

$n$ ; ; $AC$ 1;1;1 **و** $n$ ; ; $AB$ 5; 2;4

إذن $n \cdot AB = 0$ أي $5 \times 2 + 4 \times 0 = 0$ أي

$n \cdot AC = 0$

إذن $3 \times 3 + 9 \times 0 = 0$ أي

و منه ; 3 ; $n$ 2 ; 3 .

لاحظ أن $v$ 2; 3;1 شعاع توجيه للمستقيم (d) (انظر التمثيل الوسيطي المعطى للمستقيم (d)).

$v$ 2; 3;1 يعامد أيضا المستوي (ABC) ، إذن (d) يعامد (ABC) .

**(2-2) معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)**

$M$ $x;y;z$ تنتمي إلى (ABC) إذا و فقط إذا كان $AM$ $v$ **أي** $AM$ $v$ 0 .

لدينا $AM$ $x$ 2;$y$ 1;$z$ 3 **و** $v$ 2; 3;1 ، إذن :

$M$ $x;y;z$ تنتمي إلى (ABC) إذا و فقط إذا كان $2x$ 2 $3y$ 1 $z$ 3 0

**أي** $2x$ $3y$ $z$ 4 0 .

$2x$ $3y$ $z$ 4 0 هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

**3) (1-3) $H$ هي مرجح الجملة** $A$; 2 , $B$; 1 , $C$;2

- H($x;y;z$) تنتمي إلى (ABC) و إلى إحداثياتها إذن (d) تحقق :

$2x$ $3y$ $z$ 4 0 $2$ 7 $2t$ 3 $3t$ 4 $t$ 4 0

**أي**

$x$ 7 $2t$

$y$ $3t$

$z$ 4 $t$

$t$ 1

**أي**

$x$ 7 $2t$ 5

$y$ $3t$ 3

$z$ 4 $t$ 5

و منه.( 5; -3 ; -5) H .

- لدينا $HA$ 7;4; 2 ، $HB$ 2;2;2 ، $HC$ 8;5; 1 إذن :

$2HC$ $HB$ $2HA$ 0 ، نستنتج أن H هي مرجح الجملة $A$; 2 , $B$; 1 , $C$;2

:

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

**(2-3) ( المجموعة $_1$**

- H هي مرجح الجملة $A;\ 2\ ,\ B;\ 1\ ,\ C;2$ إذن : $MH\quad 2MC\quad MB\quad 2MA$
- $MB\quad MC\quad CM\quad MB\quad CB$

إذن $M$ تنتمي إلى $_1$ إذا و فقط إذا كان $0\quad CB\quad MH$ ، نستنتج $_1$ هي المستوي الذي يشمل النقطة $H$ و $BC$ هو شعاع ناظمي له.

**(3-3) المجموعة $_2$**

H هي مرجح الجملة $A;\ 2\ ,\ B;\ 1\ ,\ C;2$ إذن : $MH\quad 2MC\quad MB\quad 2MA$

إذن : $M$ تنتمي إلى $_2$ إذا و فقط إذا كان $\sqrt{29}\quad \|MH\|$ ، نستنتج أن $_2$ هي الكرة التي مركزها $H$ و نصف قطرها $\sqrt{29}$.

## التمرين 04 الجزء الأول

1) $n\ a;b;c$ هو في نفس الوقت شعاع ناظمي للمستوي $P$ و شعاع توجيه للمستقيم الذي يشمل I و يعامد $P$ .

$M\ x;y;z$ يكافئ $IM\ x\quad x_I\ ;y\quad y_I\ ;z\quad z_I$ يوازي $n\ a;b;c$ أي يوجد عدد حقيقي $t$ حيث $t\ n$ ، إذن $IM$

$$\begin{matrix} x & x_I & ta \\ y & y_I & tb \\ z & z_I & tb \end{matrix} \text{ أي } \begin{matrix} x & x_I & ta \\ y & y_I & tb \\ z & z_I & tb \end{matrix} \text{ .....}$$

الجملة تشكل تمثيلا وسيطيا للمستقيم .

2)(1-2) H و I نقطتان من $P$ ،إذن $IH$ يوازي $n$ لأن $n$ شعاع توجيه لـ: إذن يوجد عدد حقيقي k حيث $k\ n$ $IH$.

(2-2) إذن $\begin{matrix} IH & k\ n \\ H & P \end{matrix}$

$$\begin{matrix} x_H & x_I & ka \\ y_H & y_I & kb \\ z_H & z_I & kb \end{matrix}$$

$$ax_H\quad by_H\quad cz_H\quad d\quad 0$$

و منه $0\quad d\quad z\quad ka\quad c\ z_I\quad ka\quad b\ y_I\quad ka\quad a\ x_I$

أي $0\quad d\quad kc^2\quad cz_I\quad kb^2\quad by_I\quad ka^2\quad ax_I$

أي $k\ a^2\quad b^2\quad c^2\qquad ax_I\quad by_I\quad cz_I\quad d$

لدينا $0\quad c^2\quad b^2\quad a^2$ لأن $0;0;0\qquad a;b;c$ إذن $k$ ز $\dfrac{ax_I\quad by_I\quad cz_I\quad d}{a^2\quad b^2\quad c^2}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

$\|IH\| \quad |k| \quad \|n\| \quad |k| \quad \sqrt{a^2 \quad b^2 \quad c^2} \quad \left| \frac{ax_I \quad by_I \quad cz_I \quad d}{a^2 \quad b^2 \quad c^2} \right| \quad \sqrt{a^2 \quad b^2 \quad c^2}$ (3-2)

منه $\|IH\| \quad \frac{|ax_I \quad by_I \quad cz_I \quad d|}{\sqrt{a^2 \quad b^2 \quad c^2}}$ .

## الجزء الثاني

المستوي $Q$ الذي معادلته $x - y + z - 11 = 0$ مماس للكرة $S$ الذي مركزها $1; \quad 1; 3$ .

4) نصف القطر r للكرة $S$ يساوي المسافة بين و $Q$ ، و بتطبيق نتيجة الجزء الأول ، نجد :

$2\sqrt{3} \quad \frac{|x \quad y \quad z \quad 11|}{\sqrt{1^2 \quad 1^2 \quad 1^2}} \quad r$ .

2) $n \; 1, \quad 1;1$ شعاع ناظمي للمستوي $Q$ .

$M \; x; y; z$ يكافئ $M \; x \quad 1; y \quad 1; z \quad 1$ يوازي $n \; 1; \quad 1;1$

$$\begin{matrix} x & t & 1 \\ y & t & 1 \\ z & t & 3 \end{matrix} \quad \text{أي} \quad \begin{matrix} x & 1 & t \\ y & 1 & t \\ z & 3 & t \end{matrix}$$

أي يوجد عدد حقيقي $t$ حيث $M \quad t\,n$ ، إذن أي

3) النقطة **T** تقاطع الكرة $S$ و المستوي $Q$ ن هي نقطة تقاطع $Q$ و المستقيم

إذن إحداثيات **T** تحقق الجملة :

$$\begin{matrix} x & t & 1 \\ y & t & 1 \\ z & t & 3 \end{matrix} \quad \text{أي} \quad \begin{matrix} x & t & 1 \\ y & t & 1 \\ z & t & 3 \end{matrix}$$

$$t \quad 1 \quad t \quad 1 \quad t \quad 3 \quad 11 \quad 0 \qquad x \quad y \quad z \quad 11 \quad 0$$

أي $\begin{matrix} x & t & 1 \\ y & t & 1 \\ z & t & 3 \\ & t & 2 \end{matrix}$ أي $\begin{matrix} x & 3 \\ y & 3 \\ z & 5 \end{matrix}$ إذن $T \; 3; \quad 3;5$ .

## التمرين 05

1) (1-1) مجموعة النقط $M(x \; ; \; y \; ; \; z)$ من الفضاء حيث $z = 2$ هي المستوي الذي يمر بالنقطة التي إحداثياتها $(2 \; ; \; 0 \; ; \; 0)$ و يوازي المستوي $(xOy)$، هو المستوي (EFH) .

(2-1) للنقط A ، B وF نفس الفاصلة 1، إذن $ABF$ $M \; x; y; z$ يكافئ $x = 1$ .

معادلة المستوي $ABF$ هي $x = 1$ .

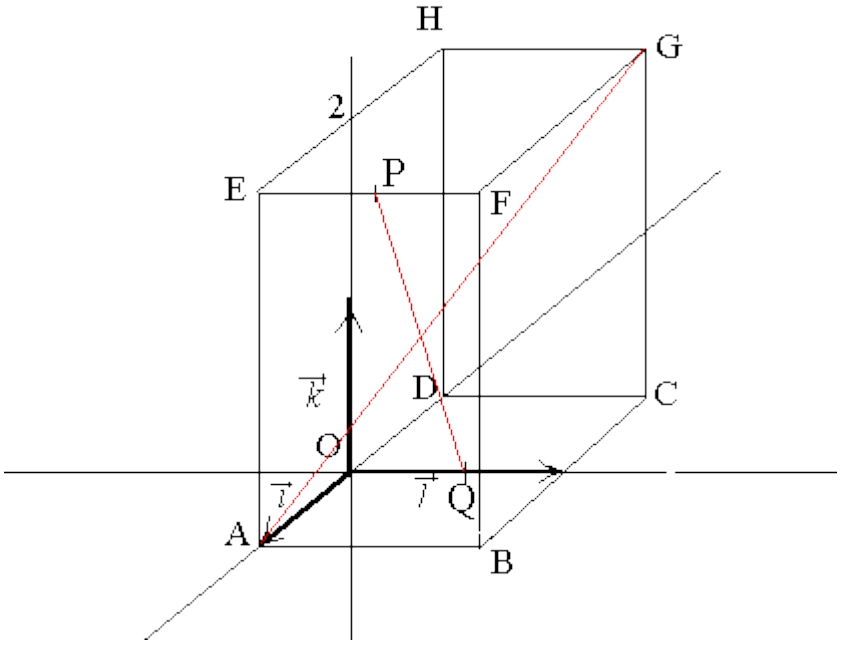
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

(3-1) المستويان (ABF) و (EFH) متقاطعان وفق المستقيم (EF) .

$M(x\,;y\,;z)\in(ABF)\cap(EFH)$ يكافئ $x=1$ و $z=2$

**2) (1-2) ، (2-2)**

- $OA$ $i$ إذن $A\ 1;0;0$ .
- $2k$ $j$ $i$ $HG$ $DH$ $OD$ $OG$ إذن $G\ 1;1;2$ .
- $E\ 1;0;2$ و $F\ 1;1;2$ إذن $P\ 1;\frac{1}{2};2$ .




**(3-2)** معادلة المستوي (APQ) من الشكل $ax+by+cz+d=0$ و $a\ ,\ b\ ,\ c\ ,d$ هي أعداد حقيقية حيث $(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ $(a\ ;\ b\ ;\ c)$.

النقط A(1 ; 0 ; 0 ) , P( 1 ; 1/2 ; 2), Q(0 ; 1/2 ; 0) تنتمي على (APQ) ، إذن إحداثيتها تحقق معادلة (APQ) أي :

$$\begin{cases} a+d=0 \\ a+\frac{b}{2}+2c+d=0 \\ \frac{b}{2}+d=0 \end{cases}$$ إذن $$\begin{cases} a=-d \\ b=-2d \\ c=\frac{d}{2} \end{cases}$$ منه $$\begin{cases} a=-d \\ b=-2d \\ d+d+2c+d=0 \end{cases}$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

نجد معادلة للمستوي (APQ) : $d\ x \quad 2d\ y \quad \frac{d}{2}\ z \quad d \quad 0$

أي $d \quad x \quad 2y \quad \frac{z}{2} \quad 1 \quad 0$

بمأن $d \quad 0$ فإن $0;0;0 \quad a;b;c$ و منه $x \quad 2y \quad \frac{z}{2} \quad 1 \quad 0$

أي $2x \quad 4y \quad z \quad 2 \quad 0$ .

$0 \quad 2 \quad z \quad 4y \quad 2x$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (APQ) .

3) (1-3)، (2-3)

$APQ \quad G$ يكافئ إحداثيات $G$ تحقق معادلة المستوي $APQ$ .

لدينا G(- 1 ; 1 ; 2) و $0 \quad 2 \quad 2 \quad 4 \quad 2$ إذن $APQ \quad G$ .

4) $APQ \quad G$ إذن المستوي $APQ$ لا يشمل المستقيم $AG$ ، $A$ هي النقطة المشتركة الوحيدة بين $APQ$ و $AG$ .

النقط A ، P و Q ليست على استقامة واحدة لا توجد أي نقطة مشتركة للمستقيمين (AG) و (PQ) ( لا يوجد أي مستو يشمل (AG) و(PQ) في آن واحد).

## التمرين 06

1) $3 \quad ;1;1 \quad n$ شعاع ناظمي للمستوي الذي معادلته $x + y - 3z + 4 = 0$ .

**شرح :**

$D \quad M \ x;y;z$ **يعني** $SM \ x \quad 1;y \quad 2;z$ **يوازي** $3 \quad ;1;1 \quad n$ أي يوجد عدد حقيقي $k$

$$x \quad 1 \quad k \qquad x \quad 1 \quad k$$

حيث $k\,n \quad SM$ إذن : $y \quad 2 \quad k$ أي $y \quad 2 \quad k$

$$z \quad 3k \qquad z \quad 3k$$

$$x \quad 1 \quad k \quad 2 \quad t$$

نضع $k \quad t \quad 1$ و نجد $y \quad 2 \quad k \quad 1 \quad t$

$$z \quad 3k \quad 3 \quad 3t$$

الجواب الصحيح هو **الجواب 4** .

**شرح آخر:**

نعبر عن إحداثيات الشعاع $SM$ بدلالة $t$ في كل حالة :

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

| الجواب1 | الجواب2 | الجواب3 | الجواب4 |
|---|---|---|---|
| $t$<br>$SM\ 3\ 2t$<br>$3$ | $1\ t$<br>$SM\ 1\ t$<br>$1\ 3t$ | $t$<br>$SM\ 2t$<br>$3t$ | $1\ t$<br>$SM\ 1\ t$<br>$3\ 3t$ |

الشعاع الوحيد الذي يوازي $3$ $1;1;\ n$ هو الشعاع $SM$ في الجواب 4 : $SM\ 1\ t\ n$ .

2) الإحداثيات $x;y;z$ للنقطة H تقاطع المستقيم $D$ و المستوي $P$ تحقق :

$$\begin{matrix} x\ 2\ t \\ y\ 1\ t \\ z\ 3\ 3t \end{matrix} \text{ أي } \begin{matrix} x\ 2\ t \\ y\ 1\ t \\ z\ 3\ 3t \end{matrix}$$

$$2\ t\ 1\ t\ 3\ 3\ 3t\ 4\ 0 \qquad x\ y\ 3z\ 4\ 0$$

$$\text{إذن } \begin{matrix} x\ 2\ t \\ y\ 1\ t \\ z\ 3\ 3t \end{matrix} \text{ و نستنتج } \begin{matrix} x\ \frac{8}{11} \\ y\ \frac{25}{11} \\ z\ \frac{9}{11} \end{matrix} \qquad t\ \frac{14}{11}$$

الجواب الصحيح هو **الجواب 4** .

3) المسافة بين النقطة S و المستوي $P$ هي : $\frac{|1\ 2\ 3\ 0\ 4|}{\sqrt{1^2\ 1^2\ 3^2}}$ أي $\frac{3}{\sqrt{11}}$ .

الجواب الصحيح هو **الجواب 2** .

4) المسافة بين S و $P$ أقصر من نصف قطر الكرة ،إذن تقاطع المستوي $P$ و الكرة هي الدائرة التي مركزها H ( H هي المسقط العمودي لـ : S على $P$ ) و نصف قطرها $r$ أي $r\ \sqrt{3^2\ \left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^2}$ $3\sqrt{\frac{10}{11}}$ .

الجواب الصحيح هو **الجواب 2** .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

## التمرين 07

**1)** القطران (HF) و (EG) للمربع EFGH متعامدان.

المستقيم (EA) يعامد المستوي (EFH ) إذن(EA) يعامد المستقيم (HF) المحتواة في (EFH ).

المستقيم (HF) الذي يعامد (EG) و(EA) ، يعامد المستوي **(AEG)** ( المستوي (AEG) يشمل المستقيمين (EG) و(EA) )

(HF) يعامد كل مستقيمات المستوي **(AEG)** و بالخصوص (HF) يعامد **(AG).**

**(2**

(2-1) $EA \quad AF \quad EA \quad AE \quad EF \quad EA^2 \quad EA \quad EF \quad a^2 \quad 0 \quad a^2$

لأن $EA$ **و** $EF$ متعامدان .

$AB \quad AF \quad AB \quad AE \quad EF \quad 0 \quad EA^2 \quad a^2$

$BC$ يعامد المستوي (AEF) إذن $BC$ يعامد $AF$ و منه $0 \quad AF \quad BC$ .

(2-2) $EC \quad AF \quad EA \quad AB \quad BC \quad AF \quad AE \quad EF \quad a^2 \quad a^2 \quad 0 \quad 0$

إذن $EC$ و $AF$ متعامدان .

## التمرين 08

**1)** $A_1(X_1;Y_1;Z_1)$ نقطة من $(D_1)$ إذن $\begin{cases} X_1 = 3-4\alpha \\ Y_1 = -2+\alpha \\ Z_1 = -1+\alpha \end{cases}$

$A_2(X_2;Y_2;Z_2)$ نقطة من $(D_2)$ إذن $\begin{cases} X_2 = -6\beta \\ Y_2 = 1+\beta \\ Z_2 = 2+2\beta \end{cases}$

إحداثيات الشعاع $A_1A_2$ هي $\begin{cases} X_2 - X_1 = -3+4\alpha-6\beta \\ Y_2 - Y_1 = 3-\alpha+\beta \\ Z_1 - Z_2 = 3-\alpha+2\beta \end{cases}$

$u_1(-4;1;1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم $(D_1)$

$u_2(-6;1;2)$ هو شعاع توجيه للمستقيم $(D_2)$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

المستقيم $(A_1A_2)$ يعامد $(D_1)$ و $(D_2)$ إذا و فقط إذا كان $\begin{cases} A_1A_2 \bullet u_1 = 0 \\ A_1A_2 \bullet u_2 = 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 2\alpha - 3\beta = 2 \\ 27\alpha - 41\beta = 27 \end{cases}$ و نجد $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}$

نستنتج أن $A_1(-1;-1;0)$ ، $A_1(0;1;2)$ إذن $A_1A_2(1;2;2)$.

المستقيم $(\Delta)$ الذي يعامد $(D_1)$ و $(D_2)$ و المستقيم $(A_1A_2)$ الذي يمر بالنقطة $A_1(-1;-1;0)$ و شعاع توجيهه $A_1A_2(1;2;2)$ .

نقطة $M(x;y;z)$ من الفضاء تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$ **يعني** $A_1M = t\ A_1A_2$ $(t \in \mathbb{R})$

أي $\begin{cases} x+1 = t \\ y+1 = 2t \\ z-0 = 2t \end{cases}$ **أي** $\begin{cases} x = -1+t \\ y = -1+2t \\ z = 2t \end{cases}$

$\begin{cases} x = -1+t \\ y = -1+2t \\ z = 2t \end{cases}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم $(\Delta)$ المطلوب.

2) اقصر مسافة بين المستقيمين $(D_1)$ و $(D_2)$ هي $\|A_1A_2\| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$.

## التمرين 09

1) المثلث $BCD$ قائم في $C$ : نجد $BD = \sqrt{2}$ باستعمال مبرهنة فيتاغورس.

المثلث $FBD$ قائم في $B$ : نجد $FD = \sqrt{3}$ باستعمال مبرهنة فيتاغورس.

نجد بنفس الكيفية أن $BH = \sqrt{3}$ .

2) نحسب الجداء السلمي $OF \bullet OH$ بطريقتين مختلفتين :

- $OF \bullet OH = \frac{1}{4}DF \bullet BH = \frac{1}{4}(DB+BF) \bullet BH = \frac{1}{4}(DB \bullet BH + BF \bullet BH)$ .

$OF \bullet OH = \frac{1}{4}(-DB^2 + BF^2) = -\frac{1}{4}$ .

- $OF \bullet OH = OF \times OH \times \cos\alpha = \frac{3}{4}\cos\alpha$ .

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

نستنتج أن $\frac{3}{4}\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ أي $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ و الحاسبة تعطينا $109$ $\alpha \approx$ .

3) نبيّن أن $FD$ يعامد شعاعين من المستوي $(EGB)$ :

- نبيّن أن $FD$ يعامد $GE$ :

$FD \bullet GE = (FG + GH + HD) \bullet GE = FG \bullet GE + GH \bullet GE + HD \bullet GE$ إذن

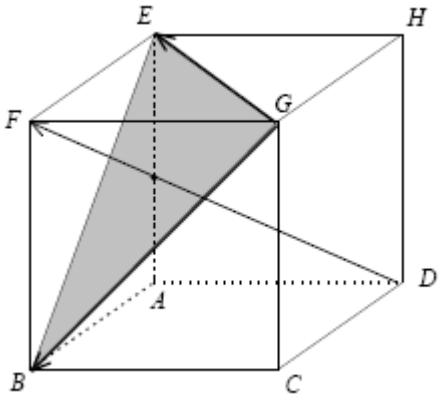
$FD \bullet GE = -FG^2 + GH^2 + 0 = 0$ .

- نحسب بنفس الكيفية $FD \bullet GB$ و نجد $FD \bullet GB = 0$ .

نستنتج أن المستقيم $(FD)$ يعامد المستوي $(EGB)$ .

**4)** $FD(-1;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(EGB)$ **إذن** $(EGB)$ يقبل معادلة ديكارتية من الشكل $-x + y - z + d = 0$ . بمأن النقطة $B(1;0;0)$ تنتمي إلى المستوي $(EGB)$ فإن $d = 1$ .
نستنتج أن $-x + y - z + 1 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي $(EGB)$.

**5)** المسافة بين النقطة $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ و المستوي $(EGB)$ هي : $\frac{\left|-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$




.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM