1.أولا الاهتزازات الميكانيكية الحرة:

1- تعريف الجملة الميكانيكية المهتزة:

عبارة عن جملة ميكانيكية تقوم بحركة ذهاب و اياب على جانبي وضع توازنها مثل: الأرجوحة.

2 – أنماطها : تكون الاهتزازات الحرة على احدى الأنماط التالية:

* **اهتزازات حرة غير متخامدة**: وهي اهتزازات ميثالية حيث تبقى طاقة الجملة المهتزة ثابتة خلال الزمن.

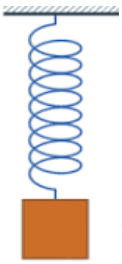
***اهتزازات حرة متخامدة**: وهي اهتزازات حقيقية حيث الجملة المهتزة تتناقص طاقتها بمرور الزمن بفعل الإحتكاكات.

* **اهتزازت حرة مغذاة**: إهتزازات لها تغذية خارجية من أجل تعويض الطاقة الضائعة لثبات طاقتها بمرور الزمن.

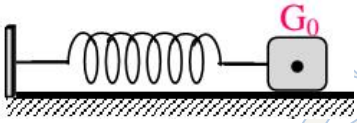
3- دراسة بعض الجمل

1.3- النواس المرن:

يتكون النواس المرن من جسم صلب كتلته **m** مثبت بنهاية نابض حلقاته غير متلاصقة وكتلة النابض مهملة ونهايته الأخرى مثبتة في نقطة، إن النواس المرن نموذج لمجموعة كبيرة من الجمل المهتزة ونجده على شكلين



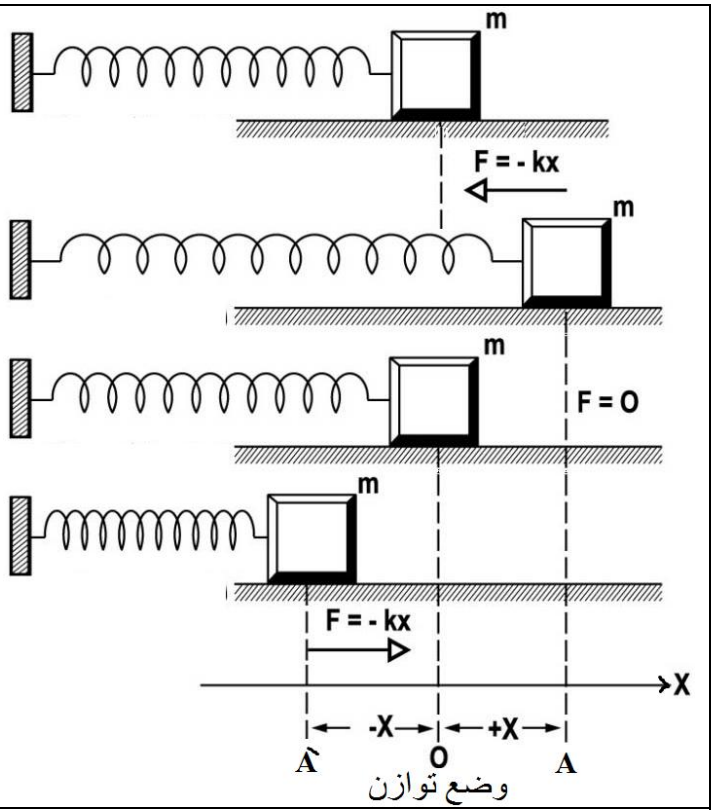
نواس مرن شاقولي



نواس مرن أفقي

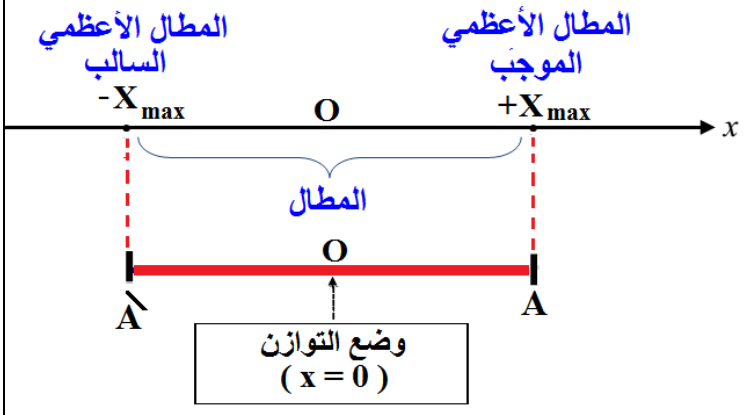
1.1.3- حالة اهتزازات حرة غير متخامدة:

الإهتزازات الحرة الغير متخامدة حالة ميثالية غير موجودة في الواقع نفترض أن قوى الإحتكاك بجميع أشكالها مهملة عند إزاحة الجسم الصلب (S) عن وضع توازنه وتركه لحالة بدون سرعة إبتدائية فإنه يقوم بحركة ذهاب إياب عن موضع توازنه الذي يعتبر مبدأ للفواصل $x=0$ وتتم الحركة على القطعة المستقيمة $[AA']$ وتصبح الحركة دورية لأنها متماثلة في الذهاب و الإياب خلال فترات زمنية متساوية ويكون: $x'_{A'} = -X_{MAX} \le x(t) \le x_A = +X_{MAX}$، في هذه الحالة نقول بأن **اهتزازات حرة غير متخامدة:**



الشكل-03- أفقي

تتغير حركة مركز عطالة الجسم على طول القطعة المستقيمة $[AA']$ بين: المطال الأعظمي الموجب والمطال الأعظمي السالب مرورا دوما بوضع التوازن.



الشكل-04- شاقولي

أ- النواس المرن الأفقي (الإحتكاك مهمل):

1- نتائج الدراسة التجريبية للجملة المهتزة نواس مرن:

أولا: المقادير المميزة للجملة المهتزة (نواس مرن):

تتميز الجملة المهتزة بمقادير مميزة للحركة تتمثل في:

1- سعة الحركة أو سعة الإهتزاز X : يدعى المقدار $X=\frac{[AA']}{2}=+X_M$ بسعة الحركة وهو مقدار موجب دوما.

2- الدور الذاتي للحركة T_0 (S): هو زمن إهتزازة واحدة أي الزمن الفاصل بين مرورين متتالين للجسم من نفس الموضع وفي نفس الإتجاه، يتعلق بكتلة الجسم m التي تقدر بوحدة (Kg)، وثابت مرونة النابض K الذي يقدربوحدة (N/m) عبارته: $T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$.

3- التواتر الذاتي f_0 بالهرتز (Hz) أو (S^{-1}): هو عدد الاهتزازات في الثانية الواحدة ويعطى بالعلاقة : $f_0=\frac{1}{T_0}$.

4- النبض الذاتي للحركة ω_0 بـ (rad/s): النبض الذاتي مرتبط بالدور الذاتي للحركة: $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$ أي: $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

5- السرعة العظمى $v_{max}=X_{max}.\omega_0$ بـ (m/S^1): تمثل سرعة الجسم عند مروره بوضع التوازن.

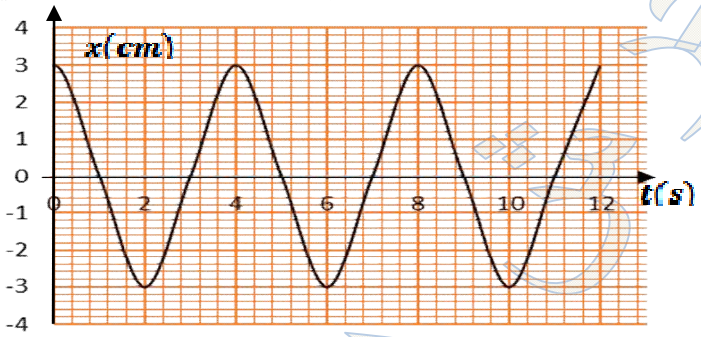
- إذا كان المتحرك يتحرك في الإتجاه الموجب: $v=+v_{max}=X_{max}.\omega_0$.
- إذا كان المتحرك يتحرك في الإتجاه السالب: $v=-v_{max}=-X_{max}.\omega_0$

6- التسارع الأعظمي $a_{max}=X_{max}.\omega_0^2$ **بـ (m/S^2):**

- في المطال الأعظمي الموجب يكون التسارع: $a=-a_{max}=-X_{max}.\omega_0^2$
- في المطال الأعظمي السالب يكون التسارع: $a=+a_{max}=+X_{max}.\omega_0^2$

تمرين تطبيقي01

في الشكل المقابل نمثل تغيرات فاصلة مركز عطالة جسم صلب (S) لجملة مهتزة (جسم –نابض) حيث النابض أفقي حلقاته غير متلاصقة



1- مانمط الإهتزازات الموضحة بالشكل..

2- لاحظ الشكل جيدا ثم حدد المقادير المميزة التالية:

- سعة الحركة - الدور الذاتي للحركة T_0
- التواتر الذاتي f_0 - النبض الذاتي ω_0
- السرعة العظمى v_{max} - التسارع الأعظمي a_{max}

الحل:

1- بمأن سعة الإهتزاز ثابتة فإن نمط الإهتزازات هو: **اهتزازات حرة غير متخامدة.**

2- تحديد المقادير المميزة:

- **سعة الحركة أو سعة الإهتزاز X :** $X=+X_M=3Cm=3\times10^{-2}m$
- **الدور الذاتي للحركة T_0 :** من البيان يتضح زمن إهتزازة واحدة هو $T_0=4s$
- **التواتر الذاتي f_0 :** $f_0=\frac{1}{T_0}=\frac{1}{4}Hz\Rightarrow f_0=0,25s^{-1}$
- **النبض الذاتي ω_0 :** لدينا $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{2\pi}{4}=0,5\pi=1,57rad/s$
- **السرعة العظمى v_{max} :** $v_{max}=X.\omega_0=3\times10^{-2}\times1,57=4,71\times10^{-2}m/s$
- **التسارع الأعظمي a_{max} :** $a_{max}=X.\omega_0^2=3\times10^{-2}\times(1,57)^2=7,39\times10^{-2}m/s^2$



موقع الجزائري
WWW.DZPEN.COM

ثانيا: المعادلة التفاضلية للحركة (اهتزازات حرة غير متخامدة حالة إحتكاك مهمل):

تتميز الجملة المهتزة (نواس مرن) بمعادلة تفاضلية للحركة تكتب بالشكل: $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$ أو $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية ومتجانسة حلها دالة جيبية بدلالة الزمن من الشكل : $x(t)=XCos(\omega_0 t+\varphi)$

حيث : $X=+X_M$ سعة الحركة **(m)**

ω_0 نبض ذاتي لحركة (rad/s)

$(\omega_0 t+\varphi)$ صفحة الحركة

φ_0 : الصفحة الابتدائية للحركة تحدد من الشروط الإبتدائية (من أجل اللحظة الإبتدائية $t=0$).

تمرين تطبيقي02

يتألف نواس مرن من نابض حلقاته غير متلاصقة ثابت مرونته $K=62,5N/Kg$ مثبت من طرف والطرف الثاني متصل بجسم (s) كتلته m تتميز حركة هذه الجملة المهتزة بمعادلة تفاضلية للحركة من الشكل: $\frac{d^2x}{dt^2}+625.x=0$

1- هل نمط الإهتزازات حرة متخامدة؟ علل.

2- إذا علمت أن المعادلة التفاضلية تكتب بالشكل $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$ وحلها يكتب بالشكل: $x(t)=X_{max}Cos(\omega_0 t+\varphi)$

أثبت أن: $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

3- إستنتج النبض الذاتي للحركة ثم أحسب كل من الدور الذاتي T_0 والتواتر الذاتي f_0

4- أحسب **m** كتلة الجسم (s).

الحل:

1- المعادلة تفاضلية من الشكل $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0$ فهي من الرتبة الثانية ومتجانسة إذن **اهتزازات حرة غير متخامدة.**

2- إثبات أن: $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ لدينا حل المعادلة التفاضلية يكتب بالشكل: $x(t)=X_{max}Cos(\omega_0 t+\varphi)$

المشتق الأول: $\frac{dx(t)}{dt}=-\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t+\varphi)$

المشتق الثاني: $\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-\omega_0^2 X_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$

ولدينا $x(t)=X_{max}Cos(\omega_0 t+\varphi)$ بالتعويض في المشتق الثاني نجد: $\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-\omega_0^2.x(t)$

ومنه : $\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega_0^2.x(t)=0$ بالمطابقة مع $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0$ نجد: $\omega_0^2=\frac{k}{m}$ وعليه: $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

3- إستنتاج النبض الذاتي للحركة بمطابقة المعادلة التفاضلية نجد: $\omega_0^2=625$ وعليه $\omega_0=25rad/s$

حساب الدور الذاتي T_0 لدينا: $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$ إذن: $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\times3,14}{25}\approx0,25s$

- **التواتر الذاتي** f_0 : $f_0=\frac{1}{T_0}=\frac{1}{0,25}=4Hz\Rightarrow f_0=4s^{-1}$

4- حساب **m** كتلة الجسم (s): $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega_0^2=\frac{k}{m}\Rightarrow m=\frac{k}{\omega_0^2}=\frac{62,5}{625}=0,1kg=100g$.

WWW.DZPEN.COM

3-2- الدراسة النظرية للجملة المهتزة نواس مرن:

نشاط توضيحي:

جملة مهتزة (جسم نابض) حيث الجسم كتلته m و النابض ثابت مرونته k كما هو موضح بالشكل أسفله نزيح الجسم عن وضع توازنه في الإتجاه الموجب ونتركه دون سرعة إبتدائية. (نعتبر جميع الإحتكاكات مهملة)

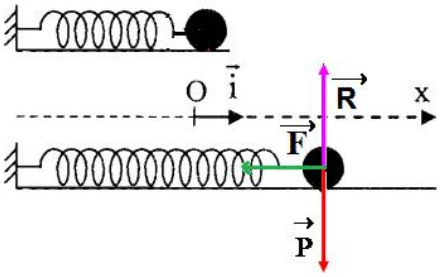


1- ماهو المرجع المناسب للدراسة وماهو الشرط الذي يجعله غاليليا بتقريب جيد.
2- أذكر القوى المؤثرة على الجسم ومثلها.
3- أكتب المعادلة التفاضلية للحركة وقدم حلا لها (عبارة المطال)
4- أكتب العبارة الزمنية لسرعة v
5- أكتب العبارة الزمنية لتسارع a
6- أوجد عبارة كل من النبض الذاتي ω_0 والدور الذاتي T_0 بدلالة k و m.

الحل:

1- **المرجع المناسب للدراسة** هو المرجع السطحي أرضي نعتبر غاليليا ولكي يتحقق يجب أن يكون زمن إهتزازة واحدة أقل بكثير من دور الأرض حول نفسها.

2- **القوى المؤثرة على** حركة الجسم أثناء حركته:



أ- قوة الثقل $\vec{P}$

ب-قوة رد فعل السطح على الجسم $\vec{R}$

ج-قوة الإرجاع $F=-K.x(t)$:

تعتبر سبب الحركة الإهتزازية تعمل على إرجاع الجسم إلى وضع توازنه وتتميز بالخصائص التالية:

- **نقطة التأثير: مركز عطالة الجسم** - **الحامل: محور النابض**
- **الإتجاه: تتجه دائما نحو موضع التوازن O** - **الشدة:** $F=K.|x|$

3- **المعادلة التفاضلية للحركة:** بتطبيق قانون نيوتن الثاني على الجسم : $\sum \vec{F}_{ext}=m\vec{a}_G$

$$\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}=m.\vec{a}$$

وبالاسقاط على المحور **OX** نجد: $0+0-Kx=ma$

وعليه يمكننا كتابتها بالشكل: $m.\frac{d^2x}{dt^2}+Kx=0$ بالقسمة على **m** نجد: $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية بالنسبة لـ x تقبل حل من الشكل: $x(t)=X_{max}Cos(\omega_0 t+\varphi)$

4- **العبارة الزمنية للسرعة نعلم أن:** $v=\frac{dx(t)}{dt}$ وعليه بإشتقاق حل المعادلة التفاضلية نجد:

$$v(t)=-\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

5- **العبارة الزمنية لتسارع نعلم أن:** $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$ وعليه بإشتقاق العبارة الزمنية للسرعة نجد:

$$a(t)=-\omega_0^2 X_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

6- **إيجاد عبارة كل من النبض الذاتي ω_0 والدور الذاتي T_0 بدلالة k و m.**

وجدنا عبارة التسارع $a=-\omega_0^2 X_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$ حيث $a=\frac{d^2x}{dt^2}$ و $x(t)=X_{max}Cos(\omega_0 t+\varphi)$ بالتعويض

نجد: $\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega_0^2 x(t)$ وعليه بالمطابقة مع: $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x(t)=0$ نجد $\frac{d^2x}{dt}+\frac{k}{m}x=0$ إذن: $\omega_0^2=\frac{k}{m}$:إذن $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

عبارة الدور الذاتي T_0 : لدينا $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$ إذن $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$ وعليه نجد: $T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

موقع الجزائر
WWW.DZPEN.COM

تغيرات التسارع a بدلالة المطال x:

وجدنا عبارة التسارع من الشكل:

$$a = -\omega_0^2 X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

ولدينا عبارة المطال من الشكل:

$$x(t) = X_{max}Cos(\omega_0 t + \varphi)$$

بتعويض عبارة المطال في عبارة التسارع نجد:

$$a = -\omega_0^2 x(t)$$

وعليه نستنتج بأن التسارع يتغير بتغير المطال (الشكل المقابل) حيث:

ينعدم التسارع عند **موضع التوازن**

$$a = -\omega_0^2 x(0) = 0$$

ياخذ قيمة موجبة **عند المطال الأعظمي السالب**

$$a = -\omega_0^2(-X_{max})$$

$$a = \omega_0^2 X_{max} =$$

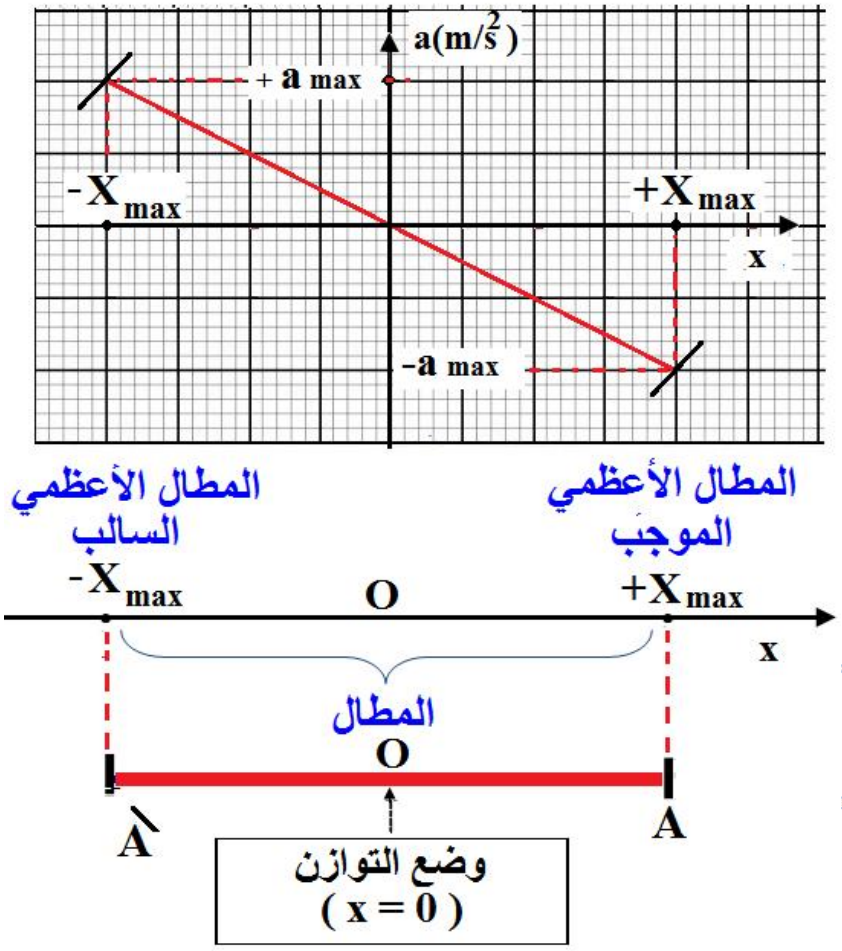
$$a = +a_{max} \succ 0$$

ياخذ قيمة سالبة **عند المطال الأعظمي الموجب**

$$a = -\omega_0^2(+X_{max})$$

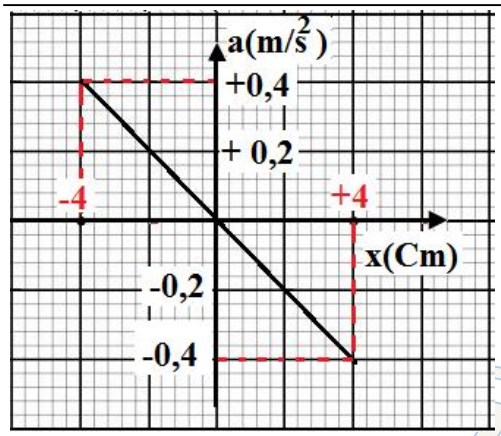
$$a = -\omega_0^2 X_{max} =$$

$$a = -a_{max} \prec 0$$



تمرين تطبيقي03

نثبت كرية كتلتها (m) بنابض مرن افقي حلقاته غير متلاصقة ثابت مرونته K نزيح الكتلة (m) عند اللحظة $(t=0)$ عن وضع التوازن ونتركها دون سرعة ابتدائية نمثل مخطط التسارع بدلالة المطال $a = f(x)$



1- أكتب معادلة البيان ثم حدد نمط الإهتزاز الحادث مع التعليل.

2- من البيان أوجد المقادير التالية:

التسارع الأعظمي a_{max} ، سعة الاهتزازات X_m ، أحسب النبض الذاتي ω_0

الدور الذاتي T_0. يعطى: $\pi^2 \approx 10$

الحل:

1- البيان خط مستقيم معادلته: $a = A.x$ حيث A يمثل الميل: $A = \frac{-0,4-0}{(4-0).10^{-2}} = -10$ وعليه: $a = -10x$.

نمط الإهتزاز حر غير متخامد لأن معادلة البيان من الشكل $\frac{d^2x}{dt^2} + 10x = 0$ وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية

2- تحديد المقادير من البيان:

التسارع الأعظمي $a_{max} = 0,4m/s^2$

سعة الاهتزازات $X_m = +4Cm$

النبض الذاتي بمطابقة $\frac{d^2x}{dt^2} + 10x = 0$ مع المعادلة التفاضلية: $\frac{d^2x}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ نجد $\omega_0^2 = 10$ إذن $\omega_0^2 = \pi^2$

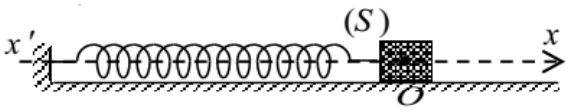
وعليه النبض الذاتي هو $\omega_0 = \pi = 3,14rad/s$

الدور الذاتي: لدينا $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ وعليه: $T_0 = \frac{2\pi}{\pi} = 2s$

لتحميل المزيد من الملفات تشرفنا زيارتكم للموقع: www.touahria.com
موقع الجزائري
WWW.DZPEN.COM

تمرين تطبيقي04

نثبت أفقيا نابض مرن حلقاته غير متلاصقة ثابت مرونته $K=100N/m$ وبطرفه الحر نثبت جسم صلب كتلته $(m)=250g$ نزيح الجسم عن عن وضع التوازن بمقدار $(x_m=+5Cm)$ ونتركه عند اللحظة $(t=0)$ دون سرعة ابتدائية علما أن جميع الإحتكاكات مهملة.



1- مثل القوى المؤثرة على الكرية عند الفاصلة $(+x_m)$
ثم حدد تلك القوة المسؤولة عن الحركة

2- هل سيكون نمط الإهتزاز حرة متخامدة ؟ برر إجابتك.

3- أكتب المعادلة التفاضلية للحركة ثم أكتب المعادلة الزمنية للحركة $x=f(t)$

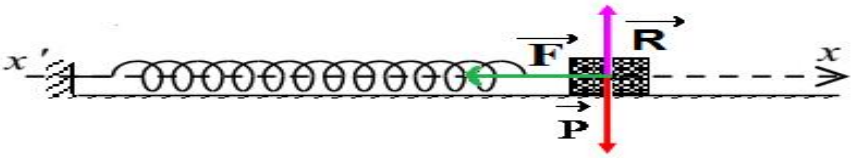
4- أكتب العبارة الزمنية لكل من السرعة $v=f(t)$ والتسارع $a=g(t)$

5- مثل المخططات $x=f(t)$ ثم $v=h(t)$ ، $a=g(t)$

6- أحسب قيمة قوة الإرجاع عند المرور بالمطال الأعظمي الموجب.

الحل:

1- تمثيل القوى موضح على الشكل.



القوة المسؤولة عن الحركة هي قوة الإرجاع $F=-K.x(t)$ لأنها تعمل على إعادة الجسم إلى وضع توازنه و إتجاهها يكون دوما نحو موضع التوازن **(O)**.

2- بمأن الإحتكاكات مهملة فإن نمط **الإهتزازات حرة غير متخامدة**

3- **المعادلة التفاضلية للحركة:**

4- بتطبيق قانون نيوتن الثاني على الجسم : $\sum \vec{F}_{ext}=m\vec{a}_G$

$$\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}=m.\vec{a}$$

وبالاسقاط على المحور **OX** نجد: $0+0-Kx=ma$

$$-k.x=m.\frac{d^2x}{dt^2}$$

وعليه يمكننا كتابتها بالشكل: $m.\frac{d^2x}{dt^2}+Kx=0$

بالقسمة على **m** نجد: $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية بالنسبة لـ x تقبل حل من الشكل: $x(t)=X\ Cos(\omega_0 t+\varphi)$

حيث X **سعة الحركة** قيمتها $X=+X_M=5Cm$

حساب النبض الذاتي للحركة: $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ بالتعويض نجد $\omega_0=\sqrt{\frac{100}{0;25}}=20.rad/s$

إيجاد الصفحة الإبتدائية φ_0 **:**

بإعتبار الشرط الإبتدائي الموضح في نص التمرين (عند اللحظة $(t=0)$ نزيح الجسم عن عن وضع التوازن بمقدار $(x(0)=x_m=+5Cm)$ ، بالتعويض اللحظة t=0 في حل المعادلة التفاضلية نجد : $x(0)=X_m.\cos(0+\varphi_0)$

وعليه: $x_m=x_m\cdot\cos\varphi_0$

ومنه: $\cos\varphi_0=1$ إذ ن: $\varphi_0=0$

المعادلة الزمنية للحركة $x=f(t)$ **تكتب بالشكل:** $x(t)=5.Cos20t.....Cm$

$$x(t)=5\times10^{-2}Cos20t.....m$$

WWW.DZPEN.COM

1- العبارة الزمنية للسرعة نعلم أن: $v=\frac{dx(t)}{dt}$ وعليه بإشتقاق حل المعادلة التفاضلية نجد:

$v(t)=-1\sin 20t.....m/s$: أي $v(t)=-100\times10^{-2}\sin 20t.....m/s$

2- العبارة الزمنية لتسارع نعلم أن: $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$ وعليه بإشتقاق العبارة الزمنية للسرعة نجد:

$a(t)=-20Cos20t.....m$

5- تمثل المخططات $x=f(t)$ ثم $v=h(t)$ ، $a=g(t)$

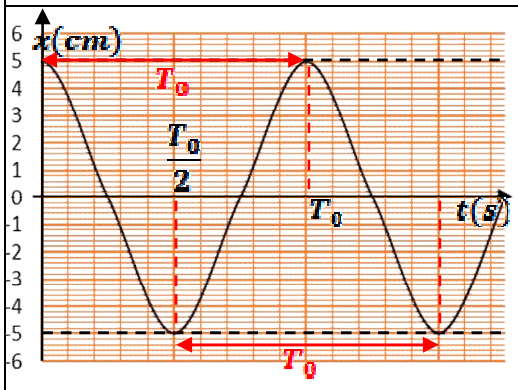
العبارة الزمنية	تمثيل المخططات

المطال: $x=f(t)$

$x(t)=5.Cos20t.....Cm$

$x(t)=5.Cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right).....Cm$

حيث T_0 يمثل الدور الذاتي

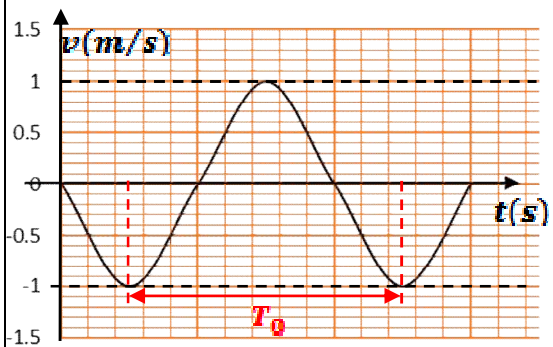


t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$Cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$	$+1$	0	-1	0	$+1$
$x(cm)$	$+5$	0	-5	0	$+5$

السرعة: $v=\frac{dx(t)}{dt}$

$v(t)=-1\sin 20t.....m$

$v(t)=-1\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)..m/s$



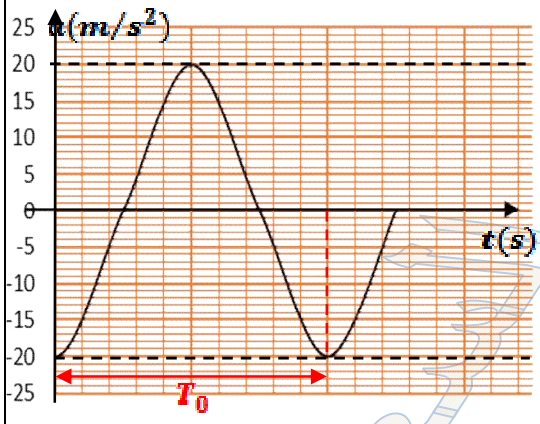
t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$-Sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$	0	-1	0	$+1$	0
$v(m/s)$	0	-1	0	$+1$	0

التسارع:

$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$

$a(t)=-20Cos20t...m/s^2$

$a(t)=-20\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)..m/s^2$



t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$\frac{2\pi}{T_0}t$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$-Cos\frac{2\pi}{T_0}t$	-1	0	$+1$	0	-1
$a(m/s^2)$	-20	0	$+20$	0	-20

6- حساب قيمة قوة الإرجاع عند المرور بالمطال الأعظمي الموجب:

طريقة01: لدينا $F=-K.x(t)$ وبما أن المطال أعظمي موجب فإن $x(t)=+X_M=5\times10^{-2}m$ وعليه نجد:

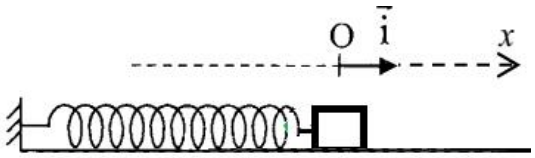
$F=-K.X_M=-100\times5\times10^{-2}=-5N$

طريقة02: لدينا $F=ma$ وبما أن المطال أعظمي موجب فإن $x(t)=+X_M=5\times10^{-2}m$ أي أن: $a=-a_{max}=-20$ وعليه نجد: $F=ma=0,25(-20)=-5N$

WWW.DZPEN.COM

تمرين تطبيقي05

جسم صلب كتلته $(m)=400g$ مثبت بنابض أفقي مرن حلقاته غير متلاصقة ثابت مرونته $K=100N/m$ كما هو موضح **بالشكل** عند اللحظة نزيح الجسم عن عن وضع التوازن وذلك بضغطه على النابض بمقدار $2Cm$ ونتركه عند اللحظة $(t=0)$ دون سرعة ابتدائية علما أن جميع الإحتكاكات مهملة.



1- مثل القوى المؤثرة على الكرية عند الفاصلة $(-x_m)$.

2- أكتب المعادلة التفاضلية للحركة

3- أحسب الدور الذاتي T_0 ثم أكتب المعادلة الزمنية للحركة $x=f(t)$.

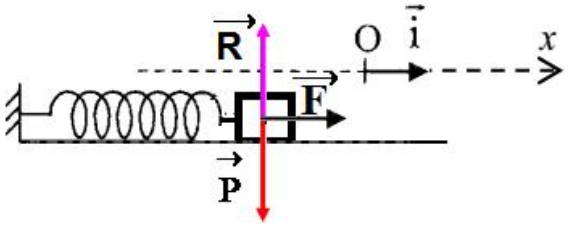
4- أكتب العبارة الزمنية لكل من السرعة $v=f(t)$ والتسارع $a=g(t)$ يعطى: $\pi^2\approx 10$.

5- مثل المخططات $x=f(t)$ ثم $v=f(t)$، $a=g(t)$

6- أحسب قيمة قوة الإرجاع عند المرور بالمطال الأعظمي السالب.

الحل:

1- تمثيل القوى موضح على الشكل.



2- **المعادلة التفاضلية للحركة:**

بتطبيق قانون نيوتن الثاني على الجسم : $\sum \vec{F}_{ext}=m\vec{a}_G$

$$\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}=m.\vec{a}$$

وبالاسقاط على المحور **OX** نجد: $0+0-Kx=ma$

$$-k.x=m.\frac{d^2x}{dt^2}$$ وعليه يمكننا كتابتها بالشكل: $m.\frac{d^2x}{dt^2}+Kx=0$

بالقسمة على **m** نجد: $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$

3- **حساب الدور الذاتي T_0 : لدينا** $T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ وعليه $T_0=2\pi\sqrt{\frac{0,4}{100}}$ إذن $T_0=0,397\ s\approx 0,4s$

كتابة المعادلة الزمنية للحركة $x=f(t)$: المعادلة تفاضلية من الدرجة الثانية بالنسبة لـ x تقبل حل من الشكل:

$$x(t)=XCos(\omega_0 t+\varphi)$$

حيث: X **سعة الحركة دائما مقدار موجب** قيمتها $X=+X_M=2Cm$

إيجاد الصفحة الإبتدائية φ_0 : بإعتبار الشرط الإبتدائي الموضح في نص التمرين(نزيح الجسم عن عن وضع التوازن وذلك بضغطه على النابض بمقدار $2Cm$) أي أنه عند اللحظة $(t=0)$ لدينا: $(x(0)=-x_m=-2Cm)$

بالتعويض اللحظة t=0 في حل المعادلة التفاضلية نجد : $x(0)=X_m.\cos(0+\varphi_0)$

وعليه: $-x_m=x_m\cdot\cos\varphi_0$

ومنه: $\cos\varphi_0=-1$ إذ ن: $\varphi_0=\pi$

المعادلة الزمنية للحركة $x=f(t)$ تكتب بالشكل: $x(t)=2.\left(Cos\frac{2\pi}{T_0}t.+\pi\right).....Cm$

$$x(t)=2.Cos\left(\frac{2\pi}{0;4}t+\pi\right).....Cm$$

وعليه: $x(t)=2.Cos(5\pi.t+\pi).....Cm$

WWW.DZPEN.COM

4- العبارة الزمنية للسرعة نعلم أن: $v=\frac{dx(t)}{dt}$

وعليه بإشتقاق حل المعادلة التفاضلية نجد:

$$v(t)=-5\pi\times 2.10^{-2}\sin(5\pi.t+\pi).....m/s$$

$$v(t)=-0,1\pi\sin(5\pi t+\pi).....m/s$$

العبارة الزمنية لتسارع نعلم أن: $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$ وعليه

بإشتقاق العبارة الزمنية للسرعة نجد:

$$a(t)=-5.\pi\times 0,1.\pi Cos(5\pi.t+\pi).....m/s^2$$

$$a(t)=-0,5.\pi^2 Cos(5\pi.t+\pi).....m/s^2$$

$$a(t)=-5.Cos(5\pi.t+\pi).....m/s^2$$

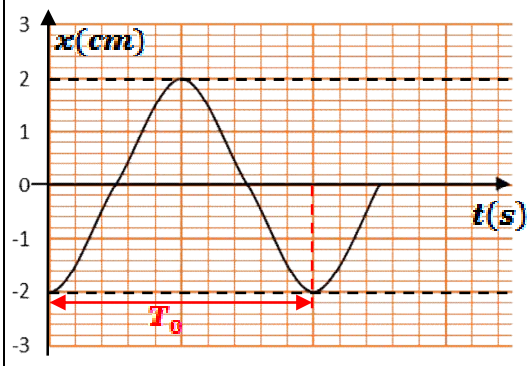
5- تمثل المخطاطات $x=f(t)$ ثم $v=h(t)$ ، $a=g(t)$

العبارة الزمنية	تمثيل المخططات

المطال: $x=f(t)$

$$x(t)=2.Cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\pi\right)..Cm$$

حيث T_0 يمثل الدور الذاتي

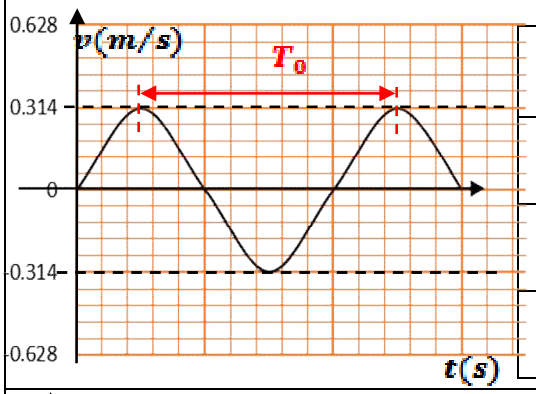


t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\pi\right)$	0	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
$Cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\pi\right)$	-1	0	$+1$	0	-1
$x(cm)$	-2	0	$+2$	0	-2

السرعة: $v=\frac{dx(t)}{dt}$

$$v(t)=-0,1\pi\sin(5\pi t+\pi).$$

$$v(t)=-0,314\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\pi\right)$$

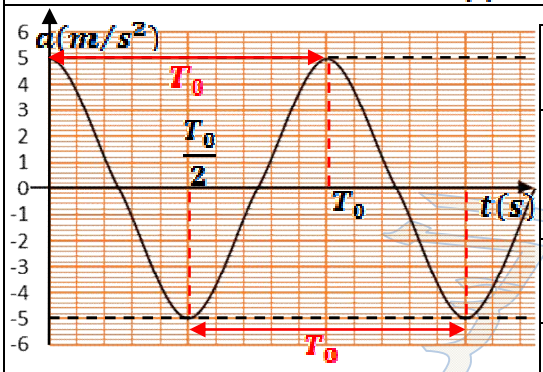


t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\pi\right)$	0	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
$-\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\pi\right)$	0	$+1$	0	-1	0
$v(m/s)$	0	0,314	0	$-0,314$	0

التسارع: $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$

$$a(t)=-5.Cos(5\pi.t+\pi)$$

$$a(t)=-5.Cos(\frac{2\pi}{T_0}.t+\pi)$$



t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\pi\right)$	0	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
$-Cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\pi\right)$	$+1$	0	-1	0	$+1$
$a(m/s^2)$	$+5$	0	-5	0	$+5$

6- حساب قيمة قوة الإرجاع عند المرور بالمطال الأعظمي السالب:

طريقة01: لدينا $F=-K.x(t)$ وبما أن المطال أعظمي سالب فإن $x(t)=-X_M=-2\times10^{-2}m$ وعليه نجد:

$$F=+K.X_M=100\times2\times10^{-2}=2N$$

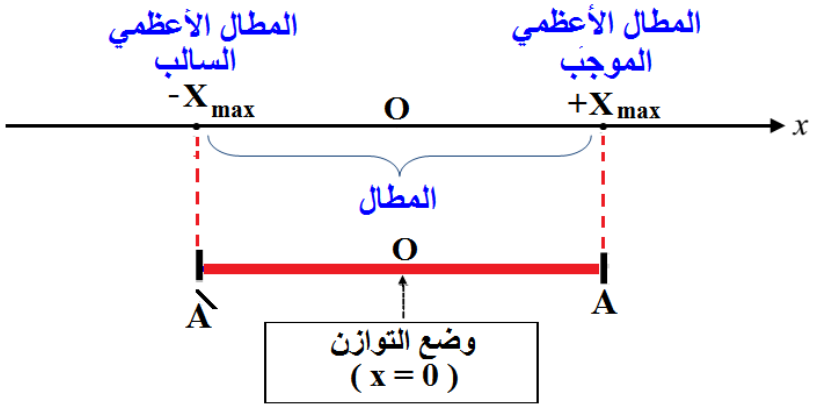
طريقة02: لدينا $F=ma$ وبما أن المطال أعظمي سالب فإن $x(t)=-X_M=-2\times10^{-2}m$ أي أن: $a=a_{max}=5m/s^2$

وعليه نجد: $F=ma=0,4\times5=2N$ ،

WWW.DZPEN.COM

ملاحظات مهمة:

أثناء الحركة الإهتزازية فإنه يحدث ذهاب وإياب لمركزعطالة الجسم **(S)** على موضع التوازن **O** إن أهم المصطلحات التي يجب إستعمالها موضحة في الشكل التالي:



أثناء حركة الذهاب والإياب تتغير المقادير الفيزيائية: المطال $x(t)$ ، **السرعة** $v(t)$ ، **التسارع** $a(t)$ ، **قوة الإرجاع** $F(t)$
الطاقة الحركية $E_C(t)$ **الطاقة الكامنة المرونية** $E_{Pe}(t)$

الطاقة الحركية للجملة (جسم + نابض): تمثل الطاقة الحركية للجسم $E_C(t)=\frac{1}{2}mv^2(t)$

حيث **m** كتلة الجسم (Kg) و $v(t)$ السرعة بـ m/s.

الطاقة الكامنة المرونية للجملة (جسم + نابض): تمثل الطاقة المرونية للنابض $E_{pe}(t)=\frac{1}{2}kx^2(t)$

حيث **k** ثابت مرونة النابض (N/Kg) و $x(t)$ المطال بـ m.

إن تغيرات المقادير السابقة ندرجها في الجدول التالي:

المقدار	المطال الأعظمي الموجب	وضع التوازن	المطال الأعظمي السالب
المطال $x(t)$	$+X_{max}$	$x=0$	$-X_{max}$
السرعة $v(t)$	$v=0$	$v=\pm v_{max}=\pm X_{max}\omega_0$ **إذاكان يتجه نحو الإتجاه الموجب نجد:** $v=+v_{max}=X_{max}\omega_0$ **إذاكان يتجه نحو الإتجاه السالب نجد:** $v=-v_{max}=-X_{max}\omega_0$	$v=0$
التسارع $a(t)$	$a=-a_{max}=-X_{max}.\omega_0^2$	$a=0$	$a=+a_{max}=X_{max}.\omega_0^2$
قوة الإرجاع $F(t)$	$F=-Kx(t)=-K.X_{max}$ $F=m.a=-m.a_{max}$	$F=0$	$F=-Kx(t)=K.X_{max}$ $F=m.a=m.a_{max}$
الطاقة الحركية $E_C(t)$	$E_C=0$	$E_C(t)=\frac{1}{2}mv_{max}^2$	$E_C=0$
الطاقة الكامنة المرونية $E_{Pe}(t)$	$E_{pe}=\frac{1}{2}kX_{max}^2$	$E_{Pe}=0$	$E_{pe}=\frac{1}{2}kX_{max}^2$

WWW.DZPEN.COM

ثالثا: الدراسة الطاقوية للجملة المهتزة (نواس مرن):

3- تغيرات الطاقة بدلالة الزمن: (حالة غياب الاحتكاكات)

(بإختار المستوي الافقي مرجع للطاقات الكامنة الثقلية)

- **الطاقة الحركية للجملة (جسم + نابض):** تمثل الطاقة الحركية للجسم $E_C(t)=\frac{1}{2}mv^2(t)$

حيث **m** كتلة الجسم (Kg) و $v(t)$ السرعة بـ m/s .

ونعلم أن $v(t)=-\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t+\varphi)$ بالتعويض في عبارة الطاقة الحركية نجد:

$$E_C(t)=\frac{1}{2}m.[-\omega_0 X\sin(\omega_0 t+\varphi)]^2 \Rightarrow \quad E_C(t)=\frac{1}{2}m\omega_0^2 X_{max}^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi)$$

ولدينا: $\omega_0^2=\frac{k}{m}$ إذن لدينا : $m\omega_0^2=k$ بالتعويض نجد: $E_C(t)=\frac{1}{2}kX_{max}^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi)$

- **الطاقة الكامنة المرونية للجملة (جسم + نابض):** تمثل الطاقة المرونية للنابض $E_{pe}(t)=\frac{1}{2}kx^2(t)$

حيث **k** ثابت مرونة النابض (N/Kg) و $x(t)$ المطال بـ m .

ونعلم أن $x(t)=X_{max}Cos(\omega_0 t+\varphi)$ بالتعويض في عبارة الطاقة الكامنة الثقلية نجد:

$$E_{pe}(t)=\frac{1}{2}k[X_{max}Cos(\omega_0 t+\varphi)]^2 \Rightarrow \quad E_{pe}(t)=\frac{1}{2}kX_{max}^2Cos^2(\omega_0 t+\varphi)$$

- **طاقة الجملة (جسم + نابض): تمثل مجموع الطاقتين:** $E_T=E_C+E_{Pe}$

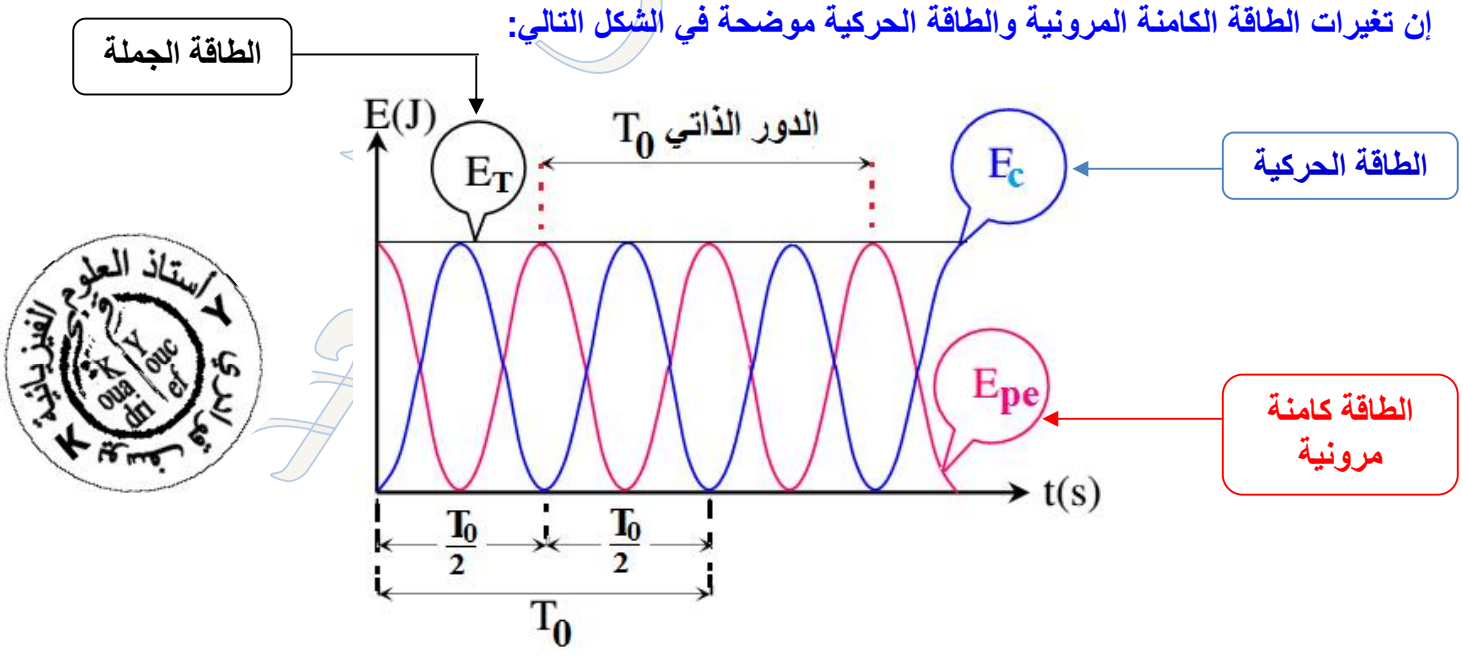
$$E_T=\frac{1}{2}k.X_{max}^2os^2(\omega_0.t+\varphi)+\frac{1}{2}kX_{max}^2\sin^2(\omega_0.t+\varphi)$$

$$E_T=\frac{1}{2}k.X_{max}^2\underbrace{[\cos^2(\omega_0.t+\varphi)+\sin^2(\omega_0.t+\varphi)]}\Rightarrow E_T=\frac{1}{2}k.X_{max}^2=cte$$

$$[\cos^2(\omega_0.t+\varphi)+\sin^2(\omega_0.t+\varphi)]=1$$

الإستنتاج: نستنتج ان طاقة الجملة (جسم + نابض) ثابتة مهما كان الزمن $E_T=\frac{1}{2}k.X_{max}^2$

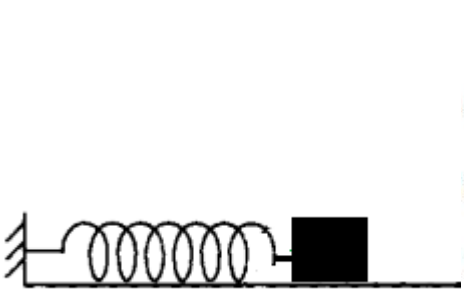
إن تغيرات الطاقة الكامنة المرونية والطاقة الحركية موضحة في الشكل التالي:

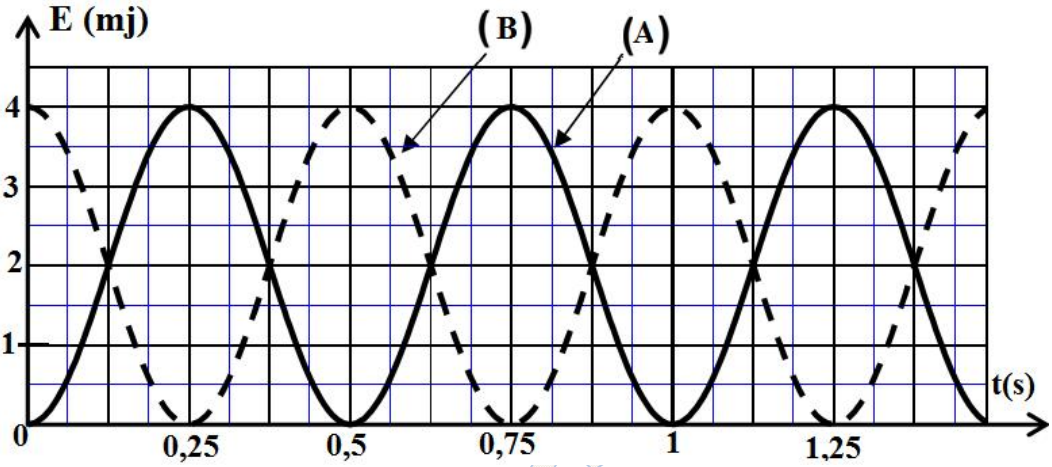


WWW.DZPEN.COM

تمرين تطبيقي06

نعتبر الجملة المهتزة **(جسم + نابض)** علما أن النابض مرن حلقاته غير متلاصقة ثابت مرونته $K=5N/m$ والجسم كتلته (m) نعتبر نقطي نزيح الجسم عند اللحظة $(t=0)$ عن وضع توازنه وذلك بمقدار $(+x_m)$ ونتركه عند اللحظة t=0 دون سرعة ابتدائية . **(بإختار المستوي الافقي مرجع للطاقات الكامنة الثقلية)** بواسطة تجهيز مناسب نتحصل على منحنيات الطاقة الكامنة المرونية والطاقة الحركية الموضحة في الشكل ادناه





1- حدد المنحني الموافق الطاقة الحركية E_c و المنحني الموافق للطاقة الكامنة الثقلية E_{pe} مع التعليل.

2- حدد قيم المقادير التالية: الطاقة الحركية العظمى $E_c(\max)$ ، الدور الذاتي T_0 ثم أحسب النبض الذاتي ω_0 سعة الحركة X_m ، كتلة الجسم m ، التسارع الأعظمي $a_{\max}$ ، السرعة العظمى $v_{\max}$ ، يعطى: $\pi^2 \approx 10$

الحل:

1- المنحني الموافق للطاقة الحركية E_c هو المنحني (A) لأن السرعة عند اللحظة t=0 معدومة $v_0=0$ وعليه الطاقة الحركية عند اللحظة t=0 تكون معدومة $E_C(0)=\frac{1}{2}mv^2(0)=0$

المنحني الموافق للطاقة الكامنة الثقلية E_{pe} هو المنحني (B) لأن الكرية في المطال الأعظمي الموجب $x(0)=+X_{\max}$

وعليه الطاقة الكامنة المرونية أعظمية: $E_{pe}(0)=\frac{1}{2}kX_{\max}^2$

2- تحديد قيم المقادير:

الطاقة الحركية العظمى $E_c(\max)=4mj=4\times10^{-3}\,j$

الطاقة الكامنة المرونية العظمى $E_{pe}(\max)=4mj=4\times10^{-3}\,j$

الدور الذاتي : T_0 $T_0=1s$

النبض الذاتي : ω_0 $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{2\pi}{1}=2\pi=2(3{,}14)=6{,}28s$

سعة الحركة : $X_{\max}$ **لدينا** $E_{pe}(0)=\frac{1}{2}kX_{\max}^2$

إذن: $2.E_{pe}(0)=kX_{\max}^2$ وعليه: $X_{\max}^2=\frac{2.E_{pe}(0)}{k}$

$$X_{\max}=\sqrt{\frac{2.E_{pe}(0)}{k}}=\sqrt{\frac{2\times4.10^{-3}}{5}}=0{,}04m\Rightarrow X_{\max}=4Cm$$

كتلة الجسم : m $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega_0=\frac{k}{m}$

$$m=\frac{k}{\omega^2}=\frac{5}{(2\pi)^2}=\frac{5}{4\pi^2}=\frac{5}{4\times10}=0{,}125kg$$

$$m=125g$$

التسارع الأعظمي : $a_{\max}$ $a_{\max}=X_{\max}.\omega_0^2$

$$a_{\max}=4\times10^{-2}(2\pi)^2=1{,}6m/s^2$$

السرعة العظمى : $v_{\max}$ $v_{\max}=X_{\max}.\omega_0$

$$v_{\max}=4\times10^{-2}\times2\pi=0{,}25m/s$$

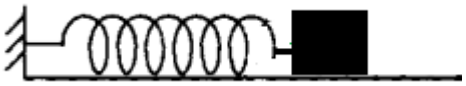
طريقة ثانية: $E_C(\max)=\frac{1}{2}mv^2(\max)$

$$2E_C(\max)=mv^2(\max)=0$$

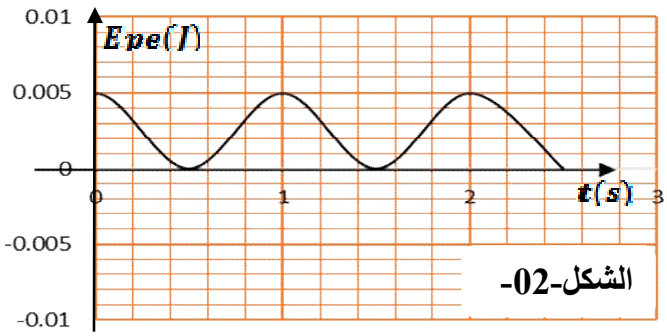
$$v_{\max}=\sqrt{\frac{2.E_c(\max)}{m}}=\sqrt{\frac{2\times4\times10^{-3}}{0{,}125}}=0{,}25m/s$$

WWW.DZPEN.COM

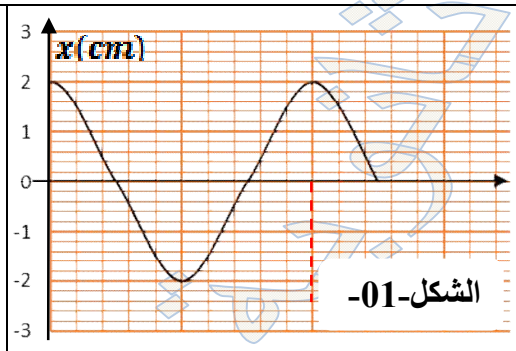
تمرين تطبيقي07



جسم صلب(S) كتلته m مثبت بنابض أفقي مرن حلقاته غير متلاصقة ثابت مرونته K كما هو موضح **بالشكل** عند اللحظة نزيح الجسم عن وضع التوازن ونتركه عند اللحظة $(t=0)$ دون سرعة ابتدائية الشكل-01- يمثل تغيرات الفاصلة بدلالة الزمن $x=f(t)$ بينما الشكل-02- يمثل تغيرات الطاقة الكامنة المرونية بدلالة الزمن $E_{Pe}=g(t)$.



الشكل-02-



الشكل-01-

1- مانمط الإهتزازات الموضحة بالشكل؟ علل. هل توجد قوى إحتكاك؟

2- أكتب عبارة الطاقة الكلية لجملة ثم أوجد المعادلة التفاضلية للحركة.

3- أحسب النبض الذاتي ω_0 ثم أكتب المعادلة الزمنية للحركة.

4- أكتب عبارة الطاقة الكامنة المرونية بدلالة الزمن .

5- حدد من البيان اللحظات التي تكون فيها الطاقة الكامنة المرونية أعظمية؟ كيف تكون الطاقة الحركية عند نفس اللحظات

6- اوجد قيمة كل من ثابت مرونة النابض K وقيمة الكتلة m.

الحل:

1- نمط الإهتزازات:

اهتزازات حرة غير متخامدة

التعليل : سعة الإهتزاز ثابتة.

لاتوجد قوى إحتكاك

2- عبارة طاقة الكلية للجملة:

$$E_T=E_C(t)+E_{Pe}(t)$$

$$E_T=\frac{1}{2}m.v^2(t)+\frac{1}{2}k.x^2(t)$$

المعادلة التفاضلية للحركة.

$$E_T=\frac{1}{2}m.v^2(t)+\frac{1}{2}k.x^2(t)$$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن فنجد :

$$\frac{dE}{dt}=m.v(t).\frac{dv}{dt}+k.x(t)\frac{dx}{dt}$$

$$0=m.v(t).\frac{d^2x}{dt^2}+k.x(t).v(t)$$

$$\Rightarrow m..\frac{d^2x}{dt^2}+k.x(t).=0$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية و متجانسة بالنسبة لـ x

3- حساب النبض الذاتي للحركة:

$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$ من بيان الطاقة الكامنة المرونية يتضح أن الدور الذاتي هو $T_0=2s$ وعليه: $\omega_0=\frac{2\pi}{2}=\pi=3{,}14rad/s$

المعادلة الزمنية للحركة: $x(t)=XCos(\omega_0 t+\varphi)$

حيث X سعة الحركة قيمتها $X=+X_M=2Cm$

إيجاد الصفحة الإبتدائية φ_0 :

من بيان الفاصلة (عند اللحظة $(t=0)$ ، $(x(0)=x_m=+2Cm)$

بالتعويض اللحظة t=0 في حل المعادلة التفاضلية نجد: $x(0)=X_m.\cos(0+\varphi_0)$

وعليه: $x_m=x_m\cdot\cos\varphi_0$ ومنه: $\cos\varphi_0=1$ إذ ن: $\varphi_0=0$

المعادلة الزمنية للحركة $x=f(t)$ تكتب بالشكل: $x(t)=2.\cos\pi t.....Cm$

$$x(t)=2\times10^{-2}\cos(\pi.t).....m$$

4- عبارة الطاقة الكامنة المرونية:

$$E_{pe}(t)=\frac{1}{2}Kx^2(t)=\frac{1}{2}K\left(2\times10^{-2}\cos\pi t\right)^2=2\times10^{-4}K\cos^2\pi t$$

5- اللحظات التي تكون فيها الطاقة الكامنة المرونية أعظمية هي: $t=0,t=1s,t=2s$

الطاقة الحركية عند نفس اللحظات تكون معدومة.

6- ثابت مرونة النابض K : طاقة الكامنة المرونية أعظمية $E_{pe}(\max)=\frac{1}{2}KX^2_{\max}$

$$2E_{pe}(\max)=KX^2_{\max}\Rightarrow K=\frac{2Epe(\max)}{X^2_{MAX}}=\frac{2\times0{,}005}{(0{,}02)^2}=25N/m$$

حساب الكتلة m :

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega_0^2=\frac{k}{m}\Rightarrow m=\frac{k}{\omega_0^2}=\frac{25}{10}=2{,}5kg.$$

WWW.DZPEN.COM

1- طاقة الجملة (نابض + جسم صلب s) حالة غياب الاحتكاكات :

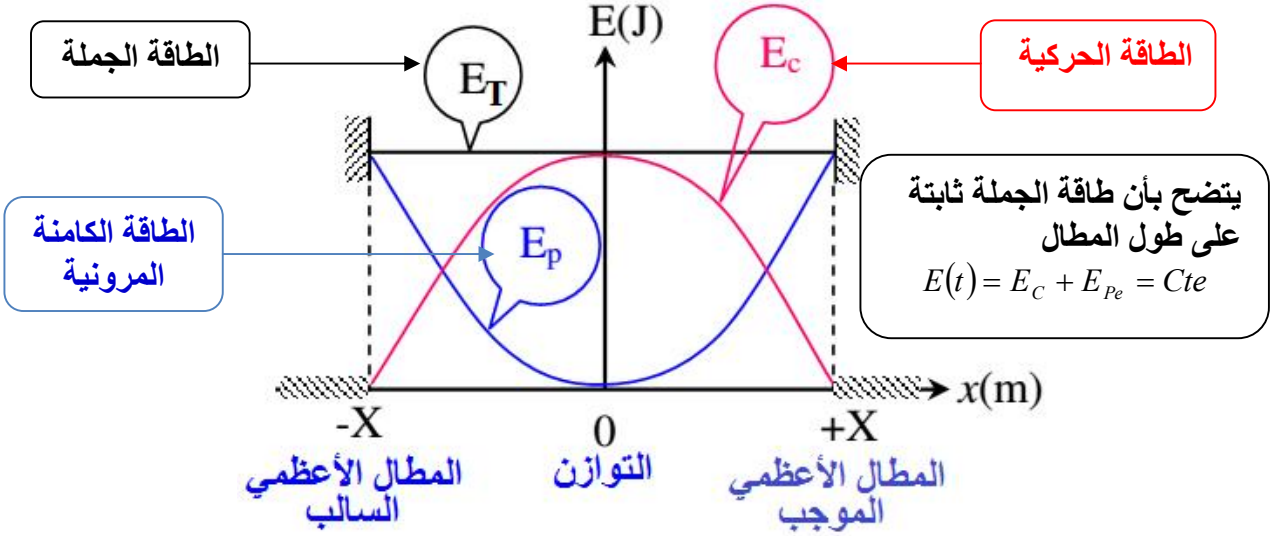
طاقة الجملة هي الطاقة الكلية حيث نكتب: طاقة الجملة = الطاقة الحركية +الطاقة الكامنة

$$E_T = E_C(t) + E_{Pe}(t)$$

$$E_T = \frac{1}{2}m.v^2(t) + \frac{1}{2}k.x^2(t)$$

2- تغيرات الطاقة بدلالة المطال:

تبقى الطاقة الكلية ثابتة رغم تغير كل من الطاقة الحركية والطاقة الكامنة المرونية لأن مجموعهما دائما مقدار ثابت لأنه يحدث تحول من الطاقة الكامنة المرونية إلى طاقة حركية. ندرج أهم النتائج في الجدول التالي

المقدار	المطال الأعظمي الموجب	وضع التوازن	المطال الأعظمي السالب
الطاقة الحركية $E_C(t)$	$E_C = 0$	$E_C(t) = \frac{1}{2}mv^2_{max}$	$E_C = 0$
الطاقة الكامنة المرونية $E_{Pe}(t)$	$E_{pe}(t) = \frac{1}{2}kX^2_{max}$	$E_{Pe} = 0$	$E_{pe}(t) = \frac{1}{2}kX^2_{max}$
طاقة الحملة E_T	$E_T = E_C + E_{pe} = 0 + \frac{1}{2}kX^2_{max}$ $E_T = \frac{1}{2}kX^2_{max}$	$E_T = E_C + E_{pe} = \frac{1}{2}mv^2_{max} + 0$ $E_T = \frac{1}{2}mv^2_{max} = \frac{1}{2}kX^2_{max}$	$E_T = E_C + E_{pe} = 0 + \frac{1}{2}kX^2_{max}$ $E_T = \frac{1}{2}kX^2_{max}$
مخطط الطاقة			

إثبات أن طاقة الجملة ثابتة في كل لحظة : لدينا $E_T = +\frac{1}{2}k.x^2(t) + \frac{1}{2}mv^2(t)$ بتعويض عبارة المطال والسرعة نجد:

$$E_T = \frac{1}{2}k.X^2_{max}\cos^2(\omega_0.t+\varphi) + \frac{1}{2}m.\omega_0^2X^2_{max}\sin^2(\omega_0.t+\varphi)$$

لدينا : $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0^2.m = k$ بالتعويض في المعادلة نجد :

$$E_T = \frac{1}{2}k.X^2_{max}os^2(\omega_0.t+\varphi) + \frac{1}{2}kX^2_{max}\sin^2(\omega_0.t+\varphi)$$

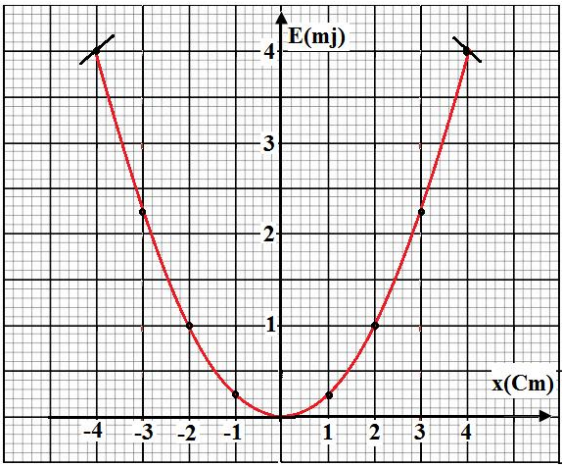
$$E_T = \frac{1}{2}k.X^2_{max}\left[\cos^2(\omega_0.t+\varphi) + \sin^2(\omega_0.t+\varphi)\right] \Rightarrow E_T = \frac{1}{2}k.X^2_{max} = cte$$

اذن طاقة الجملة (نابض+جسم) مقدار ثابت في كل لحظة .

موقع الجزائري
WWW.DZPEN.COM

تمرين تطبيقي08

نثبت كرية كتلتها (m) بنابض أفقي مرن حلقاته غير متلاصقة ثابت مرونته K نزيح الكتلة (m) عند اللحظة $(t=0)$ عن وضع التوازن وذلك بضغطها مقدار $(-x_m)$ ونتركها دون سرعة ابتدائية، نتمكن من رسم تغيرات لشكل من أشكال الطاقة بدلالة المطال. $E=f(x)$



1- أكتب عبارة كل من الطاقة الحركية والطاقة الكامنة المرونية للجملة (جسم نابض) بدلالة المقادير: السرعة $v(t)$، الكتلة (m)، المطال $x(t)$، ثابت مرونة النابض K .

2- إستنتج سعة الحركة.

3- بإعتبار المستوي الأفقي الذي يستند إليه الجسم مرجع للطاقة الكامنة الثقلية أكتب عبارة طاقة الكلية للجملة ثم أثبت أن طاقة الجملة محفوظة.

4- أنسب البيان لشكل الطاقة الموافق مع التعليل.

5- أحسب ثابت مرونة النابض K .

6- إستنتج قيمة الدور الذاتي إذا علمت أن الجملة المهتزة تنجز 6 إهتزازت خلال 3,6 ثانية ثم أحسب قيمة الكتلة (m).

7- ماهي قيمة كل من الطاقة الحركية والسرعة عند مرور الكرية بالموضع الذي فاصلته $x(t)=+2cm$. يعطى: $\pi^2 \approx 10$

الحل:

1- عبارة الطاقة الحركية : $E_C(t)=\frac{1}{2}mv^2(t)$

عبارة الطاقة الكامنة المرونية: $E_{pe}(t)=\frac{1}{2}kx^2(t)$

2- سعة الحركة من البيان يتضح أن $X_{max}=4Cm$

3- عبارة طاقة الجملة: $E_T=E_C(t)+E_{Pe}(t)$

$$E_T=\frac{1}{2}m.v^2(t)+\frac{1}{2}k.x^2(t)$$

إثبات أن طاقة الجملة محفوظة: $E(t)=\frac{1}{2}m.v^2(t)+\frac{1}{2}k.x^2(t)$

$$E_T=\frac{1}{2}k.X_{max}^2\cos^2(\omega_0.t+\varphi)+\frac{1}{2}m.\omega_0^2X_{max}^2\sin^2(\omega_0.t+\varphi)$$

لدينا : $\omega_0^2=\frac{k}{m}\Rightarrow\omega_0^2.m=k$ بالتعويض في المعادلة نجد :

$$E_T=\frac{1}{2}k.X_{max}^2\cos^2(\omega_0.t+\varphi)+\frac{1}{2}kX_{max}^2\sin^2(\omega_0.t+\varphi)$$

$$E_T=\frac{1}{2}k.X_{max}^2=cte$$

4- البيان يوافق الطاقة الكامنة المرونية: $E_{pe}(t)=\frac{1}{2}kx^2(t)$

التعليل: وجدنا بأن طاقة الكلية للجملة ثابتة $E_T=cte$

بينما الطاقة الحركية عند المطال الأعظمي تكون معدومة لأن الكرية إنطلقت بدون سرعة إبتدائية

أما الطاقة الكامنة المرونية عند المطال الأعظمي تكون أعظمية: $E_{pe}(max)=\frac{1}{2}kX_{max}^2$

5- حساب ثابت مرونة النابض K .

لدينا $E_{pe}(0)=\frac{1}{2}kX_{max}^2$ إذن: $2.E_{pe}(0)=kX_{max}^2$

$$K=\frac{2.E_{pe}(max)}{X_{max}^2}=\frac{2\times4\times10^{-3}}{(4\times10^{-2})^2}=5N/m$$

6- حساب الدور الذاتي:

1 إهتزازة: T_0 $\rightarrow$

6 إهتزازات $3,6\,s$ $\rightarrow$

$$T_0=\frac{3,6\times1}{6}=0,6s$$

حساب الكتلة m :

لدينا $T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ إذن $T_0^2=4\pi^2\frac{m}{K}$

$$m=\frac{K.T^2}{4\pi^2}=\frac{5\times(0,6)^2}{4\times10}=0,045\ Kg$$ وعليه:

7- لدينا: $E_T=E_C(t)+E_{Pe}(t)$

وعليه: $E_C(t)=E_T-E_{pe}(t)$

بإسقاط الفاصلة على البيان نجد: $E_{pe}(t)=1\times10^{-3}J$

$$E_C=E_T-E_{pe}(t)=4\times10^{-3}-1\times10^{-3}=3\times10^{-3}J$$

$$E_C=3\times10^{-3}J$$

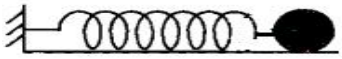
حساب السرعة: لدينا $E_C=\frac{1}{2}m.v^2$ إذن $2E_C=m.v^2$

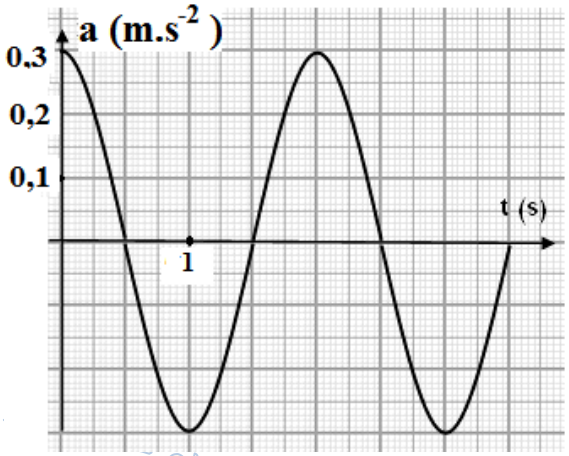
وعليه $v=\sqrt{\frac{2E_C}{m}}=\sqrt{\frac{2\times3\times10^{-3}}{0,045}}=\pm036m/s$.

موقع الجزائري WWW.DZPEN.COM

تمرين تطبيقي09

نثبت كرية كتلتها (m) بنابض مرن حلقاته غير متلاصقة ثابت مرونته $K = 5N/m$ كما هو موضح **أدناه**
نزيح الكتلة (m) عند اللحظة $(t = 0)$ عن وضع التوازن وذلك بضغطها مقدار $(-x_m)$ ونتركها دون سرعة ابتدائية .
يسمح تجهيز مناسب بالحصول على تسجيل التسارع لمركز عطالة الكرية بدلالة الزمن t و الممثل في البيان الشكل :



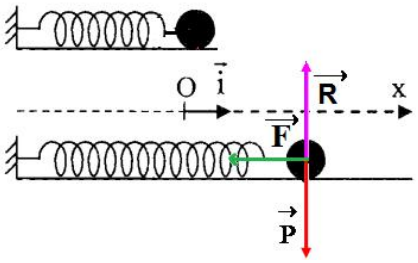


1- مثل القوى المؤثرة على الكرية عند الفاصلة $(+x_m)$
2- أكتب عبارة طاقة الجملة ثم أوجد المعادلة التفاضلية للحركة.
3- من البيان أوجد المقادير التالية:
التسارع الأعظمي a_{max} الدور الذاتي T_0 ثم أحسب النبض الذاتي ω_0
سعة الاهتزازات X_m ، كتلة الجسم m
4- أثبت أن طاقة الجملة محفوظة ثم أحسب قيمتها.
يعطى: $\pi^2 \approx 10$

الحل:

1- تمثيل القوى

- قوة رد فعل السطح على الجسم $\vec{R}$
- قوة الإرجاع $F = -K.x(t)$. قوة الثقل $\vec{P}$



-

2- عبارة طاقة الجملة:

$$E_T = E_C(t) + E_{Pe}(t)$$

$$E_T = \frac{1}{2}m.v^2(t) + \frac{1}{2}k.x^2(t)$$

المعادلة التفاضلية للحركة.

$$E_T = \frac{1}{2}m.v^2(t) + \frac{1}{2}k.x^2(t)$$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن فنجد :

$$\frac{dE}{dt} = m.v(t).\frac{dv}{dt} + k.x(t)\frac{dx}{dt}$$

$$0 = m.v(t).\frac{d^2x}{dt^2} + k.x(t).v(t)$$

$$\Rightarrow m..\frac{d^2x}{dt^2} + k.x(t). = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية و متجانسة بالنسبة لـ x

3- إيجاد المقادير:

التسارع الأعظمي : a_{max} $\quad a_{max} = 0,3m/s^2$

الدور الذاتي T_0 : $T_0 = 2s$

حساب النبض الذاتي:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi = 3,14rad/s$$

سعة الإهتزاز: نعلم أن التسارع الأعظمي: $a_{max} = X_{max}.\omega_0^2$ وعليه

$$a_{max} = X_{max}.\omega_0^2 \Rightarrow X_{max} = \frac{a_{max}}{\omega_0^2} = \frac{0,3}{\pi^2} = \frac{0,3}{10} = 0,03m = 3cm$$

الكتلة m **: نعلم أن:** $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ وعليه $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ إذن: $m = \frac{k}{\omega_0^2}$

$$m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{5}{\pi^2} = \frac{5}{10} = 0,5Kg$$

4- إثبات أن طاقة الجملة محفوظة:

$$E_T = \frac{1}{2}m.v^2(t) + \frac{1}{2}k.x^2(t)$$

$$E_T = \frac{1}{2}k.X_{max}^2\cos^2(\omega_0.t+\varphi) + \frac{1}{2}m.\omega_0^2X_{max}^2\sin^2(\omega_0.t+\varphi)$$

لدينا : $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0^2.m = k$

بالتعويض في المعادلة نجد :

$$E_T = \frac{1}{2}k.X_{max}^2\cos^2(\omega_0.t+\varphi) + \frac{1}{2}kX_{max}^2\sin^2(\omega_0.t+\varphi)$$

$$E_T = \frac{1}{2}k.X_{max}^2 = cte$$

حساب طاقة الجملة:

$$E_T = \frac{1}{2}k.X_{max}^2 = \frac{1}{2}(5)\times(0,03)^2 = 2,25\times10^{-3}\,j$$

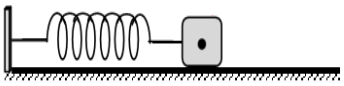
لتحميل المزيد من الملفات تشرفنا زيارتكم للموقع: www.touahria.com
موقع الجزائري
WWW.DZPEN.COM

2.1.3- حالة اهتزازات حرة متخامدة:

النواس المرن الأفقي و الإحتكاك الصلب: في الإحتكاك الصلب تكون قوة الإحتكاك ثابتة مهما تغير الزمن.

نشاط توضيحي:

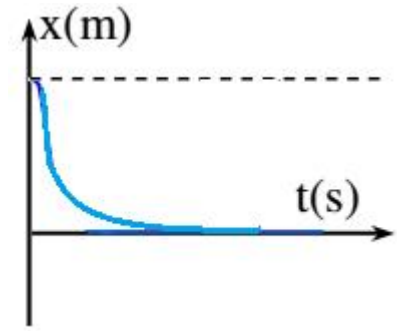
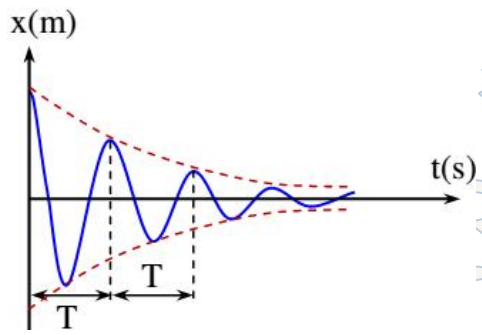
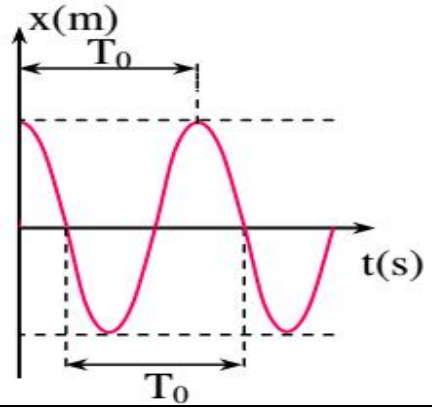
جملة مهتزة (جسم نابض) حيث الجسم كتلته m و النابض ثابت مرونته k كما هو موضح بالشكل أسفله نزيح الجسم عن وضع توازنه في الإتجاه الموجب ونتركه عند اللحظة t=0 دون سرعة إبتدائية. توجد قوى إحتكاك ثابتة تكافئ قوة وحيدة (صلب- صلب) ثابتة الشدة.



1- مثل القوى المؤثرة على مركز عطالة الجسم لحظة تركه.

2- أكتب المعادلة التفاضلية للحركة.

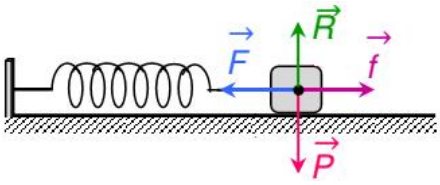
3- نجري عدة تجارب على سطوح صلبة مختلفة فنتحصل على المنحنيات المطال $x = g(t)$ التالية:

		
3-3- قوى الإحتكاك معتبرة.	**2-3-** قوى الإحتكاك ضعيفة.	**1-3-** قوى الإحتكاك معدومة

- حدد نمط الإهتزاز والنظام الموافق لكل حالة من الحالات السابقة. ماذا تستنتج؟

الحل:

1- تمثيل القوى: موضح في الشكل



2- المعادلة التفاضلية:

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع سطحي ارضي نعتبره غاليليا نجد :

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} + \vec{f} = m.\vec{a}$$

بالاسقاط على المحور $(x'x)$ نجد: $-kx + f = m.a$ ومنه: $-kx + f = m.\frac{d^2x}{dt^2}$ بالقسمة على **m**

$\frac{-k}{m} + \frac{f}{m} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ويمكن كتابتها بالشكل: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x - \frac{f}{m} = 0$ وهي معادلة تفاضلية حلها خارج البرنامج

3- نمط الإهتزاز والنظام الموافق في كل حالة:

3-1- قوى الإحتكاك معدومة $f = 0$ **:**

تصبح المعادلة تفاضلية من الشكل $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ وعليه يكون **النمط** : **اهتزازات حرة غير متخامدة** في هذه الحالة

سعة الإهتزاز ثابتة و ندعو **النظام بالنظام الدوري**. والحركة تتميز بدور ذاتي $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

3-2- قوى الإحتكاك غير معدومة $f \neq 0$ **لكنها ضعيفة:**

في هذه الحالة يكون **النمط** : **اهتزازات حرة متخامدة** في هذه الحالة تتناقص سعة الإهتزاز ندعو **النظام بالنظام شبه الدوري**. ويكون دور الحركة يقارب الدورالذاتي $T \approx T_0$.

3-3- قوى الإحتكاك غير معدومة $f \neq 0$ **لكنها كبيرة:**

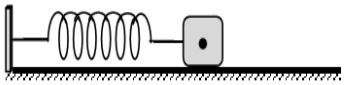
في هذه الحالة الجملة لاتهتز **(غير إهتزازية)** في هذه الحالة تتناقص سعة الإهتزاز ندعو **النظام بالنظام اللادوري** في هذه الحالة الحركة لادورية تتخامد بسرعة

الإستنتاج: يزداد تخامد الإهتزازات بزيادة فعالية الإحتكاك

WWW.DZPEN.COM

تمرين تطبيقي 10:

يتكون نواس مرن أفقي من نابض حلقاته غير متلاصقة ثابت مرونته K مثبت من طرف والطرف الثاني متصل بجسم (S) كتلته m نزيح الجسم عن وضع توازنه مقدار $(+3Cm)$ في الإتجاه الموجب.



1- تتميز حركة هذه الجملة المهتزة بمعادلة تفاضلية للحركة من الشكل: $\frac{d^2x}{dt^2}+10x=0$

1-1- ماهو نمط الإهتزازات ؟ علل.

2-1- إستنتج النبض ω_0 الذاتي للحركة ثم أحسب كل من الدور الذاتي T_0 والتواتر الذاتي f_0.

3-1- ماقيمة كل من السرعة والتسارع عند المرور بوضع التوازن.

2- في الحقيقة توجد قوى إحتكاك ثابتة تكافئ قوة وحيدة (صلب- صلب) ثابتة الشدة

1-2- أكتب المعادلة التفاضلية للحركة

2-2- ناقش حسب قيم الإحتكاك النظام الذي تكون عليه الحركة ومثل المطال في كل حالة يعطى: $\pi^2 \approx 10$

الحل:

1-1- النمط هو اهتزازات حرة غير متخامدة وذلك لأن المعادلة التفاضلي من الشكل $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0$.

2-1- إستنتاج النبض الذاتي للحركة بمطابقة المعادلة التفاضلية نجد: $\omega_0^2=10$ وعليه $\omega_0=\pi=3,14rad/s$

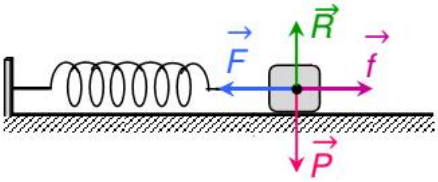
حساب الدور الذاتي T_0 لدينا: $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$ إذن: $T_0=\frac{2\pi}{\pi}=2s$

- **التواتر الذاتي** f_0 : $f_0=0,5s^{-1}$ $f_0=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=0,5s$

3-1- السرعة عند المرور بوضع التوازن: $v=\pm v_{max}=\pm X_{max}.\omega_0=\pm3\times10^{-2}\times3,14=\pm9,42\times10^{-2}m/s$

التسارع عند المرور بوضع التوازن لدينا $a=-\omega_0^2x$ عند وضع التوزن يكون $x(0)=0$ وعليه يكون التسارع معدوما $a=0$.

2-



1-2- المعادلة التفاضلية:

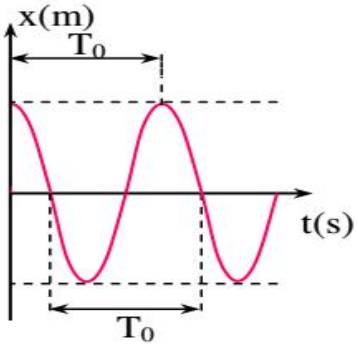
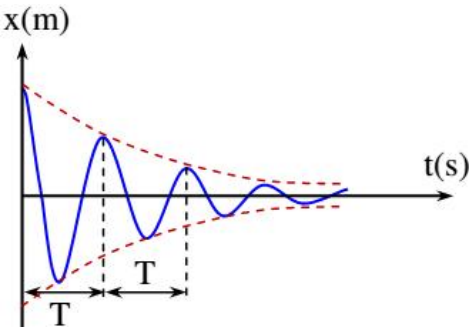
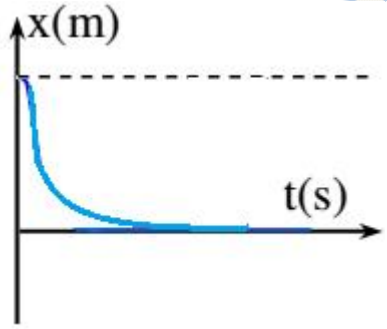
بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع سطحي ارضي نعتبره غاليليا نجد :

$$\vec{P}+\vec{F}+\vec{R}+\vec{f}=m.\vec{a}$$

بالاسقاط على المحور $(x'x)$ نجد: $-kx+f=m.a$ ومنه: $-kx+f=m.\frac{d^2x}{dt^2}$ بالقسمة على **m**

$\frac{-k}{m}+\frac{f}{m}=\frac{d^2x}{dt^2}$ ويمكن كتابتها بالشكل: $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x-\frac{f}{m}=0$

3- النظام الموافق حسب قوى الإحتكاك:

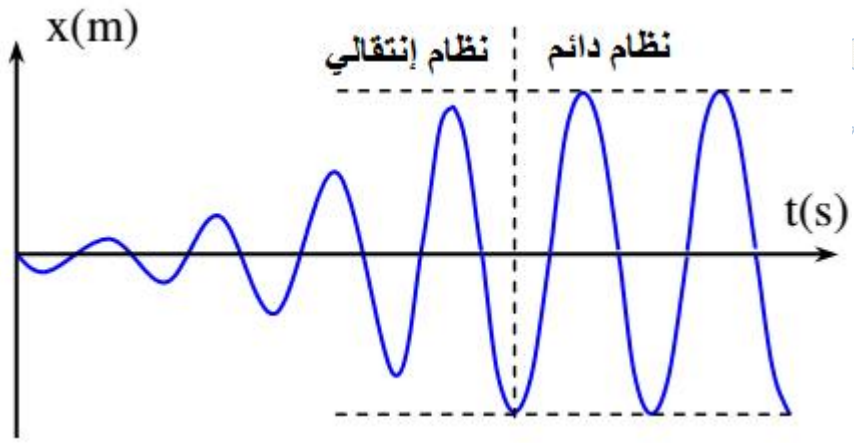
1-3- قوى الإحتكاك معدومة	**2-3-** قوى الإحتكاك ضعيفة.	**3-3-** قوى الإحتكاك معتبرة.
		
النظام الدوري.	**النظام شبه الدوري**	**النظام اللادوري**

موقع الجزائري
WWW.DZPEN.COM

3.1.3- تغذية الاهتزازات الميكانيكية :

لا تخلو حركة أي مهتز ميكانيكي حقيقي من تخامد يؤدي الى تناقص سعة الإهتزازات، وللحفاظ على سعة ثابتة يجب تعويض وباستمرار الطاقة الضائعة بفعل الاحتكاك. يتم ذلك بواسطة أجهزة خاصة مثل اضافة ثقل موازنلساعة حائطية أو نابض حلزوني كما في ساعة اليد .

ان تغذية الاهتزازات الميكانيكية تتم بتطبيق قوة اضافية على الجسم المهتز لا تؤثر على السعة بل بامكانها أن تعوض بشكل مستمر كل الطاقة الضائعة لتصبح سعة الإهتزازات .



في النواس الافقي تصبح المعادلة التفاضلية لهزاز مغذى من الشكل: $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$ أو $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية ومتجانسة حلها دالة جيبية بدلالة الزمن من الشكل : $x(t)=X_{max}Cos(\omega_0 t+\varphi)$

أول العلم

الصمت،

ثم الاستماع له،

ثم حفظه،

ثم العمل به،

ثم نشره وتعليمه"



مع تمنياتنا لكم بالتوفيق و النجاح في شهادة البكالوريا

موقع الجزائري
WWW.DZPEN.COM