x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
x	-	0	+	+	+
$-x^2+3x-2$	-	- 0	+	0	-
$f(x)-g(x)$	+	0 - 0	+	0	-

4) يمكن المقارنة بين $f(x)$ و $g(x)$ بدون اللجوء إلى (C_f) و (C_g)

مثال ثاني:

1) معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1 هي $y=x-4$.

2) لدراسة الوضعية ندرس إشارة $f(x)-(x-4)$

أعمال موجهة 2 :

تصحيح : - M نقطة من القوس $\overset{\frown}{AC}$ عوضا $\overset{\frown}{AB}$ ومختلفة عن C عوضا B .

- نريد تعيين وضعية M حتى يأخذ الطول KL أصغر قيمة ممكنة عوضا أكبر قيمة ممكنة.

1) $KL^2=x^2+y^2$ (فيثاغورث)

2) $AK=KM$ و $ML=LC$.

3) $-8x-8y2xy16=0$.

تـمـــاريـــن

1 صحيح **2** صحيح **3** خطأ

4 خطأ **5** صحيح **6** خطأ

7 صحيح **8** خطأ **9** صحيح

10 خطأ **11** خطأ **12** خطأ

13 خطأ **14** صحيح .

15 3) $f(x)\in[f(b);f(a)]$

16 1) منحنى الدالة f يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل

17 1) المعادلة تقبل حلا واحداً .

18 3) المعادلة تقبل حلا واحدا على المجال $[0;1]$

19 1) الدالة f متزايدة تماما

20 2) المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا واحدا على $[0;1]$.

21 3) الدالة f تقبل على الأقل قيمة حدية على $[-a;a]$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+ 0	-

22

23 الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;-1]$ و $[1;+\infty[$ و متناقصة تماما على $[-1;1]$

24 الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالات $]-\infty;-2]$ و $[-2;2]$ و $[2;+\infty[$.

25 الدالة f' سالبة على المجال $[a;b]$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على $[a;b]$ ، أي $f(a)>f(b)$ (الدالة المتناقصة لا تحافظ على الترتيب).

26 الدالة f' موجبة على المجال $[a;b]$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على $[a;b]$ ، أي $f(a)<f(b)$ (الدالة المتزايدة تحافظ على الترتيب).

27 المنحني (C_1) يرفق بالمنحني (R)

المنحني (C_2) يرفق بالمنحني (Q)

المنحني (C_3) يرفق بالمنحني (P)

28 1) $f'(x)=3x^2-3$ ، أكبر قيمة تبلغها الدالة f على المجال $[-3;1]$ هي 3 و تبلغها عند 1- $[f(-1)=3]$

2) $f'(x)=-3x^2+6$ ، $[f(\sqrt{2})=3\sqrt{2}]$

3) $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$ ، $[f(0)=2]$

29 1)

x	-3		$\frac{3}{2}$		2
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{4}$	↗	

2)

x	-4		-1		2
$f(x)$		↗	8	↘	

3)

x	-5		0		2		7
$f(x)$		↗	1	↘	-3	↗	

4)

x	-2		-1		0		1		2
$f(x)$		↘	2	↗	3	↘	2	↗	

5)

x	-1		2
$f(x)$		↗	

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

6)

x	-4	-1	3	6
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$ ↗	$\frac{1}{6}$	↘

7)

x	$-\frac{1}{3}$	6
$f(x)$	↗	

8)

x	-7	2
$f(x)$	↘	

30 $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-2}$ ، $f'(x)=\dfrac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}$

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;2-\sqrt{7}]$ و $[2+\sqrt{7};+\infty[$ و متناقصة تماما على كل من $[2-\sqrt{7};2[$ و $]2;2+\sqrt{7}]$

نضع $x_1=5,012013014015016$

و $x_2=5,012013014015017$

$x_1\in[2+\sqrt{7};+\infty[$ و $x_2\in[2+\sqrt{7};+\infty[$

لدينا $x_2>x_1$ و بالتالي $f(x_2)>f(x_1)$ لان الدالة f متزايدة تماما على $[2+\sqrt{7};+\infty[$ ، إذن $B>A$

31 $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2+x}$ ، $f'(x)=\dfrac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}$

الدالة f متناقصة تماما على $[-1;+\infty[$ و $]-\infty;-1]$ و متزايدة تماما على $[-1;1]$.

نضع $x_1=2,01401414$

و $x_2=2,01401416$

$x_1\in[1;+\infty[$ و $x_2\in[1;+\infty[$

لدينا $x_2>x_1$ و بالتالي $f(x_2)<f(x_1)$ لان الدالة f مناقصة تماما على $[1;+\infty[$ ، إذن $B<A$

32 إذا كان $a<0$ الدالة f تقبل قيمة حدية عظمى $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ عند $\dfrac{-b}{2a}$ و إذا كان $a>0$ الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ عند $\dfrac{-b}{2a}$.

33 $f:x\mapsto x^3+ax+b$ ، $f'(x)=3x^2+a$

يكون للدالة f قيمتين حديتين مختلفتين إذا كان $a\in]-\infty;0[$.

34 $f:x\mapsto x^3+ax^2+b$ ، $f'(x)=3x^2+2ax$

يكون للدالة f قيمتين حديتين مختلفتين إذا كان $a\neq 0$.

35 $f:x\mapsto ax^2+bx+c$

إثبات أن $a>0$: لدينا $f(-1)$ قيمة حدية ، إذن $B(-1;3)$ هي ذروة للمنحني (C) و لدينا A تقع فوق B و بالتالي $f(-1)$ هي قيمة حدية صغرى ، و بما أن $f(x)$ هي دالة كثير حدود من الدرجة الثانية فإن $a>0$.

تعيين الدالة f :

نطبق الشروط $f(2)=1$ و $f(-1)=-3$ و $f'(-1)=0$ فنجد $a=\dfrac{4}{9}$ ، $b=\dfrac{8}{9}$ و $c=-\dfrac{23}{9}$

36 نطبق الشروط $f(1)=-1$ و $f(-1)=0$ و $f'(-1)=-\dfrac{13}{2}$ فنجد $a=3$ ، $b=-\dfrac{1}{2}$ و $c=-\dfrac{7}{2}$

37 (1

x	-3	1	2
$f(x)$	↘	1	↗

❖ في الحالات المتبقية للتعرف على اتجاه تغير الدالة f ندرس إشارة مشتقتها.

38 (1 $f:x\mapsto|x^2-2x|$ ؛ $D=[0;5]$

نضع $g(x)=x^2-2x$

جدول تغيرات الدالة g هو:

x	0	1	2	5
$g(x)$	0 ↘	-1	↗ 0	15

و لدينا $f(x)=g(x)$ إذا كان $x\in[2;5]$

و $f(x)=-g(x)$ إذا كان $x\in[0;2]$

جدول تغيرات الدالة f هو:

x	0	1	2	5
$f(x)$	0 ↗	1 ↘	0 ↗	15

❖ في الحالات المتبقية للتعرف على اتجاه تغير الدالة f نتبع نفس بالطريقة مع $f(x)=g(x)$ إذا كان $g(x)\geq 0$ و $f(x)=-g(x)$ إذا كان $g(x)\leq 0$

39 (1 $f:x\mapsto(x^2-4)(x+1)$ ؛ $D=[-3;5]$

من أجل كل x من D : $f'(x)=3x^2+2x-4$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الدالة f' تنعدم من أجل $x_1=\frac{-1-\sqrt{13}}{3}$ و $x_2=\frac{-1+\sqrt{13}}{3}$

جدول تغيرات الدالة f هو:

x	-3		x_1		x_2		5
$f(x)$	-10	↗	$f(x_1)$	↘	$f(x_2)$	↗	$f(5)$

الدالة f تنعدم من أجل $x=-2$ أو $x=2$ أو $x=-1$

و منه جدول تغيرات الدالة $|f|$ هو

x	-3		-2		x_1		-1		x_2		2		5
$\lvert f(x)\rvert$		↘	0	↗		↘	0	↗		↘	0	↗	

❖ في الحالات المتبقية للتعرف على اتجاه تغير الدالة g نتبع نفس بالطريقة مع $g(x)=f(x)$ إذا كان $f(x)\geq 0$ و $g(x)=-f(x)$ إذا كان $f(x)\leq 0$

40 1) $f:x\mapsto 2x^3-3x^2-1$ ؛ $I=\left[\frac{3}{2};2\right]$.

من اجل كل x من I : $f'(x)=6x(x-1)$

الدالة f متزايدة تماما على I و بالتالي

$f\left(\frac{3}{2}\right)\leq f(x)\leq f(2)$ أي $-1\leq f(x)\leq 3$

و بالتالي المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

2) $f:x\mapsto -x^3+3x^2-3x-2$ ؛ $I=[-1;0]$.

الدالة f متناقصة تماما على I و بالتالي

$f(0)\leq f(x)\leq f(-1)$ أي $-2\leq f(x)\leq 5$

و بالتالي المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

❖ في الحالات الأخرى تتبع نفس الطريقة (إذا كانت f متزايدة تماما على I فإنها تحافظ على الترتيب و إذا كانت متناقصة تماما على I فإنها لا تحافظ على الترتيب).

41 تصويب : الدالة f معرفة كما يلي:

$f:x\mapsto x^3-5x^2+3x+2$ و $I=[-1;2]$

من اجل كل x من I : $f'(x)=3x^2-10x+3$

جدول تغيرات الدالة f هو:

x	-1		$\frac{1}{3}$		2
$f(x)$	-7	↗	$\frac{67}{27}$	↘	-4

المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلين متمايزين على I

لأن: في المجال $\left[-1;\frac{1}{3}\right]$ f متزايدة تماما

و $-7\leq f(x)\leq\frac{67}{27}$

و في المجال $\left[\frac{1}{3};2\right]$ f متناقصة تماما و $-4\leq f(x)\leq\frac{67}{27}$

42 1) $f:x\mapsto x^2-3$ ؛ $D=[0;2]$.

الدالة f متزايدة تماما على D

وبالتالي $f(0)\leq f(x)\leq f(2)$ أي : $-3\leq f(x)\leq 1$

2) (f متزايدة تماما على D) $f(2)\leq f(x)\leq f(8)$

3) (f متناقصة تماما على D) $f(2)\leq f(x)\leq f(0)$

4) (f متناقصة تماما على D) $f(1)\leq f(x)\leq f(-1)$

43 1) $f:x\mapsto x^2+4x+5$ ؛ $D=[-4;0]$

من أجل كل x من D : $f'(x)=2x+4$

x	-4		-2		0
$f(x)$	5	↘	1	↗	5

لدينا : $1\leq f(x)\leq 5$

2) $5\leq f(x)\leq 8$ ، 3) $-\frac{29}{8}\leq f(x)\leq\frac{27}{8}$

4) $2\leq f(x)\leq\frac{7}{2}$ ، 5) $2\leq f(x)\leq 7$

44 1) $f:x\mapsto x-\sin x$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=1-\cos x$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)\geq 0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↗	

2) معادلة (Δ) هي : $y=x$

لدراسة وضعية (C_g) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة $x-\sin x$ و نجد :

(Δ) أعلى (C_g) في $[0;+\infty[$ و (Δ) أسفل (C_g) في $]-\infty;0]$ و (Δ) يقطع (C_g) في مبدأ المعلم O

45 1) $f:x\mapsto\frac{4x^2-1}{x^2+1}$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{10x}{(x^2+1)^2}$

الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و متناقصة تماما على $]-\infty;0]$.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

جدول تغيرات f هو:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	-1	↗

2) $f(x)-4=-\dfrac{5}{x^2+1}$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)-4<0$

من جدول تغيرات f ، لدينا 1- قيمة حدية صغرى لـ f

و نستنتج أن : $-1\le f(x)<4$

46

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	↘	0	↗

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h(x)$	↗	1	↘

نكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة فنجد:

$$\begin{cases} f(x)=-h(x) & ;x\le 0 \\ f(x)=h(x) & ;0\le x\le 1 \\ f(x)=g(x) & ;x\ge 1 \end{cases}$$

إذن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ و متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

47 نضع $f(x)=x^3+2x^2-4$ ،

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=3x^2+4x$

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	↗	1	↘	-4 ‖ -1	↗

على المجال $[0;1]$ الدالة f متزايدة تماما ، بما أن λ ينتمي إلى $[-4;-1]$ فإن المعادلة $f(x)=\lambda$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $x_0\in[0;1]$.

48 1) $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$

(C_f) يقبل مماسا عند كل نقطة لأن الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

2) • المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلا مضاعفا $x_0=1$

• التفسير البياني للنتيجة: المنحني (C_f) يقبل مماسا في النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$ هو حامل محور الفواصل.

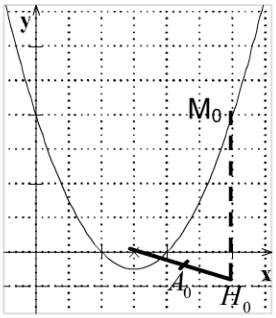
3) نحل المعادلة $f'(x)=3$ فنجد $(x=0)$ أو $(x=2)$

و منه نقط المنحني (C_f) التي يكون فيها معامل التوجيه يساوي 3 هي $A(0;-1)$ و $B(2;1)$

4) – إذا كان $c=0$ يوجد مماس واحد ، إذا كان $c>0$ يوجد مماسان و إذا كان $c<0$ لا يوجد مماس.

49 $f(x)=ax+b-\dfrac{6}{x}$ ، انطلاقا من الشرطين $f(2)=0$ و $f'(2)=1$ نجد $a=-0,5$ و $b=4$.

50 1) الرسم .



2) $H_0\left(x_0;-\dfrac{1}{2}\right)$

$A_0\left(\dfrac{3+2x_0}{4};-\dfrac{1}{4}\right)$

معامل التوجيه (A_0M_0) هو: $\dfrac{x_0^2-3x_0+2+\frac{1}{4}}{x_0-\frac{2x_0-3}{4}}=2x_0-3$.

لدينا $f'(x_0)=2x_0-3$ ومنه (A_0M_0) هو مماس للمنحني (C_f) في النقطة M_0 .

3) معامل توجيه (A_0F) هو $\dfrac{1}{3-2x_0}$ ولدينا :

$(A_0F)\perp(A_0M_0)$ إذن $\dfrac{1}{3-2x_0}\times(2x_0-3)=-1$

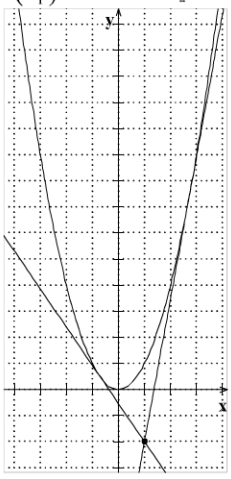
وبالتالي A_0 هي المسقط العمودي لـ F على المماس (A_0M_0) ولدينا ترتيب A_0 هو $-\dfrac{1}{4}$ إذن A_0 تنتمي إلى المستقيم ذي المعادلة $y=-\dfrac{1}{4}$.

51 $f'(4)=8$ إذن مماس منحني الدالة f هو (T_2)

$g'(4)=\dfrac{-1}{16}$ إذن مماس منحني الدالة g هو (T_3)

$h'(4)=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\dfrac{1}{4}$ إذن مماس منحني الدالة h هو (T_1)

52 1) الرسم .



التخمين: مماسان .

2) (T_a) : $y=2ax-a^2$

المعادلة $2a-a^2=-2$ تعني $a=1-\sqrt{3}$ أو $a=1+\sqrt{3}$

معادلة المماس $(T_{1-\sqrt{3}})$ هي :

$y=2(1-\sqrt{3})x--4+2\sqrt{3}$

معادلة المماس $(T_{1+\sqrt{3}})$ هي :

$y=2(1+\sqrt{3})x--4-2\sqrt{3}$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

53 1) أ) $P'(x)=3(x-1)^2$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x $P'(x)\geq 0$ إذن p متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ومنه متزايدة على $\mathbb{R}$

ب) لدينا $2<x<2,2$ بما أن p متزايدة تماما فإن $P(2)<P(x)<P(2,2)$ أي : $-1<P(x)<-0,272$ وبالتالي $P(x)<-0,2$.

2) أ) $P(x)<-0,2$ معناه $\frac{P(x)}{(x-2)^2}<\frac{-0,2}{(x-2)^2}$ لأنه من أجل كل عدد x من $]2\ ;\ 2,2[$ ؛ $(x-2)^2>0$

ب) $-5<-\frac{0,2}{(x-2)^2}$ تكافئ $(x-2)^2<0.04$ و $x\neq 2$

ومعناه $2-0,2<x<2+0,2$ و $x\neq 2$ ومنه :

إذا كان $x\in\ ]2\ ;\ 2,2[$ فإن $x\in\ ]1,98\ ;\ 2[\cup]2\ ;\ 2,2[$

وهذا يعني أن $-5<-\frac{0,2}{(x-2)^2}$ ومنه $f(x)<-5$.

وبالتالي نكتفي بأخذ $a=0,2$

ت) تصحيح : $f(x)<-M$ عوضا $f(x)<-1$

بنفس الطريقة $-\frac{0,2}{(x-2)^2}<-M$ تكافئ

$x\in\left]2-\sqrt{\frac{0,2}{M}}\ ;\ 2\right[\cup\left]2\ ;\ 2+\sqrt{\frac{0,2}{M}}\right[$.

إذا كان $M\geq 5$ فإن $\sqrt{\frac{0,2}{M}}\leq 0,2$ وبالتالي نكتفي بأخذ

ولدينا : إذا كان $b=\sqrt{\frac{0,2}{M}}$ فإن $x\in\left]2\ ;\ 2+\sqrt{\frac{0,2}{M}}\right[$

وهذا يعني $x\in\left]2-\sqrt{\frac{0,2}{M}}\ ;\ 2\right[\cup\left]2\ ;\ 2+\sqrt{\frac{0,2}{M}}\right[$

$-\frac{0,2}{(x-2)^2}<-M$ ومنه $f(x)<-M$.

$f'(x)=\frac{x(x-2)(x-3)^2}{(x-2)^4}$ من أجل كل $x\in\ ]2;5]$

لدينا : $f'(x)\geq 0$

x	2		3		5
$f'(x)$	‖	+	0	+	
$f(x)$	‖	6			6,88

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM