

الرياضيات

Clic 71

محمود مفتاح

1AS ثانوي

جذع مشترك
علوم وتكنولوجيا

الأعداد والحساب $N \subset Z \subset D \subset Q \subset R$

● مدور عدد حقيقي

مثال $5,3194$

المدور إلى الوحدة	المدور إلى 10^{-1}	المدور إلى 10^{-2}	المدور إلى 10^{-3}
5	5,3	5,32	5,319

● الأعداد الأولية

نسمي عددا أوليا كل عدد يقبل قاسمين فقط 1 والعدد نفسه.

● القوى الصحيحة

a و b عددان حقيقيان غير معدومين

m و n عددان صحيحان نسبيان.

- $a^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{\text{n عاملا}}$
- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $(a^n)^m = a^{m \times n}$
- $(a.b)^n = a^n . b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $a^n = \frac{1}{a^n}$

● الكتابة العلمية - رتبة مقدار

مثال

العدد	شكله العلمي	رتبة مقداره
235000	$2,35 \times 10^5$	2×10^5
0,0046	$4,6 \times 10^{-3}$	5×10^{-3}

الجذر التربيعي لعدد موجب

الجذر التربيعي للعدد الموجب a، نرمز له بالرمز $\sqrt{a}$ هو العدد الذي مربعه يساوي a

$$(\sqrt{a})^2 = a \ , \ \sqrt{a} \geq 0$$

خواص الحساب على الجذور

a و b عددان حقيقيان موجبان :

- $\sqrt{a^2} = a$
- $\sqrt{a.b} = \sqrt{a} . \sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad b \neq 0$

هام : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

الجداءات الشهيرة

a و b عددان حقيقيان :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

الحساب الجبري

النشر a, b, c, d, k أعداد حقيقية.

- $k(a+b) = ka + kb$
- $k(a-b) = ka - kb$
- $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

قف الجزائر
WWW.DZPEN.COM

عمليات على الكسور

- $\frac{a}{b}=\frac{a\times c}{b\times c}$
- $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$
- $\frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c}$
- $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$
- $a\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{d}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$
- $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$

ملاحظة :

يشترط في كل كسر ان يكون مقامه غير معدوم

IR المجالات في

مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث	رمزها	القراءة والتمثيل على المستقيم العددي
$a\le x\le b$	$[a;b]$	المجال مغلق طرفاه a و b
$a<x<b$	$]a;b[$	المجال مفتوح طرفاه a و b
$a<x\le b$	$]a;b]$	المجال مفتوح على اليسار طرفاه a و b
$a\le x<b$	$[a;b[$	المجال مفتوح على اليمين طرفاه a و b
$x\ge a$	$[a;+\infty[$	المجال a زائد مالا نهاية مغلق في a
$x>a$	$]a;+\infty[$	المجال a زائد مالا نهاية مفتوح في a
$x\le b$	$]-\infty;b]$	المجال ناقص مالا نهاية b مغلق في b
$x<b$	$]-\infty;b[$	المجال ناقص مالا نهاية b مفتوح في b

IR الترتيب والمجالات في

a و b عددان حقيقيان.

- إذا كان $a\ge b$ فإن $a-b\ge 0$
- إذا كان $a\le b$ فإن $a-b\le 0$

خواص

- إذا كان $a\ge b$ و $b\ge c$ فإن $a\ge c$
- إذا كان $a\ge b$ و $c\ge d$ فإن $a+c\ge b+d$
- إذا كان $a\ge b$ فإن $a+c\ge b+c$
- إذا كان $0<a\le b$ فإن $\sqrt{a}\le\sqrt{b}$
- إذا كان $a\ge b$ و $c<0$ فإن $ac\le bc$
- إذا كان $a\ge b$ و $c>0$ فإن $ac\ge bc$
- إذا كان $a\le b<0$ فإن $a^2\ge b^2$
- إذا كان $0<a\le b$ فإن $a^2\le b^2$
- إذا كان a و b عددان غير معدومين ولهما نفس الإشارة وكان $a\le b$ فإن : $\frac{1}{a}\ge\frac{1}{b}$

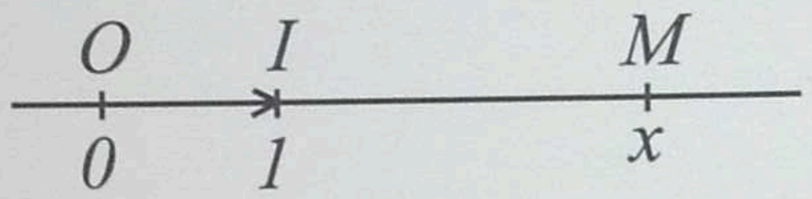
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

القيمة المطلقة $|x|$

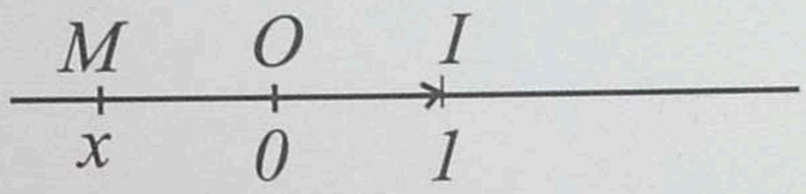
x عدد حقيقي M نقطة من مستقيم مزود بمعلم (O, I) فاصلتها x :

القيمة المطلقة للعدد x هي المسافة OM ونرمز لها بالرمز $|x|$. ونكتب : $OM = |x|$

إذا كان $x \geq 0$ فإن $|x| = x$



إذا كان $x \leq 0$ فإن $|x| = -x$



خواص القيمة المطلقة

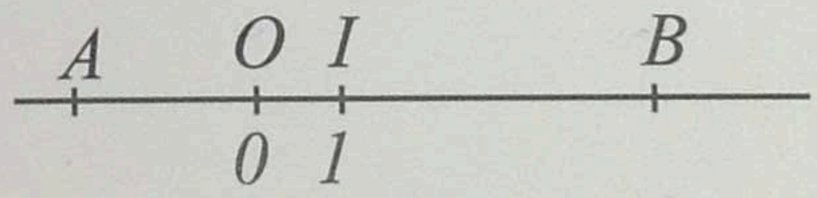
x و y عددان حقيقيان و $a \in \mathbb{R}^+$

- $|x| \geq 0$
- $|x| \geq x$
- $|x| \geq -x$
- $|x| = |-x|$
- $|x^2| = |x|^2$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $|x| = 0$ يكافئ $x = 0$
- $|x| = a$ يكافئ $x = a$ أو $x = -a$
- $|x| = |y|$ يكافئ $x = y$ أو $x = -y$
- $|xy| = |x| \times |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ مع $y \neq 0$
- $|x| \leq a$ يكافئ $-a \leq x \leq a$
- $|x+y| \leq |x|+|y|$ (المتباينة المثلثية)

المسافة بين نقطتين

إذا كانت A و B نقطتان فاصلتاهما a و b على الترتيب من المعلم (O,I) فإن :

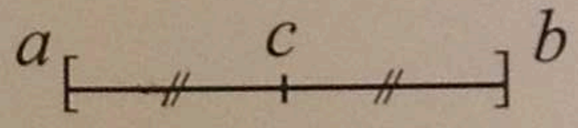
$$AB = |a - b| = |b - a|$$



عناصر المجال

عناصر المجال $[a,b]$ هي :

- المركز : $c = \frac{a+b}{2}$
- طوله : $\ell = b - a$
- نصف قطره : $r = \frac{\ell}{2}$



نتائج

c عدد حقيقي و r عدد حقيقي موجب.

من أجل كل عدد حقيقي x، النصوص التالية متكافئة :

- $x \in [c-r, c+r]$ على شكل مجال
- $c - r \leq x \leq c + r$ على شكل حصر
- $d(c,x) \leq r$ على شكل مسافة
- $|x - c| \leq r$ على شكل قيمة مطلقة

القيمة المطلقة - المسافة
المجال والحصر

مبرهنة

c عدد حقيقي و r عدد حقيقي موجب.

من أجل العدد الحقيقي x،

$|x - c| \leq r$ يعني $x \in [c-r, c+r]$

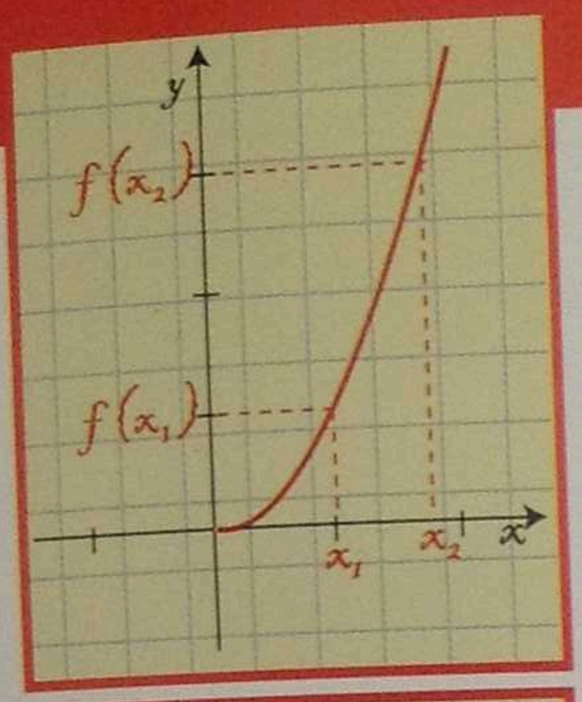
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

■ تغيرات دالة

ليكن D جزء من $\mathbb{R}$

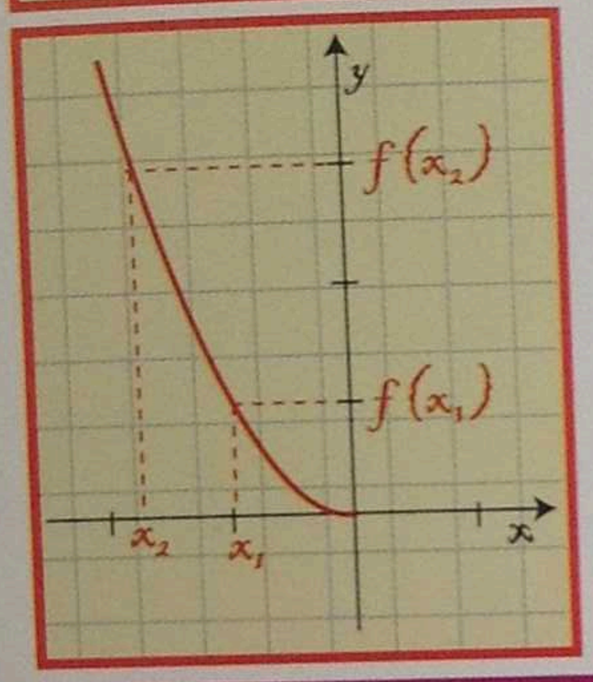
■ f دالة **متزايدة تماما** على D معناه من أجل كل x_1 و x_2 من D:

إذا كان $x_1 < x_2$ فإن : $f(x_1) < f(x_2)$



■ f دالة **متناقصة تماما** على D معناه من أجل كل x_1 و x_2 من D:

إذا كان $x_1 < x_2$ فإن : $f(x_1) > f(x_2)$



■ f دالة **ثابتة** على D معناه من أجل كل x_1 و x_2 من D:

$f(x_1) = f(x_2)$

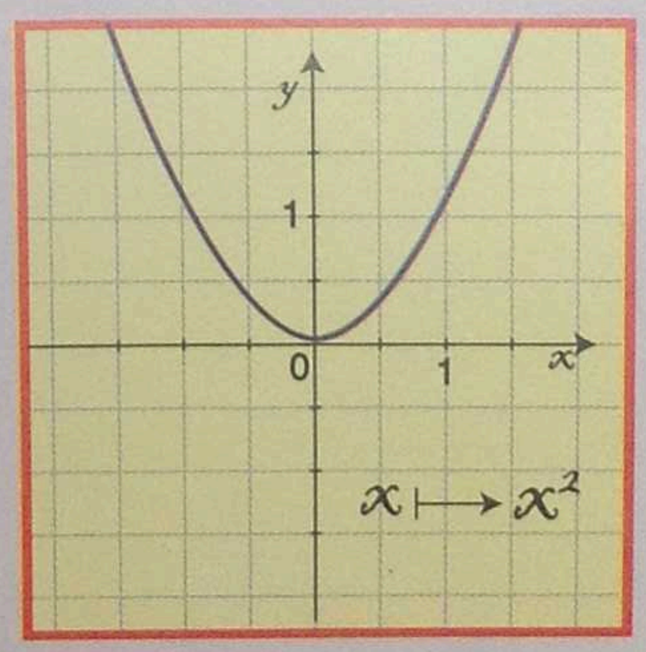
الدوال المرجعية

● الدالة مربع

هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x مربعه x^2 .

الدالة مربع متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

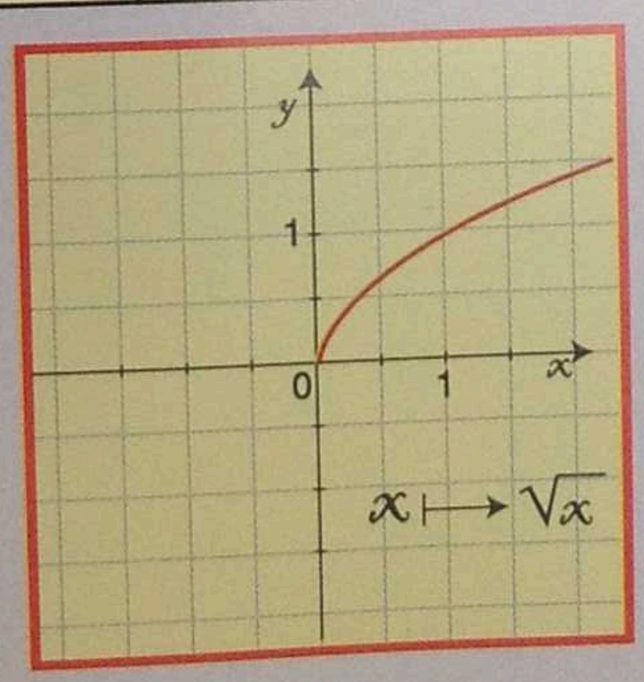


● دالة الجذر التربيعي

هي الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي موجب x جذره التربيعي

دالة الجذر التربيعي متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	↗	$+\infty$

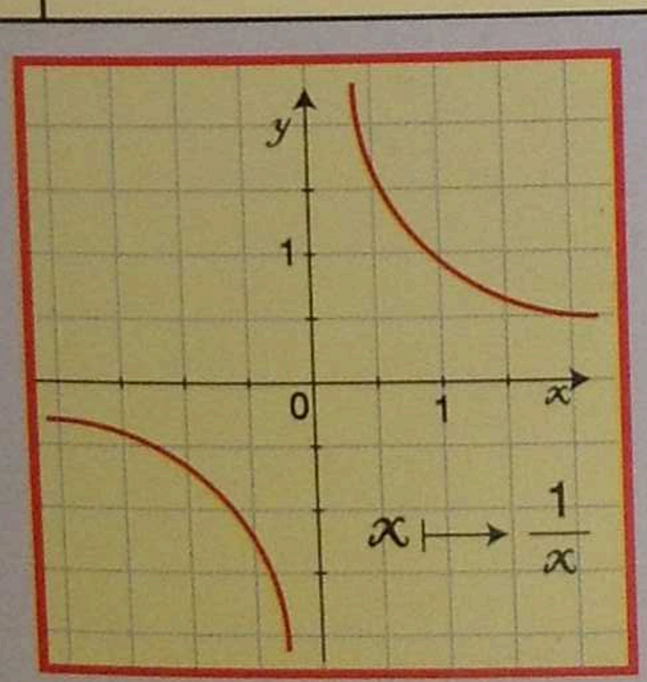


● الدالة مقلوب

هي الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي غير معدوم x مقلوبه $\frac{1}{x}$

الدالة مقلوب متناقصة تماما على مجموعة تعريفها

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	↘	$-\infty \parallel +\infty$	↘	0



قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

شفعية دالة

ليكن D جزء من IR

● نقول أن f دالة **زوجية** إذا وفقط إذا كان :

D متناظرا بالنسبة إلى o و من أجل كل x من D

$$f(-x) = f(x)$$

التفسير البياني : التمثيل البياني للدالة f متناظر بالنسبة إلى حامل محور التراتيب.

● نقول أن f دالة **فردية** إذا وفقط إذا كان:

D متناظرا بالنسبة إلى o و من أجل كل x من D

$$f(-x) = -f(x)$$

التفسير البياني : التمثيل البياني للدالة f متناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم O.

● الدالة الخطية $x \to ax$

a هو معامل توجيه الدالة الخطية و ax هي صورة x

إذا كان $a > 0$ فإن الدالة متزايدة تماما على IR

إذا كان $a < 0$ فإن الدالة متناقصة تماما على IR

● الدالة التآلفية $x \to ax+b$

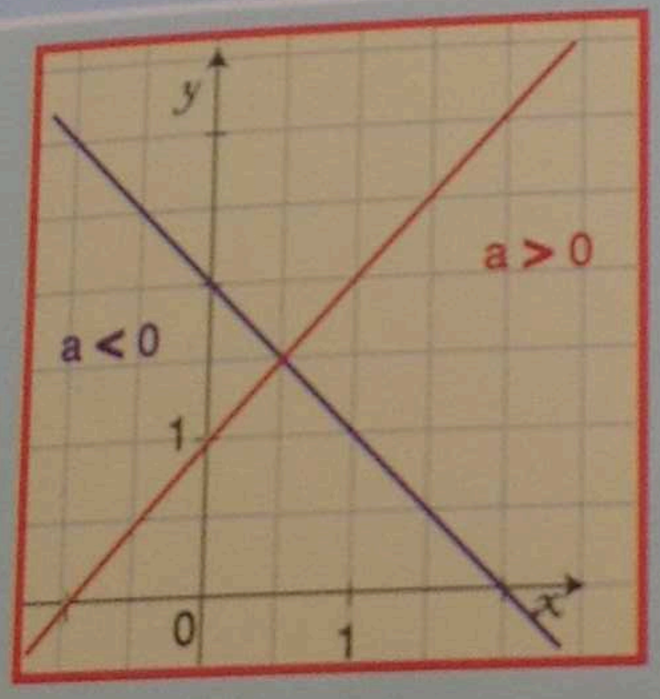
هي الدالة المعرفة على المجموعة IR والتي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد $ax+b$

إذا كان $a > 0$ فإن الدالة متزايدة تماما على IR

إذا كان $a < 0$ فإن الدالة متناقصة تماما على IR

● التمثيل البياني للدالة التآلفية هو مستقيم معامل توجيهه a

● النقطة $A(0,b)$ تسمى الترتيب عند المبدأ.



كثير الحدود من الدرجة الثانية

■ **الشكل النموذجي لثلاثي الحدود**

$f(x) = a x^2 + b x + c$ مع $a \neq 0$

$$f(x) = a x^2 + b x + c$$

$$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}]$$

$$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$$

نسمي Δ المميز : $\Delta = b^2 - 4ac$

إشارة Δ	الجذران	التحليل
$\Delta > 0$	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x-x_1)(x-x_2)$
$\Delta = 0$	$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$	$a(x - x_1)^2$
$\Delta < 0$	لا توجد جذور	غير قابل للتحليل

حساب المثلثات

الزوايا الشهيرة

x	$\cos x$	$\sin x$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}$$

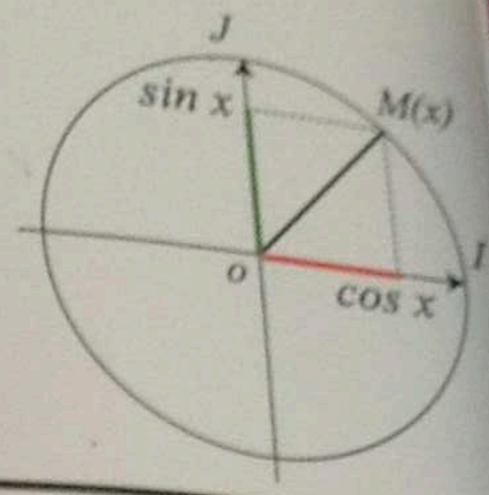
$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}$$



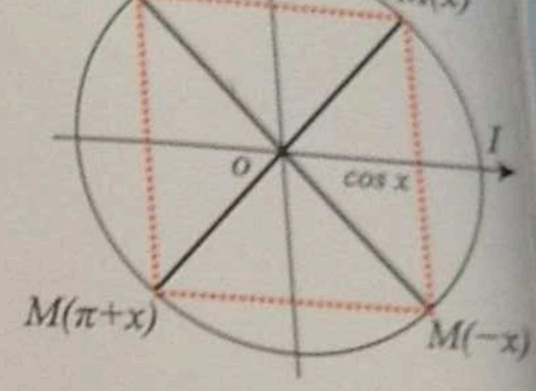
قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

من أجل كل عدد حقيقي x



- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$

- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$,
- $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$,
  $k \in Z$



■ نظرية فيتاغورس

إذا كان ABC مثلثا قائما في A فإن :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

تفيد نظرية فيتاغورس في حساب الأطوال

■ عكس نظرية فيتاغورس

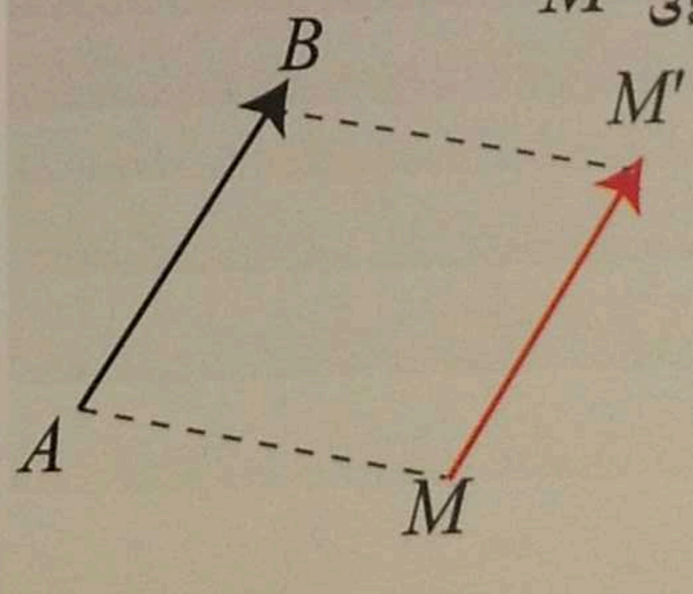
إذا كان ABC مثلثا بحيث $BC^2 = AB^2 + AC^2$
فإن ABC قائم في A.

تفيد عكس نظرية فيتاغورس في إثبات أن المثلث قائم.

الإنسحاب

■ النقطة M' صورة النقطة M بالإنسحاب الذي يحول النقطة A إلى B يعني أن $ABM'M$ متوازي أضلاع.

■ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$ يعني أن الإنسحاب الذي يحول النقطة A إلى B يحول كذلك النقطة M إلى M'



خواص

■ الإنسحاب يحافظ على الإستقامية، المسافات، الزوايا والأشكال.

■ صورة مستقيم بانسحاب هي مستقيم يوازيه.

الزوايا المركزية والمحيطية

◆ الزوايا المحيطية المشتركة في نفس القوس متقايسة

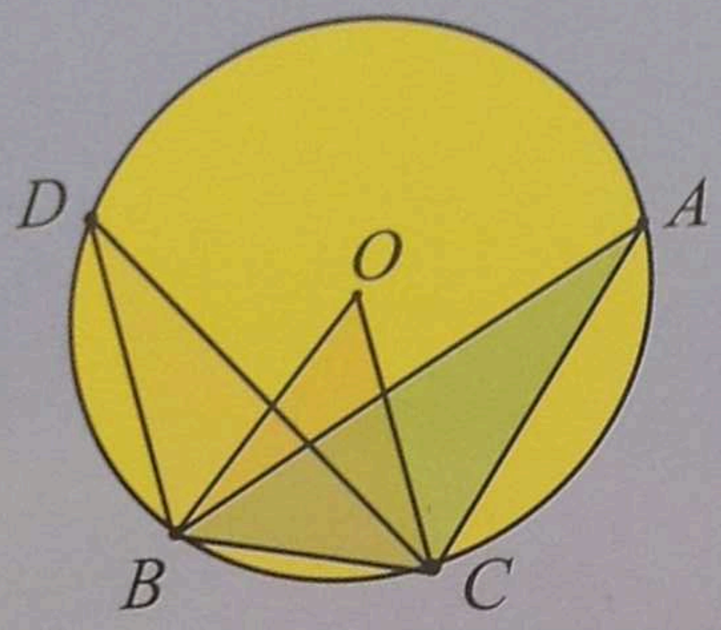
$\widehat{BDC} = \widehat{BAC}$

◆ الزواية المركزية ضعف الزاوية المحيطية

$\widehat{BOC} = 2\,\widehat{BAC}$

◆ الرباعي الدائري هو رباعي رؤوسه تقع على نفس الدائرة

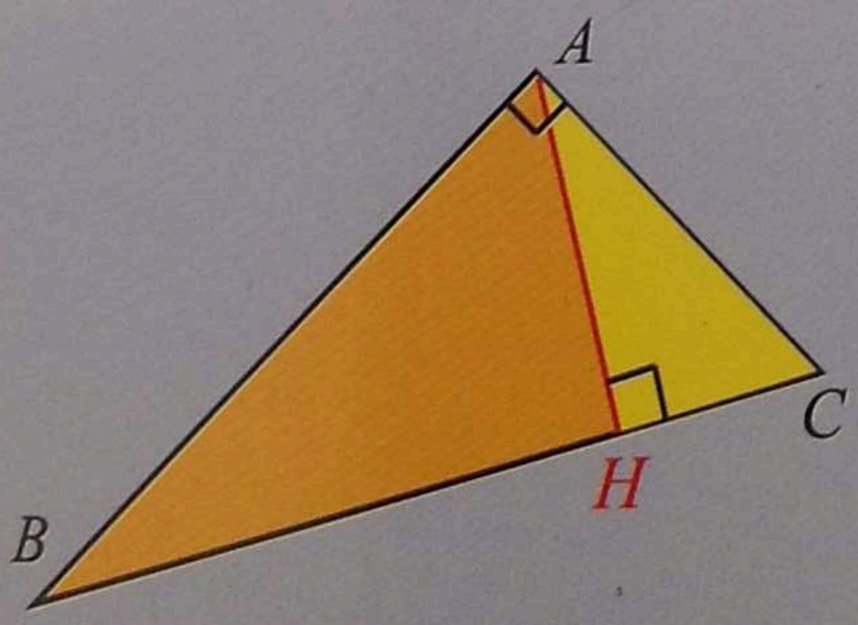
◆ يكون الرباعي دائريا إذا وفقط إذا كانت فيه زاويتين متقابلتين متكاملتين.



العلاقات المترية في المثلث القائم

إذا كان ABC مثلثا قائما في A و (AH) الارتفاع المتعلق الضلع $[BC]$ فإن :

◆ $AB \times AC = AH \times BC$
◆ $AB^2 = BH \times BC$
◆ $AC^2 = CH \times CB$
◆ $AH^2 = HC \times HB$



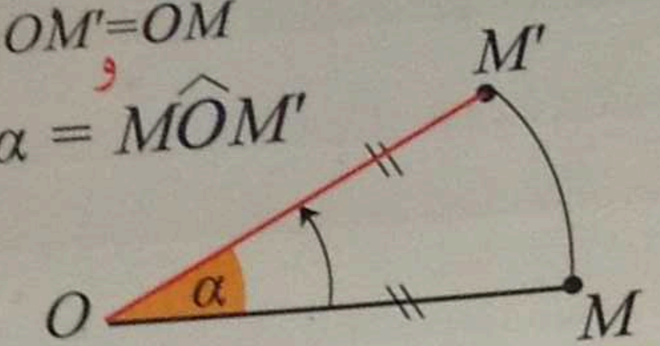
مركز الدائرة المحيطة بمثلث قائم هو منتصف الوتر.

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الدوران

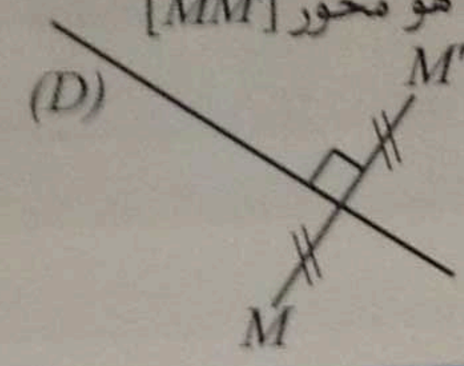
النقطة M' صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته α يعني :

$$\begin{cases} OM'=OM \\ \alpha = M\widehat{O}M' \end{cases}$$ و



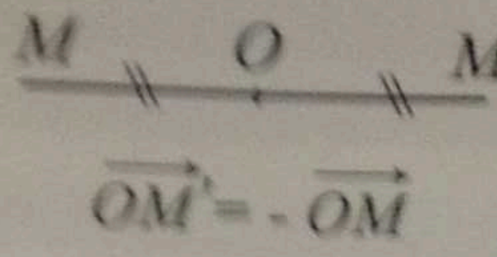
التناظر المحوري

النقطة M' صورة M بالتناظر المحوري الذي محوره (D) يعني أن (D) هو محور $[MM']$



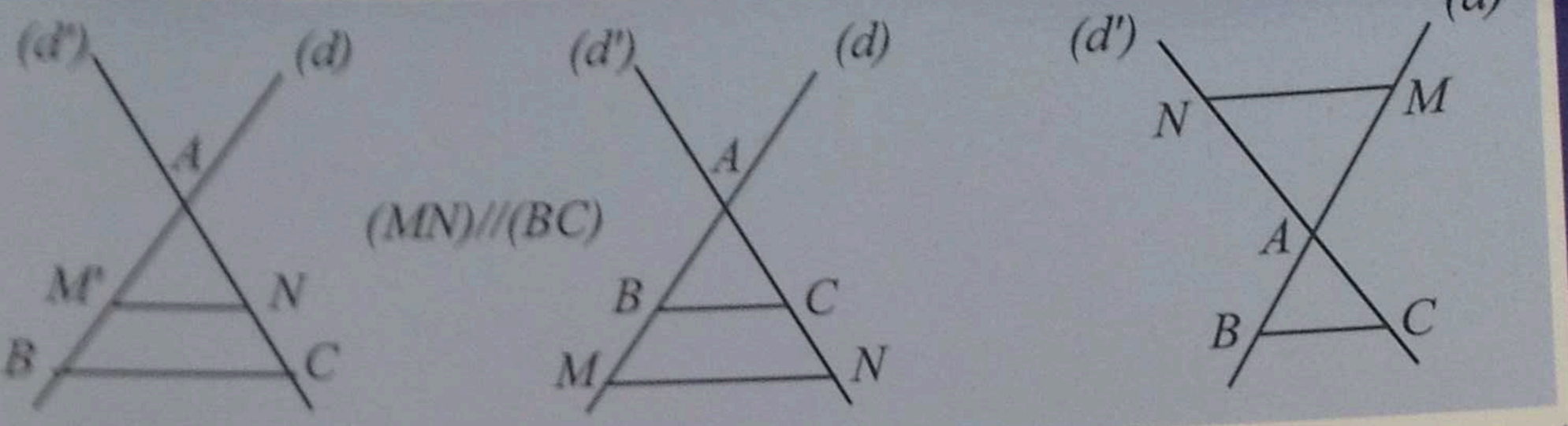
التناظر المركزي

النقطة M' صورة M بالتناظر المركزي الذي مركزه O يعني أن O هي منتصف $[MM']$



$$\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$$

نظرية طالس وعكسها



■ **نظرية طالس** . (d) و(d') مستقيمان متقاطعان في A ، B و M نقطتان من (d) ومختلفتان عن A ، C و N نقطتان من (d') مختلفتان عن A

■ إذا كان $(MN)//(BC)$ فإن :

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

تفيد في حساب الأطوال

■ **عكس نظرية طالس**

■ إذا كان $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ و إذا كان M,B,A و N,C,A بنفس الترتيب فإن : $(BC)//(MN)$.

تفيد عكس نظرية طالس في إثبات التوازي

■ **مستقيم المنتصفين في مثلث** المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث ويساوي نصفه.

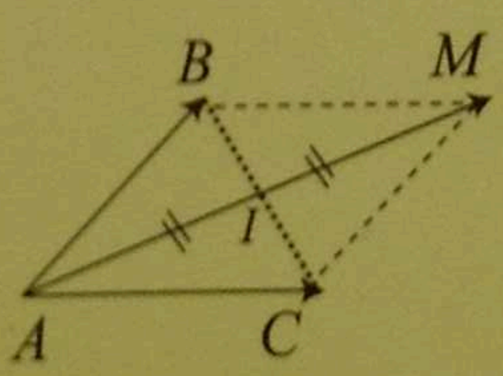
الجمع الشعاعي

■ **علاقة شال** .

من أجل كل ثلاثة نقاط من المستوي فإن :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

■ **قانون متوازي الأضلاع**



$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AI}$$

حيث $ABMC$ متوازي أضلاع

● الشعاع المعدوم $\overrightarrow{0}$ هو شعاع بدايته منطبقة على نهايته.

مثل : $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$

● الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ متعاكسان ونكتب :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{0} \quad \text{أو} \quad \overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$$

إذا كانت : $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ نقطتان من معلم متعامد و متجانس فإن :

$$\overrightarrow{AB}\ (x_B-x_A\ ,\ y_B-y_A)$$

● $$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

إحداثيات I منتصف AB

● $$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}\ ,\ \frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM

الإرتباط الخطي

يكون الشعاعان $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$ مرتبطين خطيا إذا وفقط إذا كان : $xy' - x'y = 0$

الشعاعان المرتبطان خطيا هما شعاعان متوازيان.

معادلة المستقيم

كل مستقيم له معادلة من الشكل : $ax + by + c = 0$ حيث a ، b غير معدومين معا.

كل معادلة من الشكل $ax + by + c = 0$ حيث a و b غير معدومين معا هي معادلة مستقيم شعاعه التوجيهي $\vec{u}(-b,a)$ ومعامل توجيهه يساوي $\frac{a}{-b}$

إذا كان المستقيم لا يوازي محور التراتيب فإن معادلته المختصرة هي : $y = ax + b$ حيث a معامل توجيهه.

يكون المستقيمان متوازيان إذا وفقط إذا كان لهما نفس معامل التوجيه.

جملة معادلتين

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \dots (1) \\ a'x + b'y + c' = 0 \dots (2) \end{cases}$$

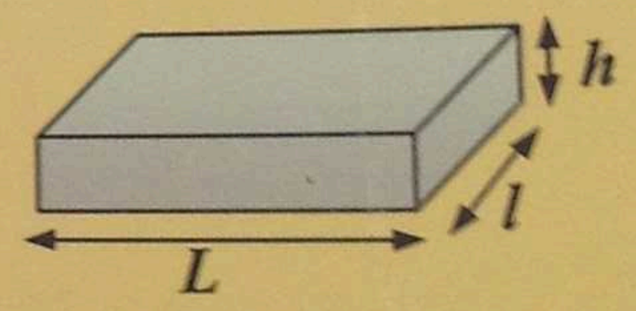
- محدد الجملة هو : $\Delta = ab' - a'b$
- إذا كان $\Delta = 0$ الجملة مستحيلة أو لها عدد لا نهائي من الحلول.
- إذا كان $\Delta \neq 0$ الجملة لها حل وحيد نحصل عليه بطريقة التعويض أو توحيد المعاملات .

التفسير البياني لحل جملة معادلتين

نرسم المستقيم الذي تمثله المعادلة الأولى ثم نرسم المستقيم الذي تمثله المعادلة الثانية فتكون إحداثيي نقطة تقاطعهما هي حل الجملة.

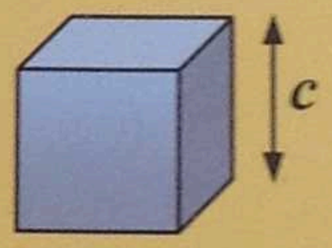
الحجوم

متوازي مستطيلات



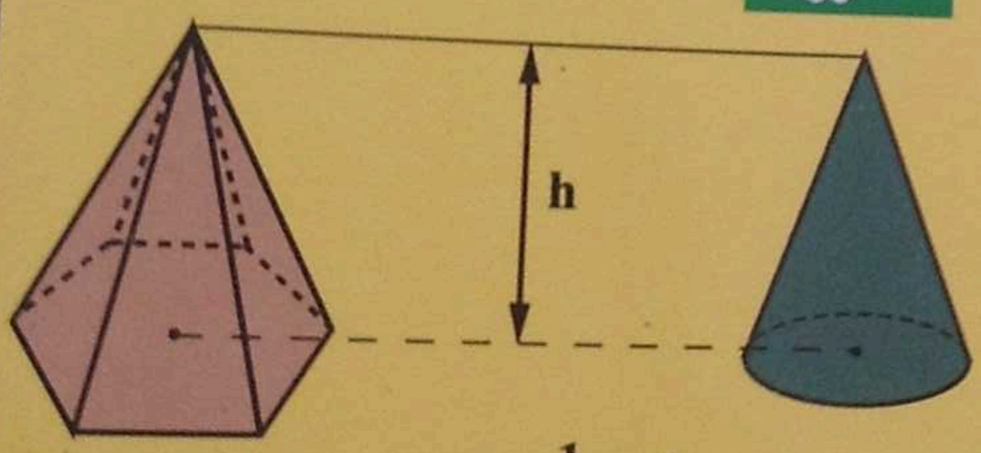
الحجم $V = L \cdot l \cdot h$

مكعب



الحجم $v = c^3$

هرم

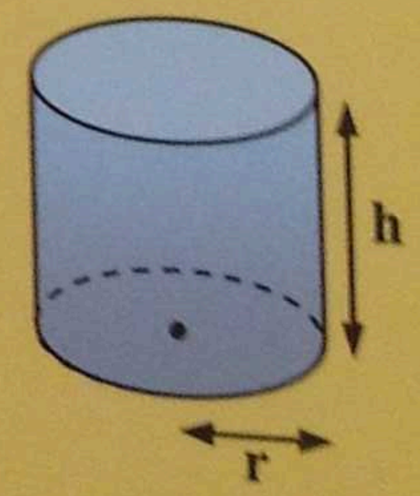


الحجم: $V = \frac{1}{3} \times B \times h$

B : مساحة القاعدة

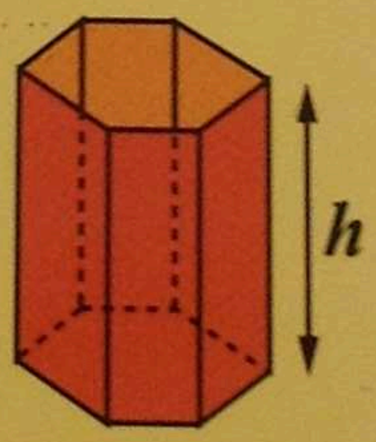
مخروط

أسطوانة



الحجم $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

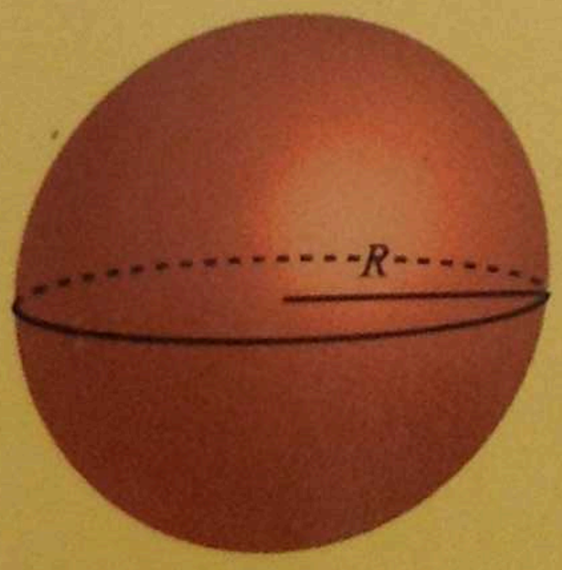
موشور قائم



الحجم $V = B \cdot h$

مساحة القاعدة

كرة



$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$

كليك للنشر

حي الكثبان، عمارة أ، مدخل 10 محل 23، المحمدية، الجزائر.
021 82 96 37 / 021 82 96 37، الناسوخ: 021 82 96 37

قلم الجزائر
WWW.DZPEN.COM